

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 42 (1967)

Artikel: Zur Differentialrechnung in limitierten Vektorräumen.
Autor: Binz, E. / Meier-Solfrian, W.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32142>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Differentialrechnung in limitierten Vektorräumen

Von E. BINZ und W. MEIER-SOLFRIAN in Zürich.

Einleitung

In [1] weist H. H. KELLER auf die Schwierigkeiten hin, die bei der Begründung einer Differentialrechnung in topologischen Vektorräumen auftreten (Definition der höheren Ableitungen). Zur Überwindung dieser Schwierigkeiten schlug er vor, eine Differentialrechnung in der umfassenderen Kategorie der limitierten Vektorräume [2] aufzubauen, was in den vorliegenden Notizen versucht wird. Man vergleiche auch [7].

Die grundlegenden Begriffe unserer Betrachtungen sind erstens die Ableitung einer Abbildung zwischen limitierten Vektorräumen über dem Körper \mathbf{R} der reellen Zahlen [3], und zweitens die Limitierung Λ_c der stetigen Konvergenz von Funktionenräumen [3], [4], [7].

Im Falle von Abbildungen zwischen topologischen Vektorräumen stimmt der verwendete Differenzierbarkeitsbegriff mit demjenigen von S. LANG [5] überein, welcher seinerseits eine Verallgemeinerung des von J. DIEUDONNÉ [6] verwendeten Ableitungsbegriffes für Abbildungen zwischen Banachräumen darstellt.

Wir betonen, dass nach H. H. KELLER [1] für zwei Banachräume E und F im allgemeinen Λ_c auf dem Vektorraum $\mathcal{L}^p(E; F)$ der p -fach linearen Abbildungen von $E^p = E \times \dots \times E$ nach F gröber ist als die übliche Normtopologie.

Im ersten Paragraphen stellen wir die im folgenden verwendeten Begriffe und Aussagen zusammen.

§ 1. Definitionen und Hilfssätze

Seien X und Y zwei Limesräume. Auf der Menge $\mathcal{C}(X; Y)$ der stetigen Abbildungen von X nach Y führen wir die Limitierung Λ_c der stetigen Konvergenz ein [4]. Sie ist unter allen Limitierungen Λ auf $\mathcal{C}(X; Y)$, für welche die Evaluationsabbildung

$$\omega: \mathcal{C}(X; Y)_\Lambda \times X \rightarrow Y$$

stetig ist, die gröbste; dabei bedeutet $\mathcal{C}(X; Y)_\Lambda \times X$ die mit der Produktlimitierung versehene Menge $\mathcal{C}(X; Y) \times X$. Daher ist Λ_c durch folgende universelle Eigenschaft charakterisiert: Eine Abbildung f vom Limesraum S nach $\mathcal{C}(X; Y)_{\Lambda_c}$ ist genau dann stetig, wenn

$$\omega \circ (f \times id_X): S \times X \rightarrow Y$$

stetig ist.

Der folgende in [4] bewiesene Satz wird für die Theorie der höheren Ableitungen von Abbildungen zwischen limitierten Vektorräumen wesentlich verwendet.

SATZ 1. *Die nachstehenden Abbildungsräume seien mit der Limitierung Λ_c der stetigen Konvergenz versehen. Dann sind die kanonischen Abbildungen*

$$\omega: \mathcal{L}^p(E; F) \times E^p \rightarrow F \quad \text{und} \quad k: \mathcal{L}^p(E; F) \times \mathcal{L}(F; G) \rightarrow \mathcal{L}^p(E; G)$$

stetig. Ausserdem ist

$$\alpha: \mathcal{L}^p(E; F) \rightarrow \mathcal{L}(E; \mathcal{L}^{p-1}(E; F)),$$

definiert durch $u \mapsto \alpha(u)$ mit $(\alpha(u)(x))(x_2, \dots, x_p) = u(x, x_2, \dots, x_p)$ für alle p -Tupel x, x_2, \dots, x_p aus $E \times E \times \dots \times E$ ein linearer Homöomorphismus.

Vermöge der zuletzt genannten Homöomorphie werden wir diese Räume künftig identifizieren.

Sei \mathfrak{B} die Kategorie der limitierten separierten Vektorräume E, F, G, \dots , (siehe [2]); die Menge $\mathcal{C}(E; F)$ der Morphismen bestehe aus den stetigen Abbildungen von E nach F . Für die Objekte $E, F, E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{B}$ sind die Vektorräume $\mathcal{C}(E; F)$, $\mathcal{L}(E; F)$, $\mathcal{L}^p(E; F)$, $\mathcal{C}(E_1 \times \dots \times E_n; F)$ und der Vektorraum $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_n; F)$ der stetigen n -linearen Abbildungen von $E_1 \times \dots \times E_n$ nach F , versehen mit Λ_c , selbst Objekte von \mathfrak{B} , [4].

Falls im folgenden diese Funktionenräume als Limesräume aufgefasst werden, seien sie, wenn nichts anderes vermerkt, stets mit Λ_c versehen.

Nach H. R. FISCHER [2] bestimmen die bezüglich einer zulässigen Limitierung Λ auf dem Vektorraum E stetigen Seminormen von E nach \mathbf{R} eine lokalkonvexe Topologie $\psi^0 \Lambda$ auf E . Diese ist die feinste der lokalkonvexen Topologien, welche gröber sind als Λ . Den Vektorraum E versehen mit $\psi^0 \Lambda$ bezeichnen wir mit E_0 und nennen ihn den zu E assoziierten lokalkonvexen Vektorraum. Alle Objekte aus \mathfrak{B} , deren assoziierte lokalkonvexe Vektorräume separiert sind, bilden die Objekte einer neuen Kategorie \mathfrak{B}_0 mit den stetigen Abbildungen als Morphismen.

LEMMA 1. *Für $E \in \mathfrak{B}_0$ gilt $\bigcap_{l \in \mathcal{L}(E; \mathbf{R})} \text{Kern } l = \{0\}$ (vergl. [3, Satz 2.2.15])*

LEMMA 2. *Seien $E \in \mathfrak{B}$ und $F \in \mathfrak{B}_0$; der Vektorraum $H \subset \mathcal{C}(E; F)$ sei mit der von Λ_c induzierten Limitierung versehen. Dann ist $H \in \mathfrak{B}_0$.*

Der Beweis verläuft analog demjenigen von Satz 2.2.19 in [3].

Somit sind für $F \in \mathfrak{B}_0$ alle oben genannten Funktionenräume ebenfalls Objekte von \mathfrak{B}_0 .

DEFINITION. *Eine Menge $U \subset E$ heisst offen, wenn U für jedes $x \in U$ zu allen gegen x konvergierenden Filtern auf E gehört.*

Aus obigem folgt, dass jede in E_0 offene Menge auch in E offen ist.

Wir bezeichnen die Filter auf einer nichtleeren Menge mit Φ, Ψ, \dots . Die untere

Grenze zweier Filter Φ und Ψ bezeichnen wir mit $\Phi \wedge \Psi$; für den Nullumgebungsfilter in \mathbf{R} schreiben wir $\Phi_{\mathbf{R}}^0$.

Für eine Zahl $\delta > 0$ sei $[-\delta, \delta] = \{\lambda \in \mathbf{R} \mid -\delta \leq \lambda \leq \delta\}$. Die im folgenden auftretenden σ seien Abbildungen von $[-\delta, \delta]$ nach \mathbf{R} mit $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma(\lambda)/\lambda = 0$ und $\sigma(0) = 0$.

DEFINITION. Sei $U \subset E$ eine den Nullpunkt enthaltende offene Menge. Eine an der Stelle $0 \in E$ stetige Abbildung $r: U \rightarrow F$ heisst ein Restglied, falls es zu jedem in E gegen 0 konvergenten Filter Φ einen in F gegen 0 konvergenten Filter Ψ gibt, welcher der folgenden Bedingung (B) genügt:

(B) Zu jedem $N \in \Psi$ existieren ein $M \in \Phi$ und ein σ derart, dass $r(\lambda \cdot M) \subset \sigma(\lambda) \cdot N$ für alle $\lambda \in [-\delta, \delta]$.

LEMMA 3. Seien $U \subset E$ eine den Nullpunkt enthaltende offene Menge und $r: U \rightarrow F$ ein Restglied. Für eine stetige lineare Abbildung $l: F \rightarrow G$ ist $l \circ r: U \rightarrow G$ ein Restglied.

Beweis siehe [3], Lemma 3.4.12.

LEMMA 4. Eine Abbildung $r = (r_1, \dots, r_n)$ von einer offenen, den Nullpunkt enthaltenden Menge $U \subset E$ in das Produkt $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n = F$ von limitierten Vektorräumen F_i ist genau dann ein Restglied, wenn alle $r_i: U \rightarrow F_i$ Restglieder sind.

Beweis: Seien die $r_i (i=1, \dots, n)$ Restglieder; dann ist $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ stetig in $0 \in U$. Zu jedem gegen $0 \in E$ konvergenten Filter Φ auf U existiert ein gegen $0 \in F_i$ konvergenter Filter Ψ_i derart, dass die Bedingung (B) gilt; nach [3], Bemerkung 3.1.5, können wir jedes Ψ_i in der Form $\Psi_i = \Psi_i \wedge \Phi_{\mathbf{R}}^0 \cdot \Psi_i$ annehmen.

Nun betrachten wir den Filter $\Psi = \Psi_1 \times \Psi_2 \times \dots \times \Psi_n$ auf F . Eine Menge $M \in \Psi$ umfasst ein Element aus Ψ von der Form $(N_1 \cup [-\varepsilon_1, \varepsilon_1] \cdot N_1) \times \dots \times (N_n \cup [-\varepsilon_n, \varepsilon_n] \cdot N_n)$, wobei der i -te Faktor je in Ψ_i liegt. Setze $\varepsilon = \min_{i=1, \dots, n} (\varepsilon_i, 1)$. Nach Definition des Restgliedes finden wir zu jedem Element $N_i \cup [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot N_i$ ein M_i aus Φ und eine Abbildung $\sigma_i: [-\delta_i, \delta_i] \rightarrow \mathbf{R}$, so dass $r(\lambda \cdot M_i) \subset \sigma_i(\lambda) \cdot (N_i \cup [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot N_i)$ für alle $\lambda \in [-\delta, \delta]$, wobei $[-\delta, \delta]$ der Durchschnitt aller Definitionsbereiche der σ_i ist. Setze $M = \bigcap_{i=1}^n M_i$. Dann gilt

$$r(\lambda \cdot M) \subset \sigma_i(\lambda) (N_i \cup [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot N_i) \subset \sigma_i(\lambda) \cdot (N_i \cup [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] \cdot N_i)$$

für alle $\lambda \in [-\delta, \delta]$. Wir definieren die Funktion $\sigma(\lambda) = (1/\varepsilon) \cdot \max \sigma_i(\lambda)$ für $i=1, \dots, n$ und $\lambda \in [-\delta, \delta]$. Daraus folgt

$$\sigma_i(\lambda) (N_i \cup [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot N_i) \subset \sigma(\lambda) (N_i \cup [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot N_i) \subset \sigma(\lambda) \cdot (N_i \cup [-\varepsilon_i, \varepsilon_i] \cdot N_i)$$

für alle $i=1, \dots, n$. Daher gilt

$$\begin{aligned} r(\lambda \cdot M) &:= (r_1, \dots, r_n) (\lambda \cdot M) \subset r_1(\lambda \cdot M) \times \dots \times r_n(\lambda \cdot M) \subset \\ &\subset \sigma(\lambda) \cdot [(N_1 \cup [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot N_1) \times \dots \times (N_n \cup [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot N_n)] \subset \sigma(\lambda) \cdot N, \end{aligned}$$

also ist r ein Restglied.

Sei umgekehrt $r = (r_1, \dots, r_n)$ ein Restglied. Schreiben wir pr_i für die i -te Projektion, so folgt aus Lemma 2, dass $r_i = pr_i \circ r$ ein Restglied ist; q.e.d.

DEFINITION. Sei $U \subset E$ eine offene Menge. Eine Abbildung $f: U \rightarrow F$ heisst differenzierbar an der Stelle $x \in U$, falls es ein $l \in \mathcal{L}(E; F)$ und ein Restglied $r: (U - x) \rightarrow F$ derart gibt, dass $f(x+h) - f(x) = lh + r(h)$ für alle $h \in U - x$ gilt.

$Df(x) := l$ heisst die Ableitung von f an der Stelle $x \in U$.

Wenn f in allen Punkten einer Teilmenge $M \subset U$ differenzierbar ist, so heisst f differenzierbar in M ; ist $M = U$, so heisst f differenzierbar.

Für eine an der Stelle x differenzierbare Abbildung f ist nach [3, Satz 4.1.2] die Ableitung $Df(x)$ eindeutig bestimmt. Daher induziert eine in $M \subset E$ differenzierbare Abbildung $f: E \rightarrow F$ eine Abbildung $Df: M \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$. Wir nennen f stetig differenzierbar in M , wenn Df stetig ist.

LEMMA 5. Für eine offene Menge $U \subset E$ sei $f: U \rightarrow F$ an der Stelle $x \in U$ differenzierbar. Dann ist auch $f: U \rightarrow F_0$ an der Stelle x differenzierbar und die Ableitungen sind identisch.

Beweis: siehe [3, Lemma 3.1.4.].

Unmittelbar aus obiger Definition folgt

LEMMA 6. Eine stetige lineare Abbildung $l: E \rightarrow F$ ist stetig differenzierbar und es ist $Dl(x) = l$ für jedes $x \in E$.

LEMMA 7. Eine stetige n -lineare Abbildung $u: E_1 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ ist stetig differenzierbar und es gilt

$$Du(x_1, \dots, x_n)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n u(x_1, \dots, x_{i-1}, h_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Der Beweis folgt leicht aus der Tatsache, dass jede stetige n -lineare Abbildung für $n \geq 2$ ein Restglied ist.

Als Sätze 4.4.4 und 4.4.5 werden in [3] folgende zwei Sätze bewiesen:

LEMMA 8 (Kettenregel). Für die offenen Mengen $U \subset E$ und $V \subset F$ seien die Abbildungen $f: U \rightarrow F$ mit $f(U) \subset V$ und $g: V \rightarrow G$ an der Stelle $x \in U$ bzw. $f(x) \in V$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

LEMMA 9 (Mittelwertsatz). Sind $x_0, x_1 \in E$ feste Vektoren und $f: E \rightarrow F$ stetig in $\{x_0 + t(x_1 - x_0) | 0 \leq t \leq 1\}$ und differenzierbar in $\{x_0 + t(x_1 - x_0) | 0 < t < 1\}$, dann gilt für $l \in \mathcal{L}(F; \mathbb{R})$ und ein gewisses $x(\vartheta)$ aus $\{x_0 + t(x_1 - x_0) | 0 < t < 1\}$

$$l(f(x_1) - f(x_0)) = [l \circ Df(x(\vartheta))](x_1 - x_0).$$

Zur Herleitung der Restgliedformel des Taylorschen Polynoms benötigen wir den

Begriff des bestimmten Integrals

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \int_a^b \varphi$$

einer stetigen Abbildung φ von $[a, b] \subset \mathbb{R}$ nach einem lokalkonvexen separierten Vektorraum F . Diesen Begriff übernehmen wir von H. H. KELLER [8] und notieren lediglich folgende Eigenschaften:

1) Falls F nicht vollständig ist, liegt $\int_a^b \varphi$ in der vollständigen Hülle \tilde{F} von F . Ist $\varphi: [a, b] \rightarrow F$ stetig differenzierbar, so gilt $\varphi(b) - \varphi(a) = \int_a^b D\varphi \in F$.

2) Seien $\varphi, \psi: [a, b] \rightarrow F$ stetig und $\lambda \in \mathbb{R}$; dann gilt

$$\int_a^b (\varphi + \lambda \psi) = \int_a^b \varphi + \lambda \int_a^b \psi$$

3) Seien $\varphi: [a, b] \rightarrow F$ stetig und u eine stetige lineare Abbildung von F in einen separierten lokalkonvexen Vektorraum G ; dann gilt

$$\int_a^b (u \circ \varphi) = \tilde{u} \int_a^b \varphi;$$

dabei bedeutet $\tilde{u}: \tilde{F} \rightarrow \tilde{G}$ die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung von u auf die vollständige Hülle \tilde{F} von F .

§ 2. Höhere Ableitungen

2.1. Definitionen

Sei $f: U \rightarrow F$ eine differenzierbare Abbildung einer offenen Menge $U \subset E$ nach F ; es existiert somit die Abbildung $D^1 f = Df: U \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$, definiert durch $x \mapsto Df(x)$.

Sei $D^{p-1} f: U \rightarrow \mathcal{L}^{p-1}(E; F)$ definiert und differenzierbar im Punkte $x \in U$. Dann heisst die Ableitung von $D^{p-1} f$ im Punkte x die p -te Ableitung $D^p f(x) \in \mathcal{L}^p(E; F)$ von f an der Stelle x .

Existiert $D^p f(x)$ für alle $x \in U$, so wird $D^p f: U \rightarrow \mathcal{L}^p(E; F)$ eine Abbildung definiert durch $x \mapsto D^p f(x)$. Die Abbildung $f: U \rightarrow F$ heisst p -fach differenzierbar, wenn $D^p f(x)$ existiert für alle $x \in U$. Ist zudem $D^p f: U \rightarrow \mathcal{L}^p(E; F)$ stetig, so heisst f stetig p -fach differenzierbar.

Es existiere für f die $(p+q)$ -te Ableitung an der Stelle x . Man zeigt wie üblich, dass

$$D^q(D^p f)(x) = D^{p+q} f(x).$$

Mit $\mathcal{C}^p(U; F)$ bezeichnen wir die Menge der p -fach stetig differenzierbaren Abbildungen von U nach F . Eine Abbildung $f \in \mathcal{C}^p(U; F)$ nennen wir auch eine \mathcal{C}^p -Abbildung oder von der Klasse \mathcal{C}^p .

2.2. Symmetrie der höheren Ableitungen

LEMMA 10. Sei $U \subset E$ eine konvexe offene Umgebung von x und $F \in \mathfrak{B}_0$. Wenn $f: U \rightarrow F$ zwei-fach stetig differenzierbar ist, dann ist

$$D^2f(x): E \times E \rightarrow F$$

eine bilineare symmetrische Abbildung.

Der Beweis verläuft fast wörtlich gleich wie derjenige von F. und R. NEVANLINNA [9, pp. 85/86], man hat lediglich anstelle der Aufgabe 4 in 1.3.10 unser Lemma 1 zu benutzen.

SATZ 2. Sei $U \subset E$ eine konvexe offene Umgebung von x und $f \in \mathcal{C}^p(U; F)$, wobei $F \in \mathfrak{B}_0$. Dann ist $D^p f(x)$ symmetrisch.

Der Satz folgt aus Lemma 10 durch vollständige Induktion nach p , siehe z.B. [6, p. 177].

2.3. SATZ 3. Sei $f = \{f_1, \dots, f_n\}$ eine stetige Abbildung einer offenen Menge $U \subset E$ in das Produkt $F_1 \times F_2 \times \dots \times F_n$ von limitierten Vektorräumen F_i . Die Abbildung f ist genau dann eine \mathcal{C}^p -Abbildung, wenn alle f_i von der Klasse \mathcal{C}^p sind, und es gilt $D^p f = \{D^p f_1, \dots, D^p f_n\}$.

Beweis: Seien alle f_i von der Klasse \mathcal{C}^p , also existieren Restglieder $r_i: (U - x) \rightarrow F_i$ derart, dass

$$f_i(x + h) - f_i(x) = Df_i(x)h + r_i(h)$$

für alle $h \in U - x$ und $i = 1, \dots, n$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} f(x + h) - f(x) &= \{f_1(x + h) - f_1(x), \dots, f_n(x + h) - f_n(x)\} = \\ &= \{Df_1(x)h + r_1(h), \dots, Df_n(x)h + r_n(h)\} = \\ &= \{Df_1(x), \dots, Df_n(x)\}h + (r_1, \dots, r_n)(h) = \\ &= Df(x)h + r(h). \end{aligned}$$

Nach Lemma 4 ist $r = (r_1, \dots, r_n)$ ein Restglied und daher $f \in \mathcal{C}^1(U; F)$.

Ist umgekehrt $f \in \mathcal{C}^1(U; F)$, so ist jedes $f_i = p r_i \circ f$ nach Lemma 8 von der Klasse \mathcal{C}^1 , und der Satz ist für $p = 1$ bewiesen. Aus einer nun leicht auszuführenden Induktion nach p folgt die Aussage des Satzes.

Aus Lemma 7 folgert man mühelos

LEMMA 11. Sei $u: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow F$ eine stetige n -lineare Abbildung. Dann ist u beliebig oft stetig differenzierbar und es ist $D^{n+1}u = 0$.

Weiter gilt der

SATZ 4. Seien $U \subset E$ eine offene Menge, $f \in \mathcal{C}^p(U; F)$ und $l \in \mathcal{L}(F; G)$. Dann ist $l \circ f$ von der Klasse \mathcal{C}^p und es gilt $D^p(l \circ f)(x) = l \circ D^p f(x)$.

Beweis: Aus $D(l \circ f)(x) = D l(f(x)) \circ D f(x) = l \circ D f(x)$ folgt die Behauptung für $p=1$. Wir definieren $c: U \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$ durch $x \mapsto l$. Als Induktionsvoraussetzung sei $l \circ f$ von der Klasse \mathcal{C}^{p-1} und es gelte $D^{p-1}(l \circ f)(x) = l \circ D^{p-1} f(x)$, d.h. folgendes Diagramm ist kommutativ:

$$\begin{array}{ccc} & c \times D^{p-1} f & \\ U & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{L}(F; G) \times \mathcal{L}^{p-1}(E; F) \\ & \searrow D^{p-1}(l \circ f) & \downarrow k \\ & & \mathcal{L}^{p-1}(E; G) \end{array}$$

Dabei ist $k(l, m) = l \circ m$; es gilt somit

$$D^{p-1}(l \circ f)(x) = k(c(x), D^{p-1} f(x)).$$

Mit Hilfe der Kettenregel (Lemma 8) und Lemma 7 schliessen wir

$$\begin{aligned} D^{p-1}(l \circ f)(x) h &= D(D^{p-1}(l \circ f))(x) h = \\ &= D k(c(x), D^{p-1} f(x)) \circ (D c(x), D^p f(x)) h = \\ &= k(c(x), D^p f(x) h) = l \circ D^p f(x) h, \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

2.4. SATZ 5. Seien $U \subset E$ und $V \subset F$ offene Mengen. Wenn die Abbildungen $f: U \rightarrow F$ mit $f(U) \subset V$ und $g: V \rightarrow G$ von der Klasse \mathcal{C}^p sind, dann ist auch $g \circ f$ eine \mathcal{C}^p -Abbildung.

Beweis: Nach Lemma 8 haben wir zunächst

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x) = k((Dg \circ f)(x), Df(x)),$$

d.h. für $p=1$ ist der Satz richtig. Für eine Induktion nach p setzen wir voraus: Sind zwei Abbildungen i und j von der Klasse \mathcal{C}^{p-1} , so ist die Abbildung $i \circ j$, falls sie existiert, ebenfalls von der Klasse \mathcal{C}^{p-1} . Mit $i = Dg$ und $j = f$ folgt, dass $Dg \circ f$ eine \mathcal{C}^{p-1} -Abbildung ist. Nach Satz 3 existiert somit $D^{p-1}(Dg \circ f, Df)$. Die bilineare Abbildung k (Komposition) ist nach Lemma 11 beliebig oft stetig differenzierbar, also ist $k(Dg \circ f, Df) = D(g \circ f)$ nach Induktionsvoraussetzung eine \mathcal{C}^{p-1} -Abbildung. Daraus folgt die Behauptung.

Mithilfe von Satz 5 und Lemma 11 beweist man leicht

SATZ 6. Seien $U \subset E$ offen und $f: U \rightarrow \mathcal{C}(E; F)$ und $g: U \rightarrow \mathcal{L}(F; G)$ von der Klasse \mathcal{C}^p ; dann ist die Abbildung $k(g, f): U \rightarrow \mathcal{C}(E; G)$, definiert durch $k(g, f)(x) = g(x) \circ f(x)$, ebenfalls von der Klasse \mathcal{C}^p .

Für den festen Raum G betrachten wir die mit der Limitierung Λ_c der stetigen Konvergenz versehenen Räume $\mathcal{C}^p(G; E)$ und $\mathcal{C}^p(G; F)$. Für die stetige lineare

Abbildung $l: E \rightarrow F$ definieren wir

$$l_*: \mathcal{C}^p(G; E) \rightarrow \mathcal{C}^p(G; F)$$

durch

$$l_*(g) = l \circ g,$$

und für die \mathcal{C}^p -Abbildung $f: E \rightarrow F$ sei

$$f^*: \mathcal{C}^p(F; G) \rightarrow \mathcal{C}^p(E; G)$$

definiert durch $f^*(g) = g \circ f$. Sowohl l_* als auch f^* sind stetige lineare Abbildungen und daher gilt

LEMMA 12. Die Abbildungen l_* und f^* sind von der Klasse \mathcal{C}^p .

Mit \mathfrak{B}^p bezeichnen wir die Kategorie der limitierten separierten Vektorräume E, F, G, \dots , mit den \mathcal{C}^p -Abbildungen als Morphismen. Für ein festes $G \in \mathfrak{B}^p$ zeigt Lemma 12, dass folgende Zuordnung ein kontravarianter Funktor von \mathfrak{B}^p in sich ist:

$$\begin{aligned} E &\mapsto \mathcal{C}^p(E; G) \\ f \in \mathcal{C}^p(E; F) &\mapsto f^* \in \mathcal{C}^p(\mathcal{C}^p(F; G), \mathcal{C}^p(E; G)) \end{aligned}$$

LEMMA 13. Seien $U \subset E$ und $V \subset F$ offen, $f: U \rightarrow G$ und $g: V \rightarrow H$ von der Klasse \mathcal{C}^p , dann ist auch $(f \times g): U \times V \rightarrow G \times H$ eine \mathcal{C}^p -Abbildung.

Beweis: Zunächst ist $U \times V$ offen und es gilt

$$\begin{aligned} (f \times g)(x + h, y + k) - (f \times g)(x, y) &= (f(x + h), g(y + k)) - (f(x), g(y)) = \\ &= (f(x + h) - f(x), g(y + k) - g(y)) = (Df(x)h, Dg(y)k) + \\ &\quad + (r_f(h), r_g(k)) = (Df(x) \times Dg(y))(h, k) + (r_f \times r_g)(h, k). \end{aligned}$$

Analog dem Beweis von Lemma 4 zeigt man, dass

$$(r_f \times r_g): (U - x) \times (V - y) \rightarrow G \times H$$

ein Restglied ist. Die lineare Abbildung $Df(x) \times Dg(y)$ können wir daher mit $D(f \times g)(x, y)$ bezeichnen. Die Induktion nach p liefert die Behauptung.

Daraus folgt mit Hilfe der Kettenregel (Lemma 8) der

SATZ 7. Für eine offene Menge $U \subset G$ sei $f: U \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ eine \mathcal{C}^p -Abbildung. Dann ist auch

$$\tilde{f} = \omega \circ (f \times id): U \times E \rightarrow F \quad \text{mit} \quad \tilde{f}(x, y) = f(x)(y)$$

von der Klasse \mathcal{C}^p . Wobei $\omega: \mathcal{L}(E; F) \times E \rightarrow F$ die Evaluation bezeichnet.

Wir halten noch fest:

SATZ 8. Für eine offene Menge $U \subset E$ ist $\mathcal{C}^p(U; \mathbf{R})$ ein Ring und $\mathcal{C}^p(U; F)$ ist ein Modul über dem Ring $\mathcal{C}^p(U; \mathbf{R})$.

Für $p=1$ steht der Beweis in [3], die Induktion nach p ist trivial.

§ 3. Die Taylorsche Formel

Seien E und F Objekte aus \mathfrak{B}_0 , der Kategorie der limitierten Vektorräume, deren assoziierte lokalkonvexe Vektorräume separiert sind. Zudem habe E folgende Eigenschaft:

- (A) *Zu jedem gegen $0 \in E$ konvergenten Filter Φ existiert ein gröberer (nicht notwendig echt) gegen Null konvergenter Filter Φ' mit einer aus ausgeglichenen Mengen bestehenden Basis.*

Eine Teilmenge $M \subset E$ heisst *ausgeglichen*, falls für jede reelle Zahl ϑ mit $|\vartheta| \leq 1$ die Beziehung $\vartheta \cdot M \subset M$ gilt.

Wir geben noch ein Beispiel eines limitierten nicht-topologischen Vektorraumes in \mathfrak{B}_0 , der die Eigenschaft (A) besitzt. Dazu seien $G \in \mathfrak{B}_0$ ein lokalkonvexer und H ein nicht-normierbarer lokalkonvexer Vektorraum. Dann ist $\mathcal{L}(H; G)$ nach Lemma 2 in \mathfrak{B}_0 und nach [1] nicht topologisch und, so behaupten wir, hat die Eigenschaft (A).

Beweis. Sei Γ ein gegen $0 \in \mathcal{L}(H; G)$ konvergenter Filter mit einer Basis, deren Elemente den Nullpunkt enthalten. D.h. für jeden gegen $x_0 \in H$ konvergenten Filter Φ konvergiert $\Gamma(\Phi) := \omega(\Gamma \times \Phi)$ gegen Null in F ; dabei bedeutet $\omega: \mathcal{L}(H; G) \times H \rightarrow G$ die Evaluation. Sei $T \in \Gamma$ und $\bar{T} = \{\vartheta \cdot l \mid \vartheta \in \mathbf{R}, |\vartheta| \leq 1, l \in T\}$. \bar{T} ist ausgeglichen. Sei $\bar{\Gamma}$ der von der Filterbasis, bestehend aus den \bar{T} mit $T \in \Gamma$, erzeugter Filter. Es gilt $\bar{\Gamma} \leq \Gamma$. Wir zeigen, dass $\bar{\Gamma}$ gegen Null konvergiert. Dazu wählen wir einen beliebigen in H gegen x_0 konvergenten Filter Φ , und der Nullumgebungsfilter in G sei Ψ . Sei $P \in \Psi$ ausgeglichen. Dann existieren ein $T \in \Gamma$ und $M \in \Phi$ derart, dass $P \supset T(M)$. Für jedes $\vartheta \in \mathbf{R}$ mit $|\vartheta| \leq 1$ und $l \in T$ ist $(\vartheta \cdot l)(x) \in P$ für alle $x \in M$. Daraus folgt $P \supset \bar{T}(M)$ und $\bar{\Gamma}$ konvergiert gegen Null.

Für einen festen Vektor $x_0 \in E$ sei $i: \mathbf{R} \rightarrow E$ definiert durch $t \mapsto t \cdot x_0$. Dann folgt aus [3, Satz 2.1.5], dass auf $i(\mathbf{R}) \subset E$ die natürliche Topologie induziert wird.

DEFINITION. Sei $U \subset E$ eine den Nullpunkt enthaltende offene Menge. Eine an der Stelle $0 \in E$ stetige Abbildung $r_n: U \rightarrow F$ heisst ein *Restglied n -ter Ordnung*, falls es zu jedem in E gegen Null konvergenten Filter Φ einen in F gegen Null konvergenten Filter Ψ gibt, welcher folgender Bedingung genügt:

Zu jedem $N \in \Psi$ existieren ein $M \in \Phi$ und eine Abbildung $\sigma^n: [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbf{R}$ mit

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sigma^n(\lambda)}{\lambda^n} = 0 \quad \text{und} \quad \sigma^n(0) = 0$$

derart, dass

$$r_n(\lambda \cdot M) \subset \sigma^n(\lambda) \cdot N \quad \text{für alle} \quad \lambda \in [-\delta, \delta].$$

Bemerkung. Falls E ein normierter und F ein limitierter separierter Vektorraum

ist, so gilt für ein Restglied r_n der Ordnung n :

$$\lim_{\|h\| \rightarrow 0} \frac{r_n(h)}{\|h\|^n} = 0.$$

Der Beweis verläuft wie für $n=1$ in [3; (3.2.d)].

Für das n -Tupel (h, \dots, h) schreiben wir im folgenden $h^{(n)}$.

SATZ 9. *Für eine offene konvexe Umgebung $U \subset E$ von $x \in E$ sei $f: U \rightarrow F$ eine \mathcal{C}^n -Abbildung. Dann gilt für $h \in U - x$*

$$f(x+h) = f(x) + \frac{Df(x)h}{1!} + \dots + \frac{D^{(n-1)}f(x)h^{(n-1)}}{(n-1)!} + R_n(h),$$

wobei

$$R_n(h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^{n-1}}{(n-1)!} D^n f(x+th) h^{(n)} dt,$$

berechnet in F_0 , und die Abbildung $R_n: (U-x) \rightarrow F$ ist ein Restglied n -ter Ordnung. Die $D^i f(x)$ sind für jedes $x \in U$ symmetrisch.

Beweis: Aus $F \in \mathfrak{B}_0$ folgt nach Lemma 2, dass $\mathcal{L}^p(E; F) \in \mathfrak{B}_0$ und daher auch $\mathcal{C}(E; \mathcal{L}^p(E; F)) \in \mathfrak{B}_0$ für $p=1, 2, \dots, n$. Für $x, x+h \in U$ und $[0, 1] = I$ betrachten wir die Abbildungen $i: I \rightarrow E$, definiert durch $i(t) = x + th$, und $\varphi = f \circ i: I \rightarrow F$. Die Abbildung φ ist stetig differenzierbar; sie ist aber auch als Abbildung in den assoziierten lokal-konvexen Vektorraum F_0 von der Klasse \mathcal{C}^1 , (Lemma 5). Nun gilt $D\varphi(t) dt = Df(x+th) h dt$. In F_0 ist somit

$$\varphi(t) = \int_0^t Df(x + \tau h) h d\tau$$

und

$$f(x+h) = f(x) + \int_0^1 Df(x + \tau h) h d\tau.$$

Wir schliessen von p auf $p+1$. Dazu gelte für $p \leq n-1$

$$\begin{aligned} f(x+h) = f(x) + \frac{Df(x)h}{1!} + \dots + \frac{D^{(p-1)}f(x)h^{(p-1)}}{(p-1)!} + \\ + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} D^p f(x+th) h^{(p)} dt, \end{aligned}$$

wobei das Integral zunächst in der vollständigen Hülle \tilde{F}_0 von F_0 existiert; aber aus der Darstellung

$$R_p(h) = f(x+h) - f(x) - \frac{Df(x)h}{1!} - \dots - \frac{D^{p-1}f(x)h^{(p-1)}}{(p-1)!}$$

folgt, dass der Wert des Integrals in F_0 liegt. Nach Satz 2 sind die $D^i f(x)$ für jedes $x \in U$ symmetrische multilineare Abbildungen. Sei $l \in \mathcal{L}(F; \mathbf{R})$, dann gilt

$$\begin{aligned} l \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} D^p f(x+th) h^{(p)} dt \right] &= \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} l[D^p f(x+th) h^{(p)}] dt \\ &= -\frac{(1-t)^p}{p!} \cdot l[D^p f(x+th) h^{(p)}]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} l[D^{p+1} f(x+th) h^{(p+1)}] dt \\ &= l \left[\frac{D^p f(x) h^{(p)}}{p!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^p}{p!} D^{p+1} f(x+th) h^{(p+1)} dt \right] \end{aligned}$$

und aus Lemma 1 folgt die Richtigkeit der ersten Behauptung.

Aus der Darstellung

$$R_n(h) = f(x+h) - f(x) - \dots - \frac{D^{n-1}f(x)h^{(n-1)}}{(n-1)!}$$

folgt, dass $R_n: (U-x) \rightarrow F$ eine \mathcal{C}^n -Abbildung ist mit der Eigenschaft

$$R_n(0) = D R_n(0) = D^2 R_n(0) = \dots = D^n R_n(0) = 0.$$

Aus $R_n(0) = D R_n(0) = 0$ und der Definition der Ableitung folgt, dass R_n ein Restglied erster Ordnung ist. Sei als Induktionsvoraussetzung R_n ein Restglied der Ordnung $p \leq n-1$. Zunächst folgt daraus wie für $p=1$, dass auch $D R_n: (U-x) \rightarrow \mathcal{L}(E; F)$ ein Restglied p -ter Ordnung ist. D.h. zu einem in E gegen Null konvergenten Filter Φ gibt es einen in $\mathcal{L}(E; F)$ gegen Null konvergenten Filter Ψ , so dass zu jedem $N \in \Psi$ ein $M \in \Phi$ und ein σ^p existieren mit der Eigenschaft

$$D R_n(\lambda \cdot M) \subset \sigma^p(\lambda) \cdot N \quad \text{für alle } \lambda \in [-\delta, \delta].$$

Den Filter Φ ersetzen wir durch den nach Voraussetzung existierenden gröberen Filter Φ' mit einer aus ausgeglichenen und den Nullpunkt enthaltenden Mengen bestehenden Basis. Wir denken uns obigen Filter Ψ auf $\mathcal{L}(E; F)$ derart bestimmt, dass zu jedem $N \in \Psi$ ein $M' \in \Phi'$, wobei $M' \subset U-x$, und ein σ^p existieren mit

$$D R_n(\lambda \cdot M') \subset \sigma^p(\lambda) \cdot N \quad \text{für alle } \lambda \in [-\delta', \delta'].$$

M' kann insbesondere als ausgeglichen angenommen werden. Nun wählen wir den

gegen Null konvergenten Filter Γ in F als $\Gamma = \omega(\Psi \times \Phi')$, wobei $\omega: \mathcal{L}(E; F) \times E \rightarrow F$ die Evaluation bezeichnet.

Nach dem Mittelwertsatz (Lemma 9) und Lemma 1 gilt

$$R_n(h) = DR_n(\vartheta \cdot h)h \quad \text{mit} \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Wir wählen ein Element aus Γ von der Form

$$N(M') := \omega(N \times M')$$

mit obigen Elementen $N \in \Psi$ und $M' \in \Phi'$. Dann gilt für jedes $h \in M'$:

$$R_n(\lambda \cdot h) = DR_n(\vartheta \cdot \lambda \cdot h) \lambda \cdot h \in \lambda \cdot DR_n(\lambda \cdot M') \quad M' \subset \lambda \cdot \sigma^p(\lambda) \cdot N(M')$$

für alle $\lambda \in [-\delta', \delta']$; dabei verwendeten wir für die mittlere Relation die Ausgeglichenheit von M' . Wir haben

$$R_n(\lambda \cdot M') \subset \lambda \cdot \sigma^p(\lambda) \cdot N(M') \quad \text{für alle} \quad \lambda \in [-\delta', \delta'].$$

Zu $M' \in \Phi'$ existiert ein $M \in \Phi$ mit $M \subset M'$ und damit gilt erst recht

$$R_n(\lambda \cdot M) \subset \lambda \cdot \sigma^p(\lambda) \cdot N(M') \quad \text{für alle} \quad \lambda \in [-\delta', \delta'].$$

Also ist R_n ein Restglied der Ordnung $p+1$ und die Abbildungen $\sigma^p: [-\delta, \delta] \rightarrow \mathbb{R}$ haben die Form $\sigma^{(p+1)}(\lambda) = \sigma^p(\lambda) \cdot \lambda = \sigma^1(\lambda) \cdot \lambda^p$.

LITERATUR

- [1] H. H. KELLER, *Räume stetiger multilinearer Abbildungen als Limesräume*, Math. Ann. 159 (1965), 259–270.
- [2] H. R. FISCHER, *Limesräume*, Math. Ann. 137 (1959), 269–303.
- [3] E. BINZ, *Ein Differenzierbarkeitsbegriff in limitierten Vektorräumen*, Comment. Math. Helv. 41, (1966), 137–156.
- [4] E. BINZ und H. H. KELLER, *Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume*, Ann. Acad. Sci. Fennicae [Ser. A] 383 (1966), 1–21.
- [5] S. LANG, *Introduction to differentiable manifolds*, Interscience Publ., N. Y. 1962.
- [6] J. DIEUDONNÉ, *Foundations of Modern Analysis*, Academic Press, New York and London, 1960.
- [7] A. BASTIANI, *Applications différentiables et variétés différentiables de dimension infinie*, J. d'Anal. math. XIII (1965), 1–114.
- [8] H. H. KELLER, *Differentialrechnung in lokalkonvexen Vektorräumen*. Erscheint demnächst.
- [9] F. und R. NEVANLINNA, *Absolute Analysis*, Springer Verl., 1959
- [10] H. H. KELLER, *Differenzierbarkeit in topologischen Vektorräumen*, Comment. Math. Helv. 38 (1964), 308–320.

Eingegangen den 15. Aug. 1966