Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 41 (1966-1967)

Artikel: Orthogonalabgeschlossene Mengen und lineare Topologien.
Autor: Matzinger, H. / Zwahlen, Bruno Peter
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31386

Orthogonalabgeschlossene Mengen und lineare Topologien

HEINRICH MATZINGER und BRUNO PETER ZWAHLEN

Die Verallgemeinerung eines einfachen Satzes über lineare Funktionale führt zu einem Verbandsisomorphismus zwischen den linearen Teilräumen eines Vektorraumes E und den orthogonalabgeschlossenen Teilräumen des Dualraumes E^*. Es wird nun gezeigt, wie dieser Isomorphismus mit Hilfe des Filterbegriffes auf alle linearen Teilräume von E^* erweitert werden kann. Dazu wird jedem Teilraum von E ein „linearer" Filter zugeordnet. Dann besteht ein Isomorphismus zwischen dem Verband dieser Filter und dem Verband der linearen Teilräume von E^*.

Da dieselben Filter als Nullumgebungssysteme der schwachen linearen Topologien von E auftreten, wird dadurch auch ein Zusammenhang zwischen den linearen Teilräumen von E^* und den schwachen linearen Topologien von E hergestellt. Die linearen Topologien werden in Klassen mit gleicher schwacher Topologie eingeteilt.

Es sei also E ein Vektorraum über dem Körper K und E^* sein Dualraum.

Für lineare Funktionale $u, u_1, \ldots, u_n \in E^*$ mit den Kernen Ker u, Ker $u_1, \ldots,$ Ker u_n gilt dann:

u ist genau dann eine Linearkombination von $u_1, \ldots, u_n$, wenn

$$\operatorname{Ker} u \supset \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} u_i .$$

Dieser Satz verallgemeinert sich sofort auf beliebige Familien linearer Funktionale.

u ist genau dann eine Linearkombination von $\{u_\gamma\}(\gamma \in \Gamma)$, wenn es endlich viele $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ gibt, so dass

$$\operatorname{Ker} u \supset \bigcap_{i=1}^{n} \operatorname{Ker} u_{\gamma_i} . \qquad (*)$$

Sei nun $\mathfrak{F}(u_\gamma)$ derjenige Filter auf E, welcher von den Teilräumen Ker u_γ erzeugt wird [2]. Dann lautet die Bedingung (*)

$$\operatorname{Ker} u \in \mathfrak{F}(u_\gamma) .$$

Es seien $V(E)$ und $V(E^*)$ die Verbände der linearen Teilräume von E bzw. E^* (Verbandsoperationen: Durchschnitt und lineare Hülle) und $V'(E)$ der Teilverband von $V(E)$ der linearen Teilräume endlicher Codimension. Ferner bezeichne $M^\perp$ (bzw. ${}^\perp M^*$) das orthogonale Komplement einer Menge (aus E bzw. E^*). M (bzw. M^*) heisst orthogonalabgeschlossen, wenn $M = {}^\perp M^\perp$ (bzw. $M^* = {}^\perp M^{*\perp}$) gilt.

In E sind genau alle linearen Teilräume orthogonalabgeschlossen, in E^* sind es genau diejenigen linearen Teilräume, die orthogonales Komplement eines Teilraumes von E sind.

Die orthogonalabgeschlossenen Teilräume von E^* bilden einen Verband, $\bar{V}(E^*)$, wenn als Verbandsoperationen der Durchschnitt und die orthogonalabgeschlossene Hülle, $\vee$, ist definiert, als

$$\bigvee_\alpha M_\alpha^* = {}^\perp(\sum_\alpha M_\alpha^*)^\perp, \qquad M_\alpha^* \in \bar{V}(E^*), \qquad \alpha \in A.$$

Ueber endlichen Familien A ist die lineare Hülle bereits orthogonalabgeschlossen. Die Zuordnung

$$\begin{array}{ccc} M & \to & M^\perp \\ \Cap & & \Cap \\ V(E) & & V(E^*) \end{array}$$

ist 1-1-deutig und kehrt die Ordnung um. Sie stiftet also einen dualen Isomorphismus zwischen den beiden Verbänden $V(E)$ und $\bar{V}(E^*)$ [1].

Im folgenden wird nun gezeigt, wie dieser Isomorphismus auf $V(E^*)$ und eine neu zu definierende, $V(E)$ umfassende Menge fortgesetzt werden kann.

Die Menge aller Filter auf $V(E)$, Φ, bildet mit den üblichen Operationen für Filter einen Verband (Ordnungsrelation $\gg$). Entsprechend wird der Verband aller Filter auf $V'(E)$ mit Φ' bezeichnet.

Der Verband $V(E)$ wird nun in Φ' eingebettet. Dazu wird die Tatsache benützt, dass jeder lineare Teilraum $L \subset E$ vollständig bestimmt wird durch die Menge $\{H_\alpha\}$ der ihn enthaltenden Hyperebenen $(H_\alpha \supset L)$.

$$L = \bigcap_\alpha H_\alpha$$

$$L \to \dot{L} = \mathfrak{F}_{(L)} = \{F / F \supset L, F \in V'(E)\}$$

$\dot{L}$ heisst der durch L erzeugte Hauptfilter. $\{H_\alpha\}$ ist eine Subbasis von L.

Bei dieser Einbettung wird die Ordnung umgekehrt.

Damit kann eine Zuordnung definiert werden zwischen Φ' und $V(E^*)$.

Die Zuordnung

$$\perp \,:\, \Phi' \to V(E^*)$$

$$\perp(\mathfrak{F}) = \sum_\alpha M_\alpha^*, \qquad M_\alpha^* = F_\alpha^\perp, F_\alpha \in \mathfrak{F}$$

$$M^* \in V(E^*) : \perp^{-1}(M^*) = \{F / F^\perp \subset M^*, \qquad F \in V'(E)\}$$

ist ein dualer Verbandsisomorphismus, zwischen Φ' und $V(E^*)$. Die Abbildungen $\perp$, $\perp^{-1}$ sind offensichtlich ordnungstreu.

$$\mathfrak{F} \gg \mathfrak{G} \Leftrightarrow \perp(\mathfrak{F}) \supset \perp(\mathfrak{G})$$

$$\perp^{-1}(M^*) \gg \perp^{-1}(N^*) \Leftrightarrow M^* \supset N^*$$

Dem Durchschnitt in $V(E^*)$ entspricht das Infinum der entsprechenden Filter in Φ'.

$$\perp^{-1}(M^* \cap N^*) = \perp^{-1}(M^*) \cap \perp^{-1}(N^*),$$
$$\perp(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{G}) = \perp(\mathfrak{F}) \cap \perp(\mathfrak{G})$$

Ebenso entspricht dem Supremum (=lineare Hülle) in $V(E^*)$ das Supremum der Filter in Φ'.

$$\perp^{-1}(M^* + N^*) = \perp^{-1}(M^*) \cup \perp^{-1}(N^*)$$
$$\perp(\mathfrak{F} \cup \mathfrak{G}) = \perp(\mathfrak{F}) + \perp(\mathfrak{G})$$

Der Abbildung $M^* \to {}^{\perp}M^{*\perp}$ (orthogonalabgeschlossene Hülle) in $V(E^*)$ wird durch $\perp^{-1}$ eine Selbstabbildung von Φ' zugeordnet. Diese bildet jeden Filter $\mathfrak{F}$ auf den Hauptfilter ab, der vom Durchschnitt aller Elemente von $\mathfrak{F}$, $\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$, erzeugt wird.

Beispiele

1) Zum einleitend erwähnten Satz über lineare Funktionale lässt sich nun noch folgendes bemerken:
   Die Familie $u_\alpha (\alpha \in A)$ ist linear unabhängig, wenn die zugehörigen Hyperebenen H_α, $H_\alpha = \operatorname{Ker} u_\alpha$, eine minimale Subbasis des von ihnen erzeugten Filters bilden. (Eine Subbasis eines Filters ist minimal, wenn jede echte Teilmenge einen echt gröberen Filter erzeugt.)
2) Den orthogonalabgeschlossenen Mengen von $V(E^*)$ entsprechen genau die Hauptfilter in Φ'. (Auf diesen beiden Teilmengen wird der ursprüngliche Isomorphismus induziert.)
3) Den Filtern mit „leerem" Durchschnitt ($\mathfrak{F}: \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F = \{0\}$) sind diejenigen Teilräume von E^* zugeordnet, die zu E dual sind.
4) Es sei $\mathfrak{F} \in \Phi'(E)$, $K = \bigcap_{F \in \mathfrak{F}} F$.
   Dann entspricht jedem linearen Komplementärraum L von K, $K \oplus L = E$, $K \cap L = \{0\}$ eine Darstellung von $\mathfrak{F}$ als

$$\mathfrak{F} = \dot{K} \wedge (\mathfrak{F} - K),$$

   wobei

$$\mathfrak{F} - K = \{F' / F' = P_L(F), P_L \text{ Projektion auf } L, F \in \mathfrak{F}\}.$$

In E^* bedeutet dies:

Jeder lineare Teilraum L^* von E^* ist Durchschnitt eines orthogonalabgeschlossenen Teilraumes (seine orthogonalabgeschlossene Hülle) und eines (nur bis auf Isomorphien bestimmten) Teilraumes, der zu E dual ist (d.h. der im Sinne von DIEUDONNÉ und MACKAY mit E ein Dualsystem bildet [1]).

Jeder Filter $\mathfrak{F}$ von $\Phi(E)$ ist Umgebungsbasis der 0 einer *schwachen linearen Topologie* [1] auf E[1]). Sein Bild $\perp(\mathfrak{F})$ ist die Menge aller stetigen linearen Funktionale (bezüglich dieser Topologie).

$\Phi'(E)$ werde in den Verband $\Phi(E)$ aller Filter auf $V(E)$ eingebettet. Dann kann $\perp$ durch die Definition

$$\perp(\mathfrak{F}) = \sum_{F \in \mathfrak{F}} F^{\perp}$$

zu einer (allerdings nicht mehr 1-1-deutigen) Abbildung

$$\perp : \Phi(E) \to V(E^*)$$

fortgesetzt werden.

Dadurch wird $\Phi(E)$ in Äquivalenzklassen eingeteilt.

$$\mathfrak{F} \text{ äq. } \mathfrak{G} :\Leftrightarrow \perp(\mathfrak{F}) = \perp(\mathfrak{G}) \Leftrightarrow \mathfrak{F}/\Phi' = \mathfrak{G}/\Phi',$$

wobei $/\Phi'$ die Restriktion auf den Teilverband $\Phi'_{(E)} \subset \Phi_{(E)}$ bedeutet.

Jeder Umgebungsfilter der 0 einer *linearen Topologie* auf E ist Element von $\Phi(E)$ und umgekehrt. Zwei Filter auf $\Phi(E)$ sind genau dann äquivalent, wenn ihre schwachen Topologien identisch sind, d.h. wenn sie die gleichen stetigen linearen Funktionale aufweisen. Der Filter $\perp^{-1}(M^*)$ ist der gröbste der zu M^* gehörigen Äquivalenzklasse, der Filter $\{F/F^{\perp} \subset M^*, F \in V(E)\}$ der feinste.

Die orthogonalen Komplemente der Elemente aus $\mathfrak{F}$, $F^{\perp}$, sind Teilmengen von $\perp(\mathfrak{F})$. Die Angabe dieser Teilmengen definiert $\mathfrak{F}$. Für lineartopologische Räume bedeutet dies, dass $\mathfrak{F}$ bestimmt ist durch die Angabe der *stetigen linearen Funktionale* und der *stetigen linearen Abbildungen*

$$E \to \times_{\alpha \in A} K_\alpha \qquad |A| = \dim E.$$

In $\times K_\alpha$ ist die diskrete Topologie zu wählen.

In einer zweiten Arbeit soll gezeigt werden, dass mit ähnlichen Überlegungen eine Uebersicht über die lokalkonvexen Topologien auf einem Vektorraum E gewonnen werden kann.

LITERATUR

[1] G. Köthe, Topologische lineare Räume I, Kap. II, §§ 9–13. Grundlehren. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer, 1960.
[2] N. Bourbaki, Topologie générale, 3ème édition, chap. I, Actualités Sci. Indust. 1142, Paris 1961.

(Eingegangen, 17. Mai 1966)

Zürich (zurzeit University of Washington, Seattle) und Genf, Institut Battelle.

[1]) Es wird von einer linearen Topologie nicht verlangt, dass sie Hausdorffsch sei.