

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 42 (1967)

Artikel: Über die Struktur nilpotenter und auflösbarer Liescher Algebren.
Autor: Drollinger, Fritz
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-32141>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 02.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Über die Struktur nilpotenter und auflösbarer Liescher Algebren

VON FRITZ DROLLINGER

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit wird eine Liesche Algebra $g(n)$ mit abzählbarer Basis konstruiert, so daß sich jede Liesche Algebra endlicher Dimension als Restklassenalgebra von $g(n)$ darstellen läßt. Ausgehend von dieser Algebra $g(n)$ werden dann die nilpotenten bzw. vollständig zerlegbaren auflösbaren Lieschen Algebren endlicher Dimension in folgendem Sinne klassifiziert. Die Menge aller endlichdimensionalen nilpotenten bzw. vollständig zerlegbaren auflösbaren Lieschen Algebren zerfällt in Klassen, so daß es in jeder Klasse einen einzigen Vertreter maximaler Dimension gibt und alle andern Lieschen Algebren einer Klasse sich als Restklassenalgebren dieser maximalen darstellen lassen. Auf dem Wege zur Algebra $g(n)$ betrachten wir zunächst in § 1 Algebren A mit endlicher oder abzählbarer Basis und der Eigenschaft

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) - y \cdot (x \cdot z) \quad \text{für alle } x, y, z \in A. \quad (1)$$

Eine solche Algebra nennen wir verallgemeinerte Liesche Algebra (VLA). Eine Algebra g heißt Liesche Algebra, wenn

$$x \cdot x = 0 \quad \text{und} \quad x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0 \quad \text{für alle } x, y, z \in g.$$

(1) ist erfüllt für Liesche Algebren, so daß jede Liesche Algebra eine VLA ist.

Für eine VLA bilden die Potenzen A^n und die Ableitungen $A^{(n)}$ Idealketten in A . Wir nennen eine VLA nilpotent, wenn $A^n = 0$ ist für eine natürliche Zahl n . Die kleinste solche Zahl heißt Klasse von A . A heißt auflösbar, wenn $A^{(k)} = 0$ ist. Die Zahl $n = \dim A/A^{(1)}$ nennen wir Ordnung von A .

Wir nennen eine Algebra A linkserzeugt von Elementen x_1, \dots, x_n , wenn jedes Element von A darstellbar ist in der Form

$$x = \sum a^{i_1 \dots i_p} \cdot x_{i_1} \cdot (x_{i_2} \cdot (\dots x_{i_p}) \dots),$$

wobei nur endlich viele $a^{i_1 \dots i_p} \neq 0$ sind. A heißt frei linkserzeugt von x_1, \dots, x_n , wenn die Elemente $x_{i_1}(x_{i_2}(\dots x_{i_p})\dots)$ eine Basis bilden. Jede Algebra endlicher Dimension wird trivialerweise von einer Basis linkserzeugt. Die Bedeutung dieser Definition liegt also nicht so sehr in der obigen Darstellung, als in der Wahl der Elemente x_1, \dots, x_n . Dies zeigt sich in den folgenden Aussagen über nilpotente bzw. auflösbare VLA: Jede nilpotente VLA ist linkserzeugt von $n = \dim A/A^{(1)}$ modulo $A^{(1)}$ linear unabhängigen Elementen x_1, \dots, x_n und jede VLA mit $A^{(1)}$ nilpotent ist linkserzeugt von $n = \dim A/A^{(1)}$

modulo $A^{(1)}$ linear unabhängigen Elementen y_1, \dots, y_n und von gewissen modulo $A^{(2)}$ linear unabhängigen Elementen x_1, \dots, x_m von $A^{(1)}$.

Diese beiden Aussagen legen es nahe, die von Elementen x_1, \dots, x_n frei linkserzeugte VLA $A(n)$ zu konstruieren. Diese Algebra $A(n)$ liefert nun die Grundlage für alle weiteren Untersuchungen, denn sie hat die folgenden nützlichen Eigenschaften:

1) Jede von Elementen y_1, \dots, y_n linkserzeugte VLA läßt sich darstellen als Restklassenalgebra von $A(n)$.

2) In $A(n)$ gibt es ein eindeutig bestimmtes, unter Automorphismen invariantes Ideal $J(n)$, so daß $g(n) = A(n)/J(n)$ Liesche Algebra ist und jede Liesche Algebra g endlicher Dimension als Restklassenalgebra von $g(n)$, für genügend großes n , dargestellt werden kann.

3) Die Algebra $A(m, n) = A(n)/(A(n))^m$ ist nilpotente VLA. Ihre Automorphismen lassen sich besonders einfach durch Matrizen darstellen.

In § 2 wenden wir diese Ergebnisse speziell auf nilpotente Liesche Algebren endlicher Dimension an und erhalten: Die Algebra $g(m, n) = A(n)/J(n) + (A(n))^m$ ist nilpotente Liesche Algebra der Ordnung n und der Klasse m . Außerdem läßt sich jede nilpotente Liesche Algebra g der Ordnung n und der Klasse m darstellen als Restklassenalgebra von $g(m, n)$ nach einem Ideal. Zu gegebenen Invarianten m und n gibt es also genau eine nilpotente Liesche Algebra maximaler Dimension. Da jede nilpotente Liesche Algebra g homomorphes Bild einer Algebra $g(m, n)$ ist, genügt es, alle homomorphieinvarianten Eigenschaften von g für die in ihrer Struktur einfacheren $g(m, n)$ herzuleiten.

Wir nennen zwei Ideale I_1 und I_2 einer Algebra A konjugiert, wenn es einen Automorphismus ψ von A gibt, so daß $\psi(I_1) = I_2$ ist. Der Begriff der konjugierten Ideale erlaubt es uns nun, die nicht isomorphen nilpotenten Lieschen Algebren der Ordnung $\leq n$ und der Klasse $\leq m$ zu den Idealen von $g(m, n)$ in eine Relation zu bringen, und zwar gilt: Die Menge aller Klassen isomorpher nilpotenter Liescher Algebren g der Ordnung $\leq n$ und der Klasse $\leq m$ ist gleich der Menge der Klassen aller konjugierten Ideale von $g(m, n)$.

Wir haben oben gesehen, daß sich die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(m, n)$ von $A(m, n)$ besonders einfach darstellen läßt. Aus ihr erhalten wir die Automorphismengruppe $g(m, n)$ von $g(m, n)$ als Restklassengruppe. Darüber hinaus erhalten wir die Automorphismengruppe g einer Restklassenalgebra g von $g(m, n)$ als Restklassengruppe einer Untergruppe von $g(m, n)$.

In § 3 wenden wir die Ergebnisse von § 1 an auf vollständig zerlegbare Liesche Algebren an. Wir nennen eine Algebra A zerlegbar, wenn es in A eine endlichdimensionale nilpotente Unter algebra A^0 gibt und ein System Δ von Linearformen über A^0 , so daß jedem $\alpha \in \Delta$ ein Unterraum A^α von A zugeordnet werden kann mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
A &= \bigoplus_{\alpha \in \Sigma} A^\alpha \\
A^\alpha \cdot A^\beta &\subseteq \begin{cases} A^{\alpha+\beta}, & \text{wenn } \alpha + \beta \in \Sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\
\bigoplus_{\alpha \in \Delta} A^\alpha &\subseteq A^{(1)}
\end{aligned}$$

wobei $\Sigma = \Delta \cup (0)$. Σ heißt System der Wurzelformen oder Radikalsystem von A . Für Liesche Algebren über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K der Charakteristik $\chi = 0$ liefert die Cartansche Zerlegung eine solche Aufspaltung.

In Δ zeichnen wir das Teilsystem Π aus, das aus allen Wurzelformen α besteht, für die $\dim A^\alpha / A^\alpha \cap A^{(2)} = d_\alpha \neq 0$ ist, d.h. alle α , für die $A^\alpha \not\subseteq A^{(2)}$. Wir nennen diese α einfache Wurzelformen.

Sei A eine zerlegbare VLA mit $A^{(1)}$ nilpotent. Dann ist Π nicht leer und nach § 1 wird A linkserzeugt von Elementen $y_1, \dots, y_n \in A^0$ und $x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^1 \in A^\alpha, \alpha \in \Pi$. Wir nennen eine solche VLA vollständig zerlegbar, wenn es ein Erzeugendensystem $y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m$ gibt mit $y_i \in A^0$ und $x_i \in A_{i_i}^\alpha$, so daß gilt

$$\begin{aligned}
y \cdot x_i &= \alpha_i(y) x_i \\
x_i \cdot y &= -\alpha_i(y) x_i
\end{aligned}$$

für alle $y \in \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$ und $\alpha_i(x) = 0$ für $x \in \mathfrak{R}(x_1, \dots, x_n)$. Aus Gründen der einfacheren Darstellbarkeit wollen wir uns im folgenden auf vollständig zerlegbare VLA beschränken. Diese Einschränkung bedeutet, daß alle Elemente von $A^\alpha, \alpha \neq 0$, bezüglich der Linkstranslationen $y: x \rightarrow y \cdot x$ für $y \in A^0$ Eigenvektoren sind.

Für solche Algebren gilt dann: A ist Summe der nilpotenten Unteralegebren $\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$ und $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m)$, wobei $\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$ bzw. $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m)$ die von y_1, \dots, y_n bzw. von x_1, \dots, x_m linkserzeugten Unteralegebren von A sind.

Jedes $\beta \in \Delta$ ist von der Form $\beta = \sum_{i=1}^m p^i \alpha_i$ mit $\alpha_i \in \Pi$ und $p^i \in \mathbb{N}$, wenn $\chi = 0$ und $p^i \in \Gamma_p$, wenn $\chi = p$. Außerdem läßt sich jede Wurzelform von A auffassen als Linearform über dem von y_1, \dots, y_n aufgespannten Vektorraum, d.h. $\beta(z) = 0$ für $z \in A^0 \cap A^{(1)}$. Seien nun m, n, r, s , vorgegebene natürliche Zahlen und Π ein System von m nicht identisch verschwindenden Linearformen über einem Vektorraum mit der Basis y_1, \dots, y_n . $A(m+n)$ sei die gemäß § 1 von den Elementen $y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m$ frei linkserzeugte VLA. Wir konstruieren die Algebra $G(m, n, r, s, \Pi)$ als Restklassen algebra von $A(m+n)$. $G(m, n, r, s, \Pi)$ hat die folgenden Eigenschaften:

$G(m, n, r, s, \Pi)$ ist vollständig zerlegbare Liesche Algebra bezüglich der Erzeugenden $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m$, wenn \bar{y}_j bzw. \bar{x}_i die Restklasse von y_j bzw. x_i ist. $\mathfrak{R}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ bzw. $\mathfrak{R}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m)$ hat die Klasse s bzw. r . Π ist System der einfachen Wurzelformen von $G(m, n, r, s, \Pi)$. Jede vollständig zerlegbare Liesche Algebra g

mit den Invarianten m, n, r, s und mit Π als System der einfachen Wurzelformen läßt sich darstellen als Restklassenalgebra von $G(m, n, r, s, \Pi)$ derart, daß die Zerlegung von $G(m, n, r, s, \Pi)$ bei der Restklassenabbildung auf g übertragen wird.

Wir wenden uns nun der Frage zu, wann zwei Algebren $G(m, n, r, s, \Pi)$ und $G'(m, n, r, s, \Pi')$ isomorph sind. Die Antwort auf unsere Frage lautet dann: $G(m, n, r, s, \Pi)$ und $G'(m, n, r, s, \Pi')$ sind genau dann isomorph, wenn Π und Π' äquivalent sind und in jeder vollständig zerlegbaren Lieschen Algebra g gibt es bis auf Äquivalenz genau ein System Π einfacher Wurzelformen.

Wir haben gesehen, daß die nilpotenten bzw. vollständig zerlegbaren auflösbaren Lieschen Algebren als Restklassenalgebren von $g(m, n)$ bzw. $G(m, n, r, s, \Pi)$ nach Idealen dargestellt werden können. Von der Vielfalt der Ideale in diesen Algebren untersuchen wir in § 4 solche, die in gewissem Sinne maximal sind. Wir nennen ein Ideal I von $g(m, n)$ maximal, wenn bei der Restklassenbildung nach I die Klasse von $g(m, n)$ erhalten bleibt und dabei die Dimension von I maximal ist. Es zeigt sich, daß die Erzeugenden eines solchen Ideales höchstens von $(m-2)/4$ Parametern abhängen. Für $g = g(m, n)/I$ gilt dann: g wird linkserzeugt von zwei Elementen y_0, y_1 und $\dim g^i/g^{i+1} = 1$ für $i = 2, \dots, m-1$.

Zum Schluß suchen wir noch diejenigen vollständig zerlegbaren auflösbaren Lieschen Algebren g auf, für die $g^{(1)}$ Restklassenalgebra von $g(r, 2)$ nach einem maximalen Ideal ist. Wir erhalten sechs Typen (A), (B), (C), (D), (E) und (F), die noch von gewissen Parametern abhängen.

§ 1. Einführung

1. ALGEBREN

K sei ein Körper und A eine direkte Summe von abzählbar vielen K -Vektorräumen mit endlicher Basis. A sei außerdem versehen mit einer bilinearen Abbildung $(x, y) \rightarrow x \cdot y$ von $A \times A$ in A . Wir nennen A dann eine Algebra über K .

Ein K -Unterraum B einer Algebra A , der bezüglich der Multiplikation abgeschlossen ist, heißt Unter algebra von A . Wir nennen B Links- bzw. Rechtsideal von A , wenn für $x \in B, y \in A$ gilt $y \cdot x \in B$ bzw. $x \cdot y \in B$. Ist B Links- und Rechtsideal, dann heißt B (zweiseitiges) Ideal von A .

Seien A und A' zwei Algebren über K und f eine Abbildung von A in A' . f heißt Homomorphismus, wenn gilt

$$\begin{aligned} & f \text{ ist } K\text{-linear und} \\ & f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) \quad \text{für alle } x, y \in A \end{aligned}$$

Sei B ein Ideal von A . Dann läßt sich auf dem Restklassenraum A/B eine Multiplikation erklären durch

$$\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y},$$

wenn \bar{x}, \bar{y} die Restklassen von x, y bedeuten. Die Restklassenabbildung ist also ein Homomorphismus. Es gilt der Homomorphiesatz: Sei f ein Homomorphismus von A auf A' , dann ist $\text{Kern } f = B$ ein Ideal von A und A' ist isomorph zu A/B . Außerdem gilt der Isomorphiesatz: Seien I_1, I_2 Ideale von A und $I_1 \subset I_2$, dann ist

$$A/I_2 \cong A/I_1 / I_2/I_1$$

DEFINITION 1: Wir nennen eine Algebra A verallgemeinerte Liesche Algebra (VLA), wenn für alle $x, y, z \in A$ gilt

$$(x y) z = x(y z) - y(x z). \quad (1)$$

Sei A eine VLA, dann ist auch jede Unter algebra von A eine VLA. Da die Restklassenabbildung ein Homomorphismus ist, ist auch jede Restklassenalgebra einer VLA wieder eine VLA.

2. POTENZEN UND ABLEITUNGEN

DEFINITION 2: Wir nennen n -te Potenz einer Algebra A den Unterraum A^n , der aufgespannt wird von allen möglichen n -fachen Produkten der Elemente aus A .

Aus dieser Definition folgt sofort

$$A^{n+1} \subseteq A^n \quad \text{und} \quad (2)$$

$$A^n \cdot A^m \subseteq A^{n+m} \quad (3)$$

Für $n=1$ bzw. $m=1$ erhalten wir $A \cdot A^n$ bzw. $A^n \cdot A \subseteq A^{n+1} \subseteq A^n$, d.h. A^n ist ein Ideal von A .

DEFINITION 3: Wir nennen n -te Ableitung von A den Unterraum $A^{(n)}$, der definiert ist durch

$$A^{(0)} = A \quad \text{und} \quad (4)$$

$$A^{(n)} = A^{(n-1)} \cdot A^{(n-1)} \quad (5)$$

Offensichtlich gilt

$$A^{(n)} \subseteq A^{2n} \quad (6)$$

Insbesondere ist $A^{(1)} = A^2$

Aus $A^{(1)} \subseteq A = A^{(0)}$ erhalten wir durch vollständige Induktion

$$A^{(n+1)} = A^{(n)} \cdot A^{(n)} \subseteq A^{(n-1)} \cdot A^{(n-1)} = A^{(n)} \quad (7)$$

$A^{(n)}$ ist also Unter algebra von A .

BEHAUPTUNG 1: Ist A eine VLA, dann ist $A^{(n)}$ ein Ideal von A .

Beweis: $A^{(0)} = A$ ist Ideal in A . Sei $A^{(n-1)}$ Ideal in A . Für $x \in A$ und $y, z \in A^{(n-1)}$ gilt dann

$$A \cdot A^{(n)} = \mathfrak{L}(x(yz)) = \mathfrak{L}((xy)z + y(xz)) \subseteq A^{(n)} \quad \text{und} \\ A^{(n)} \cdot A = \mathfrak{L}((yz)x) = \mathfrak{L}(y(zx) - z(yx)) \subseteq A^{(n)}.$$

Sei f ein Homomorphismus von A in A' , dann gilt

$$h(A^n) = (h(A))^n \quad (8)$$

Durch vollständige Induktion erhalten wir auch

$$h(A^{(n)}) = (h(A))^{(n)} \quad (9)$$

Ist insbesondere ψ ein Automorphismus von A , dann gilt $\psi(A^n) = A^n$ und $\psi(A^{(n)}) = A^{(n)}$.

DEFINITION 4: Wir nennen eine Algebra A nilpotent, wenn es eine natürliche Zahl m gibt, so daß $A^m = 0$ ist. Die kleinste solche Zahl heißt Klasse von A . Wir nennen A auflösbar, wenn es ein k gibt, so daß $A^{(k)} = 0$ ist. Die kleinste solche Zahl heißt Index von A .

BEHAUPTUNG 2: Wenn $A^{(1)}$ nilpotent ist, dann ist A auflösbar.

Beweis: Sei $(A^{(1)})^m = 0$, für $m > 1$, dann ist $A^{(m)} = (A^{(1)})^{(m-1)} \subseteq (A^{(1)})^{2m-2} = 0$.

FOLGERUNG 1: Wenn A nilpotent ist, dann ist A auch auflösbar.

FOLGERUNG 2: Ist $A \neq 0$ auflösbar, dann ist $n = \dim A/A^{(1)} > 0$. n heißt Ordnung von A .

Die Umkehrung der Behauptung 2 gilt i.a. nicht. Z.B. ist für einen Körper K mit der Charakteristik 2 und A mit der Basis u, x, y, z und dem Multiplikationsschema

	u	x	y	z
u	0	x	$y+z$	z
x	x	0	0	$y+z$
y	$y+z$	0	0	0
z	z	$y+z$	0	0

$$A^{(1)} = L(x, y, z), \quad A^{(2)} = L(y, z), \quad A^{(3)} = (0) \\ \text{aber} \quad (A^{(1)})^2 = (A^{(1)})^3 = L(y, z).$$

3. LINKSERZEUGTE ALGEBREN

Sei I_n das Indexsystem, das besteht aus allen q -tupel der Zahlen $1, \dots, n$, wobei q alle natürlichen Zahlen durchläuft.

DEFINITION 5: Wir nennen eine Algebra A linkserzeugt von Elementen x_1, \dots, x_n , wenn für alle $x \in A$ gilt

$$x = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in I_n} a^{i_1 \dots i_p} x_{i_1} (x_{i_2} \dots x_{i_p}) \dots, \quad a^{i_1 \dots i_p} \in K \quad (10)$$

wobei $a^{i_1 \dots i_p} \neq 0$ für höchstens endlich viele Indizes.

A heißt frei linkserzeugt, wenn die Darstellung (10) eindeutig ist. Der Einfachheit halber schreiben wir im folgenden

$$x_{i_1} \dots x_{i_p} \text{ statt } x_{i_1}(x_{i_2} \dots x_{i_p}) \dots$$

Sei A linkserzeugt von x_1, \dots, x_n . Da die Restklassenabbildung homomorph ist, wird jede Restklassenalgebra \bar{A} von A linkserzeugt von den Restklassen $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$.

BEHAUPTUNG 3: Sei A eine VLA und $y_1, \dots, y_n \in A$. U_q sei die Gruppe der Permutationen von q Zahlen. Dann gibt es feste Koeffizienten $C^\omega \in K$, $\omega \in U_q$, so daß gilt

$$(y_{j_1} \dots y_{j_q}) \cdot (y_{i_1} \dots y_{i_p}) = \sum_{\omega \in U_q} c^\omega y_{\omega(j_1)} \dots y_{\omega(j_q)} y_{i_1} \dots y_{i_p}. \quad (11)$$

Der Unterraum $\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) = \mathfrak{L}(y_{j_1} \dots y_{j_q} \mid q=1, 2, \dots)$ ist also Unter algebra von A .

Beweis: Für $q=1$ ist $y_{j_1} \cdot (y_{i_1} \dots y_{i_p}) = y_{j_1} \cdot y_{i_1} \dots y_{i_p}$

Sei (11) richtig für $q < t$. Dann ist

$$\begin{aligned} (y_{j_1} \dots y_{j_t})(y_{i_1} \dots y_{i_p}) &= y_{j_1}((y_{j_2} \dots y_{j_t})(y_{i_1} \dots y_{i_p})) - (y_{j_2} \dots y_{j_t})(y_{j_1} y_{i_1} \dots y_{i_p}) \\ &= \sum_{\omega \in U_{t-1}} c_1^\omega y_{j_1} y_{\omega(j_2)} \dots y_{\omega(j_t)} y_{i_1} \dots y_{i_p} \\ &\quad - \sum_{\tau \in U_{t-1}} c_2^\tau y_{\tau(j_2)} \dots y_{\tau(j_t)} y_{j_1} y_{i_1} \dots y_{i_p} \\ &= \sum_{\omega \in U_t} c^\omega y_{\omega(j_1)} \dots y_{\omega(j_t)} y_{i_1} \dots y_{i_p}. \end{aligned}$$

BEHAUPTUNG 4: Sei A eine nilpotente VLA endlicher Dimension und von der Ordnung n . y_1, \dots, y_n seien modulo A^2 linear unabhängige Elemente von A . Dann ist $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$.

Beweis: Für $m=2$ ist $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) = \mathfrak{L}(y_1, \dots, y_n)$.

Sei $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$, wenn die Klasse von $A \leq m$ ist.

A habe die Klasse $m+1$. y_1, \dots, y_n seien modulo A^2 linear unabhängig. Dann ist $A/A^m = \mathfrak{R}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$, wobei \bar{y}_j die Restklasse von y_j ist. Also ist $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + A^m$. Es gibt daher einen Unterraum H von A , so daß $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) \oplus H$. Sei $z \in H \subset A^m$, dann ist z Summe von m -fachen Produkten von Elementen der Form $y+h$ mit $y \in \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$ und $h \in H$. Da $m > 1$ und $A \cdot H = H \cdot A = 0$, ist $z \in \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$, also $z=0$ und somit auch $H=0$.

BEHAUPTUNG 5: Sei A eine VLA endlicher Dimension und $A^{(1)}$ nilpotent. A habe die Ordnung n und $A^{(1)}$ die Ordnung r . y_1, \dots, y_n seien modulo $A^{(1)}$ linear unabhängige Elemente von A . H sei die Unter algebra $(\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) \cap A^{(1)}) + A^{(2)}$ und $s = \dim H/A^{(2)}$. Seien x_1, \dots, x_m , ($m=r-s$), modulo H linear unabhängige Elemente von $A^{(1)}$. Dann ist $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m)$.

Beweis: Seien x_1, \dots, x_m modulo H und $x_{m+1}, \dots, x_r \in \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) \cap A^{(1)}$ modulo $A^{(2)}$ linear unabhängige Elemente von $A^{(1)}$.

Nach Behauptung 4 wird $A^{(1)}$ linkserzeugt von x_1, \dots, x_r und es ist

$$A^{(1)} \subseteq \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m).$$

Da aber $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + A^{(1)}$ ist, gilt $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m)$.

Bemerkung: Wie das obige Beispiel zeigt, gilt die Behauptung 5 i.a. nicht für auflösbare VLA.

6. DIE ALGEBRA $A(n)$

Jedem $i \in I_n$ ordnen wir ein Element x_i zu und bilden die direkte Summe $A(n)$ über K der Vektorräume $A_i = \mathfrak{L}(x_i)$. In $A(n)$ definieren wir eine Multiplikation durch

$$x_{j_1} \cdot x_{i_1} \dots x_{i_p} = x_{j_1 i_1 \dots i_p} \quad (12)$$

$$x_{j_1 \dots j_q} \cdot x_{i_1 \dots i_p} = x_{j_1} \cdot (x_{j_2 \dots j_q} \cdot x_{i_1 \dots i_p}) - x_{j_2 \dots j_q} \cdot x_{j_1 i_1 \dots i_p} \quad (13)$$

und K -Linearität. $A(n)$ ist damit eine Algebra über K .

BEHAUPTUNG 6: $A(n)$ ist von x_1, \dots, x_n frei linkserzeugte VLA.

Beweis: Wegen (12) ist $\{x_{i_1} \dots x_{i_p}\} = \{x_{i_1 \dots i_p}\}$. Basis von $A(n)$. $A(n)$ ist also von x_1, \dots, x_n frei linkserzeugt. Wegen (12) und (13) gilt (1) für $x = x_j$ und alle $y, z \in A(n)$.

(1) gelte für $x = x_{j_1} \dots x_{j_q}$. Dann ist für $x = x_i \cdot x_{j_1} \dots x_{j_q} = x_i \cdot u_q$

$$\begin{aligned} (x y) z &= ((x_i u_q) y) z = (x_i (u_q y)) z - (u_q (x_i y)) z \\ &= x_i ((u_q y) z) - (u_q y) (x_i z) - u_q ((x_i y) z) + (x_i y) (u_q z) \\ &= x_i (u_q (y z)) - (u_q y) (x_i z) - u_q (x_i (y z)) + u_q (y (x_i z)) - y (x_i (u_q z)) \\ &= (x_i u_q) (y z) - y ((x_i u_q) z) \\ &= x (y z) - y (x z). \end{aligned}$$

BEHAUPTUNG 7: Sei A eine von y_1, \dots, y_n linkserzeugte VLA, dann ist A Restklassenalgebra von $A(n)$.

Beweis: Wir definieren eine Abbildung ψ von $A(n)$ in A durch $\psi(x_i) = y_i$, $\psi(x_{i_1} \dots x_{i_p}) = y_{i_1} \dots y_{i_p}$ und K -Linearität. Da $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$, ist ψ „auf“ und nach (11) ist ψ homomorph.

Sei $A(m, n)$ die Restklassenalgebra $A(n)/(A(n))^m$ ($m > 1$). $A(m, n)$ wird dann linkserzeugt von den Restklassen $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$. Da $(A(m, n))^m = \overline{(A(n))^m} = 0$, ist $A(m, n)$ nilpotent. Nach Behauptung 3 ist

$$(A(n))^m = \mathfrak{L}(x_{i_1} \dots x_{i_p}, p \geq m)$$

d.h. $\{\bar{x}_{i_1} \dots \bar{x}_{i_p}, p < m\}$ ist eine Basis von $A(m, n)$ und somit ist $\dim A(m, n) = (n^m - 1)/(n - 1)$.

SATZ 1: Jede nilpotente VLA A endlicher Dimension der Ordnung $\leq n$ und der Klasse $\leq m$ ist Restklassenalgebra von $A(m, n)$.

Beweis: Da A von den Basiselementen trivialerweise linkserzeugt wird, ist $A = A(n)/J$ und $J \supseteq (A(n))^m$. Nach dem Isomorphiesatz gilt dann

$$A = A(n)/J \cong A(n)/(A(n))^m / J / (A(n))^m = A(m, n)/I.$$

BEHAUPTUNG 8: Ein Automorphismus ψ von $A(m, n)$ ist bestimmt durch die Angabe der Bilder $\psi(\bar{x}_i)$ der Erzeugenden \bar{x}_i .

Umgekehrt ist jede lineare Abbildung ψ , die auf der Basis gegeben ist durch

$$\psi(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^n a_i^j \bar{x}_j + \sum_{q=2}^{m-1} a_i^{j_1 \dots j_q} x_{j_1} \dots x_{j_q} \quad \text{und}$$

$$\psi(\bar{x}_{i_1} \dots \bar{x}_{i_p}) = \psi(\bar{x}_{i_1}) \cdot \dots \cdot \psi(\bar{x}_{i_p}).$$

mit $\det(a_i^j) \neq 0$ ein Automorphismus von $A(m, n)$.

Beweis: 1) Da ψ ein Automorphismus ist, ist ψ auf den Basiselementen gegeben durch $\psi(\bar{x}_{i_1} \dots \bar{x}_{i_p}) = \psi(\bar{x}_{i_1}) \cdot \dots \cdot \psi(\bar{x}_{i_p})$.

2) Wegen (11) ist ψ homomorph. Sei $\bar{\psi}$ der Endomorphismus, der gegeben ist durch $\bar{\psi}(\bar{x}_i) = \sum_{j=1}^n a_i^j \bar{x}_j$ und $\bar{\psi}(\bar{x}_{i_1} \dots \bar{x}_{i_p}) = \bar{\psi}(\bar{x}_{i_1}) \cdot \dots \cdot \bar{\psi}(\bar{x}_{i_p})$. $\bar{\psi}$ ist invertierbar, da $\det(a_i^j) \neq 0$, $\bar{\psi}^{-1} \circ \psi$ wird also durch eine Dreiecksmatrix dargestellt, ist daher ebenfalls invertierbar. Also ist auch $\psi = \bar{\psi} \circ (\bar{\psi}^{-1} \circ \psi)$ invertierbar, d.h. ψ ist ein Automorphismus.

5. KONJUGIERTE IDEALE

Wir nennen zwei Ideale I_1 und I_2 einer Algebra A konjugiert, wenn es einen Automorphismus ψ von A gibt, so daß $\psi(I_1) = I_2$ ist. Sind zwei Ideale konjugiert, dann sind ihre Restklassenalgebren isomorph, denn $A/I_1 = \psi(A)/\psi(I_1) = A/I_2$. In $A(m, n)$ gilt auch die Umkehrung:

BEHAUPTUNG 9: Seien I_1 und I_2 Ideale von $A(m, n)$ und η ein Isomorphismus von $A(m, n)/I_1$ auf $A(m, n)/I_2$, dann sind I_1 und I_2 konjugierte Ideale von $A(m, n)$.

Beweis: Sei h_v der Restklassenhomomorphismus von $A(m, n)$ auf $A(m, n)/I_v$. Da $A(m, n)$ ein Vektorraum endlicher Dimension ist, gibt es eine bijektive lineare Abbildung ψ' von $A(m, n)$ auf $A(m, n)$, so daß

$$h_2 \psi' = \eta h_1 \quad \text{und} \quad \psi'(I_1) = I_2.$$

Also ist $\psi'(\bar{x}\bar{y}) - \psi'(\bar{x}) \cdot \psi'(\bar{y}) \in I_2$ für alle $\bar{x}, \bar{y} \in A(m, n)$. Sei ψ der durch $\psi(\bar{x}_i) = \psi'(\bar{x}_i)$ definierte Automorphismus von $A(m, n)$. Da $A(m, n)$ von $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ linkserzeugt ist, gilt $\psi(\bar{y}) - \psi'(\bar{y}) \in I_2$, also $h_2 \psi(\bar{y}) = h_2 \psi'(\bar{y}) = \eta h_1(\bar{y})$ für alle $\bar{y} \in A(m, n)$ und somit $h_2 \psi(I_1) = 0$ oder $\psi(I_1) \subseteq I_2$. Da ψ bijektiv ist, gilt $\psi(I_1) = I_2$.

Sei $\mathfrak{I}(A)$ die Menge der Ideale in A . Die Automorphismusgruppe $\mathfrak{A}(A)$ von A definiert dann eine Äquivalenzrelation auf $\mathfrak{I}(A)$. Wir bezeichnen die Menge der Klassen konjugierter Ideale von A mit $\mathfrak{I}(A)/\mathfrak{A}(A)$.

SATZ 2: Sei $\mathfrak{N}(m, n)$ die Menge aller nicht isomorpher nilpotenter VLA der Ordnung

$\leq n$ und der Klasse $\leq m$, dann ist

$$\mathfrak{H}(m, n) = \mathfrak{I}(A(m, n)) / \mathfrak{A}(m, n)$$

Beweis: Zwei Restklassenalgebren von $A(m, n)$ sind genau dann nicht isomorph, wenn die zugehörigen Ideale nicht konjugiert sind. Aus Satz 1 folgt dann die Behauptung.

§ 2. Nilpotente Liesche Algebren

1. LIESCHE ALGEBREN

Eine Algebra g über K heißt Liesche Algebra, wenn die Multiplikation den Bedingungen genügt

$$x \cdot x = 0 \quad (14)$$

$$x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0 \quad (15)$$

für alle $x, y, z \in g$.

Aus (14) folgt $x \cdot y + y \cdot x = 0$. Damit läßt sich (15) auch in der Form schreiben

$$(xy)z = x(yz) - y(xz) \quad (15')$$

Eine Liesche Algebra ist also VLA und somit Restklassenalgebra einer $A(n)$. Sei $J(n)$ das Ideal von $A(n)$, das erzeugt wird von den Elementen der Form $x \cdot x$, $x \in A(n)$. Dann gilt

$$x(yz) + y(zx) + z(xy) \in J(n)$$

für alle $x, y, z \in A(n)$. Die Restklassenalgebra

$$g(n) = A(n)/J(n)$$

ist also eine Liesche Algebra. Sei $g = A(n)/J$ eine Liesche Algebra, dann ist wegen (14) $J(n) \subseteq J$. Nach dem Isomorphiesatz ist g dann Restklassenalgebra von $g(n)$.

2. DIE ALGEBRA $g(m, n)$

Sei $J(m, n) = J(n) + (A(n))^m$, dann ist die Restklassenalgebra

$$g(m, n) = A(n)/J(m, n)$$

eine Liesche Algebra der Ordnung n .

BEHAUPTUNG 10: $g(m, n)$ hat die Klasse m .

Beweis: Sei m' die Klasse von $g(m, n)$, dann ist $m' \leq m$. Sei $m' < m$, dann ist $(A(n))^{m'} \subseteq J(n) + (A(n))^m$. Jede Restklassen-Lie-Algebra g von $A(n)$ mit $g^m = 0$ hat also höchstens die Klasse $m' < m$. Das ist aber nicht richtig, denn z.B. die von den Elementen x_1, \dots, x_n erzeugte Liesche Algebra mit dem Multiplikationsschema $x_1 x_2 = y_3, \dots, x_1 y_i = y_{i+1}$ ($i = 3, \dots, m-1$), $x_1 y_m = 0$, $x_i x_j = 0$ ($i < j$) sonst $x_i y_j = 0$ für $i \geq 2$ und $x_i x_j = -x_j x_i$, $x_i y_j = -y_j x_i$ hat genau die Ordnung m .

SATZ 3: Jede nilpotente Liesche Algebra g der Klasse $\leq m$ und der Ordnung $\leq n$ ist Restklassenalgebra von $g(m, n)$ nach einem Ideal I .

Beweis: Sei $g \cong A(n)/J$, dann ist $J(m, n) \subseteq J$. Nach dem Isomorphiesatz gilt dann für $I = J/J(m, n)$

$$g \cong A(n)/J \cong A(n)/J(m, n) \Big/ J/J(m, n) = g(m, n)/I$$

3. AUTOMORPHISMENGRUPPEN

Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(m, n)$ der Algebra $A(m, n)$ ist nach Behauptung 8 gegeben durch die $n \times (n^m - 1/n - 1)$ -Matrizen der Gestalt

$$(A : B)$$

mit $\det A \neq 0$.

BEHAUPTUNG 11: Sei I ein Ideal von $A(m, n)$ und ε die Identität auf $A(m, n)$. Wir setzen

$$\mathfrak{A}_I(m, n) = \{\psi \in \mathfrak{A}(m, n) \mid \psi(I) = I\} \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{E}_I(m, n) = \{\psi \in \mathfrak{A}(m, n) \mid (\varepsilon - \psi)(A(m, n)) \subseteq I\}$$

Dann gilt

- 1) $\mathfrak{A}_I(m, n)$ ist Untergruppe von $\mathfrak{A}(m, n)$.
- 2) $\mathfrak{E}_I(m, n)$ ist Normalteiler von $\mathfrak{A}_I(m, n)$.
- 3) $\psi \in \mathfrak{A}_I(m, n)$ definiert einen Automorphismus η von $g = A(m, n)/I$

und es ist $\eta_1 = \eta_2$ genau dann, wenn $\psi_1(x_i) - \psi_2(x_i) \in I$.

Beweis: 1) Seien $\psi, \psi' \in \mathfrak{A}_I(m, n)$, dann ist $\psi^{-1}(I) = I$ und $\psi \circ \psi'(I) = I$, also $\psi^{-1}, \psi \circ \psi' \in \mathfrak{A}_I(m, n)$.

2) Seien $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{E}_I(m, n)$ und $\psi \in \mathfrak{A}_I(m, n)$. Dann ist $\psi_1^{-1} \circ (\varepsilon - \psi_1)(x) = (\psi_1^{-1} - \varepsilon) \times (x) \in I$ und $(\varepsilon - \psi_1 \circ \psi_2)(x) = (\varepsilon - \psi_1) \circ (\varepsilon + \psi_2)(x) + (\psi_1 - \varepsilon)(x) + (\varepsilon - \psi_2)(x) \in I$ für alle $x \in A(m, n)$, also ψ_1^{-1} und $\psi_1 \circ \psi_2 \in \mathfrak{E}_I(m, n)$. Wegen $(\psi^{-1} \circ \psi_1 \circ \psi - \varepsilon)(x) = (\psi^{-1} \circ (\psi_1 - \varepsilon) \circ \psi)(x) \in I$ ist auch $\psi^{-1} \circ \psi_1 \circ \psi \in \mathfrak{E}_I(m, n)$.

3) Sei h der Restklassenhomomorphismus von $A(m, n)$ auf g , dann ist η gegeben durch $\eta h(A(m, n)) = h\psi(A(m, n))$. Sei $\psi_1(x_i) - \psi_2(x_i) \in I$ und $\psi_1(x_{i_1} \dots x_{i_p}) - \psi_2(x_{i_1} \dots x_{i_p}) \in I$ für $p < t < m$, dann ist auch $\psi_1(x_{i_1} \dots x_{i_t}) - \psi_2(x_{i_1} \dots x_{i_t}) = \psi_1(x_{i_1}) \cdot (\psi_1(x_{i_2} \dots x_{i_t}) - \psi_2(x_{i_2} \dots x_{i_t})) + (\psi_1(x_{i_1}) - \psi_2(x_{i_1})) \cdot \psi_2(x_{i_2} \dots x_{i_t}) \in I$. Für alle $x \in A(m, n)$ gilt daher $\eta_1 h(x) - \eta_2 h(x) = h(\psi_1 - \psi_2)(x) = 0$, also $\eta_1 = \eta_2$. Wenn es ein $x_{i_0} \in A(m, n)$ gibt, so daß $\psi_1(x_{i_0}) - \psi_2(x_{i_0}) \notin I$, dann ist $\eta_1 h(x_{i_0}) - \eta_2 h(x_{i_0}) = h(\psi_1 - \psi_2)(x_{i_0}) \neq 0$, also $\eta_1 \neq \eta_2$.

SATZ 4: Sei g die Automorphismengruppe von g , dann gilt

$$g \cong \mathfrak{A}_I(m, n)/\mathfrak{E}_I(m, n)$$

Für $g = g(m, n)$ ist insbesondere

$$g(m, n) \cong \mathfrak{A}(m, n)/\mathfrak{E}(m, n)$$

Beweis: Nach Behauptung 9 läßt sich jeder Automorphismus von g fortsetzen zu einem Automorphismus von $A(m, n)$, der I invariant läßt. Die Isomorphie folgt dann aus Behauptung 11. Da $J(m, n)$ invariant ist unter den Automorphismen von $A(m, n)$, ist $\mathfrak{A}_{J(m, n)}(m, n) = \mathfrak{A}(m, n)$.

4. KONJUGIERTE IDEALE IN $g(m, n)$

BEHAUPTUNG 12: Seien I_1 und I_2 Ideale in $g(m, n)$, so daß $g(m, n)/I_1$ isomorph ist zu $g(m, n)/I_2$. Dann sind I_1 und I_2 konjugiert.

Beweis: Seien J_1 und J_2 die vollen Urbilder von I_1 und I_2 in $A(m, n)$, dann ist nach dem Isomorphiesatz $A(m, n)/J_1 \cong A(m, n)/J_2$. Es gibt also einen Automorphismus ψ von $A(m, n)$, so daß $\psi(J_1) = J_2$.

Nach Behauptung 11,3) ist dann

$$I_2 = h(J_2) = h\psi(J_1) = \eta h(J_1) = \eta(I_1).$$

SATZ 5: Sei $\mathfrak{B}(m, n)$ die Menge der Klassen nicht isomorpher nilpotenter Liescher Algebren der Ordnung $\leq n$ und der Klasse $\leq m$, dann ist

$$\mathfrak{B}(m, n) = \mathfrak{I}(g(m, n))/g(m, n).$$

Beweis: Zwei Restklassenalgebren von $g(m, n)$ sind nach Behauptung 12 genau dann nicht isomorph, wenn die zugehörigen Ideale nicht konjugiert sind. Aus Satz 3 folgt dann die Behauptung.

§ 3. Vollständig zerlegbare auflösbare Liesche Algebren

1. ZERLEGBARE ALGEBREN

A sei im folgenden stets eine VLA. Wir definieren in Anlehnung an die Cartansche Zerlegung Liescher Algebren:

DEFINITION 5: Wir nennen eine VLA zerlegbar, wenn es in A eine nilpotente Unteralgebra A^0 gibt und ein endliches System Δ von Linearformen über A^0 ($0 \notin \Delta$), derart, daß jedem $\alpha \in \Delta$ ein Unterraum A^α von A zugeordnet werden kann, so daß gilt

$$A = \bigoplus A^\alpha, \quad \Sigma = \Delta \cup (0) \quad (16)$$

$$A^\alpha A^\beta \subseteq \begin{cases} A^{\alpha+\beta}, & \text{wenn } \alpha + \beta \in \Sigma \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (17)$$

$$\bigoplus_{\alpha \in \Sigma} A^\alpha \subseteq A^{(1)} \quad (18)$$

Wir nennen Σ das System der Wurzelformen von A .

Wegen (18) gilt $A = A^0 + A^{(1)}$.

BEHAUPTUNG 13: Sei A zerlegbar, von der Ordnung $n > 0$ und $A^{(1)}$ nilpotent. $y_1, \dots, y_n \in A^0$ seien modulo $A^{(1)}$ linear unabhängig. Dann gilt:

- 1) $H = \mathfrak{L}(A^\alpha \cdot A^{-\alpha}, \alpha \in \Delta)$ ist Ideal von A^0 .
- 2) $A^0 = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + H$, also $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + A^{(1)}$
- 3) $(A^0)^{(1)} \subseteq (\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n))^{(1)} + H$.

Beweis: 1) Nach (17) ist

$$A^0 \cdot (A^\alpha \cdot A^{-\alpha}) \subseteq \mathfrak{L}((A^0 \cdot A^\alpha) \cdot A^{-\alpha}, \quad A^\alpha \cdot (A^0 \cdot A^{-\alpha})) \subseteq H \quad \text{und} \\ (A^\alpha \cdot A^{-\alpha}) \cdot A^0 \subseteq \mathfrak{L}(A^\alpha \cdot (A^{-\alpha} \cdot A^0), \quad A^{-\alpha} \cdot (A^\alpha \cdot A^0)) \subseteq H.$$

H ist also Ideal von A^0 . $\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + H$ ist daher Unteralgebra von A^0 .

2) Wegen (16) gilt

$$A^{(1)} = ((A^0)^{(1)} + H) \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} A^\alpha \quad (19)$$

Da $A^0 = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + (A^0 \cap A^{(1)})$, ist $A^0 = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + H + (A^0)^{(1)}$. Da A^0 nilpotent ist, wird es erzeugt von y_1, \dots, y_n und gewissen Elementen von H . Wegen 1) ist daher $A^0 = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + H$.

3) Folgt aus 1) und 2)

Sei A zerlegbar. Wir nennen $\alpha \in \Delta$ einfach, wenn $d_\alpha = \dim A^\alpha / A^\alpha \cap A^{(2)} > 0$.

BEHAUPTUNG 14: Sei A zerlegbar und $A^{(1)}$ nilpotent. Wenn A selbst nicht nilpotent ist, dann gibt es in Δ einfache Wurzelformen.

Beweis: Sei $\bigoplus_{\alpha \in \Delta} A^\alpha \subseteq A^{(2)}$. Dann ist nach (19) $A^{(1)} = (A^0)^{(1)} + A^{(2)}$. Da $A^{(1)}$ nilpotent ist, wird es linkserzeugt von Elementen aus $(A^0)^{(1)}$, also ist $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + A^{(1)} \subseteq \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + (A^0)^{(1)} \subseteq A^0$ und damit nilpotent.

Sei A zerlegbar und $A^{(1)}$ nilpotent. Dann wird A nach Behauptung 5 linkserzeugt von y_1, \dots, y_n und von Elementen $x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^{d_\alpha} \in A^\alpha$, wobei $\alpha \in \Delta$ einfach ist. Im folgenden seien x_1, \dots, x_m die durchlaufend numerierten Erzeugenden x_α^i und $\Pi = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ das System der zu x_i gehörenden einfachen Wurzelformen, in dem α_i gerade d_{α_i} -mal vorkommt.

DEFINITION 6: Sei A zerlegbar und $A^{(1)}$ nilpotent. Wir nennen A vollständig zerlegbar, wenn es ein Erzeugendensystem $y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m$ gibt mit $y_j \in A^0$ und $x_i \in A^{\alpha_i}$, so daß gilt

$$y \cdot x_i = \alpha_i(y) x_i \quad (20)$$

$$x_i \cdot y = -\alpha_i(y) x_i \quad (21)$$

für alle $y \in \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$ und $\alpha_i(x) = 0$ für $x \in A^0 \cap \mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m)$.

Aus (1) und (11) erhalten wir die Rechenregeln:

$$y_j \cdot (x_{i_1} \cdots x_{i_p}) = \sum_{v=1}^p \alpha_{i_v}(y_j) \cdot x_{i_1} \cdots x_{i_p} \quad (22)$$

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_p}) y_j = \sum_{\omega \in U_p} c^\omega \cdot \alpha_{\omega(i_p)}(y_j) \cdot x_{\omega(i_1)} \cdots x_{\omega(i_p)}. \quad (23)$$

$$(x_{i_1} \cdots x_{i_p}) \cdot (y_{j_1} \cdots y_{j_q}) = (y_{j_1} \cdots y_{j_q}) \cdot (x_{i_1} \cdots x_{i_p}) = 0 \quad \text{für } q \geq 2 \quad (24)$$

Außerdem ist

$$\alpha_i(y_{j_1} \cdots y_{j_q}) = 0 \quad \text{für } q \geq 2. \quad (25)$$

Die α_i sind also Linearformen über $\mathfrak{L}(y_1, \dots, y_n)$.

Im übrigen sind die α_i frei wählbar.

Wegen (22) bis (25) ist

$$A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + \mathfrak{R}(x_1 \dots x_m).$$

Außerdem sind $(\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n))^{(1)}$ und $\mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m)$ Ideale von A .

BEHAUPTUNG 15: Sei A vollständig zerlegbar bezüglich $y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m$, dann gilt

$$A^0 = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + \mathfrak{L}(x_{i_1} \cdots x_{i_p} \mid \sum_{r=1}^p \alpha_{i_r} = 0) \quad (26)$$

$$A^\beta = \mathfrak{L}(x_{i_1} \cdots x_{i_p} \mid \sum_{v=1}^p \alpha_{i_v} = \beta) \quad \text{für alle } \beta \in \Delta. \quad (27)$$

Beweis: Wegen (17) ist

$$\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + \mathfrak{L}(x_{i_1} \cdots x_{i_p} \mid \sum_{v=1}^p \alpha_{i_v} = 0) \subseteq A^0 \quad \text{und}$$

$$\mathfrak{L}(x_{i_1} \cdots x_{i_p} \mid \sum_{v=1}^p \alpha_{i_v} = \beta) \subseteq A^\beta$$

Für $x_{i_1} \cdots x_{i_p} \neq 0$ ist $\beta = \sum_{v=1}^p \alpha_{i_v} \in \Sigma$. Da $A = \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n) + \mathfrak{R}(x_1, \dots, x_m) = \mathfrak{L}(y_{j_1} \cdots y_{j_q}, x_{i_1} \cdots x_{i_p})$ gilt jeweils Gleichheit.

Jede Wurzelform $\beta \in \Sigma$ ist also von der Form

$$\beta = \sum_{i=1}^m p^i \alpha_i, \quad \alpha_i \in \Pi \quad (28)$$

wobei $p^i \in N$, wenn $\chi(K) = 0$ und $p^i \in \Gamma_p$, wenn $\chi(K) = p$.

2. DIE ALGEBRA $G(m, n, r, s, \Pi)$

Sei $A(m+n)$ die von den Elementen $y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m$ frei linkserzeugte VLA. Π sei ein System von m Linearformen $\alpha_1, \dots, \alpha_m \neq 0$ über $\mathfrak{L}(y_1, \dots, y_n)$. Wir betrachten in $A(m+n)$ die folgenden Ideale:

1) Das Ideal $I(\Pi)$, das erzeugt wird von den Elementen

$$y_j \cdot x_i - \alpha_i(y_j) \cdot x_i \quad \text{und} \quad (29)$$

$$x_i \cdot y_j + \alpha_i(y_j) \cdot x_i \quad (30)$$

2) Das Ideal $I(r, s)$, das erzeugt wird von den Elementen

$$y_{j_1} \cdots y_{j_q}, \quad q \geq s \quad \text{und} \quad (31)$$

$$x_{i_1} \cdots x_{i_p}, \quad p \geq r \quad (32)$$

3. DAS IDEAL $J(m+n)$

Wir bezeichnen mit B die Restklassenalgebra $A(m+n)/I(\Pi)$ und mit $G(m, n, r, s, \Pi)$ oder kurz G die Liesche Algebra $A(m+n)/(I(\Pi) + I(r, s) + J(m+n))$.

BEHAUPTUNG 16: Die Restklassen $\bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_p}$ und $\bar{y}_{j_1} \cdots \bar{y}_{j_q}$ bilden eine Basis von B .

Beweis: Sei $\sum \lambda^{i_1 \cdots i_p} \cdot \bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_p} + \sum \eta^{j_1 \cdots j_q} \cdot \bar{y}_{j_1} \cdots \bar{y}_{j_q} = 0$, dann ist $\sum \lambda^{i_1 \cdots i_p} \cdot x_{i_1} \cdots x_{i_p} + \sum \mu^{j_1 \cdots j_q} \cdot y_{j_1} \cdots y_{j_q} \in I(\Pi)$. Wegen (29) und (30) enthält aber jedes Element $z \neq 0$ aus $I(\Pi)$ mindestens einen Summanden bestehend aus Faktoren x_i und y_j . Also ist $\lambda^{i_1 \cdots i_p} = \mu^{j_1 \cdots j_q} = 0$.

Da das System $\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n$ linear unabhängig ist, können wir die α_i als Linearformen über $\mathfrak{L}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ auffassen, so daß gilt $\alpha_i(\bar{y}_j) = \alpha_i(y_j)$. Analog zu (22) bis (24) erhalten wir dann die Rechenregeln

$$\bar{y}_j \cdot (\bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_p}) = \sum_{v=1}^p \alpha_{i_v}(\bar{y}_j) \cdot \bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_p} \quad (33)$$

$$(\bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_p}) \cdot \bar{y}_j = \sum_{\omega \in U_p} c^\omega \alpha_{\omega(i_p)}(\bar{y}_j) \cdot \bar{x}_{\omega(i_1)} \cdots \bar{x}_{\omega(i_p)}. \quad (34)$$

$$(\bar{y}_{j_1} \cdots \bar{y}_{j_q}) \cdot (\bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_p}) = (\bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_p}) \cdot (\bar{y}_{j_1} \cdots \bar{y}_{j_q}) = 0 \quad \text{für} \quad q \geq 2 \quad (35)$$

BEHAUPTUNG 17: Sei Δ die Menge der verschiedenen Linearformen der Gestalt $\beta = \sum_{i=1}^m p^i \cdot \alpha_i, \alpha_i \in \Pi$, wobei $p^i \in N$, wenn $\chi(K) = 0$ und $p^i \in \Gamma_p$, wenn $\chi(K) = p$. Sei $\Sigma = \Delta \cup (0)$. Wir setzen

$$B^0 = \mathfrak{R}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n) + \mathfrak{L}(\bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_p} \mid \sum_{v=1}^p \alpha_{i_v} = 0), \quad (36)$$

$$B^\beta = \mathfrak{L}(\bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_p} \mid \sum_{v=1}^p \alpha_{i_v} = \beta). \quad (37)$$

Dann gilt

$$B = \bigoplus_{\beta \in \Sigma} B^\beta \quad (38)$$

$$B^\beta \cdot B^r \subseteq B^{\beta+r} \quad (39)$$

$$\bigoplus_{\beta \in \Delta} B^\beta \subseteq B^{(1)} \quad (40)$$

$$\bar{y}_j \cdot \bar{x}_i = -\bar{x}_i \cdot \bar{y}_j = \alpha_i(y_j) \cdot \bar{x}_i \quad (41)$$

Beweis: (38) und (39) folgen aus Behauptung 16 und (11). Für $\alpha_i(\bar{y}_j) \neq 0$ ist $\bar{x}_i = (1/\alpha_i(y_j)) \cdot y_j \cdot x_i \in B^{(1)}$, also gilt (40). Aus (29) und (30) schließlich folgt (41).

BEHAUPTUNG 18: *G ist vollständig zerlegbare auflösbare Liesche Algebra.*

Beweis: Aus dem Isomorphiesatz erhalten wir

$$G \cong B / (\overline{I(r, s) + J(m + n)})$$

$\overline{I(r, s) + J(m + n)}$ wird erzeugt von Elementen der Form $\bar{y}_{j_1} \cdots \bar{y}_{j_q}, q \geq s, \bar{x}_{i_1} \cdots \bar{x}_{i_p}, p \geq r$ und $(\bar{y}_{l_1} \cdots \bar{y}_{l_s}) \cdot (\bar{y}_{l_1} \cdots \bar{y}_{l_s}), (\bar{x}_{k_1} \cdots \bar{x}_{k_r}) \cdot (\bar{x}_{k_1} \cdots \bar{x}_{k_r})$.

Jede solche Erzeugende liegt in einem B^β . Daher ist

$$\overline{I(r, s) + J(m + n)} = \bigoplus_{\beta \in \Sigma} J^\beta \quad \text{mit} \quad J^\beta \subseteq B^\beta$$

Der Homomorphismus h von B auf G erhält also die Zerlegung, d.h. für $G^\beta = h(B^\beta)$ und $\Delta_G = \{\beta \in \Delta \mid G^\beta \neq 0\}$ ist

$$G = \bigoplus_{\beta \in \Sigma \cap \Delta} G^\beta$$

Weiter gilt

$$G^\beta \cdot G^r = h(B^\beta \cdot B^r) \subseteq h(B^{\beta+r}) = G^{\beta+r} \quad \text{und}$$

$$\bigoplus_{\beta \in \Delta \cap G} G^\beta = h\left(\bigoplus_{\beta \in \Delta} B^\beta\right) \subseteq h(B^{(1)}) = G^{(1)}$$

Da $\overline{I(r, s) + J(m + n)} \subseteq B^{(1)}$, sind die $\hat{y}_j = h(\bar{y}_j)$ linear unabhängig.

Mit $\alpha_i(\hat{y}_j) = \alpha_i(\bar{y}_j)$ folgt dann aus (41)

$$\hat{y}_j \cdot \hat{x}_i = -\hat{x}_i \cdot \hat{y}_j = \alpha_i(\hat{y}_j) \cdot \hat{x}_i.$$

Da $\hat{y}_{j_1} \cdots \hat{y}_{j_q} = \hat{x}_{i_1} \cdots \hat{x}_{i_p} = 0$ für $q \geq s, p \geq r$, sind nach Behauptung 16 G^0 und $G^{(1)}$ nilpotent. G ist also vollständig zerlegbare Liesche Algebra.

SATZ 6: Sei $g = \bigoplus_{\beta \in \Delta_g} g^\beta$ eine vollständig zerlegbare Liesche Algebra mit $g^{(1)}$ nilpotent, dem Erzeugendensystem $y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m$ und den einfachen Wurzelformen $\alpha_1, \dots, \alpha_m$. $\mathfrak{K}(y_1, \dots, y_n)$ bzw. $\mathfrak{K}(x_1, \dots, x_m)$ habe die Klasse s bzw. r . Dann ist g Restklassenalgebra von $G = G(m, n, r, s, \Pi)$ nach einem Ideal. Sei η der Restklassenhomomorphismus, dann gilt

$$\Delta_g \subseteq \Delta_G$$

$$\eta(G^\beta) = \begin{cases} g^\beta & \text{für } \beta \in \Delta_g \\ 0 & \text{für } \beta \notin \Delta_g \end{cases}$$

Beweis: $A'(m+n)$ werde von $y'_1, \dots, y'_n, x'_1, \dots, x'_m$ frei linkserzeugt. Nach Behauptung 7 gibt es einen Isomorphismus ϕ von g auf eine Restklassenalgebra von $A'(m+n)$ nach einem Ideal $J'(g)$ derart, daß $\phi(y_j) = h(y'_j)$ und $\phi(x_i) = h(x'_i)$, wenn h die Restklassenabbildung ist. Setzen wir $\alpha_i(y_j) = \alpha_i(y'_j)$, dann liegen die Erzeugenden von

$I'(\Pi)$, $I'(r, s)$ und $J'(m+n)$ in $J'(g)$, also $I'(\Pi) + I'(r, s) + J'(m+n) \subseteq J'(g)$. Nach dem Isomorphiesatz gibt es dann einen Isomorphismus ψ von g auf $\widehat{G'/J'(g)}$, so daß $\psi(y_j) = \eta(\hat{y}'_j)$ und $\psi(x_i) = \eta(\hat{x}'_i)$. Nach Behauptung 15 und 18 gilt für alle $\beta \in \Delta_g$

$$\psi(g^\beta) = \eta(G'^\beta),$$

wobei $g^\beta = 0$ für $\beta \notin \Delta_g$. Außerdem ist

$$\psi(g) = \bigoplus_{\beta \in \Delta_g} \psi(g^\beta) = \bigoplus_{\beta \in \Delta_g} \eta(G'^\beta) = \bigoplus_{\beta \in \Delta_{G'}} \eta(G'^\beta).$$

3. BESTIMMUNG DER $G(m, n, r, s, \Pi)$ BIS AUF ISOMORPHIE

Seien $\Pi = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ und $\Pi' = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_m)$ zwei Systeme von m Linearformen über den n -dimensionalen Vektorräumen V_n bzw. V'_n . Sei y_1, \dots, y_n eine Basis von V_n . Wir nennen Π und Π' äquivalent, wenn es in V'_n eine Basis y'_1, \dots, y'_n gibt, so daß gilt

$$\alpha_i(y_j) = \alpha'_{\omega(i)}(y'_j) \quad (42)$$

wobei $\omega \in U_m$ eine Permutation von m Zahlen ist. Diese Äquivalenz ist offensichtlich unabhängig von der Wahl der Basis in V_n .

SATZ 7: Π und Π' seien zwei äquivalente Systeme von m nicht identisch verschwindenden Linearformen über V_n bzw. V'_n . Dann ist

$$G(m, n, r, s, \Pi) \cong G'(m, n, r, s, \Pi').$$

Beweis: In V_n bzw. V'_n gibt es Basen y_1, \dots, y_n bzw. y'_1, \dots, y'_n , so daß

$$\alpha_i(y_j) = \alpha'_{\omega(i)}(y'_j).$$

Die Algebren $A(m+n)$ bzw. $A'(m+n)$ seien frei linkserzeugt von $y_1, \dots, y_n, x_1, x_2, \dots, x_m$ bzw. $y'_1, \dots, y'_n, x'_1, \dots, x'_m$. Die Abbildung φ , die definiert ist durch

$$\begin{aligned} \varphi(y_j) &= y'_j, \quad \varphi(x_i) = x'_{\omega(i)} \\ \varphi(z_1 \dots z_p) &= \varphi(z_1) \varphi(z_2 \dots z_p) \quad \text{für } z_i \in \{y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m\} \end{aligned}$$

und K -Linearität ist ein Isomorphismus von $A(m+n)$ auf $A'(m+n)$.

Da $\varphi(y_j x_i - \alpha_i(y'_j) x_i) = y'_j \cdot x'_{\omega(i)} - \alpha'_{\omega(i)}(y'_j) \cdot x'_{\omega(i)}$ und $\varphi(y_j \cdot x_i + \alpha_i(y_j) \cdot x_i) = y'_j \cdot x'_{\omega(i)} + \alpha'_{\omega(i)}(y'_j) \cdot x'_{\omega(i)}$ ist $\varphi(I(\Pi)) = I'(\Pi')$. Außerdem ist $\varphi(I(r, s)) = I'(r, s)$ und $\varphi(J(m+n)) = J'(m+n)$. Also gilt

$$\begin{aligned} G(m, n, r, s, \Pi) &\cong A(m+n)/(I(\Pi) + I(r, s) + J(m+n)) \\ &\cong A'(m+n)/(I'(\Pi') + I'(r, s) + J'(m+n)) \\ &= G'(m, n, r, s, \Pi'). \end{aligned}$$

SATZ 8: g sei vollständig zerlegbare Liesche Algebra und $g^{(1)}$ nilpotent. Dann gibt es in g bis auf Äquivalenz genau ein System Π einfacher Wurzelformen.

Beweis: Da das System Π von g gleich ist dem System $\bar{\Pi}$ von $g/g^{(2)}$, können wir $g^{(2)}=0$ voraussetzen.

g sei vollständig zerlegbar bezüglich der Systeme Π bzw. Π' und der Erzeugenden $y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m$ bzw. $y'_1, \dots, y'_n, x'_1, \dots, x'_m$. Durch eine lineare Transformation über $\mathfrak{L}(y'_1, \dots, y'_n)$ können wir erreichen, daß

$$y'_j = y_j + \sum_{I'_n} a_j^{v_1 \dots v_q} \cdot y_{v_1} \cdot \dots \cdot y_{v_q} + \sum_{v=1}^m b_j^v \cdot x_v, \quad q \geq 2.$$

Dabei ist $I'_n \subseteq I_n$ die Indexmenge, für die das System $\{y_{v_1} \cdot \dots \cdot y_{v_q}, (v_1, \dots, v_q) \in I_n\}$ linear unabhängig ist.

Da $x'_k \in g^{(1)}$ ist, gilt

$$x'_k = \sum_{\lambda=1}^m c_k^\lambda x_\lambda + \sum_{I'_n} d_k^{\lambda_1 \dots \lambda_p} y_{\lambda_1} \cdot \dots \cdot y_{\lambda_p}, \quad p \geq 2$$

Sei $\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$ von der Klasse s , dann ist

$$(\alpha'_k(y'_j))^s x'_k = y'_j \cdot \dots \cdot y'_j \cdot x'_k = y_j \cdot \dots \cdot y_j \cdot \left(\sum_{\lambda=1}^m c_k^\lambda \cdot x_\lambda \right) = \sum_{\lambda=1}^m c_k^\lambda (\alpha_\lambda(y_j))^s \cdot x_\lambda$$

Da $\alpha'_k \neq 0$, ist also $d_k^{\lambda_1 \dots \lambda_p} = 0$ und somit $x'_k = \sum_{\lambda=1}^m c_k^\lambda x_\lambda$. Da die x'_k linear unabhängig sind, ist $m' \leq m$. Analog erhalten wir $m \leq m'$, so daß also $m' = m$ und $\det(c_k^\lambda) \neq 0$. Wegen

$$\sum_{\lambda=1}^m c_k^\lambda \alpha_\lambda(y_j) \cdot x_\lambda = \sum_{\lambda=1}^m c_k^\lambda \cdot y_j \cdot x_\lambda = y'_j \cdot x'_k = \alpha'_k(y'_j) x'_k = \sum_{\lambda=1}^m \alpha'_k(y'_j) c_k^\lambda x_\lambda$$

ist $c_k^\lambda (\alpha'_k(y'_j) - \alpha_\lambda(y_j)) = 0$. Da $\det(c_k^\lambda) \neq 0$ ist, gibt es ein $\omega \in U_m$, so daß $\alpha'_{\omega(k)}(y'_j) = \alpha_k(y_j)$. Π und Π' sind also äquivalent. Aus Satz 7 und 8 folgt nun: Die Klassen isomorpher Algebren $G(m, n, r, s, \Pi)$ entsprechen umkehrbar eindeutig den Klassen äquivalenter Systeme von m nicht identisch verschwindender Linearformen über einem Vektorraum der Dimension n .

4. Spezielle nilpotente und vollständig zerlegbare auflösbare Liesche Algebren

1. SPEZIELLE NILPOTENTE LIESCHE ALGEBREN

K habe die Charakteristik $\chi=0$. Wir nennen ein Ideal I von $g(m, n)$ maximal, wenn

- 1) $(g(m, n))^k \not\subseteq I$ für $m > k$
- 2) $\dim I$ ist maximal.

BEHAUPTUNG 19: Ein Ideal I von $g(m, n)$ ist genau dann maximal, wenn für $g = g(m, n)/I$ gilt

- 1) g wird linkserzeugt von zwei Elementen x_1, x_2
- 2) $\dim g^i / g^{i+1} = 1$ für $i = 1, \dots, m-1$.

Beweis: Sei I maximal. Da $(g(m, n))^k \not\subseteq I$, ist $g^k \neq 0$ für $k < m$, d. h., $g^k \subset g^{k-1}$. Also ist $\dim g / g^2 \geq 2$ und $\dim g^i / g^{i+1} \geq 1$. Da $\dim I$ maximal ist, gilt nach Beweis von

Behauptung 10 jeweils das Gleichheitszeichen. Sei $\dim g/g^2 = 2$ und $\dim g^i/g^{i+1} = 1$ für $i = 1, \dots, m-1$, dann ist einerseits $g^k \neq 0$ für $k < m$, d.h. $(g(m, n))^k \not\subseteq I$ und andererseits ist I maximal. Im folgenden sei g stets Restklassenalgebra von $g(m, n)$ nach einem maximalen Ideal.

BEHAUPTUNG 20: g hat eine Basis y_0, y_1, \dots, y_{m-1} mit $y_0, y_1 \in g$ und $y_i \in g^i$, so daß gilt

$$y_0 \cdot y_i = y_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 1, \dots, m-2 \quad \text{und} \quad y_0 y_{m-1} = 0 \quad (43)$$

Beweis: Seien x_1, x_2 modulo g^2 linear unabhängig, dann enthält das System $\{x_{i_1} \cdot \dots \cdot x_{i_p}\}$, $i_v = 1, 2$, eine Basis von g . Für $m=2$ ist $x_1 \cdot x_2 = 0$. Die Behauptung sei richtig für $m < t$. Sei $m=t$. Dann gibt es Erzeugende x_1, x_2 , so daß $x_1, x_2, y_3 = x_1 x_2, \dots, y_{t-2} = x_1 y_{t-3}$ modulo g^{t-1} linear unabhängig sind. Ist $x_1 y_{t-2} \neq 0$, dann haben wir bereits eine Basis der gewünschten Form. Sei also $x_1 y_{t-2} = 0$, dann ist aber $y'_{t-1} = x_2 y_{t-2} \neq 0$, da g die Klasse t hat. Sei $x_2 y_i = \lambda_i^{i+1} y_{i+1} + \dots + \lambda_i^{t-1} y'_{t-1}$. Wir setzen $z_1 = x_1 + a x_2$ und $z_2 = x_2$ und erhalten

$$\begin{aligned} z_3 &= z_1 \cdot z_2 = y_3 \\ z_4 &= z_1 \cdot z_3 = (1 + a \lambda_2^3) y_4 + u_4, \quad \text{mit} \quad u_4 \in g^4 \\ &\dots \\ z_{t-1} &= z_1 \cdot z_{t-2} = a(1 + a \cdot \lambda_2^3) \cdot (1 + a \cdot \lambda_3^4) \dots (1 + a \lambda_{t-1}^t) \cdot y'_{t-1}. \end{aligned}$$

Da $\chi = 0$, können wir a so wählen, daß $a \neq 0$ und $1 + a \cdot \lambda_i^{t-1} \neq 0$. $y_0 = z_1, y_1 = z_2, \dots, y_{t-2} = z_{t-1}$ ist dann eine Basis der gewünschten Form.

BEHAUPTUNG 21: Die Produkte $y_p \cdot y_q$ können aus den Produkten $y_1 \cdot y_q$ berechnet werden nach der Formel

$$y_p \cdot y_q = \sum_{v=0}^{p-1} (-1)^v \binom{p-1}{v} (\text{ad } y_0)^{p-v-1} (y_1 \cdot y_{q+v}). \quad (44)$$

Beweis durch Induktion nach p : Die Behauptung ist richtig für $p=1$. sie sei auch richtig für $p-1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} y_p \cdot y_q &= (y_0 \cdot (y_{p-1} \cdot y_q)) - y_{p-1} \cdot y_{q+1} \\ &= \sum_{v=0}^{p-2} (-1)^v \binom{p-2}{v} (\text{ad } y_0)^{p-v-1} (y_1 \cdot y_{q+v}) \\ &\quad - \sum_{v=0}^{p-1} (-1)^v \binom{p-2}{v} (\text{ad } y_0)^{p-v-2} (y_1 \cdot y_{q+v+1}) \\ &= \sum_{v=0}^{p-1} (-1)^v \binom{p-1}{v} (\text{ad } y_0)^{p-v-1} (y_1 \cdot y_{q+v}). \end{aligned}$$

FOLGERUNG: Für $p=q$ ist (44) $= 0$, d.h.

$$\begin{aligned} y_1 \cdot y_{2n+1} &= a_{n,n} (\text{ad } y_0) (y_1 \cdot y_{2n}) - a_{n,n-1} (\text{ad } y_0)^2 (y_1 \cdot y_{2n-2}) \\ &\quad + \dots + (-1)^n a_{n,1} (\text{ad } y_0)^n (y_1 \cdot y_2). \end{aligned} \quad (45)$$

Aus den Produkten $y_1 \cdot y_{2n}$ lassen sich also alle anderen Produkte berechnen.

BEHAUPTUNG 22: Es gilt für die Koeffizienten von (45):

$$a_{n,n-v} = 2^{-v} b_v \frac{n-v}{2v+1} \binom{2n}{2v}, \quad \text{wobei} \quad (46)$$

$$b_v = (-1)^{v-1} \frac{2^{v+2}(2^{2v+2} - 1)}{2v+2} \cdot B_{2v+2}. \quad (47)$$

Beweis: Durch Einsetzen von (45) in (44) = 0 erhalten wir die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} a_{n,n} &= n \\ a_{n,n-v} &= \binom{n}{2} a_{n-1,n-v} - \binom{n}{4} a_{n-2,n-v} + \dots + (-1)^{v-1} \binom{n}{2v} \\ &\quad \times a_{n-v,n-v} + (-1)^v \binom{n}{2v+1}. \end{aligned} \quad (48)$$

Sei $b_0 = 1$ und

$$\begin{aligned} b_v &= 2^{-v} \left(\binom{2v+1}{2} 2^v b_{v-1} - \binom{2v+1}{4} 2^{v-2} b_{v-2} + \dots + (-1)^{v-1} \binom{2v+1}{2v} \right. \\ &\quad \left. \times 2^0 \cdot b_0 + (-1)^v \right). \end{aligned} \quad (49)$$

Setzen wir

$$2^l \cdot a_l^{(v)} = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \dots \cdot \binom{2l-1}{2l-2} \cdot \binom{2v+1}{2l}}{(2n-1) \cdot (2n-3) \cdot \dots \cdot (2n-2l+1)},$$

dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (b_v - 2^{-1} \binom{2v+1}{2} b_{v-1} + \dots + (-1)^v) \\ &\quad + a_1^{(v)} \left(b_{v-1} - 2^{-1} \binom{2v-1}{2} b_{v-2} + \dots + (-1)^{v-1} \right) + \dots + a_v^{(v)} (b_0 - 1) \\ &= b_v - \sum_{k=1}^v (-1)^k 2^{-k} \binom{2v+1}{k} b_{v-k} \cdot \frac{(2n-2k) \cdot \dots \cdot (2n-4k+2)}{(2n-1) \cdot \dots \cdot (2n-2k+1)} \\ &\quad + (-1)^v \cdot 2^{-v} \cdot \frac{(2n-2v-2) \cdot \dots \cdot (2n-4v)}{(2n-1) \cdot \dots \cdot (2n-2v+1)}. \end{aligned} \quad (50)$$

(50) multipliziert mit $2^{-v} \frac{n-v}{2v+1} \binom{2n}{2v}$ ergibt

$$\begin{aligned} 2^{-v} b_v \cdot \frac{n-v}{2v+1} \binom{2n}{2v} - \binom{n}{2} \cdot 2^{1-v} \cdot b_{v-1} \cdot \frac{n-v}{2v-1} \binom{2n-2}{2v-2} \\ + \dots + (-1)^v \cdot \binom{n}{2v+1} = 0. \end{aligned} \quad (51)$$

(46) in (48) eingesetzt ergibt ebenfalls (51), d.h. (45) erfüllt (47). Setzen wir $2^v b_v = C_v$, dann folgt aus (49)

$$C_v - \binom{2^v + 1}{2} C_{v-1} + \dots + (-1)^{v-1} \binom{2^v + 1}{2^v} C_0 + (-1)^v, \quad C_0 = 1. \quad (49')$$

(49') ist eine Rekursionsformel für die Koeffizienten der Tangensentwicklung, also

$$C_v = (-1)^{v-1} \cdot \frac{2^{2^v+2} (2^{2^v+2} - 1)}{2^v + 2} \cdot B_{2^v+2}.$$

Die B_μ sind dabei die Bernoullischen Zahlen.

BEHAUPTUNG 23: Aus $y_1(y_j y_k) + y_j(y_k y_1) + y_k(y_1 y_j) = 0$ für alle j, k folgt $y_i(y_j y_k) + y_j(y_k y_i) + y_k(y_i y_j) = 0$ für alle i, j, k .

Beweis Sei $y_i(y_j y_k) + y_j(y_k y_i) + y_k(y_i y_j) = 0$ für $i \leq t$ und alle j, k . Dann ist

$$\begin{aligned} y_{t+1}(y_j y_k) + y_j(y_k y_{t+1}) + y_k(y_{t+1} y_j) \\ = (y_0 y_t)(y_j y_k) + y_j(y_k (y_0 y_t)) + y_k((y_0 y_t) y_j) \\ = y_0(y_t(y_j y_k) + y_j(y_k y_t) + y_k(y_t y_j)) - (y_t(y_j y_{k+1}) + y_j(y_{k+1} y_t) \\ + y_{k+1}(y_t y_j)) - (y_t(y_{j+1} y_k) + y_{j+1}(y_k y_t) + y_k(y_t y_{j+1})) = 0. \end{aligned}$$

SATZ 9: Sei $A(2)$ frei linkserzeugt von y_0, y_1 . Wir setzen $y_{i+1} = y_0 y_i$ für $i \geq 1$. Sei J das Ideal von $A(2)$, das erzeugt wird von

$$y_i \quad \text{für} \quad i \geq m, \quad y_i y_j + y_j y_i \quad \text{und} \quad y_1(y_j y_k) + y_j(y_k y_1) + y_k(y_1 y_j) \quad (52)$$

$$y_p \cdot y_q - \sum_{v=0}^{p-1} (-1)^v \binom{p-1}{v} (\text{ad } y_0)^{p-v-1} (y_1 \cdot y_{q+v}) \quad (53)$$

$$y_1 \cdot y_{2n} - p_{n, 2n+1} \cdot y_{2n+1} - p_{n, 2n+2} \cdot y_{2n+2} - \dots - p_{n, m-1} \cdot y_{m-1}. \quad (54)$$

Dann ist $g = A(2)/J$ Restklassenalgebra von $g(m', n)$ nach einem maximalen Ideal von I .

Beweis: Sei \bar{y}_i die Restklasse von y_i . Für $p=q$ ist wegen (45) $\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_{2n+1} \in \mathcal{L}((\text{ad } \bar{y}_0)^k \times (\bar{y}_1 \cdot y_{2v}), k, v=1, 2, \dots) \subseteq \mathcal{L}(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_{m-1})$, d.h. $\bar{y}_0, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{m-1}$ enthält eine Basis von g . Wegen (52) ist daher g nilpotente Liesche Algebra der Klasse $\leq m$. Da $J \subset (A(2))^{(1)}$ ist, sind \bar{y}_0, \bar{y}_1 Erzeugende von g , also $\dim g/g^2 = 2$ und $\dim g^i/g^{i+1} \leq 1$ für $i < m$. Sei $y_{m'-1} \notin J$, aber $y_{m'} \in J$ ($m' \leq m$), dann ist $\dim g^i/g^{i+1} = 1$ für $i < m'$, d.h. g ist Restklassenalgebra von $g(m', n)$ nach einem maximalen Ideal.

2. SPEZIELLE VOLLSTÄNDIG ZERLEGBARE AUFLÖSBARE LIESCHE ALGEBREN

K habe die Charakteristik $\chi = 0$. g sei Restklassenalgebra von $G(m, n, r, s, \Pi)$, so daß $g^{(1)}$ Restklassenalgebra von $g(m', n')$ nach einem maximalen Ideal ist. Dann ist $\dim g^{(1)}/g^{(2)} = 2$, $g^{(1)}$ wird also linkserzeugt von zwei Elementen z_1, z_2 mit $z_i \in g^{a_i}$. g sei nicht nilpotent. Dann ist mindestens ein α_i ($i=1, 2$) nicht Null.

BEHAUPTUNG 24: Sei $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$. Dann gibt es in $g^{(1)}$ eine Basis x_1, x_2, \dots, x_r , so daß $x_1 \in g^{\alpha_1}, x_2 \in g^{\alpha_2}$ und entweder $x_i = x_1 \cdot x_{i-1}$ oder $x_i = x_2 \cdot x_{i-1}$. Dann ist auch $x_i \in g^{\alpha_i}$, wobei entsprechend $\alpha_i = \alpha_1 + \alpha_{i-1}$ oder $\alpha_i = \alpha_2 + \alpha_{i-1}$.

Beweis: Für $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ wird $g^{(1)}$ linkserzeugt von zwei Elementen $x_1 \in g^{\alpha_1}, x_2 \in g^{\alpha_2}$. Für $r > 2$ ist dann $x_1 \cdot x_2 = x_3 \neq 0$. Sei x_1, \dots, x_k eine Teilbasis von $g^{(1)}$ mit $x_i = x_1 \cdot x_{i-1}$ oder $x_i = x_2 \cdot x_{i-1}$ für $i = 3, \dots, k, k < r - 1$, dann ist wegen $\dim(g^{(1)k})/(g^{(1)})^{k+1} = 1$ entweder $x_1 \cdot x_k \notin (g^{(1)})^{k+1}$ oder $x_2 \cdot x_k \notin (g^{(1)})^{k+1}$. Nach Behauptung 15 ist dann entsprechend $\alpha_i = \alpha_1 + \alpha_{i-1}$ oder $\alpha_i = \alpha_2 + \alpha_{i-1}$.

FOLGERUNG: Für $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ist dann entweder $x_1 \cdot x_i \in (g^{(1)})^{i+1}$ oder $x_2 \cdot x_i \in (g^{(1)})^{i+1}$.

BEHAUPTUNG 25: Sei x_1, \dots, x_r eine Basis von g mit $x_1 \cdot x_i = x_{i+1}, x_2 \cdot x_i \in (g^{(1)})^{i+1}$ für $i = 2, \dots, r - 3$.

1) Sei $x_1 \cdot x_{r-2} = x_{r-1}, x_2 \cdot x_{r-2} \in (g^{(1)})^{r-1}, x_1 \cdot x_{r-1} = 0$ und $x_2 \cdot x_{r-1} = x_r$. Dann gilt

$$x_q \cdot x_{r-q+1} = (-1)^{q-2} x_r \quad \text{für} \quad q \geq 2. \quad (55)$$

2) Sei $x_1 \cdot x_{r-2} \in (g^{(1)})^{r-1}, x_2 \cdot x_{r-2} = x_{r-1}, x_1, x_{r-1} = x_r$ und $x_2 \cdot x_{r-1} = 0$, dann gilt

$$x_q \cdot x_{r-q} = (-1)^{q-2} \cdot x_{r-1} \in (g^{(1)})^{r-1} \quad (56)$$

$$x_q \cdot x_{r-q+1} = (-1)^{q-1} \cdot (q-2) \cdot x_r. \quad (57)$$

Beweis: 1) (55) gilt für $q = 2$. (55) sei richtig für $q \leq t < r - 1$. Dann ist $x_1 \cdot (x_q \cdot x_{r-q}) + x_q \cdot (x_{r-q} \cdot x_1) + x_{r-q}(x_1 \cdot x_q) = 0$, d.h.

$$x_{q+1} \cdot x_{r-q} = -x_q \cdot x_{r-q+1} = (-1)^{q-1} \cdot x_r,$$

da $x_q \cdot x_{r-q} \in (g^{(1)})^{r-1}$.

2) (56) gilt für $q = 2$. (56) gelte für $q \leq t$. Wegen

$$x_1 \cdot (x_q \cdot x_{r-q-1}) + x_q(x_{r-q-1} \cdot x_1) + x_{r-q-1} \cdot (x_1 \cdot x_q) = 0,$$

ist $x_{q+1} \cdot x_{r-q-1} + x_q \cdot x_{r-q} \in (g^{(1)})^{r-1}$, da nach (44) $x_q \cdot x_{r-q-1} \in (g^{(1)})^{r-2}$ (57) ist richtig für $q = 2$. (57) sei richtig für $q \leq t$. Aus (56) und $x_1(x_q \cdot x_{r-q}) + x_q \cdot (x_{r-q} \cdot x_1) + x_{r-q} \cdot (x_1 \cdot x_q) = 0$ folgt dann

$$x_{q+1} \cdot x_{r-q} = -x_q \cdot x_{r-q+1} + (-1)^q \cdot x_r.$$

BEHAUPTUNG 26: Sei $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$. Dann ist das Wurzelsystem $\Sigma(g)$ von g entweder

$$\Sigma_1^r = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, \dots, (r-2)\alpha_1 + \alpha_2\} \quad \text{oder}$$

$$\Sigma_2^r = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, 2\alpha_1 + \alpha_2, \dots, (r-3)\alpha_1 + \alpha_2, (r-3)\alpha_1 + 2\alpha_2\},$$

wenn r gerade ist und $r > 3$.

Beweis: Die Behauptung sei richtig, wenn $g^{(1)}$ die Klasse $\leq r+1$ hat. $g^{(1)}$ habe die Klasse $r+2$. Dann hat $g/(g^{(1)})^{r+1}$ das Radikalsystem Σ_1^r oder Σ_2^r .

1) Sei $\Sigma(g/(g^{(1)})^{r+1}) = \Sigma_1^r$. Dann gibt es in $g^{(1)}$ eine Basis x_1, \dots, x_{r+1} mit $x_1 \cdot x_i = x_{i+1}$, $x_2 \cdot x_i \in (g^{(1)})^{i+1}$ für $i=2, \dots, r-1$. Sei $x_1 \cdot x_r = 0$ und $x_2 \cdot x_r = x_{r+1}$, also $\Sigma(g) = \Sigma_2^{r+1}$, dann ist nach (55) für ungerade r und $q = (r+1)/2$

$$0 = x_{(r+1)/2} \cdot x_{(r+1)/2} = (-1)^{q-2} \cdot x_{r+1},$$

d.h. Σ_1^r hat für ungerades r nicht die Fortsetzung Σ_2^{r+1} .

2) Sei $\Sigma(g/(g^{(1)})^{r+1}) = \Sigma_2^r$, r gerade. Wir haben dann eine Basis $\{x_i\}$ in $g^{(1)}$ mit $x_1 \cdot x_i = x_{i+1}$, $x_2 \cdot x_i \in (g^{(1)})^{i+1}$ für $i=2, \dots, r-2$ und $x_1 \cdot x_{r-1} \in (g^{(1)})^{r-1}$, $x_2 \cdot x_{r-1} = x_r$.

a) Sei $x_1 \cdot x_r = x_{r+1}$ und $x_2 \cdot x_r = 0$. Dann ist für $q = (r+2)/2$ nach (57)

$$0 = x_{(r+2)/2} \cdot x_{(r+2)/2} = (-1)^{r/2} (r/2 - 1) x_{r+1}$$

Σ_2^r hat also nicht die Fortsetzung $\alpha_{r+1} = \alpha_1 + \alpha_r$.

b) Sei $x_1 \cdot x_r = 0$ und $x_2 \cdot x_r = x_{r+1}$. Dann ist $x_3 \cdot x_{r-2} + x_r \in (g^{(1)})^r$ und wegen $x_2 \cdot (x_3 \cdot x_{r-2}) + x_3 \cdot (x_{r-2} \cdot x_2) + x_{r-2} \cdot (x_2 \cdot x_3) = 0$ ist dann $x_{r+1} = 0$. Σ_2^r hat also auch nicht die Fortsetzung $\alpha_{r+1} = \alpha_2 + \alpha_r$.

SATZ 10: g ist eine der folgenden Lieschen Algebren.

(A) Seien α_1, α_2 linear unabhängig und $\Sigma(g) = \Sigma_1^r$. Dann ist

$$y_i \cdot y_j = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$y_j \cdot x_i = ((i-2) \cdot \delta_{1j} + \delta_{2j}) x_i$$

$$x_1 \cdot x_i = x_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 2, 3, \dots, r-1$$

$$x_i \cdot x_k = 0 \quad \text{sonst.}$$

(B) Seien α_1, α_2 linear unabhängig und $\Sigma(g) = \Sigma_2^r$. Dann ist

$$y_i \cdot y_j = 0 \quad \text{für} \quad i, j = 1, \dots, n$$

$$y_j \cdot x_i = ((i-2) \delta_{1j} + \delta_{2j}) \cdot x_i, \quad i = 1, \dots, r-1$$

$$y_j \cdot x_r = ((r-3) \delta_{1j} + 2 \delta_{2j}) \cdot x_r$$

$$x_1 \cdot x_i = x_{i+1} \quad \text{für} \quad i = 2, \dots, r-2$$

$$x_1 \cdot x_{r-1} = 0$$

$$x_2 \cdot x_{r-1} = x_r$$

$$x_q \cdot x_{r-q-1} = (-1)^{q-2} \cdot x_r$$

$$x_p \cdot x_q = 0 \quad \text{sonst.}$$

(C) Sei $\alpha_2 = -c\alpha_1$, $c \neq -1$, und $\Sigma(g) = \Sigma_1^r$. Dann ist

$$\begin{aligned} y_i \cdot y_j &= \begin{cases} \mu_{ij} \cdot x_r, & \text{wenn } c = r - 2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ y_j \cdot x_1 &= \delta_{1j} \cdot x_1 \\ y_j \cdot x_i &= (i - 2 - c) \delta_{1j} \cdot x_i \quad \text{für } i \geq 2 \\ x_1 \cdot x_i &= x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, r - 1 \\ x_2 \cdot x_i &= \begin{cases} \lambda_i \cdot x_{n+i}, & \text{wenn } c = -n \text{ ganz} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ x_p \cdot x_q &= \sum_{v=0}^{p-1} (-1)^v \cdot \binom{p-1}{v} \cdot (\text{ad } x_1)^{p-v-1} (x_2 \cdot x_{q+v}). \end{aligned}$$

(D) Sei $\alpha_2 = -c\alpha_1$, $c \neq -1$ und $\Sigma(g) = \Sigma_2^r$. Dann ist

$$\begin{aligned} y_i \cdot y_j &= \begin{cases} \mu_{ij} x_r, & \text{wenn } c = (r - 3)/2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ y_j \cdot x_1 &= \delta_{1j} x_1 \\ y_j \cdot x_i &= (i - 2 - c) \delta_{1j} \cdot x_i, \quad 2 \leq i \leq r - 1 \\ y_j \cdot x_r &= (r - 3 - 2c) \delta_{1j} x_r \\ x_1 \cdot x_i &= x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, r - 2 \\ x_1 \cdot x_{r-1} &= 0 \\ x_2 \cdot x_i &= \begin{cases} \lambda_i \cdot x_{i+n}, & \text{wenn } c = -n \text{ ganz} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \Bigg\} \text{für } i = 3, \dots, r - 2 \\ x_2 \cdot x_{r-1} &= x_r \\ x_p \cdot x_q &= x_1 (x_{p-1} x_q) - x_{p-1} (x_1 x_q) \quad \text{für } p \leq r - 1. \end{aligned}$$

(E) Sei $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, dann ist $\Sigma(g) = \{\alpha, 2\alpha, \dots, (r-1)\alpha\}$ und

$$\begin{aligned} y_i y_j &= 0 \\ y_j x_1 &= \delta_{1j} x_1 \\ y_j \cdot x_i &= (i - 1) \delta_{1j} x_i, \quad i = 2, \dots, r \\ x_1 \cdot x_i &= x_{i+1}, \quad i = 2, \dots, r - 1 \\ x_2 \cdot x_i &= \begin{cases} \lambda \cdot x_{i+1}, & i = 2, \dots, r - 1, & \text{wenn } r \text{ ungerade} \\ \lambda \cdot x_{i+1}, & i = 2, \dots, r - 2 & \text{wenn } r \text{ gerade} \\ \mu x_r, & i = r - 1 \end{cases} \\ x_p \cdot x_q &= \begin{cases} 0 & \text{für } p \geq 3, & \text{wenn } r \text{ ungerade} \\ \text{und für } q \neq r - p + 1, & \text{wenn } r \text{ gerade} \\ (-1)^{i-1} (\lambda - \mu) x_r & \text{für } p \geq 3, q = r - p + 1 \quad \text{und } r \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

(F) Sei $\alpha_2=0, \alpha_1 \neq 0$. Dann hat g die Basis y_1, \dots, y_n, z, x und es gilt

$$\begin{aligned} y_i \cdot y_j &= \mu_{ij} \cdot z \\ y_j \cdot x &= \delta_{1j} \cdot x \\ y_j \cdot z &= 0 \\ x \cdot z &= 0 \end{aligned}$$

Beweis: Für $\alpha_1, \alpha_2 \neq 0$ ist $g = \mathfrak{L}(y_1, \dots, y_n) + g^{(1)}$ und $g^{(1)} = \mathfrak{R}(x_1, x_2)$ für $x_1 \in g^{\alpha_1}, x_2 \in g^{\alpha_2}$. $y_i y_j$ ist also nur dann $\neq 0$, wenn $\alpha_k = 0$. Sei x_1, \dots, x_r Basis von $\mathfrak{R}(x_1, x_2)$, dann ist $y_j x_i = \alpha_i(y_j) x_i$. Wir wählen y_1, \dots, y_n so, daß

$$\alpha_1(y_j) = \delta_{1j}, \alpha_2(y_j) = \delta_{2j}, \quad \text{wenn } \alpha_1, \alpha_2 \text{ linear unabhängig sind und} \quad (58)$$

$$\alpha_1(y_j) = \delta_{1j}, \alpha_2(y_j) = -c \cdot \delta_{1j}, \quad \text{wenn } \alpha_2 = -c \cdot \alpha_1, c \in K. \quad (59)$$

(A) α_1, α_2 seien linear unabhängig und $\Sigma(g) = \Sigma_1^r$. Dann ist $\alpha_k \neq 0$ und daher $y_i \cdot y_j = 0$ für alle i, j . Nach (58) ist dann $y_j x_i = ((i-2)\delta_{1j} + \delta_{2j})x_i$. Da α_1, α_2 linear unabhängig sind, ist $x_1 \cdot x_i = x_{i+1}$ und $x_i \cdot x_j = 0$ sonst.

(B): Seien α_1, α_2 linear unabhängig und $\Sigma(g) = \Sigma_2^r$. Dann ist wieder $\alpha_k \neq 0$, d.h. $y_i \cdot y_j = 0$ und nach (58) ist $y_j \cdot x_i = ((i-2)\delta_{1j} + \delta_{2j})x_i$ für $i=1, \dots, r-1$, $y_j \cdot x_r = ((r-3)\delta_{1j} + 2\delta_{2j})x_r$. Da $\Sigma(g) = \Sigma_2^r$, ist $x_1 \cdot x_i = x_{i+1}$ für $i=2, \dots, r-2$, $x_1 \cdot x_{r-1} = 0$ und $x_2 \cdot x_{r-1} = x_r$. Da α_1, α_2 linear unabhängig sind, ist sonst $x_2 \cdot x_j = 0$. Nach (55) ist $x_q \cdot x_{r-q+1} = (-1)^{q-2} \cdot x_r$ und nach (44) ist sonst $x_i \cdot x_j = 0$.

(C): Sei $\alpha_2 = -c \cdot \alpha_1$, $c \neq -1$, und $\Sigma(g) = \Sigma_1^r$. Sei $\alpha_k = 0$, dann ist $c = k-2$ und $y_i \cdot y_j \in g^{\alpha_k}$. Setzen wir $y_i \cdot y_j = \mu_{ij} \cdot x_k$, $\mu_{ij} \in K$, dann ist wegen $x_1(y_i y_j) + y_i(y_j x_1) + y_j(x_1 y_i) = 0$ auch $\mu_{ij} \cdot x_{k+1} = 0$, d.h. für $k < r$ ist $\mu_{ij} = 0$. Nach (59) ist $y_j \cdot x_1 = \delta_{1j} \cdot x_1$, $y_j \cdot x_i = (i-2-c)\delta_{1j} \cdot x_i$ für $i \geq 2$. Da $\Sigma(g) = \Sigma_1^r$, ist $x_1 \cdot x_i = x_{i+1}$ für $i=2, \dots, r-1$. Sei $x_2 \cdot x_j = \lambda_j \cdot x_k$, also $c = j-k = n < 0$, dann ist $x_2 x_j = \lambda_j \cdot x_{j+n}$ und nach (44) ist $\sum_{v=0}^{p-1} (-1)^v$

$$\times \binom{p-1}{v} (\text{ad } x_1)^{p-v-1} (x_2 \cdot x_{q+v}) = x_p \cdot x_q.$$

(D): Sei $\alpha_2 = -c \cdot \alpha_1$ und $\Sigma(g) = \Sigma_2^r$. Dann ist $x_1 \cdot x_i = x_{i+1}$ für $i=2, \dots, r-2$, $x_1 \cdot x_{r-1} = 0$ und $x_2 \cdot x_{r-1} = x_r$. Sei $\alpha_k = 0$, dann ist $c = k-2$ oder $c = (r-3)/2$. Wir setzen $y_i \cdot y_j = \mu_{ij} \cdot x_k$. Dann gilt $x_1(y_i y_j) + y_i(y_j x_1) + y_j(x_1 y_i) = 0$, also $\mu_{ij} = 0$ für $k < r-1$ und wegen $x_2(y_i y_j) + y_i(y_j x_2) + y_j(x_2 y_i) = 0$ ist auch $\mu_{ij} = 0$ für $k = r-1$. Damit ist $y_i \cdot y_j = \mu_{ij} \cdot x_r$ für $c = (r-3)/2$ und $y_i \cdot y_j = 0$ sonst. Nach (59) gilt $y_j \cdot x_1 = \delta_{1j} x_1$, $y_j \cdot x_i = (i-2-c)\delta_{1j} \cdot x_i$ für $i \leq r-1$ und $y_j \cdot x_r = (r-3-2c)\delta_{1j} x_r$. Sei $x_2 \cdot x_j = \lambda_j \cdot x_k$, dann ist $c = -k+j = -n < 0$, ganz oder $j = r-1, k = r$. Sei also $c = -n < 0$, dann ist $x_2 \cdot x_j = \lambda_j \cdot x_{j+n}$.

Die restlichen Produkte erhalten wir aus der Rekursionsformel

$$x_p \cdot x_q = x_1(x_{p-1} x_q) - x_{p-1}(x_1 x_q) \quad \text{für } p \leq r-1.$$

(E): Sei $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, dann ist $x_1, x_2 \in g^\alpha$ und $\Sigma(g) = \{\alpha, 2\alpha, \dots, (r-1)\alpha\}$. Nach Behauptung 19 gibt es dann in $g^{(1)}$ eine Basis x_1, \dots, x_r , so daß $x_1 \cdot x_i = x_{i+1}$ für $i = 2, \dots, r-1$ und $x_2 \cdot x_i = \lambda_i \cdot x_{i+1}$. Aus (44) und $x_2(x_i x_j) + x_i(x_j x_2) + x_j(x_2 x_i) = 0$ errechnen wir $\lambda_i = \lambda_j$ für r ungerade und $\lambda_i = \lambda_j$, $i, j = 1, \dots, r-2$, für r gerade. Nach (44) ist dann $x_i x_j = 0$ für $i, j > 2$ und r ungerade und $x_i \cdot x_{r-i+1} = (-1)^{i-1} (\lambda - \mu) x_r$ für $i \geq 3$, $x_i \cdot x_j = 0$ sonst für r gerade.

(F): Sei $\alpha_2 = 0$, $\alpha_1 \neq 0$. g wird linkserzeugt von $y_1, \dots, y_n \in g$ und $x \in g^{(1)}$. Sei $z \in g^{(1)} \cap \mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n)$, $z \notin g^{(2)}$, dann ist $g^{(1)} = \mathfrak{R}(x, z)$ und $x \cdot z = 0$, also $(\mathfrak{R}(x, z))^{(1)} = g^{(2)} = 0$. Da $\dim g^{(1)} = 2$ und x, z linear unabhängig, ist $(\mathfrak{R}(y_1, \dots, y_n))^3 = 0$ und somit $y_j \cdot z = 0$. Da $x \in g^\alpha$, ist $y_j \cdot x = \alpha_1(y_j) \cdot x$.

LITERATUR

- [1] N. BOURBAKI: *Groupes et algèbres de Lie*. Hermann & Cie, Paris (1960).
- [2] N. JACOBSON: *Lie algebras*. Interscience Publishers, New York (1962).
- [3] F. BRUHAT: *Poids et racines*. Séminaire Sophus Lie (1954/55).

Eingegangen den 4. April bzw. 11. November 1966