Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 41 (1966-1967)

Artikel: Über die FINSLERschen höheren arithmetischen Operationen.
Autor: Levitz, Hilbert
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31384

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Über die FINSLERschen höheren arithmetischen Operationen

Von HILBERT LEVITZ*, New York University

1. Einleitung

In [4] stellte Finsler eine transfinite Folge von arithmetischen Operationen auf, die durch Funktionen $\phi_\alpha(\xi, \eta)$ von zwei Variabeln ξ, η gegeben sind, wobei α, ξ, η alle Ordnungszahlen kleiner als Ω durchlaufen. Die kleinste Zahl μ, die die Gleichung $\phi_x(\omega, \omega) = x$ löst, spielt eine besondere Rolle. Ist $\omega < \gamma < \mu$, dann hat γ die Darstellung $\gamma = \phi_\alpha(\xi, \eta)$, wobei $\alpha, \xi, \eta < \gamma$ sind.

Bachmann [2] zeigte, dass $\mu < E(0)$ ist, wobei $E(0)$ eine bestimmte Zahl ist, die von *Veblen* [7] beschrieben wurde.

Hier geben wir eine Verbesserung dieses Ergebnisses von *Bachmann*. Wir beweisen, dass μ gerade die sogenannte *Schütte-Feferman* Zahl κ_0 ist. Es wurde von diesen Verfassern gezeigt, dass κ_0 eine wichtige Bedeutung für die verzweigte Typenlogik hat [3], [5], [6].

Wir beweisen auch: $\phi_\alpha(\xi, \eta) < \kappa_0$ so bald $\alpha, \xi, \eta < \kappa_0$.

2. Die Operationen von Finsler

Die ν-fache Iteration der Funktionen $\phi_\alpha(\xi, \eta)$ sei durch die Forderungen erklärt:

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha^0(\xi,\eta) &= \eta \\
\phi_\alpha^{\nu+1}(\xi,\eta) &= \phi_\alpha(\xi, \phi_\alpha^\nu(\xi,\eta)) \\
\phi_\alpha^\lambda(\xi,\eta) &= \operatorname*{Lim}_{\nu<\lambda} \phi_\alpha^\nu(\xi,\eta), \text{ wenn } \lambda \text{ eine Limeszahl } < \Omega \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Man beweist sehr leicht mit transfiniter Induktion nach β:

$$\phi_\alpha^{\nu+\beta}(\xi,\eta) = \phi_\alpha^\beta(\xi, \phi_\alpha^\nu(\xi,\eta)).$$

Die Funktionen $\phi_\alpha(\xi, \eta)$ sind definiert, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\phi_0(\xi,\eta) &= \phi_0(0,\eta) = \eta + 1 \\
\phi_1(\xi,\eta) &= \phi_0^\xi(0,\eta) = \eta + \xi \\
\phi_2(\xi,\eta) &= \phi_1^\xi(\eta,0) = \eta \cdot \xi
\end{aligned}$$

*) Diese Arbeit wurde von dem *Office of Scientific Research of the United States Air Force* unterstützt.

$$\phi_3(\xi,\eta) = \phi_2^\xi(\eta,1) = \eta^\xi$$

$$\phi_4(\xi,\eta) = \phi_3^\xi(\eta,\eta) = \eta^{\eta^\xi}$$

$$\phi_5(\xi,\eta) = \phi_4^\xi(\eta,\eta) \text{ usw.}$$

allgemein $\phi_{\alpha+1}(\xi,\eta) = \phi_\alpha^\xi(\eta,\eta)$ für $\alpha \geq 3$

$$\phi_\lambda(\xi,\eta) = \lim_{\alpha<\lambda} \phi_\alpha(\xi,\eta), \text{ wenn } \lambda \text{ eine Limeszahl } < \Omega \text{ ist.}$$

3. Einige Eigenschaften der Normalfunktionen

Wir beschreiben einige Eigenschaften der Normalfunktionen wie es in *Bachmann* steht [1, § 8].

Es sei $\psi(x)$ eine beliebige Normalfunktion mit dem Argumentbereich $0 \leq x < \Omega$. Die Iteration ψ^n von ψ definiert man folgendermassen:

$$\psi^0(\xi) = \xi$$

$$\psi^{n+1}(\xi) = \psi(\psi^n(\xi)).$$

Wenn die Lösungen der Gleichung $\psi(x) = x$ der Grösse nach geordnet werden, erhält man eine neue Normalfunktion, die man die Ableitung ψ' von ψ nennt. Es gilt [1, pg. 36]:

$$\psi'(0) = \lim_{n<\omega} \psi^n(\alpha) \quad \text{für} \quad \alpha \leq \psi'(0), \tag{1}$$

$$\psi'(\xi+1) = \lim_{n<\omega} \psi^n(\alpha) \quad \text{für} \quad \psi'(\xi) < \alpha \leq \psi'(\xi+1). \tag{2}$$

Ist $0 \leq \alpha < \psi'(\beta)$, so ist $\psi(\alpha) < \psi'(\beta)$ für $0 \leq \beta$; dies ergibt sich aus $\psi(\alpha) < \psi(\psi'(\beta)) = \psi'(\beta)$.

Ausgehend von der Normalfunktion $f_0(x) = \omega^x$, $0 \leq x < \Omega$, bildet man eine transfinite Folge von Ableitungen $\{f_\eta\}$, wie folgt:

$$f_0(x) = \omega^x$$

$$f_{\eta+1} = f_\eta' \quad \text{für} \quad 0 \leq \eta < \Omega,$$

$$Vf_\lambda = \bigcap_{\eta<\lambda} Vf_\eta,$$

wenn λ eine Limeszahl $<\Omega$ ist und Vf_η die Wertbereich der Funktion f_η bezeichnet.

Es gilt [1, pg. 39]:

$$f_{\eta+1}(0) = \lim_{n<\omega} f_\eta^n(\alpha) \quad \text{für} \quad \alpha \leq f_{\eta+1}(0), \tag{3}$$

$$f_{\eta+1}(\xi+1) = \lim_{n<\omega} f_\eta^n(\alpha) \quad \text{für} \quad f_{\eta+1}(\xi) < \alpha \leq f_{\eta+1}(\xi+1), \tag{4}$$

$$f_\lambda(0) = \operatorname*{Lim}_{\eta<\lambda} f_\eta(\alpha) \quad \text{für} \quad \alpha \leq f_\lambda(0), \tag{5}$$

wenn λ eine Limeszahl ist.

$$f_\lambda(\xi+1) = \operatorname*{Lim}_{\eta<\lambda} f_\eta(\alpha) \quad \text{für} \quad f_\lambda(\xi) < \alpha \leq f_\lambda(\xi+1), \tag{6}$$

wenn λ eine Limeszahl ist.

Eine weitere Eigenschaft von f_η ist $f_\eta(x) \geqslant x$ [1, pg. 25].

Für $1 \leq \eta$, $0 \leq \alpha$ ist $f_\eta(\alpha)$ eine ε-Zahl. Deshalb ist für $1 \leq \eta$ die Menge von allen Ordnungszahlen, die kleiner als $f_\eta(\alpha)$ sind, gegenüber den Operationen von Addition, Multiplikation, und Potenzbildung abgeschlossen [1, p. 68].

Die kleinste Lösung der Gleichung $f_x(0) = x$ heisst die *Schütte-Feferman* Zahl.

Um eine bündige Bezeichnungsweise zu gewinnen, führen wir eine Grösse -1 ein. Für -1 definieren wir folgendes:

$$-1 < x \quad \text{für} \quad 0 \leq x,$$

$$-1 + x = \begin{cases} x & \text{für} \quad \omega \leq x, \\ -1 & \text{für} \quad x = 0, \\ \eta & \text{für} \quad 0 < x < \omega \quad \text{und} \quad x = \eta + 1, \end{cases}$$

$$1 + (-1) = 0,$$

$$\psi(-1) = \omega, \text{ wenn } \psi \text{ irgendeine Normalfunktion ist.}$$

Offenbar gilt:

$$-1 + (\alpha + \beta) = (-1 + \alpha) + \beta \quad \text{für} \quad \alpha, \beta \geq 0,$$

$$1 + (\beta + x) = (1 + \beta) + x \quad \text{für} \quad \beta \geq -1, x \geq 0,$$

$$\omega \cdot (1 + \beta) + \omega \cdot x = \omega \cdot (1 + \beta + x) \quad \text{für} \quad \beta \geq -1, x \geq 0.$$

4. Einige Hilfsätze

HILFSATZ 1. Es ist $\phi_5(\omega \cdot x, f_1(\beta)) = f_1(\beta + x)$ für alle $\beta \geq -1$, $x \geq 0$.

Beweis: Nach der Definition der FINSLERschen Operationen genügt es zu zeigen:

$$\phi_4^{\omega \cdot \gamma}(f_1(\beta), f_1(\beta)) = f_1(\beta + \gamma) \quad \text{für alle} \quad \beta \geq -1, \gamma \geq 0.$$

Dies wird mit transfiniter Induktion nach γ bewiesen:

Fall 1. $\gamma = 0$:

$$\phi_4^{\omega \cdot \gamma}(f_1(\beta), f_1(\beta)) = \phi_4^0(f_1(\beta), f_1(\beta)) = f_1(\beta) = f_1(\beta + 0) = f_1(\beta + \gamma).$$

Fall 2. $\gamma = \nu + 1$, d.h. γ sei ein Nachfolger:

Die Induktionsvoraussetzung lautet

$$\phi_4^{\omega \cdot \nu}(f_1(\beta), f_1(\beta)) = f_1(\beta + \nu);$$

daraus folgt

$$\begin{aligned}\phi_4^{\omega\cdot\gamma}(f_1(\beta),f_1(\beta)) &= \phi_4^{\omega\cdot\nu+\omega}(f_1(\beta),f_1(\beta)) = \\ &= \phi_4^{\omega}(f_1(\beta),\phi_4^{\omega\cdot\nu}(f_1(\beta),f_1(\beta))) = \\ &= \phi_4^{\omega}(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega}\phi_4^n(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)). \qquad (7)\end{aligned}$$

Nun zeigen wir mit Induktion nach $n\geq 1$, dass

$$\phi_4^n(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) = f_0(Q), \quad \text{wobei}$$
$$f_0^{n-1}(f_1(\beta+\nu)+1) < Q < f_1(\beta+\nu+1) \text{ ist}.$$

Ist diese Behauptung wahr, dann folgt

$$f_0^n(f_1(\beta+\nu)+1) < f_0(Q) = \phi_4^n(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) < f_1(\beta+\nu+1).$$

Im Falle $\beta+\nu=-1$ folgt nach (3), im Falle $\beta+\nu\neq-1$ nach (4)

$$\operatorname*{Lim}_{n<\omega}\phi_4^n(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega}(f_1(\beta+\nu)+1) = f_1(\beta+\nu+1) = f_1(\beta+\gamma); \qquad (8)$$

weiterhin ergibt sich nach (7), (8)

$$\phi_4^{\omega\cdot\gamma}(f_1(\beta),f_1(\beta)) = f_1(\beta+\gamma).$$

Aber das ist, was bewiesen werden soll.

Fall 2.1 $n=1$:

Fall 2.1.1 $\beta=-1$, $\nu=0$:

$$\phi_4^n(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) = \phi_4(\omega^{(\omega^\omega)}) = f_0(\omega^\omega).$$

Setzt man $Q=\omega^\omega$, so hat Q die erforderlichen Eigenschaften:

$$\begin{aligned}f_0^{n-1}(f_1(\beta+\nu)+1) &= f_0^0(f_1(\beta+\nu)+1) = f_1(\beta+\nu)+1 = \\ &= \omega+1 < Q < f_1(0) = f_1(\beta+\nu+1).\end{aligned}$$

Fall 2.1.2 $\beta\neq-1$ oder $\nu\neq 0$:

Dann ist $\beta+\nu\neq-1$, und $f_0(f_1(\beta+\nu))=f_1(\beta+\nu)$, d.h.

$$\omega^{f_1(\beta+\nu)} = f_1(\beta+\nu);$$

also

$$\begin{aligned}\phi_4^n(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) &= \phi_4^1(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) = (f_1(\beta+\nu)^{(f_1(\beta+\nu)^{f_1(\beta)})}) = \\ &= (\omega^{f_1(\beta+\nu)})^{(f_1(\beta+\nu)^{f_1(\beta)})} = \omega^{(f_1(\beta+\nu)^{f_1(\beta)})}\end{aligned}$$

Setzt man $Q=f_1(\beta+\nu)^{f_1(\beta)}$, dann ist

$$f_0^{n-1}(f_1(\beta+\nu)+1) = f_1(\beta+\nu)+1 < f_1(\beta+\nu)^{f_1(\beta)} = Q < f_1(\beta+\nu+1).$$

Fall 2.2 $n=k+1$, $k\neq 0$:
Die Induktionsvoraussetzung nach n lautet für $k<n$:

$$\phi_4^k(f_1(\beta), f_1(\beta+\nu)) = f_0(P),$$

wobei

$$f_0^{k-1}(f_1(\beta+\nu)+1) < P < f_1(\beta+\nu+1). \tag{9}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\phi_4^{k+1}(f_1(\beta), f_1(\beta+\nu)) &= \phi_4(f_1(\beta), \phi_4^k(f_1(\beta), f_1(\beta+\nu))) = \\ &= \phi_4(f(\beta), f_0(P)) = f_0(P)^{(f_0(P)^{f_1(\beta)})} = \\ &= (\omega^P)^{(f_0(P)^{f_1(\beta)})} = \omega^{P\cdot f_0(P)^{f_1(\beta)}} = f_0(P\cdot f_0(P)^{f_1(\beta)}).\end{aligned}$$

Setzt man $Q=P\cdot f_0(P)^{f_1(\beta)}$, dann hat Q die erforderlichen Eigenschaften, denn wegen (9) gilt

$$f_0^k(f_1(\beta+\nu)+1) < f_0(P) < f_1(\beta+\nu+1),$$

aber $f_1(\beta+\nu+1)$ ist eine ε-Zahl, und daraus folgt

$$f_0^k(f_1(\beta+\nu)+1) < P\cdot f_1(P)^{f_1(\beta)} = Q < f_1(\beta+\nu).$$

Fall 3. γ sei eine Limeszahl:
Nach der Induktionsvoraussetzung nach γ erhält man

$$\phi_4^{\omega\cdot\gamma}(f_1(\beta), f_1(\beta)) = \lim_{\lambda<\gamma} \phi_4^{\omega\cdot\lambda}(f_1(\beta), f_1(\beta)) = \lim_{\lambda<\gamma} f_1(\beta+\lambda) = f_1(\beta+\gamma).$$

Damit ist der Beweis von Hilfsatz 1. beendet.

HILFSATZ 2. Ist $\phi_\alpha(\xi,\eta)$ eine FINSLERsche Operation und $g(x)$ eine Normalfunktion mit den Eigenschaften:
a) $\phi_\alpha(\omega\cdot x, g(\beta)) = g(\beta+x)$ für alle $x\geq 0$, $\beta\geq -1$,
b) $g(x)$ ist eine ε-Zahl für $x\geq 0$,
dann gilt:

$$\phi_{\alpha+2}(\omega\cdot x, g'(\beta)) = g'(\beta+x) \quad \text{für} \quad x\geq 0,\ \beta\geq -1.$$

Beweis: Zuerst beweisen wir mit transfiniter Induktion nach γ die folgende Behauptung:

$$\phi_\alpha^\gamma(\omega,\omega) = g(-1+\gamma) \quad \text{für alle} \quad \gamma\geq 0. \tag{10}$$

Fall 1. $\gamma=0$:

$$\phi_\alpha^\gamma(\omega,\omega) = \phi_\alpha^0(\omega,\omega) = \omega = g(-1+0) = g(-1+\gamma).$$

Fall 2. $\gamma = \nu + 1$:
Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$\phi_\alpha^\nu(\omega, \omega) = g(-1 + \nu),$$

also

$$\phi_\alpha^\gamma(\omega, \omega) = \phi_\alpha^{\nu+1}(\omega, \omega) = \phi_\alpha(\omega, \phi_\alpha^\nu(\omega, \omega)) = \phi_\alpha(\omega, g(-1 + \nu)).$$

Nach der Voraussetzung a) ist $\phi_\alpha(\omega, g(-1+\nu)) = g((-1+\nu)+1)$, also

$$\phi_\alpha^\gamma(\omega, \omega) = g((-1 + \nu) + 1) = g(-1 + (\nu + 1)) = g(-1 + \gamma).$$

Fall 3. γ sei eine Limeszahl:

$$\phi_\alpha^\gamma(\omega, \omega) = \operatorname*{Lim}_{\lambda < \gamma} \phi_\alpha^\lambda(\omega, \omega) = \operatorname*{Lim}_{\lambda < \gamma} g(-1 + \lambda) = g(-1 + \gamma).$$

Damit ist (10) bewiesen.
Aus (10) ergibt sich nach der Definition der FINSLERschen Operationen

$$\phi_{\alpha+1}(\gamma, \omega) = g(-1 + \gamma) \quad \text{für alle} \quad \gamma \geq 0. \tag{11}$$

Sodann beweisen wir mit transfiniter Induktion nach γ

$$\phi_\alpha^\gamma(g(\beta), g(\beta)) = g(\beta + g(\beta) \cdot \gamma) \quad \text{für alle} \quad \gamma \geq 0,\ \beta \neq -1. \tag{12}$$

Fall 1. $\gamma = 0$:

$$\phi_\alpha^\gamma(\beta, g(\beta)) = \phi_\alpha^0(g(\beta), g(\beta)) = g(\beta) = g(\beta + g(\beta) \cdot 0) = g(\beta + g(\beta) \cdot \gamma).$$

Fall 2. $\gamma = \nu + 1$:
Aus $\beta \neq 1$ und Voraussetzung b) folgt $\omega \cdot g(\beta) = g(\beta)$, also

$$\phi_\alpha^\gamma(g(\beta), g(\beta)) = \phi_\alpha^{\nu+1}(g(\beta), g(\beta)) = \phi_\alpha(g(\beta), \phi_\alpha^\nu(g(\beta), g(\beta))).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$\phi_\alpha^\nu(g(\beta), g(\beta)) = g(\beta + g(\beta) \cdot \nu),$$

also

$$\phi_\alpha(g(\beta), \phi_\alpha^\nu(g(\beta), g(\beta))) = \phi_\alpha(g(\beta), g(\beta + g(\beta) \cdot \nu)) = \phi_\alpha(\omega \cdot g(\beta), g(\beta + g(\beta) \cdot \nu)).$$

Ferner ist nach der Voraussetzung a)

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(\omega \cdot g(\beta), g(\beta + g(\beta) \cdot \nu)) &= g(\beta + g(\beta) \cdot \nu + g(\beta)) = \\ &= g(\beta + g(\beta) \cdot (\nu + 1)) = g(\beta + g(\beta) \cdot \gamma). \end{aligned}$$

Fall 3. γ sei eine Limeszahl:

$$\phi_\alpha^\gamma(g(\beta), g(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{\lambda < \gamma} \phi_\alpha^\lambda(g(\beta), g(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{\lambda < \gamma} g(\beta + g(\beta) \cdot \lambda) = g(\beta + g(\beta) \cdot \gamma).$$

Damit ist (12) bewiesen.

Aus (12) ergibt sich nach der Definition der FINSLERschen Operationen

$$\phi_{\alpha+1}(\gamma, g(\beta)) = g(\beta + g(\beta)\cdot\gamma) \quad \text{für alle} \quad \gamma \geq 0,\ \beta \neq -1. \tag{13}$$

Sodann beweisen wir mit transfiniter Induktion nach γ:

$$\phi_{\alpha+1}^{\omega\cdot\gamma}(g'(\beta), g'(\beta)) = g'(\beta + \gamma) \quad \text{für alle} \quad \gamma \geq 0,\ \beta \geq -1. \tag{14}$$

Fall 1. $\gamma = 0$

$$\phi_{\alpha+1}^{\omega\cdot\gamma}(g'(\beta), g'(\beta)) = \phi_{\alpha+1}^{0}(g'(\beta), g'(\beta)) = g'(\beta) = g'(\beta + 0) = g'(\beta + \gamma).$$

Fall 2. $\gamma = \nu + 1$:

$$\phi_{\alpha+1}^{\omega\cdot\gamma}(g'(\beta), g'(\beta)) = {}_{\alpha+1}^{\omega\cdot\nu+\omega}(g'(\beta), g'(\beta)) = \phi_{\alpha+1}^{\omega}(g'(\beta), \phi_{\alpha+1}^{\omega\cdot\nu}(g'(\beta), g'(\beta)))$$

Nach der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\phi_{\alpha+1}^{\omega\cdot\nu}(g'(\beta), g'(\beta)) = g'(\beta + \nu),$$

somit

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha+1}^{\omega}(g'(\beta), \phi_{\alpha+1}^{\omega\cdot\nu}(g'(\beta), g'(\beta))) &= \phi_{\alpha+1}^{\omega}(g'(\beta), g'(\beta + \nu)) \\ &= \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \phi_{\alpha+1}^{n}(g'(\beta), g'(\beta + \nu))\end{aligned}$$

Fall 2.1 $\beta = -1$, $\nu = 0$:
Wir zeigen mit Induktion nach $n \geq 1$:

$$\phi_{\alpha+1}^{n}(g'(\beta), g'(\beta + \nu) = g(Q), \quad \text{wobei} \quad g^{n-1}(0) < Q < g'(0).$$

Ist diese Behauptung wahr, so gewinnen wir durch Anwendung von (1) die gewünschte Beziehung (14).

Fall 2.1.1. $n = 1$:
Nach (11) folgt

$$\phi_{\alpha+1}^{n}(g'(\beta), g'(\beta + \nu)) = \phi_{\alpha+1}^{1}(\omega, \omega) = g(-1 + \omega) = g(\omega).$$

Setzt man $Q = \omega$, so hat Q die erforderlichen Eigenschaften, denn

$$g^{n-1}(0) = g^{0}(0) = 0 < \omega = Q < g'(0).$$

Fall 2.1.2. $n = k + 1$:

$$\phi_{\alpha+1}^{k+1}(g'(\beta), g'(\beta + \nu)) = \phi_{\alpha+1}(g'(\beta), \phi_{\alpha+1}^{k}(g'(\beta), g'(\beta + \nu))).$$

Da aber die Induktionsvoraussetzung nach n für $k < k + 1 = n$

$$\phi_{\alpha+1}^{k}(g'(\beta), g'(\beta + \nu)) = g(P)$$

lautet, wobei

$$g^{k-1}(0) < P < g'(0) \tag{15}$$

gilt, folgt

$$\phi_{\alpha+1}(g'(\beta), \phi^k_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu))) = \phi_{\alpha+1}(g'(\beta), g(P)) = \phi_{\alpha+1}(\omega \cdot g(P)).$$

Wegen (15) ist $P \neq 1$, deshalb ist (13) anwendbar, und man erhält

$$\phi_{\alpha+1}(\omega, g(P)) = g(P + g(P) \cdot \omega).$$

Setzt man $Q = P + g(P) \cdot \omega$, so gilt nach (15) $g^k(0) < g(P) < g'(0)$.

Ferner gilt

$$g^{n-1}(0) = g^k(0) < P + g(P) \cdot \omega = Q < g'(0),$$

weil $g'(0)$ eine ε-Zahl ist.

Fall 2.2 $\beta \neq -1$ oder $\nu \neq 0$:

Wir zeigen mit Induktion nach $n \geq 1$:

$$\phi^n_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu)) = g(Q), \quad \text{wobei} \quad g^{n-1}(g'(\beta+\nu)+1) < Q < g'(\beta+\nu+1).$$

Ist diese Behauptung wahr, so gewinnen durch anwendung von (2) die gewünschte Beziehung (14).

Fall 2.2.1. n = 1:

Aus $\beta + 1 \neq -1$ ergibt sich $g(g'(\beta+\nu)) = g'(\beta+\nu)$, also

$$\phi_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu)) = \phi_{\alpha+1}(g'(\beta), g(g'(\beta+\nu))).$$

Ferner ist (13) anwendbar, und man erhält:

$$\phi_{\alpha+1}(g'(\beta), g(g'(\beta+\nu))) = g(g'(\beta+\nu) + g(g'(\beta+\nu)) \cdot g'(\beta)).$$

Setzt man $Q = g'(\beta+\nu) + g(g'(\beta+\nu)) \cdot g'(\beta)$, dann hat Q die erforderlichen Eigenschaften, denn

$$g^{n-1}(g'(\beta+\nu)+1) = g^0(g'(\beta+\nu)+1) = g'(\beta+\nu)+1 < Q < g'(\beta+\nu+1).$$

Fall 2.2.2. $n = k+1$:

Die Induktionsvoraussetzung nach n lautet für k < k + 1 = n:

$$\phi^k_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu)) = g(P),$$

wobei

$$g^{k-1}(g'(\beta+\nu)+1) < P < g'(\beta+\nu+1) \tag{16}$$

ist. Es folgt

$$\phi^{k+1}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu)) = \phi_{\alpha+1}(g'(\beta), \phi^k_\alpha(g'(\beta), g(\beta+\nu))) = \phi_{\alpha+1}(g'(\beta), g(P)).$$

Aus (16) ergibt sich $P \neq -1$, deshalb ist (13) anwendbar, und man erhält

$$\phi_{\alpha+1}(g'(\beta), g(P)) = g(P + g'(P) \cdot g'(\beta)).$$

Setzt man $Q=P+g'(P)\cdot g'(\beta)$, dann hat Q die erforderlichen Eigenschaften, denn aus (16) folgt

$$g^k(g'(\beta+\nu)+1)<g(P)<g'(\beta+\nu+1),$$

und da $g'(\beta+\nu+1)$ eine ε-Zahl ist, folgt weiter:

$$g^{n-1}(g'(\beta+\nu)+1)=g^k(g'(\beta+\nu)+1)<P+g(P)\cdot g'(P)<g'(\beta+\nu+1).$$

Fall 3. γ sei eine Limeszahl:

$$\phi_{\alpha+1}^{\omega\cdot\gamma}(g'(\beta),g'(\beta))=\lim_{\lambda<\gamma}\phi_{\alpha+1}^{\omega\cdot\lambda}(g'(\beta),g'(\beta))=\lim_{\lambda<\gamma}g'(\beta+\lambda)=g'(\beta+\gamma).$$

Damit ist (14) bewiesen.
Aus (14) ergibt sich nach der Definition der FINSLERschen Operationen

$$\phi_{\alpha+2}(\omega\cdot\gamma,g'(\beta))=g'(\beta+\gamma)\quad\text{für alle}\quad\gamma\geq 0,\ \beta\geq -1.$$

Damit is der Beweis von Hilfsatz 2 beendet.

Hilfsatz 3. Ist $\phi_\alpha(\xi,\eta)$ eine FINSLERsche Operation und $h(x)$ eine Normalfunktion mit den Eigenschaften:

a) $\phi_\alpha(x,h(\beta))=h(\beta+x)$ für alle $x\geq 0$, $\beta\geq -1$,

b) $g(x)$ ist eine ε-Zahl für alle $x\geq 0$,

dann gilt:

$$\phi_{\alpha+2}(\omega\cdot x,h'(\beta))=h'(\beta+x)\quad\text{für alle}\quad x\geq 0,\ \beta\geq -1.$$

Beweis: Wir definieren eine Funktion g, die die Bedingungen von Hilfsatz 2 erfüllt. Sei $g(\beta)\equiv h(-1+\omega(1+\beta))$ für $\beta\geq -1$. Offenbar ist g eine Normalfunktion, und für $x\geq 0$ ist $g(x)$ eine ε-Zahl; ferner hat man für $x\geq 0$, $\beta\geq -1$:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(\omega\cdot x,g(\beta))&=\phi_\alpha(\omega\cdot x,h(-1+\omega(1+\beta)))=h(-1+\omega(1+\beta)+\omega x)=\\&=h(-1+\omega(1+\beta+x))=g(\beta+x),\end{aligned}$$

gemäss Hilfsatz 2 erhält man

$$\phi_\alpha(\omega\cdot x,g'(\beta))=g'(\beta+x)\quad\text{für alle}\quad x\geq 0,\ \beta\geq -1.$$

Es ist leicht zu sehen, dass

$$g'(\beta)=h'(\beta)\quad\text{für alle}\quad -1\leq\beta$$

gilt. Somit haben wir

$$\phi_\alpha(\omega\cdot x,h'(x))=h'(\beta+x).\qquad\qquad (Q.E.D.)$$

3. Die Hauptergebnisse

Für $x \geq 0$ besteht der Wertbereich der Funktion $\omega(1+x)$ aus den Limeszahlen. Jeder Limeszahl α ordnen wir eine Zahl θ_α und eine Folge $\{\eta_\iota\}$ für $1 \leq \iota < \theta_\alpha$ zu, so dass für alle α, $\alpha = \operatorname*{Lim}_{\iota < \theta_\alpha} \eta$ gilt. Ferner verlangen wir die folgenden Eigenschaften:

a) Ist $\alpha = \omega$, sei $\theta_\alpha = \omega$ und $\eta_\iota = 2\iota + 3$;
b) Ist $\alpha = \lambda + \omega$, wobei λ eine Limeszahl ist, sei $\theta_\alpha = \omega$ und $\eta_\iota = \lambda + 2\iota + 1$;
c) Ist $\alpha = \omega \cdot \lambda$, wobei λ eine Limeszahl ist, sei $\theta_\alpha = \lambda$ und $\eta_\iota = \omega \cdot \iota + 3$.

SATZ 1. Sei $\{f_\eta\}$ die vorher beschriebene Folge von Ableitungen:
a) Ist $\alpha = 2n+3$, $1 \leq n < \omega$, dann gilt

$$\phi_\alpha(\omega \cdot x, f_n(\beta)) = f_n(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

b) Ist $\alpha = \lambda + 1$, wobei λ eine Limeszahl ist, dann gilt

$$\phi_\alpha(x, f_\lambda(\beta)) = f_\lambda(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

c) Ist $\alpha = \lambda + 2n + 1$, wobei λ eine Limeszahl und $1 \leq n < \omega$ ist, dann gilt

$$\phi_\alpha(\omega \cdot x, f_{\lambda+n}(\beta)) = f_{\lambda+n}(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

d) Ist α eine Limeszahl, dann gilt

$$\phi_\alpha^x(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = f_\alpha(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

Beweis (Nach transfiniter Induktion nach α) Wir nehmen an, dass a), b), c), d) für alle $\alpha' < \alpha$ gelten. Wir müssen zeigen, dass a), b), c), d) auch für α gelten

a) Sei $\alpha = 2n+3$, $1 \leq n < \omega$.

Fall 1. $n = 1$:

Unsere Behauptung ist genau Hilfsatz 1.

Fall 2. $n = k+1$, $k \neq 0$:

Hier gilt nach Induktionsvoraussetzung a):

$$\phi_{2k+3}(\omega \cdot x, f_n(\beta)) = f_k(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

Also folgt nach Hilfsatz 2

$$\phi_{2n+3}(\omega \cdot x, f_n(\beta)) = \phi_{2k+3+2}(\omega \cdot x, f_{k+1}(\beta)) = f_{k+1}(\beta + x) = f_n(\beta + x)$$

für alle $x \geq 0$, $\beta \geq -1$.

b) Sei $\alpha = \lambda + 1$, wobei λ eine Limeszahl ist.

Nach der Induktionsvoraussetzung b) gilt

$$\phi_\lambda^x(f_\lambda(\beta), f_\lambda(\beta)) = f_\lambda(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1,$$

also folgt nach der Definition der FINSLERschen Operationen

$$\phi_{\lambda+1}(x, f_\lambda(\beta)) = f_\lambda(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

c) Sei $\alpha = \lambda + 2n + 1$, wobei λ eine Limeszahl und $1 \leq n < \omega$ ist:
Fall 1. $n = 1$:
Nach Induktionsvoraussetzung b) gilt

$$\phi_{\lambda+1}(x, f_\lambda(\beta)) = f_\lambda(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1,$$

also folgt nach Hilfsatz 3

$$\phi_{\lambda+3}(\omega \cdot x, f_{\lambda+1}(\beta)) = f_{\lambda+1}(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad \lambda \geq 0, \beta \geq 1.$$

Fall 2. $n = k + 1$, $k \neq 0$:
Nach induktionsvoraussetzung c) gilt

$$\phi_{\lambda+2k+1}(\omega \cdot x, f_{\lambda+k}(\beta)) = f_{\lambda+k}(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1$$

also folgt nach Hilfsatz 2

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda+2n+1}(\omega \cdot x, f_{\lambda+n}(\beta)) &= \phi_{\lambda+2k+3}(\omega \cdot x, f_{\lambda+k+1}(\beta)) \\ &= f_{\lambda+k+1}(\beta + x) = f_{\lambda+n}(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.\end{aligned}$$

d) Sei α eine Limeszahl, dann zeigen wir durch transfinite Induktion nach x, dass d) für α gilt.
Fall 1. $x = 0$:

$$\phi_\alpha^x(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = \phi_\alpha^0(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = f_\alpha(\beta) = f_\alpha(\beta + 0) = f_\alpha(\beta + x).$$

Fall 2. $x = \nu + 1$:
Die Induktionsvoraussetzung d) nach x für $\nu < \nu + 1 = x$ lautet:

$$\phi_\alpha^\nu(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = f_\alpha(\beta + \nu) \quad \text{für alle} \quad \beta \geq -1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\phi_\alpha^x(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) &= \phi_\alpha^{\nu+1}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = \\ &= \phi_\alpha(f_\alpha(\beta), \phi_\alpha^\nu(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta))) = \phi_\alpha(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta + \nu)),\end{aligned}$$

ferner

$$\phi_\alpha(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta + \nu)) = \operatorname*{Lim}_{\iota < \theta_\alpha} \phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta + \nu))$$

Fall 2.1 $\beta + \nu = -1$, d.h. $\beta = -1$, $\nu = 0$ und $f_\gamma(\beta + \nu) = \omega$ für alle $\gamma \geq 0$, und $f_\alpha(\beta) = \omega$.
In diesem Falle

$$\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta + \nu)) = \phi_{\eta_\iota}(\omega, f_\gamma(\beta + \nu)) \quad \text{für irgendeine} \quad \gamma \geq 0. \tag{17}$$

Fall 2.1.1. $\alpha=\omega$:

Dann hat man gemäss der Definition von η_ι, $\eta_\iota=2\iota+3<\alpha$. Nach (17) und nach der Induktionsvoraussetzung a) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, gilt

$$\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta),f_\alpha(\beta+\nu))=\phi_{\eta_\iota}(\omega,f_\iota(\beta+\nu))=$$
$$=\phi_{2\iota+3}(\omega,f_\iota(\beta+\nu))=f_\iota(\beta+\nu+1)=f_\iota(0),$$

also folgt

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha}\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta),f_\alpha(\beta+\nu))=\operatorname*{Lim}_{\iota<\omega}f_\iota(0)=f_\omega(0)=f_\alpha(\beta+\nu+1)=f_\alpha(\beta+x).$$

Fall 2.1.2. $\alpha=\lambda+\omega$, wobei λ eine Limeszahl ist:

Dann ist $\theta_\alpha=\omega$ und $\eta_\iota=\lambda+2\iota+1$. Nach (17) und nach der Induktionsvoraussetzung c) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, ist

$$\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta),f_\alpha(\beta+\nu))=\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta),f_{\lambda+\iota}(\beta+\nu))=$$
$$=\phi_{\lambda+2\iota+1}(\omega,f_{\lambda+\iota}(\beta+\nu))=f_{\lambda+\iota}(\beta+\nu+1)=f_{\lambda+\iota}(0).$$

Daraus folgt

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha}\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta),f_\alpha(\beta+\nu))=\operatorname*{Lim}_{\iota<\omega}f_{\lambda+\iota}(0)=f_{\lambda+\omega}(0)=f_\alpha(0)=f_\alpha(\beta+\nu).$$

Fall 2.1.3. $\alpha=\omega\cdot\lambda$ wobei λ eine Limeszahl ist:

Dann ist $\theta_\alpha=\lambda$, $\eta_\iota=\omega\cdot\iota+3$. Nach (17) und nach der Induktionsvoraussetzung c) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, ist

$$\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta),f_\alpha(\beta+\nu))=\phi_{\eta_\iota}(\omega,f_{\omega\cdot\iota+1}(\beta+\nu))=\phi_{\omega\cdot\iota+3}(\omega,f_{\omega\cdot\iota+1}(\beta+\nu))$$
$$=f_{\omega\cdot\iota+1}(\beta+\nu+1)=f_{\omega\cdot\iota+1}(0)$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha}\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta),f_\alpha(\beta+\nu))=\operatorname*{Lim}_{\iota<\lambda}f_{\omega\cdot\iota+1}(0)=f_{\omega\cdot\lambda}(0)=f_\alpha(\beta+\nu+1)=f_\alpha(\beta+x).$$

Fall 2.2. $\beta+\nu\neq-1$:

In diesem Falle gilt $f_{\alpha'}(f_\alpha(\beta+\nu))=f_\alpha(\beta+\nu)$ für $\alpha'<\alpha$ und $\omega\cdot f_\alpha(\beta+\nu)=f_\alpha(\beta+\nu)$;

Falle 2.2.1. $\alpha=\omega$; deshalb ist $\theta_\alpha=\omega$ und $\eta_\iota=2\iota+3$:

Nach der Induktionsvoraussetzung a) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, gilt

$$\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta),f_\alpha(\beta+\nu))=\phi_{2\iota+3}(\omega\cdot f_\alpha(\beta),f_\iota(f_\alpha(\beta+\nu)))=f_\iota(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)),$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha}\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta),f_\alpha(\beta+\nu))=\operatorname*{Lim}_{\iota<\omega}f_\iota(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)).$$

Aus (6) ergibt sich

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\omega}f_\iota(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta))=\operatorname*{Lim}_{\iota<\omega}f_\iota(f_\omega(\beta+\nu)+f_\omega(\beta))=f_\omega(\beta+\nu+1)=$$
$$=f_\alpha(\beta+\nu+1)=f_\alpha(\beta+x).$$

Fall 2.2.2. $\alpha=\lambda+\omega$; deshalb ist $\theta_\alpha=\omega$ und $\eta_\iota=\lambda+2\iota+1$, wobei λ eine Limeszahl ist:

Nach der Induktionsvoraussetzung c) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, gilt

$$\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) = \phi_{\lambda+2\iota+1}(\omega\cdot f_\alpha(\beta), f_{\lambda+\iota}(f_\alpha(\beta+\nu))) = f_{\lambda+\iota}(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)),$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha} \phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{\iota<\omega} f_{\lambda+\iota}(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)).$$

Aus (6) ergibt sich

$$\begin{aligned}\operatorname*{Lim}_{\iota<\omega} f_{\lambda+\iota}(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)) &= \operatorname*{Lim}_{\iota<\omega} f_{\lambda+\iota}(f_{\lambda+\omega}(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)) = \\ &= f_{\lambda+\omega}(\beta+\nu+1) = f_\alpha(\beta+\nu+1) = f_\alpha(\beta+x).\end{aligned}$$

Fall 2.2.3. $\alpha=\omega\cdot\lambda$; deshalb ist $\theta_\alpha=\lambda$ und $\eta_\iota=\omega\cdot\iota+3$, wobei λ eine Limeszahl ist:

Nach der Induktionsvoraussetzung c) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, gilt

$$\begin{aligned}\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) &= \phi_{\omega\cdot\iota+3}(\omega\cdot f_\alpha(\beta), f_{\omega\cdot\iota+1}(f_\alpha(\beta+\nu))) = \\ &= f_{\omega\cdot\iota+1}(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)),\end{aligned}$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha} \phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{\iota<\lambda} f_{\omega\cdot\iota+1}(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)).$$

Aus (6) ergibt sich

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\lambda} f_{\omega\cdot\iota+1}(f_{\omega\cdot\lambda}(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)) = f_{\omega\cdot\lambda}(\beta+\nu+1) = f_\alpha(\beta+\nu+1) = f_\alpha(\beta+x).$$

Fall 3. x sei eine Limeszahl:

Nach der Induktionsvoraussetzung d) nach x, angewandt auf $y<x$, gilt

$$\phi_\alpha^x(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{y<x} \phi_\alpha^y(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{y<x} f_\alpha(\beta+y) = f_\alpha(\beta+x).$$

Damit ist der Beweis von Satz 1. beendet.

SATZ 2. Die Gleichungen $\phi_x(\omega, \omega)=x$ und $f_x(0)=x$ besitzen dieselben Lösungen, also sind speziell die kleinsten Lösungen einander gleich.

Beweis: Zuerst behaupten wir, dass, für $\alpha>0$, $\phi_\alpha(\omega, \omega)$ und $f_\alpha(0)$ Limeszahlen sind. Daraus folgt, dass Lösungen der Gleichungen $\phi_x(\omega, \omega)=x$ und $f_x(0)=x$ auch Limeszahlen sind. Ist α eine Lösung der Gleichung $\phi_\alpha(\omega, \omega)=x$, so erhält man nach Satz 1. d):

$$\alpha = \phi_\alpha(\omega,\omega) = \phi_\alpha^1(f_\alpha(-1), f_\alpha(-1)) = f_\alpha(-1+1) = f_\alpha(0),$$

d.h., α ist eine Lösung der Gleichung $f_x(0)=x$.

Wir gehen nun daran, unsere Behauptung zu beweisen:

(i) $f_\alpha(0)$ ist für $\alpha>0$ eine Limeszahl, weil $f_\alpha(0)$ eine ε-Zahl ist.

(ii) Für $\phi_\alpha(\omega, \omega)$ unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1. $\alpha=\nu+1$:

$$\phi_\alpha(\omega,\omega) = \phi_{\nu+1}(\omega,\omega) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \phi_\nu^n(\omega,\omega).$$

Also brauchen wir nur zu zeigen, dass $\{\phi_\nu^n(\omega, \omega)\}$ eine wachsende Folge vom Typ ω ist. Nun gilt aber nach [4, Satz 1.]

$$\phi_\nu^n(\omega,\omega) < \phi_\gamma(\omega, \phi_\nu^n(\omega,\omega)) = \phi_\nu^{n+1}(\omega,\omega).$$

Fall 2. α sei eine Limeszahl:

$$\phi_\alpha(\omega,\omega) = \operatorname*{Lim}_{\lambda<\alpha} \phi_\lambda(\omega,\omega),$$

und die Folge $\{\phi_\lambda(\omega, \omega)\}$ vom Typ α ist wachsend wegen [4, Satz 4]. (*Q.E.D.*)

SATZ 3. Sei κ eine Lösung der Gleichung $f_x(0)=x$.
Wenn α, ξ, η kleiner als κ sind, so ist $\phi_\alpha(\xi, \eta)$ kleiner als κ.

Beweis: Zuerst wählt man eine Limeszahl λ, so dass $\alpha<\lambda<\kappa$ ist. Sodann setzt man $\tau=\operatorname{Max}(\xi, \eta)$.

Fall 1. $1\leq\xi$, $1<\eta$:

Aus $f_\lambda(\tau)\geq\tau$, [4, Sätze 5, 6, 7], und unserem Satz 1 ergibt sich

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(\xi,\eta) \leq \phi_\alpha(\xi,\tau) \leq \phi_\alpha(\xi, f_\lambda(\tau)) = \phi_\alpha(f_\lambda(\tau), f_\lambda(\tau)) \leq \phi_\lambda(f_\lambda(\tau), f_\lambda(\tau)) = \\ = f_\lambda(\tau+1) < f_\lambda(\kappa) = f_\lambda(f_\kappa(0)) = f_\kappa(0) = \kappa.\end{aligned}$$

Fall 2. $\xi=0$ oder $\eta\leq 1$:

Aus [4, Satz 9] ergibt sich $\phi_\alpha(\xi, \eta)<\kappa$. (*Q.E.D.*)

LITERATUR

[1] BACHMANN, H., Transfinite Zahlen, *Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgeb.* Neue Folge 1, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1955.

[2] —, Vergleich und Kombination zweier Methoden von Veblen und Finsler zur Lösung des Problems der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen, *Comment. Math. Helv. 26* (1952), 55–62.

[3] FEFERMAN, S., Systems of Predicative analysis, *J. Symbolic Logic 29* (1964), 1–30.

[4] FINSLER, P., Eine transfinite Folge arithmetischer Operationen, *Comment. Math. Helv. 25* (1951), 75–90.

[5] SCHÜTTE, K., Predicative well-orderings, *Formal Systems and Recursive Functions*, edited by F. N. Crossley and M. A. E. Dummett, North Holland, Amsterdam, 1965.

[6] —, Eine Grenze für die Beweisbarkeit der transfiniten Induktion in der verzweigten Typenlogik, wird erscheinen im *Archiv. f. math. Logik und Grundlagenforschung.*

[7] VEBLEN, O., Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals, *Trans. Amer. Math. Soc. 9* (1908), 280–292.

Eingegangen den 5. Mai 1966