

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 42 (1967)  
  
**Artikel:** Sur une classe d'algèbres filtrées.  
**Autor:** Knus, Max-Albert  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-32134>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 03.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur une classe d'algèbres filtrées

MAX-ALBERT KNUS<sup>1)</sup>

## Introduction

Les algèbres considérées dans ce travail sont des algèbres associatives avec élément unité sur un anneau commutatif  $K$  avec 1.

Nous rappelons qu'une algèbre  $A$  est dite *positivement graduée* si elle est la somme directe d'une famille  $\{A^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  de sous-modules du module  $A$  telle que  $A^i = 0$  pour  $i < 0$  et  $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$ . Une algèbre  $A$  est dite *filtrée* si elle est la réunion d'une famille de sous-modules  $\{F_i A\}_{i \in \mathbb{Z}}$  telle que 1)  $F_i A = 0$  pour  $i < 0$ , 2)  $F_0 A = K \cdot 1_A$ , 3)  $F_i A \subset F_j A$  pour  $i \leq j$ , et 4)  $F_i A \cdot F_j A \subset F_{i+j} A$ .

A toute algèbre filtrée  $A$ , on associe une algèbre positivement graduée  $EA = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^i A$  où  $E^i A = F_i A / F_{i-1} A$ . La multiplication de  $EA$  est induite par la multiplication de  $A$ . Toute graduation positive telle que  $A^0 = K \cdot 1_A$  induit la filtration évidente  $F_i A = \bigoplus_{k \leq i} A^k$ ; l'algèbre graduée associée est alors (isomorphe à) l'algèbre graduée donnée. Il existe des exemples intéressants de filtrations ne provenant pas trivialement d'une graduation. Par exemple, les *algèbres de Clifford* admettent une filtration naturelle; l'algèbre graduée associée à une algèbre de Clifford sur un module libre est l'algèbre *extérieure* de ce module. L'*algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie*  $L$  est également filtrée de façon naturelle, sans être positivement graduée. Le théorème de POINCARÉ-BIRKHOFF-WITT caractérise, sous certaines hypothèses, l'algèbre graduée associée: si  $L$  est un *module libre* sur un anneau commutatif quelconque  $K$  ou si  $L$  est un module sur un *anneau principal*  $K$ , l'algèbre graduée associée à l'algèbre enveloppante de  $L$  est l'*algèbre symétrique*  $SL$  de  $L$ .

Ces deux exemples peuvent être traités simultanément, et dans un cadre plus général, en considérant des algèbres  $\mathbb{Z}_2$ -graduées (la  $\mathbb{Z}_2$ -gradation se superpose à la filtration et à la graduation positive). Dans la première partie du travail, nous rappelons les définitions des modules, des algèbres et des algèbres de Lie  $\mathbb{Z}_2$ -gradués. Ensuite, nous introduisons la classe d'algèbres qui joue un rôle central dans ce travail: les *algèbres  $f$ -enveloppantes*  $U_f(L)$  d'*algèbres de Lie*  $\mathbb{Z}_2$ -graduées  $L$ ;  $f$  est un 2-cocycle sur  $L$  à valeurs dans  $K$  et  $U_f(L)$  est le quotient de l'algèbre tensorielle  $TL$  du module  $L$  par l'idéal engendré par les éléments de la forme  $x \otimes y - (-1)^{m \cdot n} y \otimes x - [x, y] - f(x, y) \cdot 1$ ,  $x \in L$ ,  $y \in L$ ;  $m$  est le degré de  $x$  en  $\mathbb{Z}_2$ -gradation et  $n$  le degré de  $y$ . L'algèbre  $U_f(L)$  résout un problème d'application universelle. Les algèbres de Clifford

---

<sup>1)</sup> L'auteur est au bénéfice d'une bourse de l'Institut Batelle, Genève.

et les algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie sont des cas particuliers d'algèbres  $U_f(L)$ , et il en est de même du produit tensoriel d'une algèbre de Clifford par une algèbre enveloppante. Remarquons qu'inversément, une telle décomposition n'est possible que pour des algèbres  $U_f(L)$  très particulières; cette notion d'algèbre  $f$ -enveloppante est donc vraiment plus générale que celles d'algèbre de Clifford et d'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

La filtration de l'algèbre tensorielle  $TL$  induit de façon naturelle une filtration de l'algèbre  $U_f(L)$ . Nous démontrons le théorème suivant:

*Soit  $K$  un anneau commutatif dans lequel 2 est inversible. Si le module  $L$  est libre sur  $K$ , ou si le module  $L$  est quelconque et  $K$  est principal, l'algèbre graduée associée à l'algèbre filtrée  $U_f(L)$  est l'algèbre symétrique  $\mathbb{Z}_2$ -graduée  $SL$  de  $L$ . Rappelons que l'algèbre symétrique  $\mathbb{Z}_2$ -graduée d'un module  $\mathbb{Z}_2$ -gradué est le produit tensoriel d'une algèbre symétrique classique (c'est-à-dire non  $\mathbb{Z}_2$ -graduée) par une algèbre extérieure.*

La démonstration de ce théorème reprend une méthode de WITT, ([13], voir aussi LAZARD [9]) développée pour les algèbres de Lie classiques. En utilisant un résultat de CARTIER [4], on peut voir que ce théorème est également valable si  $K$  est un anneau de Dedekind dans lequel 2 est inversible. Ce résultat s'applique en particulier aux algèbres de Clifford. Il s'ensuit par exemple que l'application canonique d'un module dans une algèbre de Clifford sur ce module est injective si l'anneau des scalaires est de Dedekind et si 2 est inversible.

Une autre généralisation est donnée, dans le cas où  $K$  est arbitraire, (2 est toujours supposé inversible): nous démontrons, à l'aide de l'algèbre  $f$ -enveloppante d'un produit d'algèbres de Lie  $\mathbb{Z}_2$ -graduées, que l'algèbre graduée associée à  $U_f(L)$  est encore l'algèbre symétrique de  $L$  si le module  $L$  n'est pas libre mais *projectif*. Remarquons que le module  $U_f(L)$  est alors lui-même projectif. Inversément, nous montrons que les algèbres  $U_f(L)$  sur des modules projectifs  $L$  sont caractérisées par leurs algèbres graduées associées; nous avons en effet le théorème suivant:

*Soit  $K$  un anneau commutatif dans lequel 2 possède un inverse. Si  $A$  est une algèbre  $\mathbb{Z}_2$ -graduée filtrée telle que l'algèbre graduée associée  $EA$  soit isomorphe à l'algèbre symétrique  $SM$  d'un module projectif  $\mathbb{Z}_2$ -gradué  $M$ , alors il existe une structure d'algèbre de Lie  $L$  sur  $M$  et un 2-cocycle  $f$  sur  $L$  tels que  $A \cong U_f(L)$ .*

Ce théorème général s'applique aux algèbres de Clifford et aux algèbres  $f$ -enveloppantes classiques (introduites indépendamment par COHN [7] et SRIDHARAN [12]). Ces cas particuliers avaient déjà été traités auparavant, le premier par ROY [11] et le second par SRIDHARAN [12], dans le cas où  $M$  est un module libre.

Je remercie très vivement Monsieur le professeur B. ECKMANN qui me proposa le thème de ce travail et qui m'encouragea constamment.

## 1. Modules et algèbres

Soit  $K$  un anneau commutatif avec 1. Tous les produits tensoriels seront pris sur  $K$ .

Un  $K$ -module  $\mathbb{Z}_2$ -gradué  $M$  est un couple de  $K$ -modules  $(M_0, M_1)$ . Les éléments de  $M_0$  seront parfois appelés éléments de degré 0 et les éléments de  $M_1$  éléments de degré 1.

$M$  est également un  $K$ -module, la somme et la multiplication par un scalaire étant définies par composantes.  $M$  est donc isomorphe à la somme directe  $M_0 \oplus M_1$ . Inversément toute somme directe de deux  $K$ -modules définit un  $K$ -module  $\mathbb{Z}_2$ -gradué.

Si  $M$  et  $N$  sont deux  $K$ -modules  $\mathbb{Z}_2$ -gradués, un homomorphisme de  $K$ -modules  $\mathbb{Z}_2$ -gradués  $f: M \rightarrow N$  est un couple d'homomorphismes de  $K$ -modules  $(f_0, f_1)$  tel que  $f_0: M_0 \rightarrow N_0$  et  $f_1: M_1 \rightarrow N_1$ .

Si  $M$  et  $N$  sont deux  $K$ -modules  $\mathbb{Z}_2$ -gradués,  $M \oplus N$  est le  $K$ -module  $\mathbb{Z}_2$ -gradué tel que

$$(M \oplus N)_i = M_i \oplus N_i \quad i = 0, 1.$$

$M \otimes N$  est le  $K$ -module  $\mathbb{Z}_2$ -gradué tel que

$$\begin{aligned} (M \otimes N)_0 &= M_0 \otimes N_0 \oplus M_1 \otimes N_1 \\ (M \otimes N)_1 &= M_0 \otimes N_1 \oplus M_1 \otimes N_0 \end{aligned}$$

$M \subset N$  signifie  $M_0 \subset N_0$  et  $M_1 \subset N_1$ .

$K$  peut être considéré comme un  $K$ -module  $\mathbb{Z}_2$ -gradué avec

$$K_0 = K \quad \text{et} \quad K_1 = 0.$$

On a alors  $M \otimes K \cong K \otimes M \cong M$ .

Une  $K$ -algèbre  $\mathbb{Z}_2$ -gradué  $A$  est un  $K$ -module  $\mathbb{Z}_2$ -gradué  $A = (A_0, A_1)$  avec deux homomorphismes  $\varphi: A \otimes A \rightarrow A$  et  $\eta: K \rightarrow A$  tels que les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} A \otimes A \otimes A & \xrightarrow{\varphi \otimes A} & A \otimes A & K \otimes A \cong A \cong A \otimes K \\ A \otimes \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi & \eta \otimes A \downarrow & \parallel & \downarrow A \otimes \eta \\ A \otimes A & \xrightarrow{\varphi} & A & A \otimes A \xrightarrow{\varphi} A \xleftarrow{\varphi} A \otimes A \end{array}$$

soient commutatifs.

$\varphi$  est la multiplication. On notera  $\varphi(x \otimes y) = xy$ . Le premier diagramme dit que la multiplication doit être associative, le second qu'elle doit posséder un élément unité  $1_A = \eta(1_K)$ .

Remarquons que si  $a_i \in A_i$ ,  $a_j \in A_j$ , alors  $a_i a_j \in A_{i+j}$  ( $i+j$  est calculé mod. 2). L'unité  $1_A$  est de degré 0,  $1_A \in A_0$ .

Par abus de langage, nous utiliserons désormais les termes de module et d'algèbre pour un module  $\mathbb{Z}_2$ -gradué et une algèbre  $\mathbb{Z}_2$ -gradué.



Soient  $A = (A_0, A_1)$  et  $B = (B_0, B_1)$  deux  $K$ -modules et soit  $\tau: A \otimes B \rightarrow B \otimes A$  l'homomorphisme tel que

$$\tau(a \otimes b) = (-1)^{mn} b \otimes a \quad a \in A_m, b \in B_n.$$

L'algèbre  $A = (A_0, A_1)$  est *commutative* si le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\tau} & A \otimes A \\ \varphi \downarrow & \swarrow \varphi & \\ A & & \end{array}$$

est commutatif, c'est-à-dire si

$$a_i a_j = (-1)^{ij} a_j a_i \quad a_i \in A_i, a_j \in A_j.$$

Si  $A = (A_0, A_1)$  et  $B = (B_0, B_1)$  sont deux  $K$ -algèbres,  $A \otimes B$  est la  $K$ -algèbre dont la multiplication est la composition

$$A \otimes B \otimes A \otimes B \xrightarrow{A \otimes \tau \otimes B} A \otimes A \otimes B \otimes B \xrightarrow{\varphi_A \otimes \varphi_B} A \otimes B$$

et l'unité  $K \cong K \otimes K \xrightarrow{\eta_A \otimes \eta_B} A \otimes B$ .

Le produit dans  $A \otimes B$  est donc défini par

$$(a_i \otimes b_j)(a'_m \otimes b'_n) = (-1)^{jm} a_i a'_m \otimes b_j b'_n \quad a_i \in A_i, a'_m \in A_m, b_j \in B_j \text{ et } b'_n \in B_n.$$

Nous dirons parfois que  $A \otimes B$  est le produit tensoriel  $\mathbb{Z}_2$ -gradué de  $A$  et  $B$ .

Un homomorphisme de  $K$ -algèbres  $f: A \rightarrow B$  est un homomorphisme de  $K$ -modules  $f: A \rightarrow B$  tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} A \otimes A & \xrightarrow{\varphi_A} & A \\ f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\ B \otimes B & \xrightarrow{\varphi_B} & B \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\eta_A} & A \\ \parallel & & \downarrow f \\ K & \xrightarrow{\eta_B} & B \end{array}$$

soient commutatifs.

Un idéal (bilatère)  $J = (J_0, J_1) \subset A$  est un sous-module de  $A$  tel que  $JA \subset A$  et  $AJ \subset A$ .  $A/J = (A_0/J_0, A_1/J_1)$  est une  $K$ -algèbre dont le produit est déterminé par la condition que la projection  $A \rightarrow A/J$  soit un homomorphisme de  $K$ -algèbres.

### Exemples

Soit  $M = (M_0, M_1)$  un  $K$ -module.

$TM = \bigoplus_k \bigotimes_k M$  est une  $K$ -algèbre, l'algèbre tensorielle de  $M$ .

$$\begin{aligned} (TM)_0 &= K \oplus M_0 \oplus (M \otimes M)_0 \oplus \dots \\ (TM)_1 &= M_1 \oplus (M \otimes M)_1 \oplus \dots \end{aligned}$$

La multiplication est donnée par le produit tensoriel et l'unité par l'injection  $K \rightarrow TM$ .

Remarquons que  $M$  peut être identifié à un sous-module de  $TM$ .

Soit  $J$  l'idéal de  $TM$  engendré par les éléments de la forme

$$x \otimes y - (-1)^{pq} y \otimes x \quad x \in M_p, y \in M_q.$$

Le quotient  $TM/J$  est une  $K$ -algèbre, l'algèbre symétrique  $SM$  de  $M$ . On vérifie que  $SM$  est commutative.

DEFINITION. Une *graduation positive* sur une  $K$ -algèbre  $A = (A_0, A_1)$  est une famille de sous-modules  $\{A^i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  du  $K$ -module  $A$  telle que

- 1)  $A^i = 0$  pour  $i < 0$
- 2)  $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i = A$
- 3)  $A^i \cdot A^j \subset A^{i+j}$  pour tout  $i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}$ .

Une  $K$ -algèbre  $A$  munie d'une graduation positive est dite positivement graduée. Les éléments de  $A^i$  sont appelés éléments homogènes de degré positif  $i$ .  $1_A$  est de degré positif 0. Si  $A^0 = K \cdot 1_A$ ,  $A$  est dite connexe.

Remarque. Si l'on tient compte explicitement de la  $\mathbb{Z}_2$ -graduation de  $A$ , la définition ci-dessus signifie que

$$\begin{aligned} A_0 &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (A^i)_0, & (A^i)_0 &= 0 & i < 0 \\ A_1 &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} (A^i)_1, & (A^i)_1 &= 0 & i < 0 \end{aligned}$$

et

$$(A^i)_m \cdot (A^j)_n \subset (A^{i+j})_{m+n}, \quad m+n \equiv 0 \pmod{2}.$$

$A$  est donc bigraduée.

Si  $A = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} A^i$  et  $B = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} B^i$  sont deux algèbres positivement graduées, un homomorphisme d'algèbres positivement graduées  $f: A \rightarrow B$  est un homomorphisme d'algèbres  $f: A \rightarrow B$  tel que  $f(A^i) \subset B^i$ . Comme  $f = (f_0, f_1)$ , cela veut dire que

$$\begin{aligned} f_0((A^i)_0) &\subset (B^i)_0 \\ f_1((A^i)_1) &\subset (B^i)_1. \end{aligned}$$

L'algèbre tensorielle  $TM$  d'un  $K$ -module  $M$  est positivement graduée

$$TM = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} T^i M$$

si l'on pose  $T^i M = M \otimes M \otimes \cdots \otimes M$  ( $i$  facteurs) pour  $i > 0$ ,  $T^0 M = K$  et  $T^i M = 0$  pour  $i < 0$ .

$TM$  est connexe.

L'algèbre symétrique  $SM$  d'un  $K$ -module  $M$  est également positivement graduée,  $SM = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} S^i M$ . On le voit en remarquant que l'idéal  $J$  est engendré par des éléments homogènes. Soit  $\pi$  l'application canonique  $TM \rightarrow TM/J = SM$ . On a  $S^i M = \pi(T^i M)$ .  $\pi$  est donc un homomorphisme d'algèbres positivement graduées.

PROPOSITION 1.  $\pi$  est un isomorphisme sur  $M = T^1 M$ . Identifiant  $M$  et  $\pi(M)$ , on peut plonger  $M$  dans  $SM$ .

*Démonstration* ([5])  $J \cap M = 0$ , car les composantes homogènes des éléments de  $J$  différents de zéro sont de degré positif supérieur ou égal à deux, alors que les éléments de  $M$  sont de degré positif un.

Les algèbres  $TM$  et  $SM$  résolvent des problèmes d'applications universelles.

**PROPOSITION 2.** Soit  $M$  un  $K$ -module. Pour toute  $K$ -algèbre  $A$  et pour tout homomorphisme de  $K$ -modules  $\varphi: M \rightarrow A$ , il existe un unique homomorphisme de  $K$ -algèbres  $\bar{\varphi}: TM \rightarrow A$  qui rende le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & A \\ i \searrow & & \nearrow \bar{\varphi} \\ & TM & \end{array}$$

commutatif.  $i$  est l'injection  $M \rightarrow TM$ .

Si  $A$  est commutative,  $\bar{\varphi}$  se factorise en un homomorphisme (également noté  $\bar{\varphi}$ ) de  $SM$  dans  $A$ .

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & A \\ i \searrow & & \nearrow \bar{\varphi} \\ & TM & \\ \downarrow \pi & & \uparrow \bar{\varphi} \\ SM & & \end{array}$$

*Démonstration* ([5])  $\bar{\varphi}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)$ . Si  $A$  est commutative,  $\bar{\varphi}$  est nul sur  $J$  et induit un homomorphisme  $SM \rightarrow A$ .

$M = (M_0, M_1)$ . Si  $M_1 = 0$ ,  $SM$  est l'algèbre symétrique classique  $SM_0$  (non  $\mathbb{Z}_2$ -graduée) de  $M_0$ . Si  $M_0 = 0$ ,  $SM$  est l'algèbre extérieure  $\wedge M_1$  de  $M_1$ .

## 2. Algèbres de Lie

Une  $K$ -algèbre de Lie est un  $K$ -module  $L = (L_0, L_1)$  muni d'un homomorphisme  $\varphi: L \otimes L \rightarrow L$  (on notera  $\varphi(x \otimes y) = [x, y]$ ) tel que:

$$1) [x, y] = (-1)^{mn+1} [y, x]$$

$$2) (-1)^{mr} [x, [y, z]] + (-1)^{mn} [y, [z, x]] + (-1)^{nr} [z, [x, y]] = 0$$

pour  $x \in L_m, y \in L_n$  et  $z \in L_r$ .

$$3) [x, x] = 0 \text{ si } x \in L_0$$

$$[x, [x, x]] = 0 \text{ si } x \in L_1.$$

La condition 1) signifie que le produit ainsi défini est anticommutatif. L'identité 2) est appelée *identité de Jacobi*.

Remarquons que si  $x \in L_m$  et  $y \in L_n$ ,  $[x, y] \in L_{m+n}$ ,  $m+n \bmod 2$ .

Signalons que 1) entraîne  $2[x, x] = 0$  pour  $x \in L_0$  et que 2) entraîne  $3[x, [x, x]] = 0$  pour  $x \in L_1$ . 3) découle donc de 1) et 2) si 2 et 3 sont inversibles dans  $K$ .

$L$  n'est pas une algèbre de Lie au sens classique, car, par exemple,  $[x, x]$  n'est pas identiquement nul. Si  $L_1 = 0$ ,  $L = L_0$  est une algèbre de Lie classique. Les algèbres de Lie graduées ont été introduites par CARTIER [3] (voir également HILTON [8]).

Les conditions 1) et 2) peuvent être remplacées par des diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{c}
 L \otimes L \xrightarrow{\varphi} L \\
 \tau \downarrow \nearrow -\varphi \\
 L \otimes L
 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ccccc}
 L \otimes L \otimes L & \xrightarrow{\tau \otimes L} & L \otimes L \otimes L & \xrightarrow{L \otimes \tau} & L \otimes L \otimes L \\
 L \otimes \varphi \downarrow & L \otimes \tau & & \tau \otimes L & L \otimes \varphi \downarrow \downarrow L \otimes \varphi \\
 L \otimes L & & & & L \otimes L \\
 \varphi \downarrow & & & & \varphi \downarrow \downarrow \varphi \\
 L & \xleftarrow{\quad \quad \quad} & & & L
 \end{array}$$
  

$$- \left( \begin{array}{c} \leftarrow \\ + \\ \leftarrow \end{array} \right)$$

$\tau$  est l'homomorphisme défini au paragraphe 1.

Un homomorphisme de  $K$ -algèbres de Lie  $f: L \rightarrow L'$  est un homomorphisme de  $K$ -modules  $f: L \rightarrow L'$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 L \otimes L & \xrightarrow{\varphi_L} & L \\
 f \otimes f \downarrow & & \downarrow f \\
 L' \otimes L' & \xrightarrow{\varphi_{L'}} & L'
 \end{array}$$

soit commutatif, c'est-à-dire tel que  $f([x, y]) = [f(x), f(y)]$ ,  $x \in L$ ,  $y \in L$ .

### Exemples

1) Tout  $K$ -module  $M$  possède une structure d'algèbre de Lie. Il suffit de poser  $[x, y] = 0$  pour tout  $x$  et  $y$  de  $M$ .

2) Soit  $A = (A_0, A_1)$  une  $K$ -algèbre. L'opération

$$(x, y) \mapsto xy - (-1)^{pq} yx \quad x \in A_p, y \in A_q$$

définit sur le  $K$ -module  $A$  une structure de  $K$ -algèbre de Lie. On notera dorénavant cette opération  $\llbracket x, y \rrbracket$ .

Soit  $L$  une  $K$ -algèbre de Lie et soit  $f$  une forme  $K$ -bilinéaire sur le  $K$ -module  $L = (L_0, L_1)$  donnée par un homomorphisme de  $K$ -modules  $f: L \otimes L \rightarrow K$ .  $f$  est nulle sur  $L_i \otimes L_j$ ,  $i \neq j$ , car  $f(L_i, L_j) \subset K_{i+j}$ .  $f$  est donc la somme d'une forme bilinéaire sur  $L_0$  et d'une forme bilinéaire sur  $L_1$ .

**DÉFINITION.** La forme bilinéaire  $f$  sur  $L$  est appelée *2-cocycle à valeurs dans  $K$*  si

- 1)  $f(x, y) = (-1)^{mn+1} f(y, x)$
  - 2)  $(-1)^{mr} f(x, [y, z]) + (-1)^{mn} f(y, [z, x]) + (-1)^{nr} f(z, [x, y]) = 0$
- pour  $x \in L_m, y \in L_n$  et  $z \in L_r$ .
- 3)  $f(x, x) = 0$  si  $x \in L_0$ .

Signalons que  $f(x, [x, x])$  est égal à zéro si  $x \in L_1$  car  $[x, x] \in L_0$ . Les conditions 1) et 2) peuvent également être traduites en diagrammes commutatifs.

#### ALGÈBRE $f$ -ENVELOPPANTE D'UNE ALGÈBRE DE LIE

Soient  $L$  une  $K$ -algèbre de Lie et  $f$  un 2-cocycle sur  $L$  à valeurs dans  $K$ . Soit  $TL$  l'algèbre tensorielle sur le  $K$ -module  $L$  et soit  $I$  l'idéal de  $TL$  engendré par des éléments de la forme

$$x \otimes y - (-1)^{mn} y \otimes x - [x, y] - f(x, y) \cdot 1 \quad x \in L_m, y \in L_n.$$

DÉFINITION.  $U_f(L) = TL/I$  est l'algèbre  $f$ -enveloppante de  $L$ .

Cette définition a un sens car  $I$  possède bien deux composantes  $I_0$  et  $I_1$ , les éléments qui engendrent  $I$  étant homogènes (en  $\mathbb{Z}_2$ -graduation).

#### Cas particuliers

- 1)  $f=0$

$U_0(L) = U(L)$  est l'algèbre enveloppante de  $L$ . Si de plus  $[, ] = 0$ ,  $U(L)$  est l'algèbre symétrique  $SL$  de  $L$ .

- 2)  $f=0$  et  $L_1=0$

$U(L)$  est l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie «classique»  $L_0$ . Voir par exemple BOURBAKI [2], § 2.

- 3)  $L_1=0$

$U_f(L_0)$  est l'algèbre  $f$ -enveloppante de SRIDHARAN [12]. COHN [7] l'a aussi introduite sous le nom d'algèbre de Birkhoff-Witt.

- 4)  $L_0=0$

$[, ] = 0$  car  $[L_1, L_1] \subset L_0$ .  $f$  est une forme bilinéaire symétrique. Posons  $Q(x) = \frac{1}{2} f(x, x)$  (supposons 2 inversible dans  $K$ ).  $U_f(L)$  est alors l'algèbre de Clifford  $C_Q(L_1)$  de  $L_1$  associée à la forme quadratique  $Q$ . Pour plus de détails sur ces algèbres de Clifford, on pourra consulter par exemple BOURBAKI [1], § 9.

Remarquons que dans le cas 3) la  $\mathbb{Z}_2$ -graduation est triviale, mais pas dans le cas 4).

Soit  $\eta_f$  l'application canonique  $TL \rightarrow TL/I$ .  $\eta_f$  induit par restriction un homomorphisme de  $K$ -modules  $i_f: L \rightarrow U_f(L)$  et

$$[[i_f(x), i_f(y)]] = i_f([x, y]) + f(x, y) \cdot 1 \quad x \in L, y \in L$$

$i_f(L)$  engendre  $U_f(L)$  mais  $i_f$  n'est pas injectif en général. CHEVALLEY [6], p. 230, ex. 12, donne un exemple où  $L \rightarrow C_Q(L)$  n'est pas injectif et CARTIER [4] (voir également BOURBAKI [2], § 2, exercice 9) un exemple où  $L \rightarrow U(L)$  dans le cas classique

$(L_1=0)$  n'est pas injectif. Nous donnerons plus tard des conditions suffisantes pour que  $i_f$  soit injectif.

$U_f(L)$  résout un problème d'application universelle. Soient  $A$  une  $K$ -algèbre,  $L$  une  $K$ -algèbre de Lie et  $f$  un 2-cocycle sur  $L$  à valeurs dans  $K$ .

DÉFINITION (Voir [12]). Un homomorphisme de  $K$ -modules  $\mu: L \rightarrow A$  sera appelé un *f-homomorphisme* si

$$[\mu(x), \mu(y)] = \mu([x, y]) + f(x, y) \cdot 1_A \quad x \in L, y \in L.$$

Exemple.  $A = U_f(L)$ .  $i_f$  est un *f-homomorphisme* de  $L$  dans  $U_f(L)$ .

PROPOSITION 3. (caractérisation universelle des algèbres  $U_f(L)$ ). Soient  $L$  une  $K$ -algèbre de Lie et  $f$  un 2-cocycle sur  $L$  à valeurs dans  $K$ . Pour toute algèbre  $A$  et pour tout *f-homomorphisme*  $\mu: L \rightarrow A$  il existe un unique homomorphisme de  $K$ -algèbres  $\bar{\mu}: U_f(L) \rightarrow A$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\mu} & A \\ i_f \searrow & & \nearrow \bar{\mu} \\ & U_f(L) & \end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration.  $\mu$  induit un homomorphisme d'algèbres  $TL \rightarrow A$  (Prop. 2) qui est nul sur  $I$ .

Cette proposition contient comme cas particuliers, la caractérisation universelle des algèbres enveloppantes d'algèbres de Lie et des algèbres de Clifford.

#### ALGÈBRE *f*-ENVELOPPANTE D'UN PRODUIT D'ALGÈBRES DE LIE

Soient  $L'$  et  $L''$  deux  $K$ -algèbres de Lie. Le  $K$ -module  $L = L' \oplus L''$  est une  $K$ -algèbre de Lie si l'on pose

$$[(x, y), (x', y')] = ([x, x'], [y, y']) \quad (x, y) \in L' \oplus L'', (x', y') \in L' \oplus L''.$$

DÉFINITION.  $L$  est le *produit* des  $K$ -algèbres de Lie  $L'$  et  $L''$  et on écrit  $L = L' \times L''$ .

Soient  $L'$  et  $L''$  deux  $K$ -algèbres de Lie et  $L = L' \times L''$  leur produit. Si  $f'$  est un 2-cocycle sur  $L'$  à valeurs dans  $K$  et si  $f''$  est un 2-cocycle sur  $L''$  à valeurs dans  $K$ , la forme bilinéaire  $f$  sur  $L$  définie par

$$f((x, y), (x', y')) = f'(x, x') + f''(y, y') \quad (x, y) \in L' \times L'', (x', y') \in L' \times L''$$

est un 2-cocycle sur  $L$  à valeurs dans  $K$ . On écrira parfois simplement  $f = f' + f''$ .

L'application canonique  $x \mapsto (x, 0)$  de  $L'$  dans  $L$  induit un  $f'$ -homomorphisme de  $L'$  dans  $U_f(L)$ . D'après la proposition 3, il existe donc un homomorphisme de  $K$ -algèbres  $\varphi: U_{f'}(L') \rightarrow U_f(L)$ . Pour les mêmes raisons, il existe un homomorphisme  $\psi: U_{f''}(L'') \rightarrow U_f(L)$ . L'application bilinéaire  $(u, v) \mapsto \varphi(u) \cdot \psi(v)$  de  $U_{f'}(L') \times U_{f''}(L'')$  dans  $U_f(L)$  induit alors un homomorphisme de  $K$ -modules

$$\theta: U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'') \rightarrow U_f(L)$$

On a  $\theta(u \otimes v) = \varphi(u) \cdot \psi(v)$ . Utilisant le fait que les images de  $\varphi$  et de  $\psi$  commutent dans  $U_f(L)$ , on démontre aisément que  $\theta$  est un homomorphisme de  $K$ -algèbres.

PROPOSITION 4.  $\theta: U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'') \rightarrow U_f(L)$  est un isomorphisme de  $K$ -algèbres.

$$U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'') \cong U_{f'+f''}(L' \times L'')$$

*Démonstration* ([5] p. 36 pour les algèbres de Clifford, voir également [2] § 2). Construisons un homomorphisme en sens inverse

$$\lambda: U_f(L) \rightarrow U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'').$$

L'application  $\lambda_0$  définie par  $(x, y) \mapsto i_{f'}(x) \otimes 1 + 1 \otimes i_{f''}(y)$ ,  $x \in L'$ ,  $y \in L''$  est un  $f$ -homomorphisme de  $L$  dans  $U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'')$ .  $\lambda_0$  induit alors l'homomorphisme cherché  $\lambda$ . On a  $\lambda(i_f(x, y)) = \lambda_0(x, y)$ . Comme  $\theta(i_{f'}(x) \otimes 1) = \varphi(i_{f'}(x)) \cdot \psi(1) = i_f(x)$ , ( $x$  est identifié à son image dans  $L$ ), on a

$$\lambda \circ \theta(i_{f'}(x) \otimes 1) = \lambda(i_f(x)) = \lambda_0(x) = i_{f'}(x) \otimes 1, \quad x \in L'$$

De façon analogue  $\lambda \circ \theta(1 \otimes i_{f''}(y)) = 1 \otimes i_{f''}(y)$ ,  $y \in L''$ .

Les éléments  $i_{f'}(x) \otimes 1$ ,  $x \in L'$  et  $1 \otimes i_{f''}(y)$ ,  $y \in L''$  engendrent  $U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'')$ .  $\lambda \circ \theta$  est donc l'identité sur  $U_{f'}(L') \otimes U_{f''}(L'')$ .

On voit de même que  $\theta \circ \lambda$  est l'identité sur  $U_f(L)$ .

REMARQUE.  $i_f(x, y)$  correspond à  $i_{f'}(x) \otimes 1 + 1 \otimes i_{f''}(y)$  par l'isomorphisme  $\theta$ . Si  $i_f$  est une application injective,  $i_{f'}$  et  $i_{f''}$  doivent donc être également injectives. Nous utiliserons cette propriété par la suite. L'inverse est faux en général.

Citons quelques cas particuliers de la proposition 4:

- 1)  $U(L' \times L'') = U(L') \otimes U(L'')$
- 2)  $S(L' \oplus L'') = S L' \otimes S L''$
- 3)  $C_Q(L' \oplus L'') = C_{Q'}(L') \otimes C_{Q''}(L'')$ ,  $Q = Q' + Q''$ .

Dans les cas 2) et 3) les algèbres de Lie ont une multiplication triviale.

Notons que si  $L'_1 = L''_1 = 0$ , le produit tensoriel  $U_{f'}(L'_0) \otimes U_{f''}(L''_0)$  se réduit à un produit tensoriel d'algèbres non-graduées. Mais si  $L'_0 = L''_0 = 0$ , le produit  $C_{Q'}(L'_1) \otimes C_{Q''}(L''_1)$  reste un produit tensoriel d'algèbres  $\mathbb{Z}_2$ -graduées.

Le  $K$ -module  $L = (L_0, L_1)$  est isomorphe à  $L_0 \oplus L_1$ . Sous quelles conditions  $U_f(L)$  se décomposera-t-elle en un produit tensoriel  $U_{f'}(L_0) \otimes C_Q(L_1)$ ?

Pour obtenir une structure d'algèbre de Clifford sur  $L_1$ , il faut que  $[L_1, L_1] = 0$ .  $L_0$  et  $L_1$  possèdent alors une structure d'algèbre de Lie.  $L$  est le produit de ces deux algèbres de Lie si ces deux algèbres commutent,  $[L_0, L_1] = 0$ . En résumé, il faut donc

que  $[L, L_1] = 0$ . Soit maintenant  $f$  un 2-cocycle sur  $L$ . Nous savons que  $f$  est une somme  $f' + f''$  où  $f'$  est la restriction de  $f$  à  $L_0$  et  $f''$  la restriction de  $f$  à  $L_1$ .  $f'$  est un 2-cocycle sur  $L_0$ .  $f''$  est un 2-cocycle sur  $L_1$ , c'est-à-dire simplement une forme bilinéaire symétrique. Si 2 est inversible dans  $K$ , nous pouvons associer une forme quadratique à  $f''$ . Nous avons alors le corollaire suivant de la proposition 4:

**COROLLAIRE.** Supposons que 2 soit inversible dans  $K$ . Soient  $L = (L_0, L_1)$  une  $K$ -algèbre de Lie et  $f$  un 2-cocycle sur  $L$  à valeurs dans  $K$ . Si  $[L, L_1] = 0$ , alors  $U_f(L) \cong U_{f'}(L_0) \otimes C_Q(L_1)$  où  $f' = f|_{L_0}$  et  $Q$  est la forme quadratique associée à  $f'' = f|_{L_1}$ .

Pour  $f=0$  et  $[L, L] = 0$ , on obtient en particulier  $SL \cong SL_0 \otimes \wedge L_1$  où  $SL_0$  est l'algèbre symétrique classique de  $L_0$  et  $\wedge L_1$  l'algèbre extérieure de  $L_1$ .

### 3. Algèbres filtrées

**DÉFINITION.** Une *filtration* d'une  $K$ -algèbre  $A = (A_0, A_1)$  est une famille de sous-modules  $\{F_i A\}_{i \in \mathbb{Z}}$  du  $K$ -module  $A$  telle que:

- 1)  $F_0 A = K \cdot 1_A$  (c-à-d.  $F_0 A_0 = K \cdot 1_A, F_0 A_1 = 0$ )
- 2)  $F_i A = 0$  pour  $i < 0$
- 3)  $F_i A \subset F_j A$  pour  $i \leq j$
- 4)  $\bigcup_{i \in \mathbb{Z}} F_i A = A$
- 5)  $F_i A \cdot F_j A \subset F_{i+j} A \quad i \in \mathbb{Z}, j \in \mathbb{Z}.$

Un homomorphisme d'algèbres filtrées  $f: A \rightarrow B$  est un homomorphisme d'algèbres tel que  $f(F_i A) \subset F_i B, i \in \mathbb{Z}$ .

Si  $A$  et  $B$  sont deux algèbres filtrées,  $F_p(A \otimes B) = \text{Im}(\bigoplus_{i+j=p} F_i A \otimes F_j B \rightarrow A \otimes B)$  définit une filtration sur le produit tensoriel  $A \otimes B$ .

*Exemples.*  $F_i TL = \bigoplus_{k \leq i} T^k L$  définit une filtration sur  $TL$  et  $F_i SL = \bigoplus_{k \leq i} S^k L$  une filtration sur  $SL$ . La projection canonique  $\pi: TL \rightarrow SL$  est alors un homomorphisme d'algèbres filtrées.

#### ALGÈBRE GRADUÉE ASSOCIÉE À UNE ALGÈBRE FILTRÉE

A toute algèbre filtrée  $A$ , il est possible d'associer une algèbre positivement graduée  $EA = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} E^i A$ . Par définition  $E^i A = F_i A / F_{i-1} A$ . Soit  $\pi_i: F_i A \rightarrow E^i A$  la projection canonique. La multiplication de  $EA$  est définie par  $\pi_i(x) \cdot \pi_j(y) = \pi_{i+j}(x \cdot y)$ ,  $x \in F_i A, y \in F_j A$ . On vérifie facilement que  $EA$  est positivement graduée.

Un homomorphisme d'algèbres filtrées  $f: A \rightarrow B$  induit un homomorphisme des algèbres graduées associées  $Ef: EA \rightarrow EB$  ( $E^i f: E^i A \rightarrow E^i B$ ).

**PROPOSITION 5.** Soit  $f: A \rightarrow B$  un homomorphisme d'algèbres filtrées.

Si  $Ef: EA \rightarrow EB$  est un isomorphisme, alors  $f$  est un isomorphisme.



*Démonstration.* Le résultat s'établit par induction à l'aide du lemme des cinq :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & F_{i-1} A & \rightarrow & F_i A & \rightarrow & E^i A \rightarrow 0 \\ & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ 0 & \rightarrow & F_{i-1} B & \rightarrow & F_i B & \rightarrow & E^i B \rightarrow 0 \end{array}$$

**PROPOSITION 6.** Les applications canoniques  $\varphi_1: A \rightarrow A \otimes B$  et  $\varphi_2: B \rightarrow A \otimes B$  définies par  $x \mapsto x \otimes 1$ ,  $x \in A$  et  $y \mapsto 1 \otimes y$ ,  $y \in B$  induisent un épimorphisme d'algèbres  $\varphi: EA \otimes EB \rightarrow E(A \otimes B)$ .

**REMARQUE.**  $EA \otimes EB$  est un produit tensoriel  $\mathbb{Z}_2$ -gradué.

*Démonstration.* L'homomorphisme  $\varphi_1: A \rightarrow A \otimes B$  est un homomorphisme d'algèbres filtrées.  $\varphi_1$  induit donc un homomorphisme  $E\varphi_1: EA \rightarrow E(A \otimes B)$ . De façon analogue,  $\varphi_2$  induit un homomorphisme  $E\varphi_2: EB \rightarrow E(A \otimes B)$ . Les images de  $E\varphi_1$  et de  $E\varphi_2$  commutent dans  $E(A \otimes B)$ . Il existe donc un homomorphisme d'algèbres  $\varphi: EA \otimes EB \rightarrow E(A \otimes B)$  tel que  $\varphi(u \otimes v) = E\varphi_1(u) \cdot E\varphi_2(v)$ ,  $u \in EA$ ,  $v \in EB$ .  $\varphi$  est un épimorphisme car la filtration de  $A \otimes B$  est induite par les filtrations de  $A$  et  $B$ .

#### 4. Généralisation du théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt

##### FILTRATION DES ALGÈBRES $f$ -ENVELOPPANTES

Soient  $L = (L_0, L_1)$  une  $K$ -algèbre de Lie et  $f$  un 2-cocycle sur  $L$  à valeurs dans  $K$ .

$F_i TL = \bigoplus_{k \leq i} T^k L$  définit une filtration sur l'algèbre tensorielle  $TL$  du  $K$ -module  $L$ .

Soit  $\{F_i U_f(L)\}_{i \in \mathbb{Z}}$  la filtration de  $U_f(L)$  induite par l'application canonique  $\eta_f: TL \rightarrow TL/I = U_f(L)$ ,

$$F_i U_f(L) = \eta_f(F_i TL)$$

et soit  $EU_f(L)$  l'algèbre graduée associée.

$$E^i U_f(L) = F_i U_f(L) / F_{i-1} U_f(L)$$

Appelons  $\pi_i$  la projection  $F_i U_f(L) \rightarrow E^i U_f(L)$ . Comme  $i_f(L)$  engendre  $U_f(L)$ ,  $\pi_1 i_f(L)$  engendre  $EU_f(L)$ .

##### GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE POINCARÉ-BIRKHOFF-WITT

**PROPOSITION 7.**  $EU_f(L)$  est une algèbre commutative.

*Démonstration.* Nous savons que pour  $x \in L_m$ ,  $y \in L_n$

$$[i_f(x), i_f(y)] = i_f([x, y]) + f(x, y) \cdot 1.$$

Le terme de gauche appartient à  $F_2 U_f(L)$ , le terme de droite à  $F_1 U_f(L)$ . On a donc  $\pi_2 [i_f(x), i_f(y)] = 0$ , c'est-à-dire

$$\pi_1 i_f(x) \cdot \pi_1 i_f(y) = (-1)^{mn} \pi_1 i_f(y) \cdot \pi_1 i_f(x).$$

D'où la proposition car  $\pi_1 i_f(L)$  engendre  $EU_f(L)$ .

$\eta_f: TL \rightarrow U_f(L)$  est un homomorphisme d'algèbres filtrées.  $\eta_f$  induit par conséquent un homomorphisme  $E\eta_f: ETL \rightarrow EU_f(L)$  des algèbres graduées associées. Comme  $ETL$  est canoniquement isomorphe à  $TL$  et comme  $EU_f(L)$  est commutative (Prop. 7),  $E\eta_f$  induit un homomorphisme  $\psi_f: SL \rightarrow EU_f(L)$  (Prop. 2),  $SL$  est l'algèbre symétrique de  $L$ . On vérifie aisément que  $\psi_f$  est un épimorphisme. Nous voulons maintenant montrer que sous certaines conditions  $\psi_f$  est un isomorphisme. Introduisons tout d'abord quelques notations.

Soit  $M = (M_0, M_1)$  un sous-module du  $K$ -module  $L$  qui soit la somme directe d'une famille de  $K$ -modules monogènes

$$M_0 = \bigoplus_{\lambda \in A_0} K \cdot z_\lambda \quad M_1 = \bigoplus_{\lambda \in A_1} K \cdot z_\lambda.$$

Si  $z_\lambda$  est d'ordre fini, on notera cet ordre  $\varepsilon_\lambda$ . On notera  $\bar{\lambda}$  le degré en  $\mathbf{Z}_2$ -graduation de  $z_\lambda$ . Nous pouvons supposer  $A_0$  et  $A_1$  totalement ordonnés. Soit  $A$  la somme ordinaire  $A_0 + A_1$ . Rappelons que dans cette somme, un élément de  $A_0$  est toujours plus petit qu'un élément de  $A_1$ . Un  $K$ -module libre  $M$  est un exemple d'une somme directe de modules monogènes.  $(z_\lambda)_{\lambda \in A}$  est alors une base de  $M$ .

Appelons  $F_n^M TL$  le module  $\bigoplus_{k < n} T^k L \oplus T^n M$ . Un élément de degré  $n$  de  $F_n^M TL$  appartient à  $T^n M$  et peut s'écrire  $\sum_{\mu} b_\mu z_{\mu_1} \otimes z_{\mu_2} \otimes \cdots \otimes z_{\mu_n}$ ,  $\mu_i \in A$ . Nous dirons qu'un monôme  $z_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_r} \otimes z_{\lambda_{r+1}} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_n} \in T^n M$  est *ordonné* si  $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r < \lambda_{r+1} < \cdots < \lambda_n$ ,  $\lambda_i \in A_0$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $\lambda_i \in A_1$  pour  $r+1 \leq i \leq n$ .

Notons  $\{x, y\}$  l'élément  $x \otimes y - (-1)^{mn} y \otimes x - [x, y] - f(x, y) \cdot 1$ ,  $x \in L_m$ ,  $y \in L_n$  de  $TL$ .  $I$  est l'idéal de  $TL$  engendré par les éléments  $\{x, y\}$ ,  $x \in L$ ,  $y \in L$ . Nous appellerons  $I_n$  le  $K$ -module engendré additivement par les éléments de la forme  $P \otimes \{x, y\} \otimes Q$  de  $F_n TL$  et  $I_n^M$  le  $K$ -module engendré par les éléments  $P \otimes \{x, y\} \otimes Q$  de  $F_n^M TL$ .

LEMME 1. Supposons que 2 soit inversible dans  $K$ . Tout élément de  $F_n^M TL$  peut se mettre modulo  $I_n^M$  sous la forme

$$\sum_{\lambda} a_\lambda z_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_n} + y^{n-1}, \quad \lambda_i \in A$$

les monômes  $z_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_n}$  étant ordonnés. Les coefficients  $a_\lambda$  sont définis modulo le p.g.c.d. de  $\varepsilon_{\lambda_1}, \dots, \varepsilon_{\lambda_n}$  et  $y^{n-1}$  qui appartient à  $F_{n-1} TL$  est défini de façon univoque modulo  $I_{n-1}$ .

*Démonstration.* Nous savons qu'un élément de degré  $n$  de  $F_n^M TL$  peut s'écrire  $\sum_{\mu} b_\mu z_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes z_{\mu_n}$ ,  $\mu_i \in A$ . Modulo  $I_n^M$  on a, pour un monôme de degré  $n$ ,

$$P \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q = (-1)^{\bar{\lambda}\bar{\mu}} P \otimes z_\lambda \otimes z_\mu \otimes Q + P \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes Q + f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes Q.$$

Si  $\lambda < \mu$ , on pourra ainsi inverser  $z_\mu$  et  $z_\lambda$ . La correction appartient à  $F_{n-1} TL$ . Si  $\lambda = \mu$ ,  $\lambda \in A_1$ , on a

$$P \otimes z_\lambda \otimes z_\lambda \otimes Q = -P \otimes z_\lambda \otimes z_\lambda \otimes Q + P \otimes [z_\lambda, z_\lambda] \otimes Q + f(z_\lambda, z_\lambda) P \otimes Q$$

modulo  $I_n^M$ . Puisque 2 est inversible, on peut écrire

$$P \otimes z_\lambda \otimes z_\lambda \otimes Q = \frac{1}{2} P \otimes [z_\lambda, z_\lambda] \otimes Q + \frac{1}{2} f(z_\lambda, z_\lambda) P \otimes Q$$

modulo  $I_n^M$ . Le terme de droite appartient à  $F_{n-1} TL$ . Nous appellerons cette opération une réduction par rapport à  $z_\lambda$ . Un monôme  $z_{\mu_1} \otimes \cdots \otimes z_{\mu_n}$  peut donc être ordonné par une suite d'inversions et de réductions. On démontrera par induction sur le nombre d'opérations (inversions et réductions) que la correction totale modulo  $I_{n-1}$  est indépendante de l'ordre des opérations.

Soit  $P \otimes z_\nu \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q$  un monôme de degré  $n$  et soit  $j$  le nombre d'opérations. Supposons  $\nu \geq \mu \geq \lambda$ . Traitons tout d'abord le cas  $\nu = \mu$ ,  $\mu > \lambda$ ,  $\mu \in A_1$ . On peut réduire par rapport à  $z_\mu$  ou échanger  $z_\mu$  et  $z_\lambda$ . On obtient dans chaque cas un monôme avec  $j-1$  opérations. Par induction, la suite des opérations ne changera rien à la correction modulo  $I_{n-1}$ . Les deux expressions ainsi obtenues se ramènent modulo  $I_n^M$  à des formes qui sont égales modulo  $I_{n-1}$ . En effet, on a d'une part

$$P \otimes z_\mu \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q = \frac{1}{2} P \otimes [z_\mu, z_\mu] \otimes z_\lambda \otimes Q + \frac{1}{2} f(z_\mu, z_\mu) P \otimes z_\lambda \otimes Q$$

modulo  $I_n^M$ . D'autre-part

$$\begin{aligned} P \otimes z_\mu \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q &= (-1)^{\bar{\lambda}} P \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes z_\mu \otimes Q + P \otimes z_\mu \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes Q + f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes z_\mu \otimes Q \\ &= P \otimes z_\lambda \otimes z_\mu \otimes z_\mu \otimes Q + P \otimes z_\mu \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes Q + f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes z_\mu \otimes Q + \\ &\quad + (-1)^{\bar{\lambda}} P \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes z_\mu \otimes Q + (-1)^{\bar{\lambda}} f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes z_\mu \otimes Q \\ &= \frac{1}{2} P \otimes z_\lambda \otimes [z_\mu, z_\mu] \otimes Q + \frac{1}{2} f(z_\mu, z_\mu) P \otimes z_\lambda \otimes Q + P \otimes z_\mu \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes Q + \\ &\quad + f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes z_\mu \otimes Q + (-1)^{\bar{\lambda}} P \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes z_\mu \otimes Q + \\ &\quad + (-1)^{\bar{\lambda}} f(z_\mu, z_\lambda) P \otimes z_\mu \otimes Q \end{aligned}$$

modulo  $I_n^M$ .

Mais  $f(z_\mu, z_\lambda) + (-1)^{\bar{\lambda}} f(z_\mu, z_\lambda) = 0$ . C'est évident si  $\bar{\lambda} = 1$ , et si  $\bar{\lambda} = 0$ ,  $f(z_\mu, z_\lambda) = 0$  car  $f(L_0, L_1) = 0$ . On obtient donc finalement

$$\begin{aligned} P \otimes z_\mu \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q &= \frac{1}{2} P \otimes z_\lambda \otimes [z_\mu, z_\mu] \otimes Q + \frac{1}{2} f(z_\mu, z_\mu) P \otimes z_\lambda \otimes Q + \\ &\quad + P \otimes z_\mu \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes Q + (-1)^{\bar{\lambda}} P \otimes [z_\mu, z_\lambda] \otimes z_\mu \otimes Q \end{aligned}$$

modulo  $I_n^M$ . La différence des deux expressions ainsi obtenues pour  $P \otimes z_\mu \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q$  vaut modulo  $I_{n-1}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} P \otimes [[z_\mu, z_\mu], z_\lambda] \otimes Q - P \otimes [z_\mu, [z_\mu, z_\lambda]] \otimes Q + \\ + \frac{1}{2} f([z_\mu, z_\mu], z_\lambda) P \otimes Q - f(z_\mu, [z_\mu, z_\lambda]) P \otimes Q. \end{aligned}$$

Mais cette différence est nulle d'après l'identité de Jacobi et le fait que  $f$  soit un 2-cocycle.

Le cas  $v > \mu$ ,  $\mu = \lambda$ ,  $\mu \in A_1$  se traite de la même façon. Dans le cas  $v = \mu = \lambda$ ,  $v \in A_1$ , c'est-à-dire dans le cas d'un monôme  $P \otimes z_\lambda \otimes z_\lambda \otimes z_\lambda \otimes Q$ , deux réductions modulo  $I_n^M$  sont possibles,

$$\frac{1}{2}P \otimes [z_\lambda, z_\lambda] \otimes z_\lambda \otimes Q + \frac{1}{2}f(z_\lambda, z_\lambda)P \otimes z_\lambda \otimes Q \quad \text{ou} \\ \frac{1}{2}P \otimes z_\lambda \otimes [z_\lambda, z_\lambda] \otimes Q + \frac{1}{2}f(z_\lambda, z_\lambda)P \otimes z_\lambda \otimes Q$$

On voit que ces deux expressions sont égales modulo  $I_{n-1}$  en utilisant l'identité  $[[z_\lambda, z_\lambda], z_\lambda] = 0$ .

Nous pouvons maintenant supposer  $v > \mu > \lambda$ . Dans ce cas, nous pouvons tout d'abord échanger  $z_v$  et  $z_\mu$  ou  $z_\mu$  et  $z_\lambda$ . De nouveau, par induction, la suite des opérations ne changera rien à la correction modulo  $I_{n-1}$ . Les deux expressions ainsi obtenues se ramènent modulo  $I_n^M$  à la forme commune  $P \otimes z_\lambda \otimes z_\mu \otimes z_v \otimes Q$  et on vérifie que les corrections sont égales modulo  $I_{n-1}$ . Les calculs sont du même type que ceux faits ci-dessus.

Pour un monôme  $P \otimes z_\mu \otimes z_\lambda \otimes Q \otimes z_\rho \otimes z_v \otimes R$ ,  $\mu \geq \lambda$  et  $\rho \geq v$ , il faut également distinguer plusieurs cas. Si  $\mu = \lambda$ ,  $\lambda \in A_1$  et  $\rho > v$ , on peut réduire par rapport à  $z_\lambda$  ou échanger  $z_\rho$  et  $z_v$ . Si  $\mu = \lambda$  et  $\rho = v$ ,  $\lambda \in A_1$ ,  $\rho \in A_1$ , on peut réduire par rapport à  $z_\lambda$  ou par rapport à  $z_v$ . Si finalement  $\mu > \lambda$  et  $\rho > v$ , on peut échanger  $z_\mu$  et  $z_\lambda$  ou  $z_\rho$  et  $z_v$ . Dans tous les cas, on se ramène à une forme commune et on vérifie que les corrections sont égales modulo  $I_{n-1}$ .

LEMME 2. Supposons que 2 soit inversible dans  $K$ . Si  $K$  est un anneau principal ou si  $L$  est un  $K$ -module libre,  $I \cap F_k TL = I_k$  pour tout entier  $k$ .

*Démonstration* 1)  $K$  est un anneau principal.

Il est trivial que  $I_k \subset I \cap F_k TL$ . Soit  $y$  un élément de  $I \cap F_k TL$ .  $y$  appartient à un sous-module  $I_n$ ,  $n \geq k$  de  $I$ . Montrons que si  $n > k$ ,  $y$  appartient à  $I_{n-1}$ . Par définition de  $I_n$ ,  $y$  peut se mettre sous la forme

$$y = \sum_j P_j \otimes \{x_j, y_j\} \otimes Q_j, \quad P_j \otimes \{x_j, y_j\} \otimes Q_j \in F_n TL.$$

Dans cette somme n'apparaissent qu'un nombre fini d'éléments de  $L$ . Soit  $M$  le  $K$ -module engendré par ces éléments. Puisque l'anneau  $K$  est principal,  $M$  est somme directe de modules monogènes. Si on applique le lemme 1 à la somme  $\sum_j P_j \otimes \{x_j, y_j\} \otimes Q_j$ , on trouve une correction  $y^{n-1}$  égale à zéro et si on l'applique à  $y$ , une correction  $y^{n-1}$  égale à  $y$ . Comme cette correction est déterminée univoquement modulo  $I_{n-1}$ ,  $y$  appartient à  $I_{n-1}$ .

2)  $L$  est un  $K$ -module libre.

Nous pouvons choisir  $M = L$  et appliquer le lemme 1 comme dans le cas 1).

THÉORÈME 1. Supposons que 2 soit inversible dans  $K$ . Si  $K$  est un anneau principal ou si le  $K$ -module  $L = (L_0, L_1)$  est libre,  $\psi_f: SL \rightarrow EU_f(L)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* D'après le lemme 2, le terme de plus haut degré de tout élément de  $I$  appartient au noyau de l'homomorphisme canonique  $TL \rightarrow SL$ .

REMARQUE. Le théorème 1 et les lemmes qui le préparent sont dus à WITT [13] (voir aussi LAZARD [9]) pour les algèbres de Lie classiques sur un anneau principal. Lorsque le  $K$ -module  $L$  est libre, une autre démonstration classique (celle donnée en particulier par BOURBAKI [2], § 2 No 7) pourrait être reprise sous certaines modifications pour les algèbres  $f$ -enveloppantes  $\mathbf{Z}_2$ -graduées. Cela a été fait par ROSS [10] lorsque le cocycle  $f$  est nul. La présence du cocycle  $f$  ne compliquerait pas beaucoup la démonstration de ROSS.

Le théorème 1 possède un certain nombre de corollaires. Nous supposons une fois pour toutes que 2 est inversible dans  $K$ .

COROLLAIRE 1. Si  $K$  est un anneau principal ou si  $L$  est un  $K$ -module libre, l'application canonique  $i_f: L \rightarrow U_f(L)$  est injective et  $K = K \cdot 1_{U_f(L)}$

Dorénavant, nous identifions  $L$  et  $i_f(L)$ .

COROLLAIRE 2. Si  $(z_\lambda)_{\lambda \in A}$  est une base du  $K$ -module  $L$ , les monômes ordonnés  $z_{\lambda_1} \cdots z_{\lambda_n}$ ,  $\lambda_n \in A$ , de  $U_f(L)$ , forment une base du  $K$ -module  $U_f(L)$ .

*Démonstration.* Rappelons qu'un monôme  $z_{\lambda_1} \cdots z_{\lambda_r} \cdot z_{\lambda_{r+1}} \cdots z_{\lambda_n}$  est dit ordonné si  $\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_r < \lambda_{r+1} < \cdots < \lambda_n$ ,  $\lambda_i \in A_0$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $\lambda_i \in A_1$  pour  $r+1 \leq i \leq n$ . Soit  $A_n$  l'ensemble des suites croissantes de  $n$  éléments de  $A$  du type décrit ci-dessus et soit  $W$  le sous-module de  $TL$  qui a pour base  $(z_{\lambda_1} \otimes z_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_n})$ ,  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in A_n$ . On voit facilement que  $W$  est isomorphe à  $S^n L$  et que la restriction de  $E\eta_f$  à  $W$  est un isomorphisme de  $W$  sur un supplémentaire de  $F_{n-1} U_f(L)$  dans  $F_n U_f(L)$  (voir [2], § 2, 7.).  $E\eta_f(z_{\lambda_1} \otimes z_{\lambda_2} \otimes \cdots \otimes z_{\lambda_n}) = z_{\lambda_1} \cdot z_{\lambda_2} \cdots z_{\lambda_n}$ . D'où le corollaire.

Ces deux corollaires s'appliquent en particulier aux algèbres de Clifford. Voir BOURBAKI [1], § 9, pour une autre démonstration du corollaire 2 pour les algèbres de Clifford.

Le théorème 1 et le corollaire 1 peuvent être généralisés. Signalons tout d'abord que ces résultats sont vrais si  $K$  est seulement *de Dedekind*. Ils sont dus à CARTIER [4] pour les algèbres enveloppantes classiques. Sa démonstration se copie pour les algèbres  $f$ -enveloppantes  $\mathbf{Z}_2$ -graduées.

CARTIER utilise en particulier la proposition suivante. Si  $K$  est un anneau de Dedekind et si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $K$ , l'anneau local  $K_{\mathfrak{p}}$  est un anneau principal. Le lemme 2 est alors localement valable. On montre alors qu'il est également valable pour  $K$ .

Nous aurons besoin plus loin d'une autre généralisation. Le  $K$ -module  $L$  n'est plus supposé libre, mais projectif.

DÉFINITION. Un  $K$ -module  $\mathbf{Z}_2$ -gradué  $L = (L_0, L_1)$  est dit *projectif* si les  $K$ -modules  $L_0$  et  $L_1$  sont projectifs.

Comme dans le cas «classique»,  $L$  est projectif si et seulement si  $L$  est facteur direct d'un  $K$ -module libre.

**COROLLAIRE 4.** Supposons que le  $K$ -module  $L$  soit projectif.  $i_f: L \rightarrow U_f(L)$  est alors injectif et  $K \cong K \cdot 1_{U_f(L)}$ .

*Démonstration.* Il existe un  $K$ -module  $M$  tel que  $F = L \oplus M$  soit un  $K$ -module libre. Si  $M$  est muni de la structure d'algèbre de Lie triviale,  $F$  possède une structure d'algèbre de Lie,  $F = L \times M$ . Soit  $\tilde{f}$  le 2-cocycle sur  $F$  identique à  $f$  sur  $L$  et nul sur  $M$ . On sait que (Prop. 4)

$$U_{\tilde{f}}(F) \cong U_f(L) \otimes U_0(M) = U_f(L) \otimes SM.$$

On en conclut tout d'abord que  $K \cong K \cdot 1_{U_f(L)}$  puis que  $i_f$  est injectif car  $i_{\tilde{f}}$  est injectif (voir la remarque suivant la proposition 4). On convient alors d'identifier  $L$  et  $i_f(L)$ .

**COROLLAIRE 5.** Si  $L$  est un  $K$ -module projectif,  $\psi_f: SL \rightarrow EU_f(L)$  est un isomorphisme.

*Démonstration.* Nous construisons un homomorphisme  $\varphi$  en direction opposée. Les notations sont celles du corollaire 4.

$u \mapsto u \otimes 1$ ,  $u \in EU_f(L)$ , définit un homomorphisme  $EU_f(L) \rightarrow EU_f(L) \otimes SM$ . D'après la proposition 6, nous savons qu'il existe un homomorphisme d'algèbres  $EU_f(L) \otimes SM \rightarrow E(U_f(L) \otimes SM)$  (on convient d'identifier  $ESM$  et  $SM$ ).

L'isomorphisme  $U_{\tilde{f}}(F) \cong U_f(L) \otimes SM$  est un isomorphisme d'algèbres filtrées car la filtration de  $U_{\tilde{f}}(F)$  correspond au produit tensoriel des filtrations de  $U_f(L)$  et de  $SM$ . Par conséquent  $E(U_f(L) \otimes SM) \cong EU_{\tilde{f}}(F)$ . D'après le théorème 1,  $EU_{\tilde{f}}(F) \cong SF$  et  $SF \cong SL \otimes SM$  d'après la proposition 4. Nous avons donc construit un homomorphisme  $EU_f(L) \rightarrow SL \otimes SM$ . A l'aide de l'homomorphisme  $SM \rightarrow K$  égal à zéro sur  $S^i M$ ,  $i > 0$  et égal à l'identité sur  $K$ , on obtient l'homomorphisme cherché  $\varphi$ .

Indiquons encore un résultat appartenant au même cercle d'idées, mais qui ne sera pas utilisé dans la suite.

**COROLLAIRE 6.** Si le  $K$ -module est projectif, le  $K$ -module  $U_f(L)$  est également projectif.

*Démonstration.* Les notations sont celles des lemmes précédents. Le  $K$ -module  $U_{\tilde{f}}(F) \cong U_f(L) \otimes SM$  est libre d'après le corollaire 3. D'autre part le  $K$ -module  $SM$  peut être décomposé en une somme directe  $SM = K \oplus \overline{SM}$  où  $\overline{SM} = \bigoplus_{i>0} S^i M$ . On a

donc  $U_{\tilde{f}}(F) \cong U_f(L) \oplus U_f(L) \otimes \overline{SM}$ .  $U_f(L)$  est facteur direct d'un module libre, donc projectif.

Signalons de nouveau que ces résultats s'appliquent aux algèbres enveloppantes classiques et aux algèbres de Clifford.

### 5. Classification de certaines algèbres filtrées

Nous supposons dans ce paragraphe que 2 est inversible dans  $K$ . Nous ne ferons aucune autre hypothèse sur  $K$ .

Soit  $M = (M_0, M_1)$  un  $K$ -module projectif et soit  $SM$  l'algèbre symétrique de  $M$ .

Soit  $\mathfrak{A}(SM)$  la catégorie dont les objets sont les couples  $(A, \psi_A)$  où  $A = (A_0, A_1)$  est une algèbre filtrée et  $\psi_A: SM \rightarrow EA$  un isomorphisme d'algèbres graduées. Un morphisme  $\theta: (A, \psi_A) \rightarrow (B, \psi_B)$  est un homomorphisme d'algèbres filtrées  $\theta: A \rightarrow B$  tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} EA & \xrightarrow{E\theta} & EB \\ \psi_A \swarrow & & \nearrow \psi_B \\ & SM & \end{array}$$

soit commutatif. Cette construction est due à SRIDHARAN [12].

**PROPOSITION 8.** Les morphismes de  $\mathfrak{A}(SM)$  sont des isomorphismes d'algèbres filtrées.

*Démonstration.*  $E\theta = \psi_B \psi_A^{-1}$  est un isomorphisme. Le résultat suit alors de la proposition 5.

**COROLLAIRE.** Tous les morphismes de  $\mathfrak{A}(SM)$  sont des isomorphismes.

Soit  $L$  une structure d'algèbre de Lie sur  $M$  et soit  $f$  un 2-cocycle sur  $L$  à valeurs dans  $K$ .  $(U_f(L), \psi_f)$  appartient à  $\mathfrak{A}(SM)$  d'après le corollaire 5 du théorème 1. Inversément, nous allons montrer que tout objet de  $\mathfrak{A}(SM)$  est isomorphe à un couple  $(U_f(L), \psi_f)$  où  $L$  est une structure d'algèbre de Lie sur  $M$  et  $f$  un 2-cocycle. Plus précisément:

**THÉORÈME 2.** ([12] pour les algèbres  $f$ -enveloppantes sans  $\mathbf{Z}_2$ -graduation).

*Les classes d'objets isomorphes dans  $\mathfrak{A}(SM)$  sont en correspondance biunivoque avec les couples  $(L, \tilde{f})$  où  $L$  est une structure d'algèbre de Lie sur  $M$  et  $\tilde{f} \in H^2(L, K)$ . Si  $f \in \tilde{f} \in H^2(L, K)$ , alors  $(U_f(L), \psi_f)$  est un objet dans la classe déterminée par  $(L, \tilde{f})$ .*

**DÉFINITION.** Les cocycles  $f(x, y)$  et  $f'(x, y)$  sont dits *cohomologues* s'il existe une forme linéaire  $h: L \rightarrow K$  telle que

$$f(x, y) - f'(x, y) = h([x, y]), \quad x \in L, y \in L.$$

$H^2(L, K)$  est l'ensemble des classes de 2-cocycles cohomologues.

*Démonstration.* Soit  $(A, \psi_A)$  un objet de  $\mathfrak{A}(SM)$ . Construisons un couple  $(L, \tilde{f})$ . Soit  $(\pi_A)_i: F_i A \rightarrow F_i A / F_{i-1} A$  la  $i$ -ème projection canonique. Posons  $(\phi_A)_i = \psi_A^{-1}(\pi_A)_i: F_i A \rightarrow S^i M$ . La suite de  $K$ -modules

$$0 \longrightarrow F_{i-1} A \longrightarrow F_i A \xrightarrow{\varphi(A)_i} S^i M \longrightarrow 0$$

est exacte pour tout  $i \geq 1$ .



$\llbracket F_1 A, F_1 A \rrbracket \subset F_2 A$  mais  $(\phi_A)_2 \llbracket F_1 A, F_1 A \rrbracket = \llbracket (\phi_A)_1 F_1 A, (\phi_A)_1 F_1 A \rrbracket = 0$  car  $SM$  est commutative. Par conséquent  $\llbracket F_1 A, F_1 A \rrbracket \subset F_1 A$ .  $F_1 A$  est donc une algèbre de Lie pour l'opération  $\llbracket, \rrbracket$ .  $F_0 A = K \cdot 1_A$  est un idéal dans cette algèbre de Lie. Le  $K$ -module  $F_1 A / F_0 A$  est isomorphe à  $M$ .  $M$  possède donc une structure d'algèbre de Lie  $L$  et cette structure est déterminée univoquement. Soit  $[, ]$  le produit de  $L$ . Nous avons maintenant une suite exacte d'algèbres de Lie

$$0 \longrightarrow K \cdot 1_A \longrightarrow F_1 A \xrightarrow{(\phi_A)_1} L \longrightarrow 0$$

$K \cdot 1_A$  est isomorphe à  $S^0 M$ , donc à  $K$ .  $F_1 A$  est donc une extension de  $L$  par  $K$ . Le  $K$ -module  $L (= M)$  est projectif. Il existe par conséquent un homomorphisme de  $K$ -modules  $t: L \rightarrow F_1 A$  tel que  $(\phi_A)_1 \circ t$  soit l'identité de  $L$ .  $(\phi_A)_1 (\llbracket t(x), t(y) \rrbracket - t([x, y])) = 0$ , donc  $\llbracket t(x), t(y) \rrbracket - t([x, y]) \in K \cdot 1_A$ ,  $x \in L, y \in L$ .

$$\llbracket t(x), t(y) \rrbracket = t([x, y]) + f(x, y) \cdot 1_A \quad x \in L, y \in L$$

$f$  est un 2-cocycle.

Soit  $t'$  un second homomorphisme de  $K$ -modules  $L \rightarrow F_1 A$  tel que  $(\phi_A)_1 \circ t'$  soit l'identité de  $L$  et soit  $f'$  le 2-cocycle correspondant.  $t - t'$  définit une forme linéaire  $h: L \rightarrow K$  et

$$f(x, y) - f'(x, y) = h([x, y]) \quad x \in L, y \in L$$

$f$  et  $f'$  sont cohomologues.

Tout couple  $(L, \tilde{f})$  est image d'un couple  $(A, \psi_A)$ . En effet la construction ci-dessus appliquée à  $(U_f(L), \psi_f)$  où  $f \in \tilde{f}$ , redonne le couple  $(L, \tilde{f})$ .  $t$  est alors l'application  $i_f$ .

Montrons maintenant que cette correspondance est biunivoque. Supposons qu'à  $(A, \psi_A)$  corresponde  $(L, \tilde{f})$ . Pour tout  $f \in \tilde{f}$ ,  $(U_f(L), \psi_f)$  a également pour image  $(L, \tilde{f})$ . Ces deux objets sont isomorphes. Pour le voir, il suffit de contruire un morphisme  $\tilde{t}: (A, \psi_A) \rightarrow (U_f(L), \psi_f)$  d'après le corollaire de la proposition 8.

Pour tout  $f \in \tilde{f}$ , il existe une section  $t: L \rightarrow F_1 A$  (c'est-à-dire un homomorphisme de  $K$ -modules tel que  $(\phi_A)_1 \circ t = \text{Id}_L$ ) telle que

$$\llbracket t(x), t(y) \rrbracket = t([x, y]) + f(x, y) \cdot 1_A \quad x \in L, y \in L.$$

En effet, soit  $f' \in \tilde{f}$  un 2-cocycle correspondant à une section connue  $t': L \rightarrow F_1 A$ .  $f$  et  $f'$  sont cohomologues, il existe donc une forme linéaire  $h: L \rightarrow K$  telle que

$$f(x, y) - f'(x, y) = h([x, y]) \quad x \in L, y \in L$$

$t = t' + h$  est la section cherchée.

Comme  $F_1 A \subset A$ ,  $t$  est un  $f$ -homomorphisme de  $L$  dans  $A$ .  $t$  induit donc un homomorphisme  $\tilde{t}: U_f(L) \rightarrow A$  d'après la proposition 3.  $\tilde{t}$  est un homomorphisme d'algèbres filtrées ( $U_f(L)$  étant filtrée de façon habituelle) car  $\tilde{t}|_L: L \rightarrow F_1 A$ .



Pour prouver que  $\tilde{t}$  est le morphisme cherché, il faut montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E U_f(L) & \xrightarrow{E\tilde{t}} & E A \\ \psi_f \swarrow & & \nearrow \psi_A \\ & S M & \end{array}$$

est commutatif. Il suffit d'établir la commutativité sur  $E^1$ .

Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} L(\subset U_f(L)) & \longrightarrow & F_1 U_f(L) & \xrightarrow{\tilde{t}} & F_1 A \\ \parallel & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow (\pi_A)_1 \\ L(\subset S L) & \xrightarrow{\psi_f} & E^1 U_f(L) & \xrightarrow{E\tilde{t}} & E^1 A \end{array}$$

est commutatif.

Donc

$$E\tilde{t} \circ \psi_f = (\pi_A)_1 \circ t \quad \text{sur } L \quad (t = \tilde{t} \text{ sur } L)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \psi_f \circ \psi_A^{-1} \circ E\tilde{t} &= \psi_f \circ \psi_A^{-1} \circ (\pi_A)_1 \circ t \circ \psi_f^{-1} \\ &= \psi_f \circ (\phi_A)_1 \circ t \circ \psi_f^{-1} \quad \text{car } \psi_A^{-1} \circ (\pi_A)_1 = (\phi_A)_1 \\ &= \text{Id}_{E^1 U_f(L)} \quad \text{car } (\phi_A)_1 \circ t = \text{Id}_L \\ E\tilde{t} &= \psi_A \circ \psi_f^{-1}. \end{aligned}$$

**COROLLAIRE 1.**  $(U_f(L), \psi_f)$  et  $(U_{f'}(L), \psi_{f'})$  sont isomorphes si et seulement si  $f$  et  $f'$  sont cohomologues.

**REMARQUE.**  $U_f(L)$  et  $U_{f'}(L)$  peuvent être isomorphes sans que  $f$  et  $f'$  soient cohomologues.

Nous savons que les algèbres de Clifford sont des cas particuliers des algèbres  $f$ -enveloppantes  $U_f(L)$ . Reprenons le théorème 2 dans ce cas particulier.

**COROLLAIRE 2.** Une algèbre  $\mathbb{Z}_2$ -graduée filtrée dont l'algèbre graduée associée est isomorphe à l'algèbre symétrique  $SM$  d'un module projectif  $\mathbb{Z}_2$ -gradué  $M = (M_0, M_1)$  tel que  $M_0 = 0$ , est isomorphe à une algèbre de Clifford  $C_Q(M)$  sur  $M$ . La forme quadratique est univoquement déterminée.

*Démonstration.*  $Q$  est univoquement déterminée car la structure d'algèbre de Lie  $L$  sur  $M$  est triviale. Deux cocycles sont alors cohomologues si et seulement s'ils sont égaux.

**REMARQUE.** L'algèbre symétrique  $SM$  est simplement l'algèbre extérieure de  $M_1$ . ROY [11] démontre un résultat analogue au corollaire 2. Il ne suppose pas que l'algèbre  $A$  est  $\mathbb{Z}_2$ -graduée. Il lui est alors nécessaire de supposer que  $M_1$  est libre.

Soit  $A = (A_0, A_1)$  une algèbre filtrée telle que  $EA \cong SM$ ,  $M$  un  $K$ -module projectif. Nous savons que  $A \cong U_f(L)$  où  $L$  est une structure d'algèbre de Lie sur  $M$  et  $f$  un 2-cocycle sur  $L$ . Sous certaines conditions sur  $L$ , l'algèbre  $U_f(L)$  se réduit au produit

tensoriel d'une algèbre  $f$ -enveloppante sur  $L_0$  par une algèbre de Clifford sur  $L_1$  (Prop. 4, corollaire). Ces conditions peuvent être remplacées par des conditions sur la filtration de  $A$ .

**COROLLAIRE 3.** Soit  $A=(A_0, A_1)$  une algèbre filtrée dont l'algèbre graduée associée est isomorphe à l'algèbre symétrique d'un module projectif  $M$ .

Si  $[(F_1 A)_1, F_1 A] \subset K \cdot 1_A$ ,  $A$  est isomorphe au produit tensoriel  $U_{f'}(L_0) \otimes C_Q(M_1)$  où  $L_0$  est une structure d'algèbre de Lie sur  $M_0$ ,  $f'$  un 2-cocycle sur  $L_0$  et  $Q$  une forme quadratique sur  $M_1$ .  $f'$  est déterminée à un cobord près et  $Q$  est déterminée univoquement.

*Démonstration.* Dans la démonstration du théorème 2, on utilise une application  $t: L \rightarrow F_1 A$  telle que

$$[t(x), t(y)] = t([x, y]) + f(x, y) \cdot 1_A \quad x \in L, y \in L$$

et telle que  $(\phi_A)_1 \circ t = \text{Id}_L$ .

(Les notations sont celles du théorème 2).

Soit  $x \in L_1$ .  $t(x) \in (F_1 A)_1$  donc  $[t(x), t(y)] \subset K \cdot 1_A$  par hypothèse.

Par conséquent  $(\phi_A)_1 \circ t([x, y]) = 0$  car  $\text{Ker}(\phi_A)_1 = K \cdot 1_A$ , donc  $[x, y] = 0$ . Comme cela est vrai pour tout  $x \in L_1$ , tout  $y \in L$ , on a  $[L_1, L] = 0$ . Le résultat suit alors du corollaire de la proposition 4.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] BOURBAKI, N., *Algèbre*, Chap. 9, *Formes sesquilineaires et formes quadratiques*. Hermann 1959 Paris.
- [2] BOURBAKI, N., *Groupes et algèbres de Lie*, Chap. 1, *Algèbres de Lie*. Hermann 1960, Paris.
- [3] CARTIER, P., *Effacement dans la cohomologie des algèbres de Lie*. Séminaire Bourbaki 54/55, Exposé 116.
- [4] CARTIER, P., *Remarques sur le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 12 (1958), 1-4.
- [5] CHEVALLEY, C., *The construction and study of certain important algebras*. Publications of the Math. Soc. of Japan, 1955.
- [6] CHEVALLEY, C., *Fundamental concepts of algebra*. Academic Press 1956, New York.
- [7] COHN, P. M., *On the embedding of rings in skew fields*, Proc. of London Math. Soc. (3) 11 (1961), 511-530.
- [8] HILTON, P., *Note on quasi-Lie rings*, Fund. Math. 43 (1956), 230-237.
- [9] LAZARD, M., *Sur les algèbres enveloppantes universelles de certaines algèbres de Lie*, Publ. Sci. Univ. Alger [Sér. A] 1 (1954), 281-294.
- [10] ROSS, L. E., *Representations of graded Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 120 (1965).
- [11] ROY, A., *On a characterisation of Clifford algebras*, Math. Z. 85 (1964), 241-244.
- [12] SRIDHARAN, R., *Filtered algebras and representations of Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. 100 (1961), 530-550.
- [13] WITT, E., *Treue Darstellungen beliebiger Liescher Ringe*, Collect. Math. 6 (1953), 107-114.

Reçu le 27 octobre 1966