Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 41 (1966-1967)

Artikel: Beiträge zur Riemannschen Geometrie im Grossen.

Autor: Dubois, Ernest

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31370

Beiträge zur Riemannschen Geometrie im Grossen

von ERNEST DUBOIS, Zürich

Einleitung

Die im Titel genannten „Beiträge“ betreffen hauptsächlich I. das Problem der *Fortsetzbarkeit* einer gegebenen n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit zu einer grösseren, ebenfalls n-dimensionalen, Riemannschen Mannigfaltigkeit, II. die Einführbarkeit einer lokaleuklidischen (d.h. im Kleinen mit der euklidischen Geometrie isometrischen) Riemannschen Metrik auf einer topologisch gegebenen Mannigfaltigkeit, sowie III. naheliegende Probleme, die von Zusammenhängen zwischen I. und II. handeln (Fortsetzbarkeit oder Nichtfortsetzbarkeit gegebener lokaleuklidischer Mannigfaltigkeiten).

Der Begriff der *Fortsetzung* einer Riemannschen Mannigfaltigkeit wurde zum ersten Mal in der Arbeit von HOPF und RINOW [5] eingeführt und hat die folgende genaue Bedeutung: Eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit M^n heisst eine *Fortsetzung* der n-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit M'^n, wenn es ein *echtes* Teilgebiet G von M^n gibt, auf welches M'^n eineindeutig und längentreu abgebildet werden kann. Damit ist auch der Sinn der Aussage erklärt, dass eine Riemannsche Mannigfaltigkeit *fortsetzbar* oder, dass sie *nicht fortsetzbar* ist. Die Fortsetzbarkeit und Nichtfortsetzbarkeit sind *innere* Eigenschaften; d.h. diejenige welche M' zukommt, kommt auch jeder Mannigfaltigkeit M'' zu, auf welche M' eineindeutig und längentreu abgebildet werden kann.

Die Untersuchung des Begriffes der „Fortsetzbarkeit“ ist motiviert durch den, bei vielen Problemen der „Differentialgeometrie im Grossen“ in natürlicher Weise auftretenden Wunsch, es nicht nur mit „Teilen“ Riemannscher Mannigfaltigkeiten, sondern mit „ganzen“ Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu tun zu haben; dabei dürfte die nächstliegende Präzisierung des Begriffes „ganz“ gerade der Begriff „nicht-fortsetzbar“ sein. Jedoch hat es sich – besonders im Interesse der Erzielung schöner Resultate – als zweckmässig erwiesen, die Klasse der „nichtfortsetzbaren“ Riemannschen Mannigfaltigkeiten noch weiter zu der Klasse der „vollständigen“ Mannigfaltigkeiten einzuschränken. Diese sind, wie Hopf und Rinow gezeigt haben, durch jede einzelne der folgenden vier Eigenschaften charakterisiert:

1. Auf jedem geodätischen Strahl lässt sich von dessen Anfangspunkt aus eine Strecke beliebiger Länge abtragen.
2. Jede divergente Linie ist unendlich lang.
3. Jede Cauchysche Fundamentalfolge von Punkten ist konvergent.

4. Jede beschränkte Menge ist kompakt.

In den vollständigen Mannigfaltigkeiten gilt insbesondere der, viele Untersuchungen wesentlich erleichternde Satz, dass zwischen zwei Punkten immer (wenigstens) eine kürzeste Verbindung existiert.

Geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeiten sind übrigens immer nicht nur nichtfortsetzbar, sondern sogar vollständig.

Trotz der Vorzüge der *vollständigen* Mannigfaltigkeiten dürften aber auch die *nichtfortsetzbaren* selbständiges Interesse und nähere Untersuchung verdienen.

Es ist trivial, dass jede vollständige Mannigfaltigkeit nicht-fortsetzbar ist; aber nicht jede nichtfortsetzbare Mannigfaltigkeit ist vollständig; dies haben Hopf und Rinow durch Konstruktion zweidimensionaler Beispiele gezeigt. S. B. MYERS hat bemerkt [7], dass analoge Beispiele für jede Dimension >2 existieren; er hat jedoch keinen Beweis hierfür angegeben; wir werden im folgenden einen solchen Beweis nachholen, indem wir zeigen, dass die erwähnte, für die Dimension $n=2$ durchgeführte Konstruktion von Hopf und Rinow auf alle höheren Dimensionen n übertragen werden kann. Es gibt also für jede Dimension $n>1$ Mannigfaltigkeiten, die unvollständig, aber nicht-fortsetzbar sind (Satz 1, Kapitel I). Unser Kapitel I enthält ferner den folgenden Satz, der für die Klärung des Begriffes der Fortsetzbarkeit wichtig sein dürfte (Satz 2): „Jede Riemannsche Mannigfaltigkeit ist entweder nicht-fortsetzbar oder zu einer nichtfortsetzbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit fortsetzbar". Die Beweismethode hierfür ist abstrakt-mengentheoretisch (Zornsches Lemma).

Die Sätze des Kapitels II werden unter anderem zeigen, dass die Klasse der nichtfortsetzbaren Riemannschen Mannigfaltigkeiten viel grösser ist als die Klasse der vollständigen; dabei beschränken wir uns hier auf zweidimensionale Mannigfaltigkeiten – also Flächen – und auf lokaleuklidische Metriken. Man weiss, dass unter den topologischen Typen geschlossener Flächen die des Torus und des Kleinschen Schlauches die einzigen sind, die lokaleuklidische Metriken zulassen, und dass es unter den Typen der offenen Flächen nur drei Typen mit *vollständiger* lokaleuklidischer Metrik gibt: die Ebene, den Kreiszylinder und das Möbiusband ohne Rand (cf. (6)). Was wird aus diesen Tatsachen, wenn man die Forderung der Vollständigkeit weglässt? An den Aussagen über geschlossene Flächen ändert sich natürlich nichts; aber für offene Flächen gilt dann der *Satz 3*: „Auf jeder offenen topologisch gegebenen Fläche lässt sich eine lokaleuklidische Metrik einführen". Und wenn man anstelle der üblichen Vollständigkeitsforderung nur die schwächere Forderung der Nichtfortsetzbarkeit hinzufügt, so besagt unser *Satz 4*: „Auf jeder *orientierbaren* topologisch gegebenen offenen Fläche von *endlichem Zusammenhang* kann man eine nichtfortsetzbare lokaleuklidische Metrik einführen". Die Frage, ob hier die Beschränkungen auf orientierbare Flächen und auf die endliche Zusammenhangszahl notwendig sind, bleibt offen.

Offen ist zunächst auch die Frage, ob die Sätze 3 und 4 vernünftige Verallgemeinerungen auf mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten besitzen; denn die im Kapitel II benutzten Methoden sind durchaus auf die Dimension 2 beschränkt: Die *orientierbaren* Flächen werden als Riemannsche Flächen (im Sinne der Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Variablen) aufgefasst, und auf diesen Riemannschen Flächen werden funktionentheoretischen Untersuchungen angestellt.

Insbesondere könnte man vielleicht vermuten, dass der Satz 3 auch für beliebigdimensionale offene Mannigfaltigkeiten gilt. Dies wird aber im *Kapitel III* durch den *Satz 7* widerlegt: Dort wird ein Beispiel einer offenen vierdimensionalen Mannigfaltigkeit M^4 angegeben, die nicht fähig ist, eine lokaleuklidische Metrik zu tragen. (Diese M^4 ist die punktierte komplexe projektive Ebene, ist also einfachzusammenhängend und daher orientierbar). Ähnliche Beispiele existieren übrigens sicher für alle Dimensionen $n=4k$ (wie im nachfolgendem Text im Anschluss an den Beweis des Satzes 7 bemerkt wird). Besonders natürlich aber ist, im Hinblick auf die Sätze 3 und 7, die Frage, ob man jede offene M^3 lokaleuklidisch metrisieren kann; diese Frage ist für die orientierbaren M^3 von J. H. C. Whitehead mit „ja" beantwortet worden (cf. (9)); für nicht orientierbare offene M^3 ist sie noch offen.

Die soeben erwähnte Arbeit von Whitehead hat auch die Anregung für die Methode gegeben, die dem Kapitel III zugrundeliegt; diese Methode beruht auf dem Zusammenhang zwischen der Existenz einer lokaleuklidischen Metrik auf einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit einerseits und der Existenz einer *Immersion* der Mannigfaltigkeit M^n in den euklidischen Raum E^n anderseits. (Eine *Immersion* ist eine eindeutige und lokal eineindeutige Abbildung). Von diesem Zusammenhang handeln unsere Sätze 5 und 6.

Schliesslich noch eine kurze Bemerkung über die Regularitätsvoraussetzungen, die unseren Begriffen und Betrachtungen zugrundeliegen: Die Nachbarrelationen zwischen Koordinatenumgebungen auf der Mannigfaltigkeit werden im Allgemeinen, d.h. überall, wo das Gegenteil nicht ausdrücklich gesagt ist, als *analytisch* vorausgesetzt; denn ein grosser Teil dieser Arbeit ist Untersuchungen über lokaleuklidischen Metriken gewidmet und wenn es in einer Mannigfaltigkeit M^n eine lokaleuklidische Metrik gibt, so existieren um jeden Punkt von M^n Umgebungen, welche sich isometrisch in den euklidischen Raum E^n abbilden lassen; die Nachbarrelationen sind für solche Umgebungen *Bewegungen* des E^n, d. h., wenn man in einer Mannigfaltigkeit eine lokaleuklidische Metrik hat, dann kann man sie auch mit einem analytischen Atlas beschreiben.

KAPITEL I

Allgemeine Sätze über Fortsetzbarkeit und Vollständigkeit

Wir beginnen mit dem, in der Einleitung schon erwähnten

SATZ 1. *Es existieren, für alle Dimensionen n, Riemannsche Mannigfaltigkeiten gegebener konstanter Krümmung, welche unvollständig und zugleich nichtfortsetzbar sind,* $(n \geq 2)$.

Beweis (cf. (5) und (6)): Wir geben für jede Dimension n ein Beispiel einer unvollständigen (also einer offenen) nichtfortsetzbaren Mannigfaltigkeit an.

$E^{n'}$ sei der durch die Herausnahme des $(n-2)$-dimensionalen Raumes $x_1 = x_2 = 0$ aus dem euklidischen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-Raume E^n entstandene Raum, F_0 der universelle Überlagerungsraum von $E^{n'}$.

F_0 wird zu einer metrischen Mannigfaltigkeit indem man die in den Umgebungen der Punkte von $E^{n'}$ definierte euklidische Differentialgeometrie von E^n mittels der Ueberlagerungsbeziehung auf Umgebungen der Punkte von F_0 überträgt. Das Krümmungsmaß dieser Differentialgeometrie von F_0 ist überall null. Die geodätischen Linien sind die Ueberlagerungslinien der in $E^{n'}$ verlaufenden Geraden und Geradenstücke. Sind P und Q zwei Punkte in $E^{n'}$, die so beschaffen sind, dass die Verbindungsstrecke $\overline{PQ}$ den Raum $x_1 = x_2 = 0$ trifft, P_0 und Q_0 zwei die Punkte P und Q überlagernde Punkte in F_0, so existiert in F_0 keine geodätische Linie die P_0 mit Q_0 verbindet; denn eine solche müsste über einem P mit Q in $E^{n'}$ verbindenden Geradenstück liegen und ein solches ist nicht vorhanden, da der Raum $x_1 = x_2 = 0$ nicht zu $E^{n'}$ gehört. Da eine kürzeste Verbindung immer geodätisch sein muss, existiert mithin zwischen P_0 und Q_0 keine kürzeste Verbindung. Es existiert allgemein zwischen beliebigen Punkten $P_0, Q_0 \in F_0$ nur dann eine kürzeste Verbindung, wenn P_0, Q_0 Anfangs- bezw. Endpunkt des Weges sind, der durch „Durchdrücken" der Verbindungsstrecke $\overline{PQ}$ der Punkte $P = \pi(P_0)$, $Q = \pi(Q_0) \in E$ entsteht. F_0 ist also unvollständig. Wir zeigen, dass F_0 nichtfortsetzbar ist. Zu diesem Zweck, stellen wir zunächst zwei Eigenschaften von F_0 fest:

A) Unter den von einem beliebigen Punkt P_0 von F_0 ausgehenden Richtungen (welche eineindeutig den Punkten einer $(n-1)$-dimensionalen Richtungskugel entsprechen) gibt es genau eine $(n-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit von „Ausnahmerichtungen" derart, dass man längs des zugehörigen geodätischen Strahles nicht jede Länge abtragen kann.

B) Der geometrische Ort der Punkte P_0 mit den nachstehenden Eigenschaften 1 und 2 ist eine einfach offene Linie.

1. „Die kürzeste in F_0 divergente geodätische Linie aus P_0 hat die Länge a ($a > 0$, vorgegeben)." 2. „Alle divergenten Fundamentalfolgen auf diesen Linien haben untereinander den Abstand null".

Weiter schliesst man indirekt: Wäre F_0 auf ein echtes Teilgebiet G einer Mannigfaltigkeit H eineindeutig und isometrisch mittels einer Abbildung Φ abgebildet, dann hätte G einen Randpunkt P^* und P^* eine Umgebung $\mathfrak{U}$ derart, dass man zwei ihrer Punkte durch einen und nur einen geodätischen Bogen verbinden kann und dass das Büschel aller Geodätischen aus irgend einem Punkte von $\mathfrak{U}$ ein reguläres Koordinatensystem für die ganze Umgebung $\mathfrak{U}$ liefert. (Bogenlänge längs der Geodätischen). Man betrachtet nun einen Punkt P aus $\mathfrak{U} \cap G$ und das Büschel der Geodätischen aus P. Auf allen kritischen Geodätischen trägt man die kritische Länge ab, welche sich von $\Phi^{-1}(P)$ aus in F_0 nicht abtragen lässt.

Somit erhält man in $\mathfrak{U}$ eine $(n-2)$-dimensionale Mannigfaltigkeit: K^{n-2}. Gegeben einen Punkt Q von $\mathfrak{U}$ welcher nicht auf K^{n-2} liegt, dann existiert ein Punkt $\bar{Q}$ in $\mathfrak{U} \cap G$ welcher nicht auf das $(n-1)$-dimensionale Gebilde der Geodätischen welche einerseits durch Q und anderseits durch einen Punkt von K^{n-2} laufen, liegt. Von $\bar{Q}$ aus gesehen, ist die Richtung von Q keine kritische Richtung, also kann man Q von $\bar{Q}$ aus innerhalb G längs einer Geodätischen erreichen, d.h., dass Q zu G gehört und es ist (auf $\mathfrak{U}$ beschränkt) $H-G=K^{n-2}$. Nun betrachten wir in P^* das Büschel der Geodätischen, welche senkrecht auf K^{n-2} stehen, und darin einen Kreis vom Radius a. Wobei a so klein zu wählen ist, dass dieser Kreis ganz in $\mathfrak{U}$ liegt. Dieser Kreis ist eine Punktmenge welche die Voraussetzungen von B) erfüllt, der ist aber eine geschlossene Linie. Man ist somit zu einem Widerspruch gelangt. q. e. d.

Andere ähnliche Mannigfaltigkeiten F_{+1} und F_{-1}, also offene nichtfortsetzbare Mannigfaltigkeiten mit der konstanten Krümmung $+1$ bzw. -1, erhält man, indem man statt dem euklidischen Raum E^n eine Kugel S^n oder einen hyperbolischen Raum H^n zu Grunde legt. Im ersten Fall entferne man aus S^n eine $(n-2)$-dimensionale Kugel S^{n-2} und im zweiten Fall aus H^n einen $(n-2)$-dimensionalen hyperbolischen Raum H^{n-2}. F_{+1} bzw. F_{-1} ist dann der universelle Überlagerungsraum des Restes. Die Überlegungen bleiben dann wörtlich gleich.

Eine Anwendung des Zornschen Lemmas: Satz 2

Die Frage nach der Existenz einer nicht fortsetzbaren Fortsetzung eines beliebigen Raumes lässt sich mit den allgemeinen Sätzen der Mengenlehre beantworten. Zunächst einige bekannte Begriffe:

1) Eine Menge heisst *geordnet* wenn in ihr eine „binäre“ Relation definiert ist, welche man mit „kleiner“ bezeichnet:

$$a < b.$$

Diese Relation braucht keine einfache zu sein, d.h. je zwei Elemente der Menge in Beziehung zu setzen. Sie besitzt aber die folgenden Eigenschaften:

a) Transitivität: Aus $a<b$, $b<c$ folgt $a<c$.

b) Asymmetrie: Es kann nicht zugleich $a<b$ und $b<a$ bestehen.

2) Eine geordnete Menge M heisst *total* geordnet, wenn für beliebige $a, b \in M$ entweder $a<b$ oder $b<a$ gilt.

3) Ein Element s einer Menge M heisst *obere Schranke* für eine Teilmenge M' aus M wenn aus $a \in M'$ folgt $a \leqq s$.

4) Eine geordnete Menge M heisst *induktiv* geordnet, wenn jede totalgeordnete Teilmenge eine obere Schranke in M besitzt.

Dann lautet das *Lemma von Zorn*:
„Eine induktivgeordnete Menge besitzt mindestens ein maximales Element."

Damit können wir jetzt beweisen:

SATZ 2. *Für alle r mit $1 \leqq r \leqq \infty$ oder $r=\omega$, ist, innerhalb der Klasse C^r, jede Riemannsche Mannigfaltigkeit entweder nichtfortsetzbar oder zu einer nichtfortsetzbaren Riemannschen Mannigfaltigkeit fortsetzbar.*

Beweis. Ist M_1 eine Fortsetzung von M, so kann es möglicherweise verschiedene isometrische Abbildungen von M auf einen echten Teil von M_1 geben es kann sogar eine Mannigfaltigkeit M Fortsetzung von sich selbst sein, wie das Beispiel des halben euklidischen Raumes es lehrt. Um das zu vermeiden (wie man gleich sehen wird), zeichnen wir in der Mannigfaltigkeit M einen Punkt P_0 (den Basispunkt) und das Büschel der Richtungen in P_0 (die Grundrichtungen) aus. Bei jeder Fortsetzung von M wird der Basispunkt P_0 verfolgt und sein Bild gemeinsam mit dem der Grundrichtungen wird zum Basispunkt bzw. Grundrichtungen der Fortsetzung M_1 von M. Diese so präzisierte Fortsetzung von M bezeichnen wir mit M_1'. Wir betrachten nunmehr die Gesamtheit $\{M'\}$ aller mit Basispunkt und Grundrichtungen versehenen Fortsetzungen M' von M. Zwei Mannigfaltigkeiten M_1' und M_2' sollen dann und nur dann als gleich gelten wenn man sie so auf einander isometrisch abbilden kann, dass hierbei der Basispunkt und die Grundrichtungen von M_1' in den Basispunkt und in die Grundrichtungen von M_2' übergehen. Ebenso nennen wir M_2' eine Fortsetzung von M_1' wenn wieder Basispunkte und Grundrichtungen sich entsprechen.

Unser Satz wird bewiesen sein, wenn wir zeigen werden, dass es unter den Mannigfaltigkeiten mit Basispunkt und Grundrichtungen *eine* gibt, die sich nicht weiter auf eine mit Basispunkt und Grundrichtungen versehene Mannigfaltigkeit fortsetzen lässt; denn eine solche Mannigfaltigkeit wird, wie sofort zu sehen ist, nach Fortlassung des Basispunktes eine absolut nicht fortsetzbare Mannigfaltigkeit.

Jetzt sind wir so weit, das Zornsche Lemma anwenden zu können. Als Menge $\mathfrak{M}$ nehmen wir die Gesamtheit aller mit Basispunkt und Grundrichtungen versehenen Fortsetzungen von M. Unter $M_1' < M_2'$ verstehen wir, dass M_2' eine Fortsetzung von M_1'

ist. Wir müssen nun verifizieren, dass $\mathfrak{M}$ von dieser Relation induktiv geordnet wird:

Zunächst die Ordnungsaxiome.

Die *Transitivität* $M_1' < M_2' \wedge M_2' < M_3' \Rightarrow M_1' < M_3'$ ist einleuchtend.

Die *Asymmetrie* besagt: es kann nicht zugleich $M_1' < M_2'$ und $M_2' < M_1'$ bestehen. Würde dies nicht der Fall sein, so folgt aus der Transitivität, dass $M_1' < M_1'$ d.h. dass die Mannigfaltigkeit eine Fortsetzung von sich selbst wäre. M_1' wäre also so in sich selbst isometrisch abbildbar, dass Basispunkt und Grundrichtungen sich entsprechen und doch so, dass das Bild von M_1' in sich selbst nicht das ganze M_1' ausmacht, d.h. dass dieses Bild einen Randpunkt in M_1' hat. Sei P^* dieser Randpunkt. Nun verbinden wir P^* mit dem Basispunkt P_0 mit Hilfe eines Weges ω. In einer Koordinatenumgebung von P_0 ist die betrachtete Abbildung die Identität, denn Basispunkt und Grundrichtungen gehen in einander über und die Abbildung ist eine Isometrie. Der Weg ω ist eine kompakte Menge und lässt sich also in endlich viele Intervalle so einteilen, dass jedes Intervall ganz in einer einzigen Koordinatenumgebung von M_1' zu liegen kommt. $\mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}(P_0)$, $\mathfrak{U}_1, \ldots, \mathfrak{U}_N = \mathfrak{U}(P^*)$, mit $\mathfrak{U}_i \cap \mathfrak{U}_{i+1} \neq \emptyset$ seien diese so definierten Koordinatenumgebungen. Wie schon bemerkt, ist die Selbstabbildung von $M_1' \to M_1'$ in $\mathfrak{U}_0$ die Identität; in $\mathfrak{U}_N$ ist es sicher nicht mehr die Identität, denn P^* tritt nicht als Bild auf. Folglich gibt es eine erste Umgebung $\mathfrak{U}_k$, für welche die Abbildung $M_1' \to M_1'$ *nicht* die Identität ist. Aber in dem Teil, in dem $\mathfrak{U}_{k-1}$ in $\mathfrak{U}_k$ übergreift, ist die Abbildung immer noch die Identität. Da wir uns in einer Koordinatenumgebung befinden, haben wir folgende Situation vor uns: Das Innere einer n-dimensionalen Kugel des Parameterraumes wird so in sich Riemannsch-*isometrisch* abgebildet, dass in einem Teil der Kugel die Abbildung die Identität sei, dann ist nach einem bekannten Ergebnis der Riemannschen Geometrie die Abbildung überhaupt die Identität, d.h. die betrachtete Abbildung ist in $\mathfrak{U}_k$ die Identität. Wir sind somit zu einem Widerspruch gelangt, es kann also nicht sein, dass $M_1' < M_1'$. Unsere so definierte Ordnungsrelation genügt somit dem Axiom der Asymmetrie.

Jetzt zeigen wir, dass jede totalgeordnete Teilmenge von $\mathfrak{M}$ eine obere Schranke in $\mathfrak{M}$ besitzt.

Gegeben sei also eine total geordnete Reihe:

$$(*) \qquad M_1', M_2', \ldots, \quad M_\omega', M_{\omega+1}', \ldots$$

unserer Mannigfaltigkeiten, die so beschaffen ist, dass aus $\alpha < \beta$ folgt $M_\alpha' < M_\beta'$. Wir wollen die Existenz einer mit Basispunkt und Grundrichtungen versehenen, also zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Mannigfaltigkeit M'' nachweisen, auf welche jede M_α' fortsetzbar ist. Die gesuchte Mannigfaltigkeit M'' wird folgendermassen konstruiert: Einen jeden Punkt P einer jeden der Mannigfaltigkeiten (*) lassen wir einen Punkt P'' der neuen Mannigfaltigkeit erzeugen. Zwei Punkte P_1 und P_2 sollen dann und nur dann denselben

Punkt P'' erzeugen, wenn sie verschiedenen Mannigfaltigkeiten M'_α und M'_β angehören und auseinander durch die in ihrer Art einzige, durch $M'_\alpha < M'_\beta$ ausgedrückte isometrische Abbildung hervorgehen. Die Gesamtheit aller Umgebungen eines Punktes P'' aus M'' erhalten wir dadurch, das wir von einem jeden Originalpunkt P der P'' erzeugt, die in M'' zustandekommenden Bilder aller seiner Umgebungen (in seiner Mannigfaltigkeit) betrachten. Als Nachbarrelation im Durchschnitt zweier Umgebungen von M'' nehmen wir die entsprechende Abbildung in einer Mannigfaltigkeit aus (*), aus der sie hervorgehen. Ebenso wird die Metrik der Mannigfaltigkeiten (*) nach M'' durchgedrückt. Es ist somit klar, dass unsere Punktmenge M'' eine n-dimensionale Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. M'' ist auch mit einem Basispunkt und Grundrichtungen versehen und jede Mannigfaltigkeit aus (*) lässt sich zu M'' fortsetzen, also ist M'' die gesuchte obere Schranke. Alle Voraussetzungen des Zornschen Lemmas sind somit erfüllt; somit existiert in der Menge aller Fortsetzungen einer gegebenen topologischen Mannigfaltigkeit mit einer inneren Metrik eine mit Basispunkt und Grundrichtungen versehene nicht fortsetzbare Fortsetzung. Dass diese Fortsetzung auch nach Weglassen des Basispunktes und der Grundrichtungen nicht fortsetzbar ist, ist *klar*; denn bei einer möglichen Fortsetzung, könnte man den Basispunkt und die Grundrichtungen bei der Abbildung, welche zur Fortsetzung gehört, einfach verfolgen und man hätte eine Fortsetzung *mit* Basispunkt und Grundrichtungen. q. e. d.

KAPITEL II

Spezielle Untersuchungen des Falles der Dimension n = 2

SATZ 3. *Auf jeder topologisch gegebenen offenen Fläche lässt sich eine lokaleuklidische Metrik einführen.*

Beweis: Ist der gewählte topologische Typus orientierbar, so existiert bekanntlich eine Riemannsche Fläche dieses Typus. Wir werden uns daher zunächst darauf beschränken, zu zeigen, dass es möglich ist, auf jeder offenen Riemannschen Fläche eine lokaleuklidische Metrik einzuführen.

Dazu benützen wir eine Verallgemeinerung des Weierstrassschen Satzes über die Produktdarstellung der ganzen Funktionen, welche von Behnke und Stein (1) bewiesen wurde*):

Gegeben seien eine offene Riemannsche Fläche und darauf eine Folge von Punkten $P_1, P_2, \ldots$, *welche keinen Häufungspunkt besitzt, sowie eine Folge* $m_1, m_2, \ldots$ *von ganzen,*

*) Man vergleiche auch (4).

nicht negativen Zahlen. Dann existiert eine analytische Funktion $F(P)$, welche auf der ganzen gegebenen Fläche regulär ist, in den Punkten $P_1, P_2, \ldots$ m_1-, m_2-, ... -fache Nullstellen hat und sonst nirgends verschwindet.

Daraus folgt zunächst, dass es auf jeder offenen Riemannschen Fläche Funktionen gibt, welche regulär und nicht identisch null sind. Sei $F(P)$ eine solche Funktion; wir betrachten das Differential dF dieser Funktion. Dieses besitzt zwar in gewissen Punkten $Q_1, Q_2, \ldots$ m_1-, m_2-, ... -fache Nullstellen. Nach dem obigen Satz von Behnke und Stein, gibt es aber eine ganze Funktion $G(P)$, welche genau in $Q_1, Q_2, \ldots$ m_1-, m_2-, ... -fache Nullstellen besitzt, so dass das Differential $\omega = dF(P)/G(P)$ auf der ganzen Riemannschen Fläche nirgends null wird. Wenn wir $ds = |\omega|$ setzen, so definiert ds eine auf der ganzen Fläche reguläre Metrik, welche überdies lokaleuklidisch ist, denn in einer Koordinatenumgebung ist

$$ds = \left|\frac{F'(z)}{G(z)}\right| \cdot |dz| = \sqrt{E} \cdot |dz|$$

wobei $z = u + iv$ ein isothermes Parametersystem ist; darin ist die Gaußsche Krümmung:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{E} \Delta \log \sqrt{E} \\ &= -\frac{1}{E} \Delta \log \left|\frac{F'(z)}{G(z)}\right| = 0 \end{aligned}$$

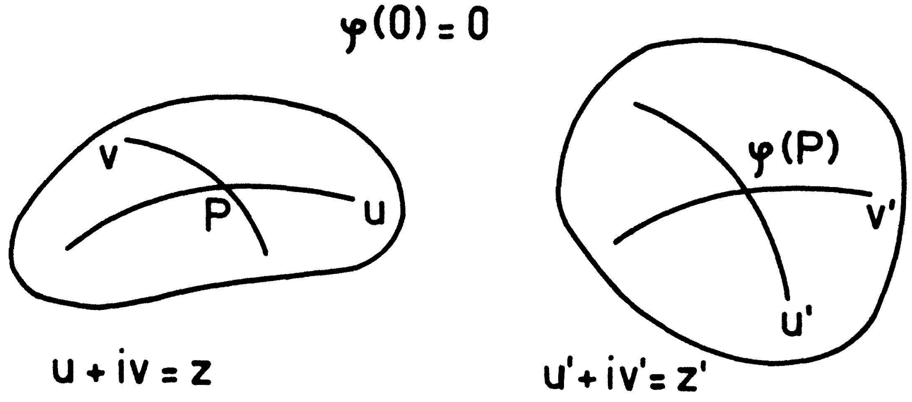
weil $F'(z)/G(z)$ eine analytische Funktion von z und $\neq 0$ ist.

Sei jetzt der gewählte topologische Typus nicht orientierbar; dann gibt es Flächen V^2 dieses Typus, welche eine Winkelmetrik besitzen, d. h. auf denen die Nachbarrelationen durch konforme und antikonforme Abbildungen gegeben sind. Die orientierbare zweiblättrige Überlagerungsfläche W^2 lässt sich dann als Riemannsche Fläche definieren; die natürliche Projektion π von W^2 auf V^2 induziert somit in V^2 zwei Scharen von Koordinatenumgebungen, welche entgegengesetzt orientiert sind und antikonform miteinander zusammenhängen.

Die Tatsache, dass W^2 eine zweiblättrige Überlagerung von V^2 ist, bedeutet, dass es in W^2 eine Involution φ gibt, derart, dass

$$\pi(P) = \pi(\varphi(P)) = \underline{P} \quad (\varphi^2 = 1;\ P \in W^2, \underline{P} \in V^2).$$

Dabei kehrt φ die Orientierung um, d.h. wenn man Koordinatenumgebungen von P und $\varphi(P)$ betrachtet, so dass P und $\varphi(P)$ im Nullpunkt liegen,



dann ist $\overline{\varphi(z)}$ eine analytische Funktion von z.

Ist eine Funktion $F(P)$ analytisch auf W^2, so ist auch $\overline{F(\varphi(P))}$ analytisch auf W^2.

Nach Behnke und Stein existiert auf W^2 eine analytische Funktion $F(P)$ welche nicht identisch verschwindet; dann ist

$$f(P) = F(P)\overline{F(\varphi(P))}$$

auch analytisch. Weiter gilt

$$f(\varphi(P)) = \overline{f(P)}.$$

Für das Differential df folgt

$$df(\varphi(P)) = d\overline{f(P)} = \overline{df(P)},$$

sodass schliesslich $|df(P)|$ bei der Involution φ invariant bleibt. $|df(P)|$ hat in $P_1, P_2, \ldots$ m_1-, m_2-, ... -fache Nullstellen wiederum gibt es nach Behnke und Stein eine auf W^2 überall holomorphe Funktion g, die genau in $P_1, P_2, \ldots$ m_1-, m_2-, ... -fache Nullstellen hat. Demnach ist der Ausdruck

$$ds = \frac{|df(P)|}{\sqrt{|g(P)| \cdot |g(\varphi(P))|}}$$

überall auf W^2 regulär und bezüglich der Involution φ invariant, also auf V^2 eindeutig definiert. Schliesslich stellt ds eine lokaleuklidische Metrik dar, denn in einem Koordinatensystem ist die Gauss'sche Krümmung

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{E}\Delta \log \frac{|f'(z)|}{\sqrt{|g(z)| \cdot |g(\varphi(z))|}} \\ &= 0. \end{aligned} \qquad \text{q.e.d.}$$

Satz 4. *Auf jeder topologisch gegebenen offenen orientierbaren Flächen von endlichem Zusammenhang lässt sich eine nichtfortsetzbare lokaleuklidische Metrik einführen.*

Der Beweis wird derart geführt, dass wir jeden topologischen Flächentypus von endlichem Zusammenhang so erzeugen, indem wir aus einer geschlossenen Fläche vom Geschlecht g endlich viele Punkte herausnehmen. Um funktionentheoretische Betrachtungen machen zu können, konstruieren wir die gesuchte Metrik auf einer Riemannschen Fläche.

Ein analytisches Differential $\omega = f(z)\, dz$ erzeugt eine Metrik

$$ds = |f(z)| \cdot |dz|$$

welche überall, wo $f(z) \neq 0$ und regulär ist, *lokaleuklidisch* ist.

Wir beginnen mit einer lokalen Betrachtung:

HILFSSATZ: *Die lokaleuklidische Metrik*

$$ds = |f(z)| \cdot |dz|$$

ist in den Nullstellen von $f(z)$ nicht fortsetzbar.

Dabei hat die Aussage: „*Die Metrik ist in dem Punkt P_0 fortsetzbar*“ natürlich die folgende Bedeutung: F_0 sei der durch die Herausnahme des Punktes P_0 aus einem vorgelegten Raume F entstandene Raum. F_0 sei mit einer bestimmten Metrik versehen. Dann heisst diese Metrik in P_0 fortsetzbar, wenn es eine topologische und isometrische Abbildung $\mathfrak{E}$ des Raumes F_0 auf ein echtes Teilgebiet G eines Raumes M gibt mit der folgenden Eigenschaft: Seien r ein Randpunkt von G in M, $g_n \in G$ eine Folge von Punkten, welche gegen r konvergiert und $\mathfrak{U}$ eine Umgebung von P_0 (in F); dann liegen fast alle $\mathfrak{E}^{-1}(g_n)$ in $\mathfrak{U}$.

Beweis des Hilfssatzes: Wir führen ihn für eine m-fache Nullstelle, von der wir annehmen dürfen, dass sie im Nullpunkt des Koordinatensystems liegt.

Zunächst zeigen wir, dass, falls die Metrik im Nullpunkt fortsetzbar ist, die Fortsetzung sich durch Hinzunahme eines einzigen Punktes ergibt.

Dazu betrachten wir in der z-Ebene Kreise um den Nullpunkt; wenn deren Radien klein sind, so sind die Längen dieser Kreise, in der obigen Metrik gemessen, kleiner als die euklidischen Längen der entsprechenden Kreise, denn $ds < |dz|$. Da die euklidisch gemessenen Längen nach null streben, wenn die Radien gegen null gehen, so tun dies auch die Riemannsch gemessenen Längen. Daraus folgt, dass es einen einzigen Randpunkt P^* gibt. Denn gäbe es einen weiteren Randpunkt Q^*, so hätte Q^* einen positiven Abstand a von P^*. Das ist aber ein Widerspruch mit der Voraussetzung, dass P^* und Q^* beide innerhalb einer Schar von Kreisen, deren Längen nach null streben, liegen. Wir nehmen jetzt an, dass unsere Metrik in den Nullpunkt hinein fortsetzbar ist, und zeigen, dass dies ebenfalls zu einem Widerspruch führt. Im Nullpunkt selbst muss aus Stetigkeitsgründen die Gauss'sche Krümmung unserer Metrik gleich null sein. Die Metrik ist somit in einer ganzen Umgebung von $z=0$ lokaleuklidisch. In $ds = |f(z)| \cdot |dz|$ sei also $f(z)$ der Gestalt $f(z) = z^m \cdot g(z)$, wobei $g(0) \neq 0$ ist. Die

Krümmung einer beliebigen Kurve, in der Metrik $ds = |f(z)| \cdot |dz|$ ist durch die Formel

$$k = \frac{1}{|f|}\left[k_e + \frac{\partial \log |f|}{\partial n}\right]$$

gegeben, wobei k_e die euklidische Krümmung der Kurve $z = z(t)$ in der z-Ebene bedeutet, mit der Konvention, dass:

$$\operatorname{sign} k_e = \operatorname{sign} \frac{d}{dt}\left[\arg \frac{dz}{dt}\right]$$

und n die Normale zu $z(t)$ in der Richtung $\arg(-i(dz)/(dt))$ ist.
Mit $f(z) = z^m \cdot g(z)$ wird

$$\frac{\partial \log |f|}{\partial n} = \frac{\partial(m \cdot \log |z| + \log |g(z)|)}{\partial n}$$

Wir betrachten jetzt eine den Nullpunkt enthaltende einfachgeschlossene Kurve, etwa $z = re^{i\varphi}$ (r = Konst.), und berechnen ihre totale Krümmung; längs $|z| = r$ ist $\partial \log |f|/\partial n = m/r + G(r, \varphi)$, wobei $G(r, \varphi)$ beschränkt bleibt in $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ und $0 \leq r \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Da $k_e = 1/r$, wird die totale Krümmung:

$$\oint k \cdot ds = \oint \left[k_e + \frac{\partial \log |f|}{\partial n}\right] \cdot |dz|$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{m+1}{r} + G(r, \varphi)\right] r \cdot d\varphi = (m+1)2\pi + r\int_0^{2\pi} G(r, \varphi) \cdot d\varphi$$

$\int_0^{2\pi} G(r, \varphi) \cdot d\varphi$ ist beschränkt, so dass, wenn $r \to 0$ strebt, $\oint k \cdot ds \to (m+1)2\pi$ strebt. Aber da die Metrik überall innerhalb der Kurve als lokaleuklidisch angenommen wurde, sollte $\oint k \cdot ds = 2\pi$ sein. Das ist aber ein Widerspruch zu dem, was wir errechnet haben und der Hilfssatz ist bewiesen.

Mit diesem Hilfssatz können wir jetzt für fast jeden topologischen Typus Beispiele offener Flächen mit nichtfortsetzbaren Metriken konstruieren.

Für das Geschlecht null ist die einfachste offene Fläche die Ebene mit ihrer, sogar vollständigen, natürlichen Metrik: $ds = |dz|$. Hat man die Punkte $z = a_1, z = a_2, \ldots, z = a_N$ aus der Zahlenebene entfernt, so ist in dieser N-fach punktierten Ebene die Metrik

$$ds = |(z - a_1) \cdot (z - a_2) \ldots, (z - a_N)| \cdot |dz|$$

lokaleuklidisch und nach dem Hilfssatz in den Punkten $a_1, a_2, \ldots, a_N$ nicht fortsetzbar. Diese Metrik ist in den Umgebungen dieser Punkte unvollständig. Man bemerke, dass in der einfach punktierten Ebene sogar eine vollständige lokaleuklidische Metrik eingeführt werden kann; diese ist isometrisch zur natürlichen Metrik des Zylinders in E^3.

Um nun Beispiele von Flächen mit höherem Geschlecht zu gewinnen, betrachten wir das Differential:

$$\omega = \frac{dz}{\sqrt{(z-a_1)\cdot(z-a_2)\ldots,(z-a_{2g+1})}} \qquad g = 1, 2, \ldots$$

Um sein Verhalten in der Nähe eines Windungspunktes a_i zu untersuchen, führen wir den uniformisierenden Parameter $\zeta^2 = z - a_i$ ein. Da $dz = 2\zeta \cdot d\zeta$, wird

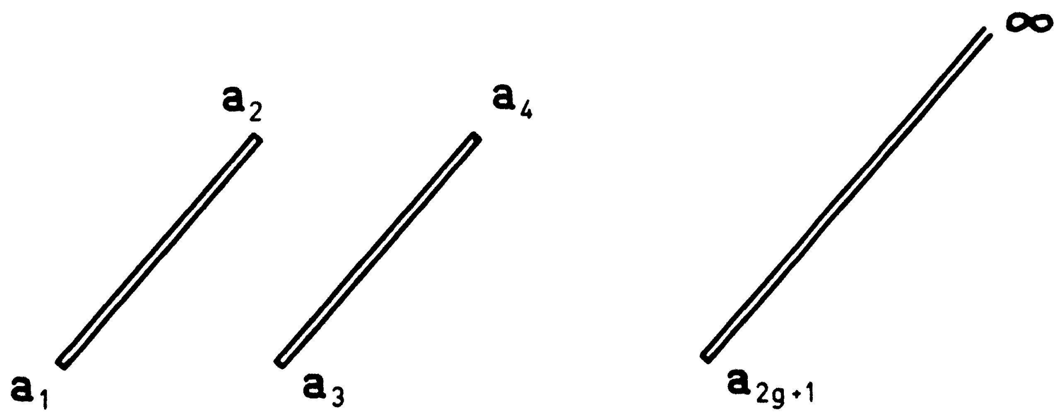
$$\omega = \frac{2\zeta \cdot d\zeta}{\zeta \sqrt{\quad} \neq 0 \text{ im Punkte } a_i},$$

also ist ω in der Umgebung von a_i ein reguläres Differential, welches ungleich null ist.

In der Umgebung des Punktes unendlich führen wir den uniformisierenden Parameter $\zeta^2 = 1/z$ ein; $dz = -2\cdot d\zeta/\zeta^3$ und

$$\omega = -\frac{2\zeta^{2g-2}\, d\zeta}{\sqrt{\quad} \neq 0 \text{ für } \zeta = 0}.$$

Damit ω einen eindeutigen Wert erhält, schneidet man die Zahlenebene folgendermassen auf:



Also ist das Differential ω eindeutig auf einer Riemannschen Fläche vom Geschlecht g.

Wenn wir jetzt $|\omega| = ds$ setzen, so definiert es eine lokaleuklidische Metrik auf der zugehörigen Riemannsche Fläche.

Im Falle $g=1$ definiert das Differential eine *vollständige* lokaleuklidische Metrik, denn in diesem Fall ist ω auch im Punkte ∞ regulär. Im Falle $g \geq 2$ dagegen wird ω im Unendlichem null und erzeugt somit eine unvollständige lokaleuklidische Metrik auf der einfach punktierten Fläche vom Geschlecht g; nach dem Hilfssatz (und auch nach dem Satz über die Curvatura integra $\iint K \cdot dA = (1-g)\cdot 4\pi$) ist diese Metrik nicht fortsetzbar.

Eine nichtfortsetzbare Metrik auf einer mehrfach punktierten Fläche erhalten wir, indem wir das Differential

$$\omega_k = (z - b_1)\cdot(z - b_2)\cdot\ldots,\cdot(z - b_k)\cdot\omega \qquad \text{wobei} \qquad b_i \neq a_j$$

betrachten. Dabei ist jetzt zu beachten, dass dieses Differential für $k=g-1$ im Unendlichem regulär und verschieden von null ist. Sei zunächst $k \neq g-1$, dann stellt $|\omega_k| = ds$ eine unvollständige, nichtfortsetzbare, lokaleuklidische Metrik auf der $(k+1)$-fach punktierten Fläche vom Geschlecht g dar. Falls $k<g-1$, ist die Metrik in der Umgebung des Punktes ∞ unvollständig; ist dagegen $k>g-1$, dann ist die Metrik in der Umgebung des Punktes ∞ vollständig. Ist aber $k=g-1$, so ist die Metrik im Punkte ∞ regulär, so dass die Fläche vom selben topologischen Typus ist wie die Fläche mit $k=g-2$, denn ω_k hat nur noch $g-1$ Singularitäten. Um eine Metrik auf der g-fach punktierten Fläche zu erhalten, betrachte man etwa:

$$\omega_k' = (z - b_1)^2\cdot(z - b_2)\ \ldots,\ (z - b_{g-1})\,\omega\,.$$

Diese Konstruktionen versagen aber im Falle des einfach punktierten Torus ($g=1$), denn $ds=|\omega|$ ist auf dem ganzen Torus regulär und definiert also eine vollständige Metrik. Weiter ist $ds=|(z-b)\cdot\omega|$ eine auf dem *zweifach* punktierten Torus nichtfortsetzbare lokaleuklidische Metrik, denn dieses ds wird in $z=b$ singulär und das Differential hat einen Pol im Unendlichem. Unsere Konstruktionen haben somit, bis auf die einzige Ausnahme des einfach punktierten Torus, Beispiele von nichtfortsetzbaren lokaleuklidischen Metriken geliefert. Auf einem einfach punktierten Torus betrachten wir die Metrik:

$$ds = |e^{1/z-b}\cdot\omega|\,.$$

SATZ. *Diese Metrik ist unvollständig und in $z=b$ nicht fortsetzbar.*

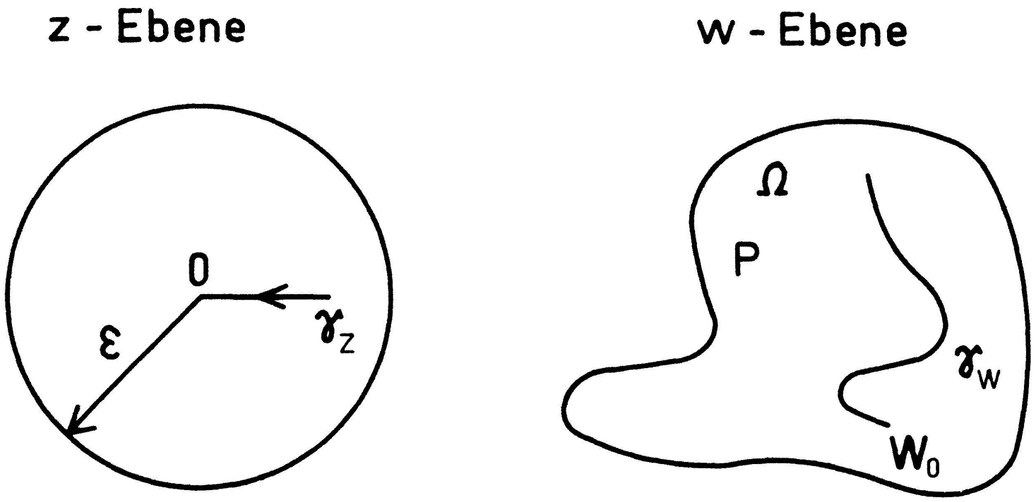
Beweis. Um die Schreibweise zu vereinfachen, dürfen wir annehmen, dass $b=0$.

Zunächst zeigen wir, dass die so definierte Mannigfaltigkeit M unvollständig ist. Ein divergenter Weg endlicher Länge ist nämlich $z(t)=it$, $t>0$. Auf diesem Strahl ist $e^{1/z}$ beschränkt und ω ist sogar analytisch in der Umgebung von $z=0$.

Wir zeigen jetzt: M kann nicht fortgesetzt werden.

Annahme: Es existiert eine Fortsetzung $\tilde{M}$ von M. Es bezeichne $\mathfrak{U}$ denjenigen Teil von M, der dem Ring $[0<|z|<\varepsilon]$ in der Parameterebene entspricht, wobei $\varepsilon>0$ so klein bemessen ist, dass die Windungspunkte von ω ausserhalb von $\mathfrak{U}$ liegen. $\mathfrak{U}$ besitzt eine Fortsetzung $\tilde{\mathfrak{U}}$ – über den *inneren* Rand des Gebietes hinaus –, von der wir ohne Verlust der Allgemeinheit annehmen dürfen, dass sie einfach oder zweifach zusammenhängend ist. $\tilde{\mathfrak{U}}$ kann also auf ein schlichtes ebenes Gebiet Ω abgebildet werden. Dabei geht $\mathfrak{U}$ in ein Ringgebiet P über, dessen äusserer Rand mit dem äusserem Rand von Ω (oder dem Rand überhaupt von Ω) übereinstimmt.

Da P vom gleichen konformen Typus ist, wie der Ring $[0<|z|<\varepsilon]$, entsteht P aus Ω durch Wegnahme eines einzigen Punktes W_0. Die aus dem Obigen sich ergebende konforme Abbildung von $[0<|z|<\varepsilon]$ auf P kann man zu einer konformen Abbildung von $[|z|<\varepsilon]$ auf Ω erweitern, indem man $z=0$ den Punkt W_0 zuordnet:



Nun betrachten wir denjenigen Kurvenbogen γ auf M, dem in der z-Ebene das offene Intervall $(0, \varepsilon/2)$ auf der reellen Achse entspricht.

Eine leichte Abschätzung liefert:

$$\textit{Länge von } \gamma = \int_0^{\varepsilon/2} |e^{1/t} \cdot \omega(t)| = \infty.$$

Anderseits bemerken wir, dass γ in der w-Ebene ein analytischer Kurvenbogen entspricht. Da ferner die w-Ebene auch in der Umgebung von W_0 eine isotherme Parameterebene ist, schliessen wir:

$$\textit{Länge von } \gamma < \infty$$

Damit sind wir bei einem Widerspruch angelangt. q. e. d.

(Ein weiteres Beispiel einer nichtfortsetzbaren lokaleuklidischen Metrik auf einem einfachpunktierten Torus hat mir Prof. A. Huber angegeben; er betrachtet die Metrik

$$ds = |e^{\varphi(z)}| \cdot |dz|,$$

wobei

$$\varphi(z) = \sum_{m,n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z+m+i\,n)^3}$$

Dann lässt sich zeigen, auf genau gleiche Art wie oben, dass diese auf einem Torus definierte lokaleuklidische Metrik nicht fortsetzbar sein kann.)

Dagegen bleibt die Frage offen, ob man auf einer beliebig vorgegebenen *unendlich-zusammenhängenden* Fläche eine lokaleuklidische Metrik einführen kann, welche nichtfortsetzbar ist.

T. Radò hat schon 1922 ein Beispiel einer Riemannschen Fläche angegeben, welche konform nicht fortsetzbar ist. Diese Fläche ist notwendigerweise von unendlichem Zusammenhang, denn wie S. Bochner 1926 beweisen konnte, ist jede offene endlich-zusammenhängende Riemannsche Fläche zu einer geschlossenen Fläche konform fortsetzbar.

Das Radòsche Beispiel liefert aber auch ein Beispiel einer Fläche, welche *metrisch* nicht fortsetzbar ist; denn führt man darauf auf irgend eine Weise eine reguläre Metrik ein, so ist diese nicht fortsetzbar, weil eine metrische erst recht eine konforme Fortsetzung ist.

KAPITEL III

Der Begriff der Immersion; Untersuchungen des Falles $n \geqslant 3$

Seien X und Y zwei topologische Räume, so verstehe ich unter einer *Immersion* von X in Y eine Abbildung $f: X \to Y$ mit der folgenden Eigenschaft: Jeder Punkt $x \in X$ hat eine Umgebung $\mathfrak{U}(x) \subset X$ derart, dass $f \mid \mathfrak{U}(x)$ eine Einbettung von $\mathfrak{U}(x)$ in Y liefert. (Einbettung = Topologische Abbildung).

SATZ 5. *Wenn es eine Immersion einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit M^n in den n-dimensionalen euklidischen Raum E^n gibt, dann kann man in M^n eine lokaleuklidische Metrik einführen.*

Beweis. Nach der Definition ist eine Immersion der Mannigfaltigkeit M^n in E^n eine Abbildung Φ der Form:

$$\Phi(p) = (f_1(p), f_2(p), \ldots, f_n(p)),$$

dabei ist p ein beliebiger Punkt auf der Mannigfaltigkeit und $f_1(p), f_2(p), \ldots, f_n(p)$ die rechtwinkligen Koordinaten des Bildpunkts $\Phi(p)$. In seiner Koordinatenumgebung hat p die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Da $\Phi(p)$ lokal eine Einbettung ist, ist die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_n)} \neq 0;$$

lokal existiert also eine Umkehrabbildung Φ^{-1}. Mit ihrer Hilfe kann ich die euklidische Metrik des E^n nach M^n zurücknehmen, d.h., dass ich in M^n die folgende Metrik einführe:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (df_i)^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

wobei also:

$$g_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x^k} \qquad \text{q. e. d.}$$

Umgekehrt kann man noch zeigen:

SATZ 6. *Ist M^n einfachzusammenhängend, so folgt aus der Existenz einer lokaleuklidischen Metrik auf M^n, die Existenz einer Immersion von M^n in E^n.*

Beweis. Gegeben ist also die lokaleuklidische Metrik, daraus konstruiere ich eine Abbildung Φ welche eine Immersion ist. Es seien $\mathfrak{U}^{(1)}, \mathfrak{U}^{(2)}, \ldots, \mathfrak{U}^{(h)}$ Umgebungen der Punkte $p^{(1)} \cdot p^{(2)} \ldots, p^{(h)}$, sodass $\mathfrak{U}^{(i)} \cap \mathfrak{U}^{(i+1)} \neq \emptyset$ für $i=1, 2, \ldots, h-1$. Da es in der Mannigfaltigkeit M^n eine lokaleuklidische Metrik gibt, kann ich diese Umgebungen so wählen, dass es für jede $\mathfrak{U}^{(i)}$ eine Einbettung $\Phi^{(i)}$ in den euklidischen Raum existiert.

In $\mathfrak{U}^{(1)}$ definiere ich $\Phi = \Phi^{(1)}$. Es existiert genau eine Bewegung μ_{21} des E^n mit der folgenden Eigenschaft:

$$\mu_{21} \circ \Phi^{(2)}(U^{(1)} \cap U^{(2)}) = \Phi^{(1)}(U^{(1)} \cap U^{(2)}).$$

μ_{21} ist eine isometrische Abbildung des ganzen E^n auf sich, sodass die Zusammensetzung $\mu_{21} \circ \Phi^{(2)}$ noch eine Einbettung der ganzen Umgebung $\mathfrak{U}^{(2)}$ in den E^n liefert. Da jetzt $\mu_{21} \circ \Phi^{(2)}$ und $\Phi^{(1)}$ im Durchschnitt $\mathfrak{U}^{(1)} \cap \mathfrak{U}^{(2)}$ übereinstimmen, kann ich in $\mathfrak{U}^{(2)}$ $\Phi = \mu_{21} \circ \Phi^{(2)}$ setzen. Weiter erkläre ich Φ in $\mathfrak{U}^{(3)}$ als $\mu_{21} \circ \mu_{32} \circ \Phi^{(3)}$. So kann ich schrittweise Φ bis zur Umgebung $\mathfrak{U}^{(h)}$ definieren und somit auf der Vereinigung $\bigcup_{j=1}^{h} \mathfrak{U}^{(j)}$. Nur ist es noch nicht gesagt, dass diese Definition eindeutig ist, wo zwei sich nicht in der Numerierung folgende Umgebungen aufeinander überlappen.

Sei nun ω ein stetiger Weg, welcher in $p^{(1)}$ beginnt und über $p^{(2)}, p^{(3)}, \ldots,$ nach $p^{(h)}$ führt und zwar so, dass jeder seiner Punkte sich in wenigstens einer der Umgebungen $\mathfrak{U}^{(j)}$ befindet.

Dann sage ich, dass ich Φ, von $\Phi = \Phi^{(1)}$ ausgehend längs dem Weg ω definiert habe. Umgekehrt, wenn von der Definition einer Funktion Φ längs einem Weg ω die Rede ist, so soll immer eine solche Definition von Φ in einer ganzen Umgebung von ω gemeint sein.

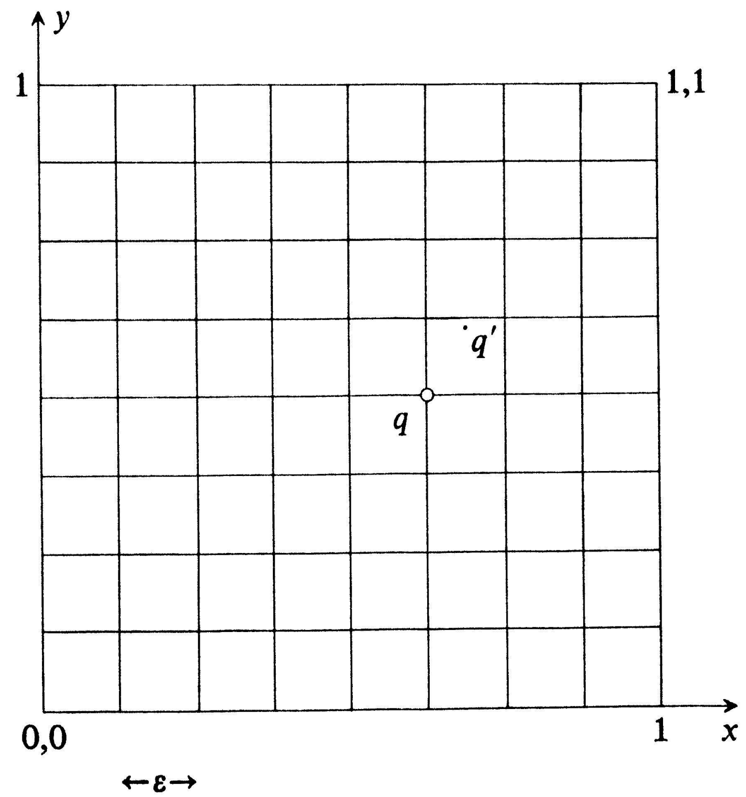
Ausgehend von einer gegebenen Einbettung einer Umgebung $\tilde{\mathfrak{U}}$ eines beliebigen Punktes $\bar{p}$, ist es möglich längs jedem stetigen Weg der Mannigfaltigkeit M^n eine Funktion Φ zu definieren, welche überall lokal eine Einbettung ist. Denn, nehmen wir an, es wäre längs dem Weg ω' nicht möglich, (ω' sei also das stetige Bild des Intervalles $0 \leq t \leq 1$, wobei $t=0$ dem Punkt $p(0)=\bar{p}$ entspricht), so gibt es einen Parameterwert $t=\tau$ mit $0<\tau$ wo Φ nicht mehr definierbar ist. Aber Φ existiert bei jedem Wert des Parameters t mit $0 \leq t < \tau$. Sei τ' ein Parameterwert mit $\tau' < \tau$ und $\mathfrak{U}(p(\tau')) \cap \mathfrak{U}(p(\tau)) \neq \emptyset$. Bis zu der Umgebung $\mathfrak{U}(p(\tau'))$ ist also Φ definierbar und liefert eine mögliche Einbettung von $\mathfrak{U}(p(\tau'))$ in E^n; andererseits, da es in der Mannigfaltigkeit M^n eine lokaleuklidische Metrik gibt, existiert eine Einbettung ε von $\mathfrak{U}(p(\tau))$ in den E^n; sei μ die Bewegung des E^n sodass:

$$\mu \circ \varepsilon(\mathfrak{U}(p(\tau')) \cap \mathfrak{U}(p(\tau))) = \Phi(\mathfrak{U}(p(\tau')) \cap \mathfrak{U}(p(\tau))),$$

dann ist $\mu \circ \varepsilon$ eine Fortsetzung der Abbildung Φ und diese ist also bis zum Ende des Weges ω' definierbar. Ausgehend von der Einbettung eines beliebigen Stückes von M^n, kann man also die Abbildung Φ längs aller Wege bis zu jedem beliebigen Punkte erklären. Damit unsere Abbildung Φ eine Immersion ist, müssen wir noch zeigen, dass man in einem Punkte b dieselbe Abbildung Φ erhält, wenn man ausgehend von derselben Immersion einer Umgebung eines Punktes a, Φ längs zwei homotope Wege zwischen a und b definiert. Seien ω_1 und ω_2 diese zwei homotope Wege, so gibt es eine stetige Abbildung φ des Rechteckes $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ in die Mannigfaltigkeit M^n sodass:

$$\varphi(0, y) = a \qquad \varphi(1, y) = b$$
$$\varphi(x, 0) = \omega_1 \qquad \varphi(x, 1) = \omega_2$$

Ich lege in dieses Quadrat ein Gitter mit der Maschengrösse ε. Da das Bild des Rechteckes eine kompakte Menge in der Mannigfaltigkeit ist, kann ich $\varepsilon>0$ so wählen, dass



erstens, wenn q irgend ein Gitterpunkt ist und q' ein beliebiger Punkt mit $\overline{qq'} < \sqrt{2}\cdot\varepsilon$ ist, $\varphi(q')$ in einer Umgebung $\mathfrak{U}(\varphi(q))$ von $\varphi(q)$ liegt, welche sich in den euklidischen Raum einbetten lässt; zweitens $1/\varepsilon$ eine ganze Zahl ist.

Ich betrachte jetzt die endliche Anzahl von Deformationswegen:

$$\varphi(x, m\cdot\varepsilon) \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die Definition von Φ welche man erhält, indem man $\varphi(x, m\cdot\varepsilon)$ oder $\varphi(x, (m+1)\cdot\varepsilon)$ folgt ist dieselbe, denn $\varphi(x, m\cdot\varepsilon)$ und $\varphi(x, (m+1)\cdot\varepsilon)$ verlaufen in zwei benachbarten Ketten von Umgebungen, welche sich ständig überlappen. Man erhält dieselbe Definition, indem man einer Kette von Umgebungen folgt oder der andern, denn wenn man etwa drei Umgebungen $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{W}$ der Punkte u, v, w einer Mannigfaltigkeit mit lokaleuklidischer Metrik betrachtet, derart, dass $\mathfrak{U}\cap\mathfrak{V}\cap\mathfrak{W}\neq\emptyset$, so erhält man, ausgehend von einer Einbettung Φ welche in $\mathfrak{U}$ erklärt ist, dieselbe Einbettung Φ von $\mathfrak{W}$ gleich ob man direkt Φ in $\mathfrak{W}$ oder zunächst in $\mathfrak{V}$ und erst dann in $\mathfrak{W}$ definiert. Schrittweise kann man also ausgehend von der Definition von Φ längs ω_1, eine Immersion Φ_2 von der Umgebung von ω_2 konstruieren, welche in b mit der Abbildung Φ übereinstimmt.

Somit hängt Φ nur von der Homotopieklasse des gewählten Weges ab und diese Abbildung ist überhaupt vom Wege unabhängig in einer einfachzusammenhängenden Mannigfaltigkeit. q. e. d.

Mit Hilfe der Kontraposition dieses letzten Satzes kann man das Folgende beweisen:

SATZ 7. *Es gibt eine vierdimensionale offene einfachzusammenhängende Mannigfaltigkeit, welche keine lokaleuklidische Metrik tragen kann.*

Beweis. Der zweidimensionale komplexe projektive Raum P^2 kann als vierdimensionale reelle Mannigfaltigkeit M^4 aufgefasst werden. M^4 kann als vierdimensionaler, mit einer zweidimensionalen Sphäre S^2 abgeschlossener euklidischer Raum gedeutet werden. M^4 ist geschlossen und einfachzusammenhängend. Sei $M'^4 = M^4 - p^*$, wobei p^* ein beliebiger Punkt von M^4 ist. M'^4 ist einfachzusammenhängend und *offen*. Ich behaupte: Es kann auf M'^4 keine lokaleuklidische Metrik eingeführt werden. Das zeige ich indirekt: Ich nehme an, es gebe auf M'^4 eine lokaleuklidische Metrik; da M'^4 einfachzusammenhängend ist, gibt es nach Satz 6 eine Immersion von M'^4 in den E^4. Ich betrachte in M'^4 zwei komplexe Geraden D^2 und D'^2, welche nicht durch p^* verlaufen (d.h. zwei zweidimensionale geschlossene Flächen in M'^4) und welche so nahe an einander gewählt werden, dass die Immersion einer Umgebung von D auch die Abbildung von D' in den E^4 liefert.

Sei f die Immersion von M'^4 und $f(D)$ bzw. $f(D')$ die Bilder von D bzw. D'. $f(D)$ und $f(D')$ sind zwei geschlossene Flächen in E^4, welche unter Umständen Doppelpunkte oder allgemein mehrfache Punkte aufweisen können. Es können Schnittpunkte von $f(D)$ mit $f(D')$ vorkommen, welche nicht von Schnittpunkten von D mit D' herrühren, nämlich in der Nähe von ihren Doppel- oder mehrfachen Punkten; denn wenn die Fläche $f(D)$ sich selbst schneidet, so schneidet die in der Nähe von $f(D)$ verlaufende $f(D')$ die Fläche $f(D)$. Die gesamte Anzahl von Schnittpunkten von $f(D)$ und $f(D')$ in der Nähe einer mehrfachen Stelle ist aber gerade; denn wenn ein Stück von $f(D)$ das in der Nähe eines ersten Astes von $f(D)$ verläuft, einen zweiten Ast von $f(D')$ schneidet, so schneidet auch das Stück von $f(D')$ welches in der Nähe des zweiten Astes von $f(D)$ verläuft, den ersten Ast von $f(D)$.

Die Schnittzahl von D mit D' ändert sich also durch die Immersion f höchstens um eine gerade Zahl; da aber diese Schnittzahl in M'^4 genau 1 beträgt, sind wir zu einem Widerspruch angelangt, weil in E^4 die Schnittzahl zweier orientierbarer zweidimensionaler Flächen gerade sein muss. q. e. d.

Bemerkungen

1. Man kann sich genau so überlegen, dass in der oben erwähnten Mannigfaltigkeit M'^4 keine lokalsphärische oder keine lokalhyperbolische Metrik existieren kann.

2. Man kann mit derselben Methode eine 8-dimensionale und allgemein eine $4k$-dimensionale Mannigfaltigkeit konstruieren, welche keine lokaleuklidische Metrik zu tragen vermag. Man geht dabei von dem komplexen vierdimensionalen, bzw. komplexen $2k$-dimensionalen projektiven Raume aus und entferne davon einen Punkt p^*; reel gefasst, sind es Mannigfaltigkeiten M'^8 bzw. M'^{4k}, welche offenbar nach dem obigen Beweis keine lokaleuklidische Metrik tragen können. Für die Dimensionen $n \geqslant 5, n \neq 4k$, bleibt die Frage offen, ob man auch dann Beispiele von Mannigfaltigkeiten angeben kann, welche nicht lokaleuklidisch metrisierbar sind.

Die Dimension $n=4$ ist aber die kleinste, bei welcher man solche Mannigfaltigkeiten antreffen kann; denn J. H. C. Whitehead hat das folgende bewiesen (9):

SATZ 8. *Für $n \leq 3$, und alle r mit $1 \leq r \leq \infty$ gibt es für jede offene, orientierbare, n-dimensionale Mannigfaltigkeit der Klasse C^r eine Immersion in den euklidischen Raum E^n, vermittels einer regulären Abbildung der Klasse C^r.*

Daraus folgt, wenn man diesen Satz anwendet, und wie Whitehead es auch selber bemerkt, die Existenz einer lokaleuklidischen Metrik auf jeder offenen orientierbaren Mannigfaltigkeit der Dimensionen 1, 2 und 3.

In dem Fall der Dimension $n=2$ wissen wir schon nach Satz 3, dass es lokaleuklidische Metriken auf *allen* topologischen Typen offenen Flächen gibt, also auch noch auf den nichtorientierbaren.

Der Beweis des Satzes 3 geschieht aber auf funktionentheoretischer Basis und lässt sich nicht zu dem Fall der lokalhyperbolischen oder der lokalsphärischen Metrik verallgemeinern; der Whitehead'sche Beweis verläuft aber geometrisch und liefert offenbar gleichlautende Aussagen sowohl für die lokalhyperbolische als auch für die lokalsphärische Metrik. Die wesentliche Bedeutung des Satzes von Whitehead liegt aber darin, dass der Fall der Dimension $n=3$ auch noch erledigt wird, allerdings nur in dem orientierbaren Falle.

Man kann sich fragen, ob eine Verfeinerung der Whitehead'sche Methode, wobei man etwa die zweiblättrige orientierbare Überlagerung einer nichtorientierbaren dreidimensionalen Mannigfaltigkeit M^3 betrachten würde, auch den nichtorientierbaren Fall nicht liefern könnte. Diese Frage ist noch unbeantwortet.

3. Zum Schluss sei noch erwähnt, dass Poénaru [10] das Folgende bewiesen hat:

SATZ 9: *Von jeder offenen parallelisierbaren* n*-dimensionalen Mannigfaltigkeit gibt es eine Immersion in den* E^n. Nach Satz 5 ist somit die Parallelisierbarkeit einer offenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit eine hinreichende Bedingung dafür, dass man sie lokaleuklidisch metrisieren kann.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] H. BEHNKE und K. STEIN. „Entwicklungen analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen", Math. Ann. *120* (1948).
[2] S. BOCHNER. „Fortsetzung Riemannscher Flächen", Math. Ann. *73* (1928).
[3] M. BOURBAKI. „Théorie des Ensembles, Chapitre III", Actualités Scientifiques et Industrielles No. 1243, Hermann & Cie, Paris 1956.
[4] H. FLORACK. „Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flächen", Schriftenreihe d. Math. Inst. d. Univ. Münster *1* (1948).
[5] H. HOPF und W. RINOW. „Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche", Comment. Math. Helv. *3* (1931).
[6] H. HOPF, „Zum Clifford-Kleinschen Raumproblem", Math. Ann. *95* (1925).
[7] S. B. MYERS. „Riemannian manifolds in the large", Duke Math. J. *1* (1935).
[8] T. RADÓ. „Ueber eine nichtfortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit", Math. Z. *20* (1924).
[9] J. H. C. WHITEHEAD. „The immersion of an open 3-manifold in Euclidean 3-space", Proc. London Math. Soc. (3) *11* (1961).
[10] Poénaru: "Sur la thêorie des immersons", Topology *1* (1962).