

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 42 (1967)  
  
**Artikel:** Überdeckung der euklidischen Sphäre mit kongruenten Punktmengen.  
**Autor:** Hadwiger, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32140>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 02.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Überdeckung der euklidischen Sphäre mit kongruenten Punktmengen

H. HADWIGER

## 1. Nicht von sich trennbare Punktmengen der Sphäre; Hilfssatz

Es bezeichne  $S_n$  die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre. Eine abgeschlossene Teilmenge  $C \subset S_n$  nennen wir durch kongruente Abbildungen nicht von sich trennbar, wenn für jede isometrische Abbildung  $\varphi$  von  $S_n$  auf sich stets  $C \cap \varphi C \neq \emptyset$  ausfällt. Nachfolgend sagen wir abkürzend,  $C$  sei nicht von sich trennbar. Für  $n \geq 2$  hat beispielsweise jede Hauptuntersphäre  $C = S_{n-1}$  von  $S_n$  oder auch jedes topologische und antipodentreue Bild einer solchen diese Eigenschaft. Diese Nichttrennbarkeit von sich ist metrischer Natur, da die Isometrie der zugelassenen Abbildungen selbstverständlich wesentlich ist. Doch führt das Studium dieses Begriffes, insbesondere aber bezogen auf Kontinua, zu einem Fragenkomplex, der im gemeinsamen Grenzgebiet von metrischer Geometrie und Topologie liegt, und dessen Bearbeitung zu Ergebnissen führt, die streng elementar gewonnen werden können.

Verschiedene nützliche Folgerungen innerhalb des genannten Grenzgebietes, insbesondere auch bei der Begründung der in dieser Note besprochenen Satzgruppe über abgeschlossene Überdeckungen der Sphäre mit kongruenten Punktmengen gestattet der folgende

**HILFSSATZ.** *Ist die  $n$ -dimensionale Sphäre  $S_n$  [ $n \geq 2$ ] mit endlich vielen abgeschlossenen Punktmengen überdeckt, von denen je drei einen leeren Durchschnitt haben, so enthält wenigstens eine dieser Mengen ein Kontinuum, das durch kongruente Abbildungen der  $S_n$  auf sich nicht von sich getrennt werden kann.*

Es ist instruktiv, diesen Schlüsselsatz zunächst mit einem topologischen Satz von H. HOPF [1] zu vergleichen, wonach ein unikohärenter topologischer Raum keine endliche freie Überdeckung der Ordnung zwei mit abgeschlossenen und zusammenhängenden Teilmengen gestattet<sup>1)</sup>. Bei einer solchen Überdeckung der Sphäre  $S_n$ , die für  $n \geq 2$  bekanntlich unikohärent ist, folgt nach dem erwähnten Satz, dass sich zu jeder eindeutigen stetigen Abbildung der  $S_n$  in sich stets eine Überdeckungsmenge finden lässt, die durch die betreffende Abbildung nicht von sich getrennt wird. Unser Hilfssatz lässt sich als Variante dieses Satzes deuten. Einerseits werden die Voraussetzungen verstärkt, indem nur kongruente Abbildungen zugelassen werden, andererseits auch die Satzaussage, wonach jetzt die Existenz eines nicht von den Abbildungen

---

<sup>1)</sup> Ein zusammenhängender topologischer Raum, der keine Überdeckung mit zwei zusammenhängenden abgeschlossenen Mengen von nicht zusammenhängendem Durchschnitt gestattet, heisst unikohärent. Der im Text erwähnte Satz über freie Überdeckungen findet sich in [1], Seite 36 (Satz I).

abhängigen Teilkontinuums festgestellt ist, das durch keine Abbildung der genannten Klasse von sich getrennt werden kann.

Nachfolgend ziehen wir aus dem Hilfssatz zwei einfache Folgerungen:

**KOROLLAR I** (*Theorem von Sonneborn*). *Ist die  $S_n$  [ $n \geq 2$ ] von zwei abgeschlossenen Punktmengen überdeckt, so enthält wenigstens eine dieser Mengen ein nicht von sich trennbares Kontinuum.*

Die diesbezüglichen Ergebnisse von L. M. SONNEBORN [2] reichen noch etwas weiter. Er zeigte, dass bei einer abgeschlossenen Überdeckung der  $S_n$  mit zwei Mengen wenigstens eine davon ein „cut-up“-Kontinuum enthält. Eine abgeschlossene Teilmenge von  $S_n$  hat die „cut-up“-Eigenschaft im Sinne Sonneborns, wenn ihre Komplementärmenge keine Komponente aufweist, deren Mass grösser als die Hälfte des Masses der ganzen Sphäre ist. Man kann zeigen, dass zwei „cut-up“-Kontinua einen nichtleeren Durchschnitt haben, so dass ein solches evidenterweise nicht von sich trennbar ist. Das Umgekehrte trifft indessen nicht zu, d.h. es gibt nicht von sich trennbare Kontinua, welche die „cut-up“-Eigenschaft nicht haben.

Eine weitere Folgerung ist das sich auf antipodische Mengen<sup>2)</sup> beziehende

**KOROLLAR II** (*Theorem von Kuratowski*). *Ist die  $S_n$  [ $n \geq 2$ ] von zwei abgeschlossenen und antipodischen Punktmengen überdeckt, so enthält wenigstens eine dieser Mengen ein antipodisches Kontinuum.*

Einen Beweis dieses viel gebrauchten Lemmas von K. KURATOWSKI findet man bei K. ZARANKIEWICZ [3].

Die hier angeführte Folgerung ergibt sich aus dem Hilfssatz mit der einfachen Bemerkung, dass eine nicht von sich trennbare Komponente einer antipodischen Menge durch die antipodische Abbildung in sich übergehen, also selbst antipodisch sein muss.

## 2. Lemmata; Beweis des Hilfssatzes

Wir bereiten den Beweis des im vorstehenden Abschnitt erläuterten zentralen Hilfssatzes mit drei Hilfsaussagen vor.

**LEMMA I.** *Es sei  $A \subset S_n$  abgeschlossen und nichtleer. Bezeichnet  $A^0$  den offenen Kern von  $A$  und gilt für eine kongruente Abbildung  $\varphi$  von  $S_n$  auf sich die Inklusion  $\varphi A \subset A^0$ , so ist  $A = S_n$ .*

In der Tat: Für ein  $\varrho \geq 0$  bezeichne  $A_\varrho$  die äussere Parallelmenge von  $A$  im Abstand  $\varrho$ , d.h. die Vereinigungsmenge der abgeschlossenen  $n$ -dimensionalen sphärischen Kugeln in  $S_n$  vom Radius  $\varrho$ , deren Mittelpunkte in  $A$  liegen. Ist  $\varrho \geq \pi$ , so soll  $A_\varrho = S_n$  sein. Es gilt die einfache Beziehung  $(A_\varrho)_\sigma = A_{\varrho+\sigma}$ . Wegen der Kompaktheit

---

<sup>2)</sup> Eine Teilmenge der Sphäre heisst hier antipodisch, wenn sie durch die antipodische Abbildung in sich übergeht.

von  $A$  lässt sich ein  $\varrho > 0$  so finden, dass  $(\varphi A)_{\varrho} = \varphi A_{\varrho} \subset A$  gilt. Ist  $k$  eine natürliche Zahl, so schliesst man mit naheliegender Iteration  $\varphi^k A_{k\varrho} \subset A$ , wobei  $\varphi^k$  die  $k$ -fach iterierte Abbildung  $\varphi$  bedeutet. Für hinreichend grosses  $k$  ist  $k\varrho \geq \pi$ , sodass  $S_n \subset A$ , also die Behauptung, folgt.

LEMMA II. Für  $A, B, R \subset S_n$  [ $n \geq 2$ ] abgeschlossen,  $A, B$  zusammenhängend, soll  $A \cup B \cup R = S_n$  und  $A \cap R = \emptyset$  gelten. Ist  $A \cup B$  ein nicht von sich trennbares Kontinuum,  $A$  dagegen von sich trennbar, so ist auch  $B$  ein nicht von sich trennbares Kontinuum.

In der Tat: Ist  $\hat{A}$  der Rand von  $A$ , so gilt

$$\hat{A} \subset D = A \cap B, \quad (1)$$

wobei  $D$  nichtleer und zusammenhängend sein muss. Dies schliesst man mit den Voraussetzungen und der Unikohärenz von  $S_n$  leicht. Wir formulieren die Gegenannahme zur Aussage des Lemmas, wonach eine kongruente Abbildung  $\varphi$  von  $S_n$  auf sich so existiert, dass

$$B \cap \varphi B = \emptyset \quad (2)$$

gilt. Da  $A \cup B$  nicht von sich trennbar ist, muss

$$(A \cup B) \cap \varphi(A \cup B) \neq \emptyset \quad (3)$$

gelten. Dannach muss wenigstens eine der drei nachstehenden Beziehungen

$$A \cap \varphi B \neq \emptyset \quad (4)$$

$$B \cap \varphi A \neq \emptyset \quad (5)$$

$$A \cap \varphi A \neq \emptyset \quad (6)$$

bestehen, wenn man noch (2) berücksichtigt.

a) Es gelte (4). Im Hinblick auf (1) und (2) muss offenbar  $\varphi B \cap \hat{A} = \emptyset$  sein. Da aber  $B$  zusammenhängend ist, ergibt sich  $\varphi B \subset A$ , insbesondere mit  $D \subset B$

$$\varphi D \subset A; \quad D \cap \varphi D = \emptyset \quad (7)$$

Hieraus schliesst man, dass  $\varphi \hat{A} \subset A^0$  und damit eine der zwei nachstehenden Relationen

$$\varphi A \subset A^0 \quad (8)$$

$$A^* \subset \varphi A^0 \quad (9)$$

gelten muss, wo  $A^*$  die zu  $A$  komplementäre Menge in  $S_n$  bezeichnet. Aus (8) folgt mit Lemma I, dass  $A = S_n$  gilt, was aber der Voraussetzung widerspricht, wonach  $A$  von sich trennbar ist. Es soll also (9) zutreffen. Da  $A$  von sich trennbar ist, gibt es eine kongruente Abbildung  $\psi$  von  $S_n$  auf sich, sodass  $\psi A \subset A^*$  gilt. Setzt man  $\chi = \varphi^{-1} \psi$ , so resultiert erneut eine mit (8) gleichwertige Beziehung  $\chi A \subset A^0$ , die wie oben erwähnt, widerspruchshaft ist.



b) Es gelte (5). Es folgt  $A \cap \varphi^{-1} B \neq \emptyset$  und mit (2) auch  $B \cap \varphi^{-1} B = \emptyset$ . Diese Sachlage wird wie unter Fall a) zu einem Widerspruch geführt, wobei statt  $\varphi$  die zu ihr inverse Abbildung  $\varphi^{-1}$  figuriert.

c) Es gelte jetzt noch (6). Da  $\varphi A \subset A^0$  wie im Fall a) ausgeführt nicht in Frage kommt, muss wegen des Zusammenhangs von  $A$  offenbar  $\hat{A} \cap \varphi A \neq \emptyset$  gelten. Wegen (1) schliesst man, dass erneut (5) in Kraft ist, was mit Fall b) als widerspruchshaft bereits verifiziert worden ist.

Damit ist die postulierte Gegenannahme zu Fall gebracht und Lemma II bewiesen.

LEMMA III. *Es sei  $A \subset S_n$  nichtleer und abgeschlossen. Enthält die äussere Parallelmenge  $A_\varrho$  von  $A$  für jedes  $\varrho > 0$  ein nicht von sich trennbares Kontinuum, so enthält bereits  $A$  ein solches.*

In der Tat: Es sei  $\{\varrho_v > 0; v = 1, 2, \dots\}$  eine Nullfolge positiver Zahlen und  $C_v \subset A_{\varrho_v}$  ein nicht von sich trennbares Kontinuum. Nach dem Auswahlssatz für abgeschlossene Punktmengen im kompakten Raum  $S_n$  kann man ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Konvergenz  $C_v \rightarrow C$  für  $v \rightarrow \infty$  statthat, wobei  $C$  eine nichtleere und abgeschlossene Grenzmenge ist. Der Konvergenzbegriff stützt sich hier auf die bekannte einfache Metrik im Raum der nichtleeren Teilmengen  $U \subset S_n$ , wo die Distanz durch  $d[U, V] = \inf \{\varrho > 0; U_\varrho \supset V, V_\varrho \supset U\}$  erklärt ist. In der üblichen schulmässigen Weise schliesst man, dass  $C$  zusammenhängend und nicht von sich trennbar ist, was zu zeigen war.

Wir wenden uns nun dem Beweis des Hilfssatzes zu. Es bezeichne  $\mathfrak{S}$  ein System von endlich vielen abgeschlossenen Punktmengen, die insgesamt eine Überdeckung der  $S_n$  von höchstens zweiter Ordnung ergeben.

1. Fall. Zunächst werde angenommen, dass alle Mengen von  $\mathfrak{S}$  zusammenhängend sind. Ist  $k$  die Anzahl dieser Mengen, so ist die Behauptung für  $k=1$  trivialerweise richtig. Es sei jetzt  $k > 1$ , und wir nehmen induktiv an, die Richtigkeit sei bereits erwiesen für alle Systeme  $\mathfrak{S}'$  mit weniger als  $k$  Mengen. Da  $S_n$  für  $n \geq 2$  unikohärent ist, lässt sich auf einfache Weise schliessen, dass es wenigstens eine Menge  $A \in \mathfrak{S}$  gibt, die mit einer einzigen andern  $B \in \mathfrak{S}$  benachbart ist, sodass  $A \cap B \neq \emptyset$  aber  $A \cap R = \emptyset$  ausfällt, wobei  $R$  die Vereinigungsmenge aller von  $A$  und  $B$  verschiedenen Mengen von  $\mathfrak{S}$  bezeichnet; der Fall  $R = \emptyset$  ist hier eingeschlossen.<sup>3)</sup> Nun ist  $C = A \cup B$  wieder zusammenhängend und  $C$  bildet mit den übrigen Mengen von  $\mathfrak{S}$  deren Vereinigung  $R$  ist, wieder ein System  $\mathfrak{S}'$  der hier betrachteten Art von insgesamt  $k-1$

<sup>3)</sup> Unsere Behauptung ergibt sich auch leicht aus einer von H. HOPF näher erörterten Sachlage, wonach der Nerv einer derartigen Überdeckung eines unikohärenten topologischen Raumes der Ordnung zwei ein Baum, d.h. ein zusammenhängender kreisloser Graph ist. Eine Überdeckungsmenge, die einem Endpunkt des Baumes entspricht, besitzt die im Text geforderte Eigenschaft. Vgl. hierüber [1], Seite 41 (Satz I).

Mengen. Nach der induktiven Voraussetzung ist wenigstens eine Menge von  $\mathfrak{S}$  nicht von sich trennbar. Es darf angenommen werden, dass es sich hier um  $C = A \cup B$  handelt, da sich in jedem andern Fall die Behauptung bestätigt. Mit gleichem Grund darf weiter vorausgesetzt werden, dass  $A$  von sich trennbar ist. Nach Lemma II folgt jetzt, dass  $B$  nicht von sich trennbar ist. Damit ist der Beweis im vorliegenden Fall beendet.

2. Fall. Die Mengen von  $\mathfrak{S}$  seien nicht alle zusammenhängend, aber jede weise eine endliche Komponentenzahl auf. Nun ersetzen wir  $\mathfrak{S}$  durch das System  $\mathfrak{S}'$  aller Komponenten der Mengen von  $\mathfrak{S}$ . Offensichtlich stellt  $\mathfrak{S}'$  wieder eine Überdeckung der  $S_n$  mit endlich vielen abgeschlossenen und zusammenhängenden Punktmengen der Ordnung zwei dar, und nach dem oben behandelten 1. Fall ist wenigstens eine der Mengen von  $\mathfrak{S}'$  nicht von sich trennbar.

3. Fall. Nicht jede Menge von  $\mathfrak{S}$  besitze eine endliche Komponentenzahl. Wir betrachten nun zu einem  $\varrho > 0$  das System  $\mathfrak{S}_\varrho$  aller äusseren Parallelmengen der zu  $\mathfrak{S}$  gehörenden Mengen im Abstand  $\varrho$ , und  $\varrho$  sei so klein gewählt, dass  $\mathfrak{S}_\varrho$  immer noch eine Überdeckung von  $S_n$  der Ordnung zwei darstellt. Jede Menge von  $\mathfrak{S}_\varrho$  muss aber eine endliche Komponentenzahl haben; jede Komponente enthält ja eine  $n$ -dimensionale sphärische Kugel vom Radius  $\varrho$  und die Komponenten ein und derselben Menge sind paarweise disjunkt. Nach dem oben behandelten 2. Fall gibt es zu jedem ausreichend kleinen  $\varrho > 0$  noch eine Menge  $A[\varrho] \in \mathfrak{S}$  deren Parallelmenge  $A[\varrho]$  ein nicht von sich trennbares Kontinuum enthält. Da aber  $\mathfrak{S}$  nur endlich viele Mengen aufweist, ergibt eine naheliegende Anwendung des Schubfachschlusses, dass eine Menge  $A \in \mathfrak{S}$  existiert, welche die Eigenschaft hat, dass jede Parallelmenge  $A_\varrho$  für  $\varrho > 0$  ein nicht von sich trennbares Kontinuum enthält. Nach Lemma III trifft dies für  $A$  selbst zu. Damit schliesst sich der Nachweis des Hilfssatzes.

### 3. Sätze über abgeschlossene Überdeckung der Sphäre mit kongruenten Punktmengen

Wir eröffnen den vorliegenden Hauptabschnitt mit dem folgenden

**SATZ I.** *Ist die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre  $S_n$  [ $n \geq 2$ ] mit zwei abgeschlossenen kongruenten Punktmengen  $A$  und  $B$  überdeckt, so enthält der Durchschnitt  $A \cap B$  beider Mengen ein Kontinuum  $K$ , das durch kongruente Abbildungen von  $S_n$  auf sich nicht von sich getrennt werden kann.*

*Beweis.* Es sei  $A, B \subset S_n$  abgeschlossen,  $A \cup B = S_n$  und  $B = \varphi A$  für eine kongruente Abbildung  $\varphi$  von  $S_n$  auf sich. Offenbar gilt  $C = A \cap B \neq \emptyset$  und mit einem  $\varrho > 0$  bilde man die abgeschlossene äussere Parallelmenge  $C_\varrho$  von  $C$  mit dem ebenfalls nicht-leeren offenen Kern  $C_\varrho^0$  und schliesslich die Restmenge  $D_\varrho = S_n - C_\varrho^0$ . Die beiden abgeschlossenen Mengen  $C_\varrho$  und  $D_\varrho$  überdecken  $S_n$  und nach dem Hilfssatz enthält wenigstens eine der Mengen ein nicht von sich trennbares Kontinuum  $K = K[\varrho]$ .

1. Fall. Es gebe ein  $\varrho > 0$  mit  $K \subset D_\varrho$ . Da offensichtlich  $K \cap C = \emptyset$  und  $K$  ausserdem zusammenhängend ist, muss entweder  $K \subset A - C$  oder  $K \subset B - C$  gelten. Im ersten Fall muss  $\varphi K \subset B$  und also  $K \cap \varphi K = \emptyset$ , im zweiten dagegen  $\varphi^{-1} K \subset A$  und analog  $K \cap \varphi^{-1} K = \emptyset$  gelten. Beide Folgerungen stehen im Widerspruch mit der Nichttrennbarkeit von  $K$ , so dass der hier eingeräumte 1. Fall nicht in Betracht kommt.

2. Fall. Es gelte für jedes  $\varrho > 0$   $K \subset C_\varrho$ . Nach Lemma III enthält also bereits  $C$  ein nicht von sich trennbares Kontinuum  $K$ , was zu zeigen war.

**SATZ II.** *Ist die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre  $S_n$  [ $n \geq 2$ ] auf eine erste Art mit zwei abgeschlossenen und kongruenten Punktmengen  $A$  und  $B$  sowie auf eine zweite Art mit zwei weiteren abgeschlossenen und kongruenten Punktmengen  $C$  und  $D$  überdeckt, so ist der Durchschnitt  $A \cap B \cap C \cap D$  aller vier beteiligten Mengen nichtleer.*

*Beweis.* Es sei  $A, B, C, D \subset S_n$  abgeschlossen,  $A \cup B = S_n$ ,  $C \cup D = S_n$ , und für zwei kongruente Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  von  $S_n$  auf sich gelte  $B = \varphi A$  und  $D = \psi C$ . Nach Satz I gibt es ein nicht von sich trennbares Kontinuum  $K \subset A \cap B$ . Setzen wir weiter  $E = C \cap D$ , so muss  $K \cap E \neq \emptyset$  oder also  $A \cap B \cap C \cap D \neq \emptyset$  ausfallen, was der zu beweisenden Behauptung entspricht. Da nämlich  $K$  zusammenhängend ist, müsste andernfalls entweder  $K \subset C - E$  oder  $K \subset D - E$  gelten. Im ersten Fall schliesst man auf  $\psi K \subset D$  oder auf  $K \cap \psi K = \emptyset$ , im zweiten analog auf  $\psi^{-1} K \subset C$  oder auf  $K \cap \psi^{-1} K = \emptyset$ . Beide Folgerungen stehen im Widerspruch mit der Nichttrennbarkeit von  $K$ .

Damit ist unser Satz bewiesen.

**SATZ III.** *Ist die  $n$ -dimensionale euklidische Sphäre  $S_n$  [ $n \geq 2$ ] mit drei abgeschlossenen und kongruenten Punktmengen  $A, B$  und  $C$  überdeckt, so ist ihr Durchschnitt  $A \cap B \cap C$  nichtleer.*

*Beweis.* Es sei  $A, B, C \subset S_n$  abgeschlossen,  $A \cup B \cup C = S_n$  und es gebe zwei kongruente Abbildungen  $\varphi$  und  $\psi$  von  $S_n$  auf sich so, dass  $B = \varphi A$  und  $C = \psi A$  gilt. Wir treffen die Gegenannahme zur Aussage des Satzes und es soll also  $A \cap B \cap C = \emptyset$  ausfallen. Es lässt sich dann ein  $\varrho > 0$  so wählen, dass für die unten eingetragenen abgeschlossenen Parallelmengen die nachstehenden Beziehungen

$$(B \cap C)_\varrho \cap A_\varrho = \emptyset; \quad (C \cap A)_\varrho \cap B_\varrho = \emptyset; \quad (A \cap B)_\varrho \cap C_\varrho = \emptyset \quad (1)$$

gelten. Hierbei ist eventuell die Konvention anzuwenden, wonach die Parallelmenge der leeren Menge selbst leer ist. Wir setzen nun

$$U = (B \cap C)_\varrho \cup (C \cap A)_\varrho \cup (A \cap B)_\varrho \quad (2)$$

und weiter auch

$$V = S_n - U^0, \quad (3)$$

wo  $U^0$  den nichtleeren offenen Kern von  $U$  bezeichnet. Die beiden abgeschlossenen

Mengen  $U$  und  $V$  überdecken  $S_n$  und nach dem Hilfssatz enthält wenigstens eine ein nicht von sich trennbares Kontinuum  $K$ .

1. Fall. Es gelte  $K \subset V$ . Da  $K$  zusammenhängend ist, muss eine der drei Beziehungen

$$K \subset A - [(A \cap B) \cup (A \cap C)] \quad (4)$$

$$K \subset B - [(B \cap C) \cup (B \cap A)] \quad (5)$$

$$K \subset C - [(C \cap A) \cup (C \cap B)] \quad (6)$$

gelten. Aus (4) folgt  $\varphi K \subset B$  und damit  $K \cap \varphi K = \emptyset$ , aus (5)  $\varphi^{-1} K \subset A$  und analog  $K \cap \varphi^{-1} K = \emptyset$  und schliesslich resultiert aus (6)  $\psi^{-1} K \subset A$  und wieder  $K \cap \psi^{-1} K = \emptyset$ . Alle drei Folgerungen widersprechen der Nichttrennbarkeit von  $K$ .

2. Fall. Es gelte  $K \subset U$ . Da die drei Teile aus denen  $U$  gemäss Vereinigungsformel (2) zusammengesetzt ist, im Hinblick auf (1) paarweise disjunkt sind,  $K$  aber zusammenhängend ist, muss eine der drei Relationen

$$K \subset (B \cap C)_e \subset B_e \quad (7)$$

$$K \subset (C \cap A)_e \subset A_e \quad (8)$$

$$K \subset (A \cap B)_e \subset A_e \quad (9)$$

bestehen. Aus (7) folgt  $\varphi^{-1} K \subset A_e$  und unter Berücksichtigung von (1)  $K \cap \varphi^{-1} K = \emptyset$ , aus (8) analog  $\varphi K \subset B_e$  und  $K \cap \varphi K = \emptyset$  und endlich aus (9)  $\psi K \subset C_e$  und weiter  $K \cap \psi K = \emptyset$ . Die drei Folgerungen stehen mit der Nichttrennbarkeit von  $K$  im Widerspruch, womit die Gegenannahme als unzutreffend und die Behauptung des Satzes als richtig erkannt ist.

#### 4. Schlussbemerkungen; Ausblicke

Innerhalb des mit dem Begriff des durch kongruente Abbildungen nicht von sich trennbaren Teilkontinuums euklidischer Sphären eröffneten Fragenkreises sind in der vorliegenden Note einige wenige Resultate gewonnen worden, und fortgeführte Studien könnten wohl weitere schärfere Ergebnisse hervorbringen. Immerhin gestatten die hier erzielten Sätze über die Überdeckungen der Sphären mit kongruenten Punktmengen bereits verschiedene Anwendungen, und als Folgerungen lassen sich auch einige bekannte Theoreme topologischer Art darstellen. Hierüber soll später, eventuell auch von anderer Seite berichtet werden. An dieser Stelle wollen wir nur einen Hinweis darauf geben, inwiefern die mitgeteilten Ergebnisse noch unvollständig sind, und welche Fragen sich weiter unmittelbar anschliessen.

Für  $n \geq 2$  bezeichne  $p_n$  die kleinste unter den natürlichen Zahlen  $p$ , für die es Überdeckungen der  $S_n$  mit  $p$  abgeschlossenen und kongruenten Punktmengen mit leerem gemeinsamem Durchschnitt gibt.

Mit der trivialen Bemerkung, dass die reguläre Simplicialüberdeckung der  $S_n$  eine solche der gewünschten Art mit  $p=n+2$  Mengen repräsentiert, folgt in Verbindung mit Satz III, dass die Einschränkung

$$4 \leq p_n \leq n+2 \quad (\text{a})$$

gelten muss.

Für  $n \geq 2$  bezeichne  $q_n$  weiter die kleinste unter den natürlichen Zahlen  $q$ , für die es  $q$  verschiedene Überdeckungen der  $S_n$  mit je zwei abgeschlossenen und kongruenten Punktmengen so gibt, dass alle  $2q$  Mengen einen leeren Durchschnitt aufweisen.

Betrachten wir  $n+1$  Paare abgeschlossener und sich antipodisch entsprechender Hemisphären der  $S_n$ , deren Symmetrieachsen paarweise orthogonal sind, so ist eine Überdeckung der  $S_n$  der gewünschten Art mit  $q=n+1$  Mengenpaaren gegeben. Zusammen mit Satz II resultiert nun die Einschränkung

$$3 \leq q_n \leq n+1. \quad (\text{b})$$

Für  $n=2$  ergibt sich aus (a) und (b) das einfache Resultat  $p_2=4$  und  $q_2=3$ . Im Falle  $n=3$  kann die Frage durch speziell konstruierte Überdeckungen [Beispiele A/B; folgen am Schluss des Abschnitts] ebenfalls vollständig geklärt werden: Es gilt nämlich  $p_3=4$  und  $q_3=3$ . Die nächstliegenden trivialen Überdeckungen, die wir für die Begründung der rechtsseitigen Schranken in (a) und (b) anführten, sind also im Sinne unserer Fragestellung nicht extremal; dies ist ein Indiz dafür, dass die vollständige Erledigung des Problems kaum sehr einfach sein wird. Beachtenswert ist aber ferner folgendes: Die erwähnten Schranken werden exakt, wenn die Voraussetzungen über die zulässigen Überdeckungen in geringfügiger, dem Antipodismus verpflichteten Weise verstärkt werden. Die Zahl  $\tilde{p}_n$  sie im wesentlichen gleich definiert wie  $p_n$ , jedoch soll zusätzlich vorausgesetzt werden, dass die beteiligten Überdeckungsmengen mit ihren antipodischen Bildmengen disjunkt sind. Es gilt dann

$$\tilde{p}_n = n+2. \quad (\text{aa})$$

In der Tat: Ist  $S_n$  mit  $p$  abgeschlossenen Mengen überdeckt, von denen keine ein antipodisches Punktepaar enthält, so muss nach dem bekannten Satz von LUSTERNIK und SCHNIRELMANN<sup>4)</sup>  $p \geq n+2$  sein, so dass einerseits  $\tilde{p}_n \geq n+2$  resultiert. Nach (a) muss aber evidenterweise  $\tilde{p}_n \leq n+2$  ausfallen, so dass (aa) folgt. In diesem Falle ist die Kongruenzbedingung der Mengen als ursprüngliche Voraussetzung metrischer Art durch die stärker einwirkende Kraft der mehr topologischen Antipodensätze paralyisiert worden und ist *de facto* gar nicht mehr notwendig. – Analog sei die Zahl  $\tilde{q}_n$  gleich definiert wie  $q_n$ , doch soll zusätzlich verlangt werden, dass die beiden kongruen-

<sup>4)</sup> Ausführliche Begründung der Antipodensätze im Rahmen der Topologie findet man in [4], Seite 486f; neuere elementare Herleitungen nach der Tucker-Ky Fan'schen Methode sind in [5], Seite 52 ff skizziert.

ten Mengen, die eine einzelne Überdeckung der Sphäre ausmachen, sich insbesondere antipodisch entsprechen.

Es gilt dann

$$\tilde{q}_n = n + 1. \quad (\text{bb})$$

In der Tat: Sind  $q$  Paare sich antipodisch entsprechender Mengen gegeben, wobei jedes Paar eine abgeschlossene Überdeckung der  $S_n$  darstellt, so muss nach einem Satz der einer von KY FAN auf elementare Weise begründeten Aussagengruppe angehört<sup>5)</sup>,  $q \geq n+1$  ausfallen, falls alle  $2q$  Mengen einen nichtleeren Durchschnitt haben sollen. Demnach muss  $\tilde{q}_n \geq n+1$  sein. Nach (b) ist aber evidenterweise  $\tilde{q}_n \leq n+1$ , sodass sich (bb) ergibt.

Abschliessend lassen wir nun die zwei bereits angekündigten Beispiele folgen. Bei ihrer Beschreibung beziehen wir uns auf ein cartesisches orthogonales Koordinatensystem im 4-dimensionalen euklidischen Raum mit Ursprung  $Z$ ; einen Punkt kennzeichnen wir kurz mit  $\langle x_i \rangle$ , wobei die  $x_i$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) seine Koordinaten sind.

Als Hilfsausdrücke werden uns die folgenden vier quadratischen Formen

$$P = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - x_4^2$$

$$Q = x_1 x_3 + x_2 x_4$$

$$R = x_2 x_3 - x_1 x_4$$

$$S = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$$

dienen.

*Beispiel A.* Es wird eine Überdeckung der  $S_3$  mit 4 abgeschlossenen kongruenten Punktmengen  $A_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ),  $A_i \simeq A_j$  mit leerem gemeinsamen Durchschnitt  $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 = \emptyset$  konstruiert.

Durch die Ansätze

$$A_1 = \{ \langle x_i \rangle \mid P + 2Q \geq 0; \quad S = 1 \} \quad (1)$$

$$A_2 = \{ \langle x_i \rangle \mid -2Q + 2R \geq 0; \quad S = 1 \} \quad (2)$$

$$A_3 = \{ \langle x_i \rangle \mid -P + 2Q \geq 0; \quad S = 1 \} \quad (3)$$

$$A_4 = \{ \langle x_i \rangle \mid -2Q - 2R \geq 0; \quad S = 1 \} \quad (4)$$

sind vier abgeschlossene Teilmengen der  $S_3$  charakterisiert, die alle kongruent sind. Es gelten die Abbildungsrelationen

$$A_{k+1} = \varphi_k A_k \quad (k = 1, 2, 3)$$

mit drei Drehungen um den Ursprung  $Z$ , die wir durch drei vierzeilige orthogonale Matrizen darstellen, und mit der zweizeiligen Hilfsmatrix

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

<sup>5)</sup> Vgl. hierzu [6]; der im Text zitierte Satz findet sich in [5], Seite 54.



als

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} H & H' \\ -H & H' \end{pmatrix}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} H' & H' \\ -H & H \end{pmatrix}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} H' & -H \\ H' & H \end{pmatrix}$$

schreiben können; hierbei ist  $H'$  zu  $H$  transponiert und  $-H$  bedeutet  $(-1)H$ .

Die  $A_k$  überdecken die  $S_3$ . Würde nämlich ein Punkt  $\langle x_i \rangle$  derart existieren, dass alle in (1) bis (4) eingetragenen Bedingungen verletzt wären, so würde aus (1)(2)  $P+2R < 0$  und aus (3)(4)  $-P-2R < 0$  resultieren, also zwei sich widersprechende Folgerungen. Ferner haben die  $A_k$  einen leeren Durchschnitt. Anderfalls gäbe es einen Punkt  $\langle x_i \rangle$  so, dass alle in (1) bis (4) vorkommenden Bedingungen simultan erfüllt wären. Aus (1)(2), (2)(3), (3)(4), (4)(1), (1)(3), (2)(4) schliesst man in dieser Reihenfolge auf  $P+2R \geq 0$ ,  $-P+2R \geq 0$ ,  $-P-2R \geq 0$ ,  $P-2R \geq 0$ ,  $Q \geq 0$ ,  $-Q \geq 0$  und hieraus leicht auf  $P=Q=R=0$ . Mit  $P=0$  und  $S=1$  folgt  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = \frac{1}{2}$  und mit  $Q=R=0$  weiter  $x_i=0$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) im Widerspruch mit  $S=1$ .

*Beispiel B.* Es werden 3 verschiedene Überdeckungen der  $S_3$  durch je 2 abgeschlossene und kongruente Punktmengen  $A_k$  und  $\tilde{A}_k$  ( $k=1, 2, 3$ ),  $A_k \simeq \tilde{A}_k$  mit einem leeren gemeinsamen Durchschnitt  $A_1 \cap \tilde{A}_1 \cap A_2 \cap \tilde{A}_2 \cap A_3 \cap \tilde{A}_3 = \emptyset$  angegeben.

Die Ansätze

$$A_1 \quad \text{bzw} \quad \tilde{A}_1 = \{\langle x_i \rangle \mid P \geq 0 \quad \text{bzw} \quad P \leq 0; S = 1\} \quad (1)$$

$$A_2 \quad \text{bzw} \quad \tilde{A}_2 = \{\langle x_i \rangle \mid Q \geq 0 \quad \text{bzw} \quad Q \leq 0; S = 1\} \quad (2)$$

$$A_3 \quad \text{bzw} \quad \tilde{A}_3 = \{\langle x_i \rangle \mid R \geq 0 \quad \text{bzw} \quad R \leq 0; S = 1\} \quad (3)$$

kennzeichnen sechs abgeschlossene Teilmengen der  $S_3$ . Je zwei einander zugeordnete Mengen  $A_k$  und  $\tilde{A}_k$  sind offensichtlich kongruent und überdecken die  $S_3$ . Der gemeinsame Durchschnitt aller Mengen ist leer. Andernfalls würde ein Punkt  $\langle x_i \rangle$  existieren, sodass alle in (1) bis (3) vorkommenden Bedingungen simultan erfüllt wären. Unmittelbar würde aber  $P=Q=R=0$  folgen, also wie beim vorigen Beispiel, ein Widerspruch!

#### LITERATUR

- [1] H. HOPF, *Freie Überdeckungen und freie Abbildungen*, Fund. Math. 28 (1937), 33–57.
- [2] L. M. SONNEBORN, *Level Sets on Spheres*, Ph. D. thesis, California Institute of Technology 1936; Pac. J. Math. 13 (1963), 297–303.
- [3] K. ZARANKIEWICZ, *Un théorème sur l'uniformisation des fonctions continues et son application à la démonstration du théorème de F. J. Dyson sur les transformations de la surface sphérique*, Bull. Acad. Polonaise des sciences 2 (3) (1954), 117–120.
- [4] P. ALEXANDROFF und H. HOPF, *Topologie I*, (Julius Springer, Berlin 1935).
- [5] H. HADWIGER, *Elementare Kombinatorik und Topologie*, Elemente Math. 15 (1960), 49–60.
- [6] KY FAN, *A generalization of Tucker's combinatorial lemma with topological applications*, Ann. Math. 56 (1952), 431–437.

Eingegangen den 1. Februar 1967.