

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 42 (1967)  
  
**Artikel:** Anwendungen der Homologietheorie der Liealgebren auf Zentralreihen und auf Präsentierungen.  
**Autor:** Knus, M.-A. / Stambach, U.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32143>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Anwendungen der Homologietheorie der Liealgebren auf Zentralreihen und auf Präsentierungen

M. A. KNUS und U. STAMMBACH<sup>1)</sup>

Forschungsinstitut für Mathematik der ETH, Zürich

## Einführung

In Arbeiten von STALLINGS ([11]) und STAMMBACH ([12]) werden verschiedene Anwendungen der Homologiegruppen einer beliebigen Gruppe diskutiert. Die Methoden, die dort benützt werden, lassen sich auch auf Liealgebren übertragen. Mit dieser Übertragung befasst sich die vorliegende Arbeit. Die Resultate, die wir erhalten, sind analog zu denjenigen für Gruppen; sie betreffen einerseits Aussagen über die absteigende, bzw. aufsteigende Zentralreihe von Liealgebren, anderseits eine Formel für die zweite Homologiegruppe einer Liealgebra, die eine Präsentation benützt, sowie ein Reduktionstheorem für die Homologie der Liealgebren. Wir danken Prof. B. ECKMANN und F. SIGRIST für viele wertvolle Diskussionen.

Wir geben zuerst einen Überblick über die Hauptresultate: Es sei  $L$  eine beliebige Liealgebra über einem Körper  $K$ ,  $\bar{L}$  ein Lieideal von  $L$ . Mit  $H_n(L)$  bezeichnen wir die  $n$ -te Homologiegruppe von  $L$  mit Koeffizienten in  $K$ .

Aus der Spektralreihe von HOCHSCHILD-SERRE für die Homologie der Liealgebren (s. [5]) wird eine exakte Sequenz hergeleitet, welche die natürlichen Homomorphismen  $H_1(L) \rightarrow H_1(L/\bar{L})$  und  $H_2(L) \rightarrow H_2(L/\bar{L})$  miteinander verknüpft. Sie lautet

$$H_2(L) \rightarrow H_2(L/\bar{L}) \rightarrow \bar{L}/[L, \bar{L}] \rightarrow H_1(L) \rightarrow H_1(L/\bar{L}) \rightarrow 0. \quad (\text{B})$$

Diese Sequenz wird auf Zentralreihen sowie auf Präsentierungen von Liealgebren angewendet.

### a) ABSTEIGENDE ZENTRALREIHE

Wir bezeichnen mit  $L_n$  und  $M_n$  die  $n$ -ten Glieder der absteigenden Zentralreihe der Liealgebra  $L$  bzw.  $M$ .

*Induziert der Homomorphismus  $\varphi: L \rightarrow M$  einen Isomorphismus*

*$\varphi: L/[L, L] \cong M/[M, M]$  und einen Epimorphismus  $\varphi: H_2(L) \rightarrow H_2(M)$ , so induziert  $\varphi$  für jedes  $n \geq 0$  Isomorphismen  $\varphi: L/L_n \cong M/M_n$ .*

---

<sup>1)</sup> Während der Niederschrift dieser Arbeit stand der erstgenannte Autor im Genuss eines Battelle-Stipendiums und der zweite im Genuss eines Stipendiums des Schweiz. Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung.

Als Anwendung davon ergibt sich folgender Satz, dessen Analogon im Falle der Gruppen von STALLINGS ([11]) bewiesen worden ist:

*Es sei  $L$  eine Liealgebra mit  $H_2(L)=0$ ,  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  eine Menge von Elementen aus  $L$ , deren kanonische Bilder in  $H_1(L) \cong L/[L, L]$  linear unabhängig über  $K$  sind. Dann ist  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  ein freies Erzeugendensystem einer freien Unteralgebra von  $L$ .*

Daraus ergeben sich unmittelbar die Resultate von LEGER in [8], sowie einige Sätze über endlich dimensionale bzw. halbeinfache Liealgebren.

#### b) AUFSTEIGENDE ZENTRALREIHE

$Z_n(L)$  und  $Z_n(M)$  seien die  $n$ -ten Glieder der aufsteigenden Zentralreihe von  $L$  bzw.  $M$ .

*Der Homomorphismus  $\varphi: L \rightarrow M$  bilde für ein gewisses  $n \geq 0$   $Z_n(L)$  in  $Z_n(M)$  ab. Induziert dieser Homomorphismus einen Isomorphismus  $\varphi: L/[L, L] \cong M/[M, M]$ , einen Epimorphismus  $\varphi: H_2(L) \rightarrow H_2(M)$  und einen Isomorphismus  $\varphi: L/Z_n(L) \cong M/Z_n(M)$ , so ist  $\varphi$  selbst ein Isomorphismus.*

Ein Gegenbeispiel zeigt, dass die Voraussetzung über die 2. Homologiegruppe notwendig ist.

#### c) ERZEUGENDE UND RELATIONEN

Die Liealgebra  $L$  sei durch eine Präsentierung  $(R, F)$ , d.h. als Quotient  $L \cong F/R$  einer freien Liealgebra  $F$  gegeben. Aus der exakten Sequenz (B) erhält man eine Hopfsche Formel für die 2. Homologiegruppe:

$$H_2(L) \cong ([F, F] \cap R)/[F, R].$$

Die exakte Sequenz (B) ergibt sich als Spezialfall einer allgemeineren Sequenz (A). Nach HOCHSCHILD-SERRE ([4]) lässt sich diese allgemeinere Sequenz verwenden, um ein Reduktionstheorem für die Homologie der Liealgebren zu beweisen:

$$H_n(L, A) \cong H_{n-2}(L, A \otimes_K R/[R, R]),$$

wobei  $L \cong F/R$  und  $A$  ein beliebiger rechts  $L$ -Modul ist.

*Bemerkung:* Ist  $L$  eine  $p$ -Liealgebra ( $p$  eine Primzahl) über einem Körper der Charakteristik  $p$ , so kann man neben der gewöhnlichen Homologie auch die Homologie betrachten, die mit Hilfe der *eingeschränkten* Enveloppe definiert ist (siehe HOCHSCHILD [3]). Ein Teil der Sätze lässt sich auch auf diese Homologietheorie übertragen. Die (vor allem formalen) Änderungen haben wir am Schluss der Arbeit in Abschnitt 7 zusammengestellt. Es ergibt sich dabei eine bemerkenswerte Analogie zwischen der Homologie der  $p$ -Liealgebren und der Homologie der Gruppen mit Koeffizienten im Primkörper  $\mathbb{Z}_p$  (s. [11], [12]).

## 1. Notation

Es sei  $L$  eine Liealgebra über dem Körper  $K$ ,  $U(L)$  die universelle Envelope von  $L$ ,  $A$  ein rechts- $L$ -Modul, d.h. ein rechts-Modul über  $U(L)$ . Dann sind bekanntlich (s. [2]) Homologiegruppen definiert

$$H_n(L, A) = \text{Tor}_n^{U(L)}(A, K).$$

Für ein Lieideal  $\bar{L}$  in  $L$  bezeichnen wir mit  $[L, \bar{L}]$  das Lieideal, das von allen Klammern  $[l, \bar{l}]$  mit  $l \in L$  und  $\bar{l} \in \bar{L}$  in  $L$  erzeugt wird. Unter der durch  $\bar{L}$  bestimmten absteigenden Zentralkette von  $L$  verstehen wir die absteigende Folge von Lieidealen  ${}_i\bar{L}$ ,  $i \geq 0$ , die wie folgt definiert sind:

$${}_0\bar{L} = \bar{L}, \quad {}_i\bar{L} = [L, {}_{i-1}\bar{L}].$$

Die durch  $L$  bestimmte absteigende Zentralkette von  $L$  heisst absteigende Zentralreihe von  $L$  (s. [1]); ihre Glieder werden mit  $L_i$  bezeichnet.  ${}_\omega\bar{L}$  ist der Durchschnitt aller  ${}_i\bar{L}$  für  $i \geq 0$ ;  $L_\omega$  ist der Durchschnitt aller  $L_i$  für  $i \geq 0$ .

Unter dem Zentrum  $Z(L)$  von  $L$  verstehen wir (s. [1])

$$Z(L) = \{l \in L / [l, l'] = 0 \quad \text{für alle} \quad l' \in L\}.$$

Analog wie für Gruppen ist dann die aufsteigende Zentralreihe  $\{Z_n(L)\}$  von  $L$  definiert (s. [1]):

$$Z_0(L) = 0, \quad Z_1(L) = Z(L), \dots, Z_i(L)/Z_{i-1}(L) = Z(L/Z_{i-1}(L)).$$

Eine Liealgebra  $L$  heisst nilpotent (s. [1]), wenn eine der beiden folgenden (äquivalenten) Bedingungen erfüllt ist:

- (i) Es existiert eine Zahl  $n$  mit  $L_n = 0$ .
- (ii) Es existiert eine Zahl  $m$  mit  $Z_m(L) = L$ .

## 2. Exakte Sequenzen

$\bar{L}$  sei ein Lieideal von  $L$ . Dann ist  $H_n(L, A)$  ein rechts- $L/\bar{L}$ -Modul. Nach HOCHSCHILD-SERRE existiert dann eine Spektralreihe

$$H_p(L/\bar{L}, H_q(\bar{L}, A)) \rightrightarrows H_n(L, A),$$

die gegen die Homologie von  $L$  konvergiert.

Nach [4, 5] lässt sich daraus die folgende exakte Sequenz herleiten:

SATZ 1: Ist  $H_q(\bar{L}, A) = 0$  für  $1 < q < m$  ( $m > 1$ ), dann ist folgende Sequenz  $(A)$  exakt:

$$H_m(L, A) \rightarrow H_m(L/\bar{L}, A_L) \rightarrow H_{m-2}(L/\bar{L}, H_1(\bar{L}, A)) \rightarrow H_{m-1}(L, A) \rightarrow \dots \\ \dots H_1(L/\bar{L}, A_L) \rightarrow 0. \quad (A)$$



Dabei verstehen wir unter  $A_{\bar{L}} (\cong H_0(\bar{L}, A))$  den Modul  $A$  modulo dem Untermodul, der von allen Elementen der Form  $a\bar{l}$  mit  $a \in A$  und  $\bar{l} \in \bar{L}$  erzeugt wird.

Wir nehmen speziell  $A = K$  mit der trivialen  $L$ -Modulstruktur und schreiben für  $H_n(L, K)$  kurz  $H_n(L)$ .

**SATZ 2:** Ist  $\bar{L}$  ein Lieideal von  $L$ , so ist die folgende Sequenz (B) exakt:

$$H_2(L) \rightarrow H_2(L/\bar{L}) \rightarrow \bar{L}/[L, \bar{L}] \rightarrow H_1(L) \rightarrow H_1(L/\bar{L}) \rightarrow 0 \quad (\text{B})$$

und diese Sequenz ist natürlich bezüglich  $\bar{L}$  und  $L$ .

*Beweis:* Für  $m=1$  wird die Voraussetzung des obigen Satzes leer und man erhält wegen  $K_{\bar{L}} = K$

$$H_2(L) \rightarrow H_2(L/\bar{L}) \rightarrow H_0(L/\bar{L}, H_1(\bar{L})) \rightarrow H_1(L) \rightarrow H_1(L/\bar{L}) \rightarrow 0.$$

Nach [2] ist  $H_1(L) \cong L/[L, L]$ . Die Operation von  $L/\bar{L}$  auf  $H_1(\bar{L}) \cong \bar{L}/[\bar{L}, \bar{L}]$  ist induziert durch  $l: l + [\bar{L}, \bar{L}] \rightarrow [l, l] + [\bar{L}, \bar{L}]$ .

Daraus ergibt sich

$$H_0(L/\bar{L}, H_1(\bar{L})) = (H_1(\bar{L}))_L \cong \bar{L}/[L, \bar{L}].$$

Der Beweis für die Natürlichkeit der Sequenz verläuft wie im Fall der Gruppen (s. [12]). Wie lassen ihn deshalb weg.

*Bemerkung:* Die Homomorphismen  $\bar{L}/[L, \bar{L}] \rightarrow H_1(L) \cong L/[L, L]$  und  $H_1(L) \cong L/[L, L] \rightarrow H_1(L/\bar{L}) \cong L/\bar{L}/[L/\bar{L}, L/\bar{L}]$  lassen sich nach [5] mit den üblicherweise in den „abelsch gemachten“ Liealgebren durch die Einbettung  $\bar{L} \rightarrow L$  bzw. die Projektion  $L \rightarrow L/\bar{L}$  induzierten Abbildungen identifizieren.

### 3. Anwendungen auf die absteigende Zentralreihe

**SATZ 1:** Der Liealgebrahomomorphismus  $\varphi: L \rightarrow M$  bilde das Ideal  $\bar{L} \subset L$  in das Ideal  $\bar{M} \subset M$  ab und erfülle folgende Voraussetzungen

- 1)  $\varphi: H_1(L) \cong H_1(M)$ ,
- 2)  $\varphi: H_2(L) \rightarrow H_2(M)$  sei epimorph,
- 3)  $\varphi: L/\bar{L} \cong M/\bar{M}$ .

Dann induziert  $\varphi$  für jedes  $n \geq 0$  Isomorphismen

$$\varphi: L/_n \bar{L} \cong M/_n \bar{M}.$$

Ferner ist  $\varphi: L/_\omega \bar{L} \rightarrow M/_\omega \bar{M}$  monomorph.

(Ist  $\varphi: L \rightarrow M$  selbst epimorph, so ist auch  $\varphi: L/_\omega \bar{L} \cong M/_\omega \bar{M}$ .)

Der Beweis des ersten Teils der Behauptung wird durch Induktion nach  $n$  geführt:

Für  $n=0$  ist dieser Teil der Behauptung identisch mit der Voraussetzung 3).

Sei  $n \geq 1$ . Die Induktionsvoraussetzung lautet

$$\varphi: L/_{n-1}\bar{L} \cong M/_{n-1}\bar{M}. \quad (4)$$

Durch  $\varphi$  wird die exakte Sequenz (B) für  $(_{n-1}\bar{L}, L)$  in diejenige für  $(_{n-1}\bar{M}, M)$  abgebildet. Mit Hilfe des Fünferlemmas folgt dann aus 1), 2) und 4)

$$\varphi: _{n-1}\bar{L}/_n\bar{L} \cong _{n-1}\bar{M}/_n\bar{M}. \quad (5)$$

Weiter wird die exakte Sequenz (von Liealgebren)

$$0 \rightarrow _{n-1}\bar{L}/_n\bar{L} \rightarrow L/_n\bar{L} \rightarrow L/_{n-1}\bar{L} \rightarrow 0$$

in die entsprechende Sequenz für die Liealgebra  $M$  abgebildet. Aus 4) und 5) folgt dann mit Hilfe des Fünferlemmas

$$\varphi: L/_n\bar{L} \cong M/_n\bar{M}.$$

Der Beweis für den zweiten Teil der Behauptung ist trivial.

Für  $L = \bar{L}$  und  $M = \bar{M}$  erhält man:

**KOROLLAR 1:** *Der Liealgebrahomomorphismus  $\varphi: L \rightarrow M$  erfülle folgende Voraussetzungen:*

- 1)  $\varphi: H_1(L) \cong H_1(M)$ ,
- 2)  $\varphi: H_2(L) \rightarrow H_2(M)$  sei epimorph.

*Dann induziert  $\varphi$  für jedes  $n \geq 0$  Isomorphismen*

$$\varphi: L/L_n \cong M/M_n.$$

*Ferner ist  $\varphi: L/L_\omega \rightarrow M/M_\omega$  monomorph.*

*(Ist  $\varphi: L \rightarrow M$  selbst epimorph, so ist auch  $\varphi: L/L_\omega \cong M/M_\omega$ .)*

**KOROLLAR 2:** *Es seien  $L$  und  $M$  nilpotente Liealgebren. Induziert der Liealgebrahomomorphismus  $\varphi: L \rightarrow M$  in den ersten Homologiegruppen einen Isomorphismus und in den zweiten Homologiegruppen einen Epimorphismus, so ist  $\varphi$  selbst ein Isomorphismus  $\varphi: L \cong M$ .*

Als Anwendung erhält man folgenden

**SATZ 2:** *Es sei  $L$  eine Liealgebra mit  $H_2(L) = 0$ ,  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  eine Menge von Elementen aus  $L$ , deren kanonische Bilder in  $H_1(L) \cong L/[L, L]$  linear unabhängig über  $K$  sind. Dann ist  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  ein freies Erzeugendensystem einer freien Unter algebra von  $L$ .*

*Beweis (siehe [11]):* Da  $L \rightarrow H_1(L)$  epimorph ist, kann man die Menge  $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$  vergrößern, bis ihr Bild in  $H_1(L)$  eine Vektorraumbasis von  $H_1(L)$  ist.

Wir beweisen, dass diese grössere Menge  $(x_\alpha)_{\alpha \in J'}$ , ein freies Erzeugendensystem einer freien Unter algebra von  $L$  ist.

Sei  $F$  die freie Liealgebra erzeugt durch  $(y_\alpha)_{\alpha \in J'}$  und sei  $h: F \rightarrow L$  die Abbildung, die durch  $h(y_\alpha) = x_\alpha$  definiert wird.  $h$  induziert offensichtlich einen Isomorphismus

$H_1(F) \cong H_1(L)$  und wegen  $H_2(L)=0$  einen Epimorphismus  $H_2(F) \rightarrow H_2(L)$ . Nach Korollar 1, ist  $h: F/F_\omega \rightarrow L/L_\omega$  monomorph. Für eine freie Liealgebra ist aber  $F_\omega=0$  (s. [9]). Damit ist  $F \rightarrow L \rightarrow L/L_\omega$  monomorph, also auch  $h: F \rightarrow L$ .

**KOROLLAR 1:** (LEGER [8]). *Es sei eine  $L$  Liealgebra mit den Eigenschaften:*

1)  $H_2(L)=0$

2)  $L$  besitzt einen Unterraum  $T$  mit  $T \cap [L, L] = 0$  und  $T$  erzeugt  $L$ .

*Dann ist  $L$  frei.*

Ähnlich lässt sich auch das andere Resultat von LEGER in [8] beweisen.

**KOROLLAR 2:** *Ist  $L$  eine endlich dimensionale Liealgebra mit  $H_2(L)=0$ , so ist entweder  $H_1(L)=0$ , oder es gilt  $H_1(L) \cong K$  und  $[L, L] = [[L, L], L]$ .*

*Beweis:* Wäre  $\dim H_1(L) > 1$ , so würde  $L$  eine freie, von mindestens zwei Elementen erzeugte Unteralegebra enthalten. Dann wäre  $L$  also unendlich dimensional. Folglich ist entweder  $L/[L, L]=0$  oder  $L/[L, L] \cong K$ . Falls  $L/[L, L] \cong K$  betrachtet man die exakte Sequenz (B) für  $([L, L], L)$

$$H_2(L) \rightarrow H_2(L/[L, L]) \rightarrow [L, L]/[[L, L], L] \rightarrow H_1(L) \rightarrow H_1(L/[L, L]) \rightarrow 0$$

Da  $H_2(L/[L, L])=0$  und  $H_1(L) \cong H_1(L/[L, L])$ , ist  $[L, L] = [[L, L], L]$ .

**KOROLLAR 3:** *Ist  $L$  eine endlich dimensionale nilpotente Liealgebra mit  $H_2(L)=0$ , so ist  $\dim L \leq 1$ .*

*Beweis:* Wir nehmen an  $L \neq 0$ . Nach Korollar 2 ist  $[L, L] = [[L, L], L]$ . Da  $L$  nilpotent ist, muss  $[L, L]=0$  und somit  $L \cong K$  sein.

Für den Rest dieses Abschnittes setzen wir speziell voraus, dass  $K$  ein Körper der Charakteristik 0 ist und dass alle Liealgebren endlich dimensional sind.

Unter dem *Radikal*  $R$  einer Liealgebra  $L$  versteht man das grösste auflösbare Ideal von  $L$ . Eine Liealgebra mit  $R=0$  heisst *halbeinfach* (s. [1]). Für eine halbeinfache Liealgebra  $L$  ist bekanntlich  $H_1(L)=H_2(L)=0$  (s. [7], S. 96).

**SATZ 3:** *Sei  $L$  eine Liealgebra mit  $H_1(L)=0$  und  $H_2(R)=0$ . Dann ist  $L$  halbeinfach.*

*Beweis:* Da  $L=[L, L]$ , ist  $R$  nilpotent (s. [1]), S. 64, 65). Nach Korollar 3 ist dann  $\dim R \leq 1$ . Aus  $L=[L, L]$  und  $\dim R \leq 1$  folgt leicht, dass  $[L, R]=0$ . In der exakten Sequenz (B) für  $(R, L)$ :

$$H_2(L) \rightarrow H_2(L/R) \rightarrow R/[L, R] \rightarrow H_1(L) \rightarrow H_1(L/R) \rightarrow 0$$

ist  $H_2(L/R)=0$ , da  $L/R$  halbeinfach ist. Also ist  $R=[L, R]=0$ .

*Bemerkung 1:* Aus der Exaktheit der Sequenz (B) für  $(R, L)$  an der Stelle  $R/[L, R]$  folgt, wegen  $H_2(L/R)=0$ , dass  $[L, L] \cap R = [L, R]$  ([1], S. 81).  $[L, L] \cap R$  ist das nilpotente Radikal von  $L$ .

*Bemerkung 2:* Falls  $H_2(R)=0$ , ist die folgende Sequenz (A) für  $(R, L)$  exakt:

$$H_3(L) \rightarrow H_3(L/R) \rightarrow H_1(L/R, H_1(R)) \rightarrow H_2(L) \rightarrow H_2(L/R) \rightarrow \dots$$

Da  $L/R$  halbeinfach ist, gilt  $H_1(L/R, H_1(R))=0$ ,  $H_2(L/R)=0$ . Aus  $H_2(R)=0$  folgt also direkt  $H_2(L)=0$ .

#### 4. Anwendungen auf die aufsteigende Zentralreihe

Im folgenden betrachten wir wieder Liealgebren  $L$  über einem beliebigen Körper. Eine Zentralkette heisst *endlich*, wenn sie nach endlich vielen Schritten mit 0 endigt.

LEMMA: Die durch  $\bar{L}$  bestimmte absteigende Zentralkette von  $L$  ist genau dann endlich, wenn eine Zahl  $n$  existiert mit  $\bar{L} \subseteq Z_n(L)$ .

Beweis: Es genügt offenbar zu zeigen, dass  $\bar{L} \subset Z_n(L)$  äquivalent ist mit  $[L, \bar{L}] \subset Z_{n-1}(L)$ . Diese Aussagen sind aber beide äquivalent zu der folgenden: Für alle  $l \in L$  und  $\bar{l} \in \bar{L}$  ist  $[l, \bar{l}] \equiv 0 \pmod{Z_{n-1}(L)}$ .

SATZ: Das Ideal  $\bar{L}$  von  $L$  sei für ein gewisses  $n$  in  $Z_n(L)$ , das Ideal  $\bar{M}$  von  $M$  für ein gewisses  $m$  in  $Z_m(M)$  enthalten. Der Liealgebrehomomorphismus  $\varphi: L \rightarrow M$  bilde das Ideal  $\bar{L}$  in das Ideal  $\bar{M}$  ab und erfülle folgende Voraussetzungen:

- 1)  $\varphi: H_1(L) \cong H_1(M)$ ,
- 2)  $\varphi: H_2(L) \rightarrow H_2(M)$  sei epimorph,
- 3)  $\varphi: L/\bar{L} \cong M/\bar{M}$ .

Dann ist bereits  $\varphi: L \cong M$ .

Der Beweis ergibt sich direkt aus dem Satz in Abschnitt 3, wenn man beachtet, dass eine Zahl  $q$  existiert, sodass sowohl  ${}_q\bar{L}=0$  als auch  ${}_q\bar{M}=0$  ist.

Speziell erhalten wir folgendes

KOROLLAR: Der Homomorphismus  $\varphi: L \rightarrow M$  mit  $\varphi(Z(L)) \subset Z(M)$  erfülle folgende Voraussetzungen:

- 1)  $\varphi: L/[L, L] \cong M/[M, M]$ ,
- 2)  $\varphi: H_2(L) \rightarrow H_2(M)$  sei epimorph,
- 3)  $\varphi: L/Z(L) \cong M/Z(M)$ .

Dann ist bereits  $\varphi: L \cong M$ .

Für reduktible Liealgebren (s. [1]) ist die Voraussetzung 2) über die 2. Homologiegruppe überflüssig. Es stellt sich die Frage, ob diese 2. Voraussetzung im allgemeinen Fall notwendig ist. Diese Frage ist zu bejahen: Wir geben ein Beispiel, in dem die Voraussetzungen 1) und 3) erfüllt sind,  $\varphi$  aber kein Isomorphismus ist.

Wir nehmen für  $L$  die Liealgebra  $SM_n(K)$  der  $n \times n$  Matrizen mit Spur 0 über einem Körper  $K$  der Charakteristik  $p$ , wo  $n \equiv 0 \pmod{p}$  und nicht gleichzeitig  $n=2$  und  $p=2$ . Für  $M$  nehmen wir  $L/Z(L) = PSM_n(K)$ . Das Zentrum von  $L$  besteht aus allen Vielfachen der Einheitsmatrix.  $\varphi$  sei die kanonische Projektion. Es ist nun (s. [14])  $[L, L] = L$  und somit die erste Voraussetzung erfüllt. Weiter ist  $PSM_n(K)$  einfach (s. [14]), hat also insbesondere kein nichttriviales Zentrum. Somit ist auch die dritte Voraussetzung erfüllt.  $\varphi$  besitzt aber einen nicht trivialen Kern.

### 5. Hopfsche Formel für $H_2(L)$

Die Liealgebra  $L$  sei durch eine Präsentation  $(R, F)$ , d.h. als Quotient  $F/R$  einer freien Liealgebra  $F$  gegeben. Da  $H_2(F)=0$  ist, lautet unsere exakte Sequenz (B) für  $(R, F)$ :

$$0 \rightarrow H_2(L) \rightarrow R/[F, R] \xrightarrow{e_F} F/[F, F] \rightarrow H_1(L) \rightarrow 0.$$

Man erhält daraus  $H_2(L)$  als Kern von  $e_F$ :

$$H_2(L) \cong ([F, F] \cap R)/[F, R].$$

Diese Formel für die 2. Homologiegruppe einer Liealgebra ist analog zur Formel für die 2. Homologiegruppe einer Gruppe, die H. HOPF in [6] angegeben hat.

### 6. Reduktionstheorem

**SATZ:** Es seien  $F/R$  eine Präsentation der Liealgebra  $L$  und  $A$  ein rechts- $L$ -Modul. Dann ist für  $n \geq 3$

$$H_n(L, A) \cong H_{n-2}(L, A \otimes_K R/[R, R]).$$

Dabei ist  $A \otimes_K R/[R, R]$  als  $L$ -Modul aufzufassen (siehe unten).

**Beweis:** Nach SIRSOV-WITT ([10], [13]) ist  $R$  eine freie Liealgebra; also ist für  $n \geq 2$   $H_n(R, A) = 0$ . Die exakte Sequenz (A) für  $(R, F, A)$  existiert also für alle  $m > 1$ . Mit  $H_n(F, A) = 0$  für  $n \geq 2$  folgt daraus

$$H_m(L, A) \cong H_{m-2}(L, H_1(R, A)).$$

Da die Liealgebra  $R$  auf  $A$  trivial operiert, ist  $H_1(R, A) \cong A \otimes_K R/[R, R]$ . Darauf operiert  $L$  wie folgt:

$$(a \otimes (r + [R, R]))l = al \otimes (r + [R, R]) - a \otimes ([y, r] + [R, R]);$$

$y \in F$  ist dabei ein Repräsentant von  $l \in L$ .

Im Falle der Gruppen wurde das cup-Produkt-Reduktionstheorem von HOCHSCHILD-SERRE in [4] in analoger Weise bewiesen.

### 7. $p$ -Liealgebren

In diesem Abschnitt bezeichnet  $L$  eine  $p$ -Liealgebra ( $p$  eine Primzahl) über einem Körper der Charakteristik  $p$  mit der  $p$ -Abbildung  $l \rightarrow l^{[p]}$ ,  $l \in L$ .  $U'(L)$  ist ihre eingeschränkte Envelope. Ferner ist  $A$  ein  $p$ -Modul über  $L$ . (Für die Definitionen verweisen wir auf [1]).

Im weitem führen wir noch folgende Notation ein: Ist  $\bar{L}$  ein  $p$ -Lieideal in  $L$ , so

verstehen wir unter  $L \# \bar{L}$  die  $p$ -Lieunteralgebra von  $L$ , die von allen Elementen der Form  $[l, l'] + l''^{[p]}$  mit  $l \in L$  und  $l', l'' \in \bar{L}$  erzeugt wird. Es lässt sich dann eine absteigende  $p$ -Zentralreihe  $\{L_i^{(p)}\}$  definieren:

$$L_0^{(p)} = L, \quad L_i^{(p)} = L \# L_{i-1}^{(p)}.$$

Man verifiziert leicht, dass diese Reihe die am schnellsten absteigende Zentralreihe ist, deren sukzessive Quotienten triviale  $p$ -Abbildungen besitzen. Ferner zeigt man, dass die  $L_i^{(p)}$   $p$ -Lieideale von  $L$  sind und dass ein  $p$ -Liealgebrahomomorphismus  $\varphi: L \rightarrow M$  für jedes  $i \geq 0$   $L_i^{(p)}$  in  $M_i^{(p)}$  abbildet.

HOCHSCHILD definierte in [3] eine Homologie von  $p$ -Liealgebren durch

$$H_n'(L, A) = \text{Tor}_n^{U'(L)}(A, K).$$

Nach [2] ergibt sich daraus  $H_0'(L, A) \cong A_L$  und  $H_1'(L) = H_1(L, K) \cong I'/(I')^2 \cong L/L \# L$ , wobei  $I'$  das Augmentierungsideal der eingeschränkten Enveloppe  $U'(L)$  ist. Man zeigt weiter, dass für ein  $p$ -Liealgebraideal  $\bar{L}$  von  $L$   $U'(\bar{L})$  eine *normale* Unteralgebra (s. [2, S. 349]) von  $U'(L)$  ist. Dann existiert nach [2, S. 349] eine Spektralreihe, analog zu derjenigen von HOCHSCHILD-SERRE für die gewöhnliche Homologie der Liealgebren:

$$H_p'(L/\bar{L}, H_q'(\bar{L}, A)) \Rightarrow_p H_n'(L, A).$$

Daraus lässt sich wie in Abschnitt 2 eine exakte Sequenz herleiten:

$$H_2'(L) \rightarrow H_2'(L/\bar{L}) \rightarrow \bar{L}/L \# \bar{L} \rightarrow H_1'(L) \rightarrow H_1'(L/\bar{L}) \rightarrow 0. \quad (\text{B}')$$

Mit Hilfe dieser exakten Sequenz ergeben sich dann zu Satz 1 und Korollar 1 aus Abschnitt 3 analoge Sätze. Wir erwähnen speziell:

**SATZ:** Es sei  $\varphi: L \rightarrow M$  ein  $p$ -Liealgebrahomomorphismus mit den Eigenschaften:

- 1)  $\varphi: H_1'(L) \cong H_1'(M)$ ,
- 2)  $\varphi: H_2'(L) \rightarrow H_2'(M)$  *epimorph*.

Dann induziert  $\varphi$  für jedes  $n \geq 0$  Isomorphismen:

$$\varphi: L/L_n^{(p)} \cong M/M_n^{(p)}.$$

Auch Satz und Korollar aus Abschnitt 4 über die aufsteigende Zentralreihe lassen sich übertragen. An Stelle des Zentrums einer Liealgebra tritt dabei

$$Z^{(p)}(L) = \{l \in L \mid [l, l'] = 0 \quad \text{für alle} \quad l' \in L, l'^{[p]} = 0\},$$

während die aufsteigende  $p$ -Zentralreihe  $Z_i^{(p)}$  wie die gewöhnliche aufsteigende Zentralreihe definiert ist, wenn man in deren rekursiven Definition (siehe Abschnitt 1) immer  $Z^{(p)}$  an Stelle des Zentrums setzt.

Jede  $p$ -Liealgebra  $L$  lässt sich als Quotient einer freien  $p$ -Liealgebra  $F'$  darstellen:

$F'/R' \cong L$ .<sup>2)</sup> Dabei gilt wiederum  $H_2'(F')=0$ . Analog wie in Abschnitt 6 ergibt sich dann aus der Sequenz  $(B')$  für  $(R', F')$  eine Hopfsche Formel für die 2. Homologiegruppe:

$$H_2'(L) \cong ((F' \# F') \cap R')/F' \# R'.$$

Da ferner nach [13]  $R'$  eine freie  $p$ -Liealgebra ist, folgt auch das Analogon des Reduktionstheorems in Abschnitt 6.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] N. BOURBAKI, *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. I, Hermann, Paris 1960.
- [2] H. CARTAN und S. EILENBERG, *Homological algebra*, (Princeton University Press, 1956).
- [3] G. HOCHSCHILD, *Cohomology of restricted Liealgebras*, Amer. J. of Math. 76 (1954), 555–580.
- [4] G. HOCHSCHILD und J. P. SERRE, *Cohomology of group extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. 74 (1953), 110–134.
- [5] G. HOCHSCHILD und J. P. SERRE, *Cohomology of Lie algebras*, Ann. of Math. 57 (1953), 591–603.
- [6] H. HOPF, *Fundamentalgruppe und zweite Bettische Gruppe*, Comment. Math. Helv. 19 (1941–42), 257–309 = *Selecta Heinz Hopf* (Springer Verlag, 1964) S. 186–206.
- [7] J. L. KOSZUL, *Homologie et cohomologie des algèbres de Lie*, Bull. de la Soc. Math. France 78 (1950), 65–127.
- [8] G. LEGER, *A note on free Lie algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 517–518.
- [9] J. P. SERRE, *Lie algebras and Lie groups*, Lectures at Harvard (Benjamin, 1965).
- [10] A. SIRSOV, *Unteralgebren von freien Liealgebren* (russisch), Mat. Sbornik N.S. 33 (75), (1953), 441–452.
- [11] J. STALLINGS, *Homology and central series of groups*, J. of Algebra 2 (1965), 170–181.
- [12] U. STAMMBACH: *Anwendungen der Homologietheorie der Gruppen auf Zentralreihen und auf Präsentierungen*, Math. Z. 94 (1966), 157–177.
- [13] E. WITT: *Die Unterringe der freien Lieschen Ringe*, Math. Z. 64 (1956), 195–216.
- [14] H. ZASSENHAUS: *Über Liesche Ringe mit Primzahlcharakteristik*, Abh. Math. Sem. Hamburg 13 (1940), 1–100.

Eingegangen den 20. Dez. 1966

---

<sup>2)</sup> Eine freie  $p$ -Liealgebra lässt sich bekanntlich wie folgt erhalten: Ist  $T(V)$  die Tensoralgebra über dem Vektorraum  $V$  und  $L'T(V)$  die assoziierte  $p$ -Liealgebra ( $[x, y] = xy - yx$ ,  $x^{[p]} = x^p$ ), so ist die  $p$ -Lieunteralgebra, die von  $V$  in  $L'T(V)$  erzeugt wird, die *freie  $p$ -Liealgebra* über  $V$ .