Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 41 (1966-1967)

Artikel: Über die FINSLERschen höheren arithmetischen Operationen.

Autor: Levitz, Hilbert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31384

Über die FINSLERschen höheren arithmetischen Operationen

Von HILBERT LEVITZ *, New York University

1. Einleitung

In [4] stellte Finsler eine transfinite Folge von arithmetischen Operationen auf, die durch Funktionen $\phi_\alpha(\xi, \eta)$ von zwei Variabeln ξ, η gegeben sind, wobei α, ξ, η alle Ordnungszahlen kleiner als Ω durchlaufen. Die kleinste Zahl μ, die die Gleichung $\phi_x(\omega, \omega)=x$ löst, spielt eine besondere Rolle. Ist $\omega<\gamma<\mu$, dann hat γ die Darstellung $\gamma=\phi_\alpha(\xi, \eta)$, wobei α, ξ, $\eta<\gamma$ sind.

Bachmann [2] zeigte, dass $\mu<E(0)$ ist, wobei $E(0)$ eine bestimmte Zahl ist, die von *Veblen* [7] beschrieben wurde.

Hier geben wir eine Verbesserung dieses Ergebnisses von *Bachmann*. Wir beweisen, dass μ gerade die sogenannte *Schütte-Feferman* Zahl κ_0 ist. Es wurde von diesen Verfassern gezeigt, dass κ_0 eine wichtige Bedeutung für die verzweigte Typenlogik hat [3], [5], [6].

Wir beweisen auch: $\phi_\alpha(\xi, \eta)<\kappa_0$ so bald α, ξ, $\eta<\kappa_0$.

2. Die Operationen von Finsler

Die ν-fache Iteration der Funktionen $\phi_\alpha(\xi, \eta)$ sei durch die Forderungen erklärt:

$$\begin{aligned}
\phi_\alpha^0(\xi,\eta) &= \eta \\
\phi_\alpha^{\nu+1}(\xi,\eta) &= \phi_\alpha(\xi,\phi_\alpha^\nu(\xi,\eta)) \\
\phi_\alpha^\lambda(\xi,\eta) &= \lim_{\nu<\lambda} \phi_\alpha^\nu(\xi,\eta), \text{ wenn } \lambda \text{ eine Limeszahl } < \Omega \text{ ist.}
\end{aligned}$$

Man beweist sehr leicht mit transfiniter Induktion nach β:

$$\phi_\alpha^{\nu+\beta}(\xi,\eta) = \phi_\alpha^\beta(\xi,\phi_\alpha^\nu(\xi,\eta)).$$

Die Funktionen $\phi_\alpha(\xi, \eta)$ sind definiert, wie folgt:

$$\begin{aligned}
\phi_0(\xi,\eta) &= \phi_0(0,\eta) = \eta + 1 \\
\phi_1(\xi,\eta) &= \phi_0^\xi(0,\eta) = \eta + \xi \\
\phi_2(\xi,\eta) &= \phi_1^\xi(\eta,0) = \eta\cdot\xi
\end{aligned}$$

---

*) Diese Arbeit wurde von dem *Office of Scientific Research of the United States Air Force* unterstützt.

$$\phi_3(\xi,\eta) = \phi_2^{\xi}(\eta,1) = \eta^{\xi}$$

$$\phi_4(\xi,\eta) = \phi_3^{\xi}(\eta,\eta) = \eta^{\eta^{\xi}}$$

$$\phi_5(\xi,\eta) = \phi_4^{\xi}(\eta,\eta) \text{ usw.}$$

$$\text{allgemein } \phi_{\alpha+1}(\xi,\eta) = \phi_{\alpha}^{\xi}(\eta,\eta) \quad \text{für} \quad \alpha \geq 3$$

$$\phi_{\lambda}(\xi,\eta) = \operatorname*{Lim}_{\alpha<\lambda} \phi_{\alpha}(\xi,\eta), \text{ wenn } \lambda \text{ eine Limeszahl } < \Omega \text{ ist}.$$

3. Einige Eigenschaften der Normalfunktionen

Wir beschreiben einige Eigenschaften der Normalfunktionen wie es in *Bachmann* steht [1, § 8].

Es sei $\psi(x)$ eine beliebige Normalfunktion mit dem Argumentbereich $0 \leq x < \Omega$. Die Iteration ψ^n von ψ definiert man folgendermassen:

$$\psi^0(\xi) = \xi$$

$$\psi^{n+1}(\xi) = \psi(\psi^n(\xi)).$$

Wenn die Lösungen der Gleichung $\psi(x)=x$ der Grösse nach geordnet werden, erhält man eine neue Normalfunktion, die man die Ableitung ψ' von ψ nennt. Es gilt [1, pg. 36]:

$$\psi'(0) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \psi^n(\alpha) \quad \text{für} \quad \alpha \leq \psi'(0), \tag{1}$$

$$\psi'(\xi+1) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \psi^n(\alpha) \quad \text{für} \quad \psi'(\xi) < \alpha \leq \psi'(\xi+1). \tag{2}$$

Ist $0 \leq \alpha < \psi'(\beta)$, so ist $\psi(\alpha) < \psi'(\beta)$ für $0 \leq \beta$; dies ergibt sich aus $\psi(\alpha) < \psi(\psi'(\beta)) = \psi'(\beta)$.

Ausgehend von der Normalfunktion $f_0(x) = \omega^x$, $0 \leq x < \Omega$, bildet man eine transfinite Folge von Ableitungen $\{f_\eta\}$, wie folgt:

$$f_0(x) = \omega^x$$

$$f_{\eta+1} = f_\eta' \quad \text{für} \quad 0 \leq \eta < \Omega,$$

$$Vf_\lambda = \bigcap_{\eta<\lambda} Vf_\eta,$$

wenn λ eine Limeszahl $<\Omega$ ist und Vf_η die Wertbereich der Funktion f_η bezeichnet.

Es gilt [1, pg. 39]:

$$f_{\eta+1}(0) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} f_\eta^n(\alpha) \quad \text{für} \quad \alpha \leq f_{\eta+1}(0), \tag{3}$$

$$f_{\eta+1}(\xi+1) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} f_\eta^n(\alpha) \quad \text{für} \quad f_{\eta+1}(\xi) < \alpha \leq f_{\eta+1}(\xi+1), \tag{4}$$

$$f_\lambda(0) = \operatorname*{Lim}_{\eta<\lambda} f_\eta(\alpha) \quad \text{für} \quad \alpha \leq f_\lambda(0), \tag{5}$$

wenn λ eine Limeszahl ist.

$$f_\lambda(\xi+1) = \operatorname*{Lim}_{\eta<\lambda} f_\eta(\alpha) \quad \text{für} \quad f_\lambda(\xi) < \alpha \leq f_\lambda(\xi+1), \tag{6}$$

wenn λ eine Limeszahl ist.

Eine weitere Eigenschaft von f_η ist $f_\eta(x) \geqslant x$ [1, pg. 25].

Für $1 \leq \eta$, $0 \leq \alpha$ ist $f_\eta(\alpha)$ eine ε-Zahl. Deshalb ist für $1 \leq \eta$ die Menge von allen Ordnungszahlen, die kleiner als $f_\eta(\alpha)$ sind, gegenüber den Operationen von Addition, Multiplikation, und Potenzbildung abgeschlossen [1, p. 68].

Die kleinste Lösung der Gleichung $f_x(0) = x$ heisst die *Schütte-Feferman* Zahl.

Um eine bündige Bezeichnungsweise zu gewinnen, führen wir eine Grösse -1 ein. Für -1 definieren wir folgendes:

$$-1 < x \quad \text{für} \quad 0 \leq x,$$

$$-1 + x = \begin{cases} x & \text{für} \quad \omega \leq x, \\ -1 & \text{für} \quad x = 0, \\ \eta & \text{für} \quad 0 < x < \omega \quad \text{und} \quad x = \eta + 1, \end{cases}$$

$$1 + (-1) = 0,$$

$$\psi(-1) = \omega, \text{ wenn } \psi \text{ irgendeine Normalfunktion ist.}$$

Offenbar gilt:

$$-1 + (\alpha + \beta) = (-1 + \alpha) + \beta \quad \text{für} \quad \alpha, \beta \geq 0,$$

$$1 + (\beta + x) = (1 + \beta) + x \quad \text{für} \quad \beta \geq -1, x \geq 0,$$

$$\omega \cdot (1 + \beta) + \omega \cdot x = \omega \cdot (1 + \beta + x) \quad \text{für} \quad \beta \geq -1, x \geq 0.$$

4. Einige Hilfsätze

HILFSATZ 1. Es ist $\phi_5(\omega \cdot x, f_1(\beta)) = f_1(\beta + x)$ für alle $\beta \geq -1$, $x \geq 0$.

Beweis: Nach der Definition der FINSLERschen Operationen genügt es zu zeigen:

$$\phi_4^{\omega \cdot \gamma}(f_1(\beta), f_1(\beta)) = f_1(\beta + \gamma) \quad \text{für alle} \quad \beta \geq -1, \gamma \geq 0.$$

Dies wird mit transfiniter Induktion nach γ bewiesen:

Fall 1. $\gamma = 0$:

$$\phi_4^{\omega \cdot \gamma}(f_1(\beta), f_1(\beta)) = \phi_4^0(f_1(\beta), f_1(\beta)) = f_1(\beta) = f_1(\beta + 0) = f_1(\beta + \gamma).$$

Fall 2. $\gamma = \nu + 1$, d.h. γ sei ein Nachfolger:

Die Induktionsvoraussetzung lautet

$$\phi_4^{\omega \cdot \nu}(f_1(\beta), f_1(\beta)) = f_1(\beta + \nu);$$

daraus folgt

$$\phi_4^{\omega\cdot\gamma}(f_1(\beta),f_1(\beta)) = \phi_4^{\omega\cdot\nu+\omega}(f_1(\beta),f_1(\beta)) =$$
$$= \phi_4^{\omega}(f_1(\beta),\phi_4^{\omega\cdot\nu}(f_1(\beta),f_1(\beta))) =$$
$$= \phi_4^{\omega}(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \phi_4^{n}(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)). \tag{7}$$

Nun zeigen wir mit Induktion nach $n\geq 1$, dass

$$\phi_4^n(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) = f_0(Q), \quad \text{wobei}$$
$$f_0^{n-1}(f_1(\beta+\nu)+1) < Q < f_1(\beta+\nu+1) \text{ ist}.$$

Ist diese Behauptung wahr, dann folgt

$$f_0^n(f_1(\beta+\nu)+1) < f_0(Q) = \phi_4^n(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) < f_1(\beta+\nu+1).$$

Im Falle $\beta+\nu=-1$ folgt nach (3), im Falle $\beta+\nu\neq -1$ nach (4)

$$\operatorname*{Lim}_{n<\omega} \phi_4^n(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega}(f_1(\beta+\nu)+1) = f_1(\beta+\nu+1) = f_1(\beta+\gamma); \tag{8}$$

weiterhin ergibt sich nach (7), (8)

$$\phi_4^{\omega\cdot\gamma}(f_1(\beta),f_1(\beta)) = f_1(\beta+\gamma).$$

Aber das ist, was bewiesen werden soll.

Fall 2.1 $n=1$:

Fall 2.1.1 $\beta=-1$, $\nu=0$:

$$\phi_4^n(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) = \phi_4(\omega^{(\omega^\omega)}) = f_0(\omega^\omega).$$

Setzt man $Q=\omega^\omega$, so hat Q die erforderlichen Eigenschaften:

$$f_0^{n-1}(f_1(\beta+\nu)+1) = f_0^0(f_1(\beta+\nu)+1) = f_1(\beta+\nu)+1 =$$
$$= \omega+1 < Q < f_1(0) = f_1(\beta+\nu+1).$$

Fall 2.1.2 $\beta\neq -1$ oder $\nu\neq 0$:

Dann ist $\beta+\nu\neq -1$, und $f_0(f_1(\beta+\nu))=f_1(\beta+\nu)$, d.h.

$$\omega^{f_1(\beta+\nu)} = f_1(\beta+\nu);$$

also

$$\phi_4^n(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) = \phi_4^1(f_1(\beta),f_1(\beta+\nu)) = \left(f_1(\beta+\nu)^{(f_1(\beta+\nu)^{f_1(\beta)})}\right) =$$
$$= \left(\omega^{f_1(\beta+\nu)}\right)^{(f_1(\beta+\nu)^{f_1(\beta)})} = \omega^{(f_1(\beta+\nu)^{f_1(\beta)})}$$

Setzt man $Q=f_1(\beta+\nu)^{f_1(\beta)}$, dann ist

$$f_0^{n-1}(f_1(\beta+\nu)+1) = f_1(\beta+\nu)+1 < f_1(\beta+\nu)^{f_1(\beta)} = Q < f_1(\beta+\nu+1).$$

Fall 2.2 $n=k+1$, $k\neq 0$:
Die Induktionsvoraussetzung nach n lautet für $k<n$:

$$\phi_4^k(f_1(\beta), f_1(\beta+\nu)) = f_0(P),$$

wobei

$$f_0^{k-1}(f_1(\beta+\nu)+1) < P < f_1(\beta+\nu+1). \tag{9}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\phi_4^{k+1}(f_1(\beta), f_1(\beta+\nu)) &= \phi_4(f_1(\beta), \phi_4^k(f_1(\beta), f_1(\beta+\nu))) = \\ &= \phi_4(f(\beta), f_0(P)) = f_0(P)^{(f_0(P)^{f_1(\beta)})} = \\ &= (\omega^P)^{(f_0(P)^{f_1(\beta)})} = \omega^{P\cdot f_0(P)^{f_1(\beta)}} = f_0(P\cdot f_0(P)^{f_1(\beta)}).\end{aligned}$$

Setzt man $Q=P\cdot f_0(P)^{f_1(\beta)}$, dann hat Q die erforderlichen Eigenschaften, denn wegen (9) gilt

$$f_0^k(f_1(\beta+\nu)+1) < f_0(P) < f_1(\beta+\nu+1),$$

aber $f_1(\beta+\nu+1)$ ist eine ε-Zahl, und daraus folgt

$$f_0^k(f_1(\beta+\nu)+1) < P\cdot f_1(P)^{f_1(\beta)} = Q < f_1(\beta+\nu).$$

Fall 3. γ sei eine Limeszahl:
Nach der Induktionsvoraussetzung nach γ erhält man

$$\phi_4^{\omega\cdot\gamma}(f_1(\beta), f_1(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{\lambda<\gamma} \phi_4^{\omega\cdot\lambda}(f_1(\beta), f_1(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{\lambda<\gamma} f_1(\beta+\lambda) = f_1(\beta+\gamma).$$

Damit ist der Beweis von Hilfsatz 1. beendet.

HILFSATZ 2. Ist $\phi_\alpha(\xi,\eta)$ eine FINSLERsche Operation und $g(x)$ eine Normalfunktion mit den Eigenschaften:
a) $\phi_\alpha(\omega\cdot x, g(\beta)) = g(\beta+x)$ für alle $x\geq 0$, $\beta\geq -1$,
b) $g(x)$ ist eine ε-Zahl für $x\geq 0$,
dann gilt:

$$\phi_{\alpha+2}(\omega\cdot x, g'(\beta)) = g'(\beta+x) \quad \text{für} \quad x\geq 0,\ \beta\geq -1.$$

Beweis: Zuerst beweisen wir mit transfiniter Induktion nach γ die folgende Behauptung:

$$\phi_\alpha^\gamma(\omega,\omega) = g(-1+\gamma) \quad \text{für alle} \quad \gamma\geq 0. \tag{10}$$

Fall 1. $\gamma=0$:

$$\phi_\alpha^\gamma(\omega,\omega) = \phi_\alpha^0(\omega,\omega) = \omega = g(-1+0) = g(-1+\gamma).$$

Fall 2. $\gamma = \nu + 1$:
Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$\phi_\alpha^\nu(\omega, \omega) = g(-1+\nu),$$

also

$$\phi_\alpha^\gamma(\omega, \omega) = \phi_\alpha^{\nu+1}(\omega, \omega) = \phi_\alpha(\omega, \phi_\alpha^\nu(\omega, \omega)) = \phi_\alpha(\omega, g(-1+\nu)).$$

Nach der Voraussetzung a) ist $\phi_\alpha(\omega, g(-1+\nu)) = g((-1+\nu)+1)$, also

$$\phi_\alpha^\gamma(\omega, \omega) = g((-1+\nu)+1) = g(-1+(\nu+1)) = g(-1+\gamma).$$

Fall 3. γ sei eine Limeszahl:

$$\phi_\alpha^\gamma(\omega, \omega) = \operatorname*{Lim}_{\lambda<\gamma} \phi_\alpha^\lambda(\omega, \omega) = \operatorname*{Lim}_{\lambda<\gamma} g(-1+\lambda) = g(-1+\gamma).$$

Damit ist (10) bewiesen.
Aus (10) ergibt sich nach der Definition der FINSLERschen Operationen

$$\phi_{\alpha+1}(\gamma, \omega) = g(-1+\gamma) \quad \text{für alle} \quad \gamma \geq 0. \tag{11}$$

Sodann beweisen wir mit transfiniter Induktion nach γ

$$\phi_\alpha^\gamma(g(\beta), g(\beta)) = g(\beta + g(\beta)\cdot\gamma) \quad \text{für alle} \quad \gamma \geq 0, \beta \neq -1. \tag{12}$$

Fall 1. $\gamma = 0$:

$$\phi_\alpha^\gamma(\beta, g(\beta)) = \phi_\alpha^0(g(\beta), g(\beta)) = g(\beta) = g(\beta + g(\beta)\cdot 0) = g(\beta + g(\beta)\cdot\gamma).$$

Fall 2. $\gamma = \nu + 1$:
Aus $\beta \neq 1$ und Voraussetzung b) folgt $\omega \cdot g(\beta) = g(\beta)$, also

$$\phi_\alpha^\gamma(g(\beta), g(\beta)) = \phi_\alpha^{\nu+1}(g(\beta), g(\beta)) = \phi_\alpha(g(\beta), \phi_\alpha^\nu(g(\beta), g(\beta))).$$

Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$\phi_\alpha^\nu(g(\beta), g(\beta)) = g(\beta + g(\beta)\cdot\nu),$$

also

$$\phi_\alpha(g(\beta), \phi_\alpha^\nu(g(\beta), g(\beta))) = \phi_\alpha(g(\beta), g(\beta + g(\beta)\cdot\nu)) = \phi_\alpha(\omega\cdot g(\beta), g(\beta + g(\beta)\cdot\nu)).$$

Ferner ist nach der Voraussetzung a)

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(\omega\cdot g(\beta), g(\beta + g(\beta)\cdot\nu)) &= g(\beta + g(\beta)\cdot\nu + g(\beta)) = \\ &= g(\beta + g(\beta)\cdot(\nu+1)) = g(\beta + g(\beta)\cdot\gamma). \end{aligned}$$

Fall 3. γ sei eine Limeszahl:

$$\phi_\alpha^\gamma(g(\beta), g(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{\lambda<\gamma} \phi_\alpha^\lambda(g(\beta), g(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{\lambda<\gamma} g(\beta + g(\beta)\cdot\lambda) = g(\beta + g(\beta)\cdot\gamma).$$

Damit ist (12) bewiesen.

Aus (12) ergibt sich nach der Definition der FINSLERschen Operationen

$$\phi_{\alpha+1}(\gamma, g(\beta)) = g(\beta + g(\beta)\cdot\gamma) \quad \text{für alle} \quad \gamma \geq 0,\ \beta \neq -1. \tag{13}$$

Sodann beweisen wir mit transfiniter Induktion nach γ:

$$\phi^{\omega\cdot\gamma}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta)) = g'(\beta+\gamma) \quad \text{für alle} \quad \gamma \geq 0,\ \beta \geq -1. \tag{14}$$

Fall 1. $\gamma=0$

$$\phi^{\omega\cdot\gamma}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta)) = \phi^{0}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta)) = g'(\beta) = g'(\beta+0) = g'(\beta+\gamma).$$

Fall 2. $\gamma=\nu+1$:

$$\phi^{\omega\cdot\gamma}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta)) = {}^{\omega\cdot\nu+\omega}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta)) = \phi^{\omega}_{\alpha+1}(g'(\beta), \phi^{\omega\cdot\nu}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta)))$$

Nach der Induktionsvoraussetzung folgt

$$\phi^{\omega\cdot\nu}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta)) = g'(\beta+\nu),$$

somit

$$\begin{aligned}\phi^{\omega}_{\alpha+1}(g'(\beta), \phi^{\omega\cdot\nu}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta))) &= \phi^{\omega}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu)) \\ &= \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \phi^{n}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu))\end{aligned}$$

Fall 2.1 $\beta=-1$, $\nu=0$:
Wir zeigen mit Induktion nach $n\geq 1$:

$$\phi^{n}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu) = g(Q), \qquad \text{wobei} \quad g^{n-1}(0) < Q < g'(0).$$

Ist diese Behauptung wahr, so gewinnen wir durch Anwendung von (1) die gewünschte Beziehung (14).

Fall 2.1.1. $n=1$:
Nach (11) folgt

$$\phi^{n}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu)) = \phi^{1}_{\alpha+1}(\omega, \omega) = g(-1+\omega) = g(\omega).$$

Setzt man $Q=\omega$, so hat Q die erforderlichen Eigenschaften, denn

$$g^{n-1}(0) = g^{0}(0) = 0 < \omega = Q < g'(0).$$

Fall 2.1.2. $n=k+1$:

$$\phi^{k+1}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu)) = \phi_{\alpha+1}(g'(\beta), \phi^{k}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu))).$$

Da aber die Induktionsvoraussetzung nach n für $k<k+1=n$

$$\phi^{k}_{\alpha+1}(g'(\beta), g'(\beta+\nu)) = g(P)$$

lautet, wobei

$$g^{k-1}(0) < P < g'(0) \tag{15}$$

gilt, folgt

$$\phi_{\alpha+1}(g'(\beta),\phi^k_{\alpha+1}(g'(\beta),g'(\beta+\nu)))=\phi_{\alpha+1}(g'(\beta),g(P))=\phi_{\alpha+1}(\omega\cdot g(P)).$$

Wegen (15) ist $P\neq 1$, deshalb ist (13) anwendbar, und man erhält

$$\phi_{\alpha+1}(\omega,g(P))=g(P+g(P)\cdot\omega).$$

Setzt man $Q=P+g(P)\cdot\omega$, so gilt nach (15) $g^k(0)<g(P)<g'(0)$.

Ferner gilt

$$g^{n-1}(0)=g^k(0)<P+g(P)\cdot\omega=Q<g'(0),$$

weil $g'(0)$ eine ε-Zahl ist.

Fall 2.2 $\beta\neq -1$ oder $\nu\neq 0$:

Wir zeigen mit Induktion nach $n\geq 1$:

$$\phi^n_{\alpha+1}(g'(\beta),g'(\beta+\nu))=g(Q),\quad \text{wobei}\quad g^{n-1}(g'(\beta+\nu)+1)<Q<g'(\beta+\nu+1).$$

Ist diese Behauptung wahr, so gewinnen durch anwendung von (2) die gewünschte Beziehung (14).

Fall 2.2.1. n=1:

Aus $\beta+1\neq -1$ ergibt sich $g(g'(\beta+\nu))=g'(\beta+\nu)$, also

$$\phi_{\alpha+1}(g'(\beta),g'(\beta+\nu))=\phi_{\alpha+1}(g'(\beta),g(g'(\beta+\nu))).$$

Ferner ist (13) anwendbar, und man erhält:

$$\phi_{\alpha+1}(g'(\beta),g(g'(\beta+\nu)))=g(g'(\beta+\nu)+g(g'(\beta+\nu))\cdot g'(\beta)).$$

Setzt man $Q=g'(\beta+\nu)+g(g'(\beta+\nu))\cdot g'(\beta)$, dann hat Q die erforderlichen Eigenschaften, denn

$$g^{n-1}(g'(\beta+\nu)+1)=g^0(g'(\beta+\nu)+1)=g'(\beta+\nu)+1<Q<g'(\beta+\nu+1).$$

Fall 2.2.2. $n=k+1$:

Die Induktionsvoraussetzung nach n lautet für k<k+1=n:

$$\phi^k_{\alpha+1}(g'(\beta),g'(\beta+\nu))=g(P),$$

wobei

$$g^{k-1}(g'(\beta+\nu)+1)<P<g'(\beta+\nu+1) \tag{16}$$

ist. Es folgt

$$\phi^{k+1}_{\alpha+1}(g'(\beta),g'(\beta+\nu))=\phi_{\alpha+1}(g'(\beta),\phi^k_\alpha(g'(\beta),g(\beta+\nu)))=\phi_{\alpha+1}(g'(\beta),g(P)).$$

Aus (16) ergibt sich $P\neq -1$, deshalb ist (13) anwendbar, und man erhält

$$\phi_{\alpha+1}(g'(\beta),g(P))=g(P+g'(P)\cdot g'(\beta)).$$

Setzt man $Q = P + g'(P) \cdot g'(\beta)$, dann hat Q die erforderlichen Eigenschaften, denn aus (16) folgt

$$g^k(g'(\beta + \nu) + 1) < g(P) < g'(\beta + \nu + 1),$$

und da $g'(\beta + \nu + 1)$ eine ε-Zahl ist, folgt weiter:

$$g^{n-1}(g'(\beta + \nu) + 1) = g^k(g'(\beta + \nu) + 1) < P + g(P) \cdot g'(P) < g'(\beta + \nu + 1).$$

Fall 3. γ sei eine Limeszahl:

$$\phi_{\alpha+1}^{\omega;\gamma}(g'(\beta), g'(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{\lambda<\gamma} \phi_{\alpha+1}^{\omega;\lambda}(g'(\beta), g'(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{\lambda<\gamma} g'(\beta + \lambda) = g'(\beta + \gamma).$$

Damit ist (14) bewiesen.
Aus (14) ergibt sich nach der Definition der FINSLERschen Operationen

$$\phi_{\alpha+2}(\omega \cdot \gamma, g'(\beta)) = g'(\beta + \gamma) \quad \text{für alle} \quad \gamma \geq 0, \beta \geq -1.$$

Damit is der Beweis von Hilfsatz 2 beendet.

HILFSATZ 3. Ist $\phi_\alpha(\xi, \eta)$ eine FINSLERsche Operation und $h(x)$ eine Normalfunktion mit den Eigenschaften:

a) $\phi_\alpha(x, h(\beta)) = h(\beta + x)$ für alle $x \geq 0$, $\beta \geq -1$,

b) $g(x)$ ist eine ε-Zahl für alle $x \geq 0$,

dann gilt:

$$\phi_{\alpha+2}(\omega \cdot x, h'(\beta)) = h'(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

Beweis: Wir definieren eine Funktion g, die die Bedingungen von Hilfsatz 2 erfüllt. Sei $g(\beta) \equiv h(-1 + \omega(1 + \beta))$ für $\beta \geq -1$. Offenbar ist g eine Normalfunktion, und für $x \geq 0$ ist $g(x)$ eine ε-Zahl; ferner hat man für $x \geq 0$, $\beta \geq -1$:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(\omega \cdot x, g(\beta)) &= \phi_\alpha(\omega \cdot x, h(-1 + \omega(1 + \beta))) = h(-1 + \omega(1 + \beta) + \omega x) = \\ &= h(-1 + \omega(1 + \beta + x)) = g(\beta + x),\end{aligned}$$

gemäss Hilfsatz 2 erhält man

$$\phi_\alpha(\omega \cdot x, g'(\beta)) = g'(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

Es ist leicht zu sehen, dass

$$g'(\beta) = h'(\beta) \quad \text{für alle} \quad -1 \leq \beta$$

gilt. Somit haben wir

$$\phi_\alpha(\omega \cdot x, h'(x)) = h'(\beta + x). \qquad (Q.E.D.)$$

3. Die Hauptergebnisse

Für $x \geq 0$ besteht der Wertbereich der Funktion $\omega(1+x)$ aus den Limeszahlen. Jeder Limeszahl α ordnen wir eine Zahl θ_α und eine Folge $\{\eta_\iota\}$ für $1 \leq \iota < \theta_\alpha$ zu, so dass für alle α, $\alpha = \operatorname{Lim}_{\iota < \theta_\alpha} \eta$ gilt. Ferner verlangen wir die folgenden Eigenschaften:

a) Ist $\alpha = \omega$, sei $\theta_\alpha = \omega$ und $\eta_\iota = 2\iota + 3$;
b) Ist $\alpha = \lambda + \omega$, wobei λ eine Limeszahl ist, sei $\theta_\alpha = \omega$ und $\eta_\iota = \lambda + 2\iota + 1$;
c) Ist $\alpha = \omega \cdot \lambda$, wobei λ eine Limeszahl ist, sei $\theta_\alpha = \lambda$ und $\eta_\iota = \omega \cdot \iota + 3$.

Satz 1. Sei $\{f_\eta\}$ die vorher beschriebene Folge von Ableitungen:
a) Ist $\alpha = 2n+3$, $1 \leq n < \omega$, dann gilt

$$\phi_\alpha(\omega \cdot x, f_n(\beta)) = f_n(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

b) Ist $\alpha = \lambda + 1$, wobei λ eine Limeszahl ist, dann gilt

$$\phi_\alpha(x, f_\lambda(\beta)) = f_\lambda(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

c) Ist $\alpha = \lambda + 2n + 1$, wobei λ eine Limeszahl und $1 \leq n < \omega$ ist, dann gilt

$$\phi_\alpha(\omega \cdot x, f_{\lambda+n}(\beta)) = f_{\lambda+n}(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

d) Ist α eine Limeszahl, dann gilt

$$\phi_\alpha^x(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = f_\alpha(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

Beweis (Nach transfiniter Induktion nach α) Wir nehmen an, dass a), b), c), d) für alle $\alpha' < \alpha$ gelten. Wir müssen zeigen, dass a), b), c), d) auch für α gelten

a) Sei $\alpha = 2n+3$, $1 \leq n < \omega$.

Fall 1. $n = 1$:
Unsere Behauptung ist genau Hilfsatz 1.

Fall 2. $n = k+1$, $k \neq 0$:
Hier gilt nach Induktionsvoraussetzung a):

$$\phi_{2k+3}(\omega \cdot x, f_n(\beta)) = f_k(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

Also folgt nach Hilfsatz 2

$$\phi_{2n+3}(\omega \cdot x, f_n(\beta)) = \phi_{2k+3+2}(\omega \cdot x, f_{k+1}(\beta)) = f_{k+1}(\beta + x) = f_n(\beta + x)$$

für alle $x \geq 0$, $\beta \geq -1$.

b) Sei $\alpha = \lambda + 1$, wobei λ eine Limeszahl ist.
Nach der Induktionsvoraussetzung b) gilt

$$\phi_\lambda^x(f_\lambda(\beta), f_\lambda(\beta)) = f_\lambda(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1,$$

also folgt nach der Definition der FINSLERschen Operationen

$$\phi_{\lambda+1}(x, f_\lambda(\beta)) = f_\lambda(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.$$

c) Sei $\alpha = \lambda + 2n + 1$, wobei λ eine Limeszahl und $1 \leq n < \omega$ ist:
Fall 1. $n = 1$:
Nach Induktionsvoraussetzung b) gilt

$$\phi_{\lambda+1}(x, f_\lambda(\beta)) = f_\lambda(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1,$$

also folgt nach Hilfsatz 3

$$\phi_{\lambda+3}(\omega \cdot x, f_{\lambda+1}(\beta)) = f_{\lambda+1}(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad \lambda \geq 0, \beta \geq 1.$$

Fall 2. $n = k + 1$, $k \neq 0$:
Nach induktionsvoraussetzung c) gilt

$$\phi_{\lambda+2k+1}(\omega \cdot x, f_{\lambda+k}(\beta)) = f_{\lambda+k}(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1$$

also folgt nach Hilfsatz 2

$$\begin{aligned}\phi_{\lambda+2n+1}(\omega \cdot x, f_{\lambda+n}(\beta)) &= \phi_{\lambda+2k+3}(\omega \cdot x, f_{\lambda+k+1}(\beta)) \\ &= f_{\lambda+k+1}(\beta + x) = f_{\lambda+n}(\beta + x) \quad \text{für alle} \quad x \geq 0, \beta \geq -1.\end{aligned}$$

d) Sei α eine Limeszahl, dann zeigen wir durch transfinite Induktion nach x, dass d) für α gilt.
Fall 1. $x = 0$:

$$\phi_\alpha^x(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = \phi_\alpha^0(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = f_\alpha(\beta) = f_\alpha(\beta + 0) = f_\alpha(\beta + x).$$

Fall 2. $x = \nu + 1$:
Die Induktionsvoraussetzung d) nach x für $\nu < \nu + 1 = x$ lautet:

$$\phi_\alpha^\nu(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = f_\alpha(\beta + \nu) \quad \text{für alle} \quad \beta \geq -1.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\phi_\alpha^x(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) &= \phi_\alpha^{\nu+1}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = \\ &= \phi_\alpha(f_\alpha(\beta), \phi_\alpha^\nu(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta))) = \phi_\alpha(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta + \nu)),\end{aligned}$$

ferner

$$\phi_\alpha(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta + \nu)) = \operatorname*{Lim}_{\iota < \theta_\alpha} \phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta + \nu))$$

Fall 2.1 $\beta + \nu = -1$, d.h. $\beta = -1$, $\nu = 0$ und $f_\gamma(\beta + \nu) = \omega$ für alle $\gamma \geq 0$, und $f_\alpha(\beta) = \omega$.
In diesem Falle

$$\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta + \nu)) = \phi_{\eta_\iota}(\omega, f_\gamma(\beta + \nu)) \quad \text{für irgendeine} \quad \gamma \geq 0. \tag{17}$$

Fall 2.1.1. $\alpha=\omega$:

Dann hat man gemäss der Definition von η_ι, $\eta_\iota=2\iota+3<\alpha$. Nach (17) und nach der Induktionsvoraussetzung a) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, gilt

$$\begin{aligned}\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) &= \phi_{\eta_\iota}(\omega, f_\iota(\beta+\nu)) = \\ &= \phi_{2\iota+3}(\omega, f_\iota(\beta+\nu)) = f_\iota(\beta+\nu+1) = f_\iota(0),\end{aligned}$$

also folgt

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha} \phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{\iota<\omega} f_\iota(0) = f_\omega(0) = f_\alpha(\beta+\nu+1) = f_\alpha(\beta+x).$$

Fall 2.1.2. $\alpha=\lambda+\omega$, wobei λ eine Limeszahl ist:

Dann ist $\theta_\alpha=\omega$ und $\eta_\iota=\lambda+2\iota+1$. Nach (17) und nach der Induktionsvoraussetzung c) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, ist

$$\begin{aligned}\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) &= \phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_{\lambda+\iota}(\beta+\nu)) = \\ &= \phi_{\lambda+2\iota+1}(\omega, f_{\lambda+\iota}(\beta+\nu)) = f_{\lambda+\iota}(\beta+\nu+1) = f_{\lambda+\iota}(0).\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha} \phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{\iota<\omega} f_{\lambda+\iota}(0) = f_{\lambda+\omega}(0) = f_\alpha(0) = f_\alpha(\beta+\nu).$$

Fall 2.1.3. $\alpha=\omega\cdot\lambda$ wobei λ eine Limeszahl ist:

Dann ist $\theta_\alpha=\lambda$, $\eta_\iota=\omega\cdot\iota+3$. Nach (17) und nach der Induktionsvoraussetzung c) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, ist

$$\begin{aligned}\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) &= \phi_{\eta_\iota}(\omega, f_{\omega\cdot\iota+1}(\beta+\nu)) = \phi_{\omega\cdot\iota+3}(\omega, f_{\omega\cdot\iota+1}(\beta+\nu)) \\ &= f_{\omega\cdot\iota+1}(\beta+\nu+1) = f_{\omega\cdot\iota+1}(0)\end{aligned}$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha} \phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{\iota<\lambda} f_{\omega\cdot\iota+1}(0) = f_{\omega\cdot\lambda}(0) = f_\alpha(\beta+\nu+1) = f_\alpha(\beta+x).$$

Fall 2.2. $\beta+\nu\neq-1$:

In diesem Falle gilt $f_{\alpha'}(f_\alpha(\beta+\nu))=f_\alpha(\beta+\nu)$ für $\alpha'<\alpha$ und $\omega\cdot f_\alpha(\beta+\nu)=f_\alpha(\beta+\nu)$;

Falle 2.2.1. $\alpha=\omega$; deshalb ist $\theta_\alpha=\omega$ und $\eta_\iota=2\iota+3$:

Nach der Induktionsvoraussetzung a) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, gilt

$$\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) = \phi_{2\iota+3}(\omega\cdot f_\alpha(\beta), f_\iota(f_\alpha(\beta+\nu))) = f_\iota(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)),$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha} \phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{\iota<\omega} f_\iota(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)).$$

Aus (6) ergibt sich

$$\begin{aligned}\operatorname*{Lim}_{\iota<\omega} f_\iota(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)) &= \operatorname*{Lim}_{\iota<\omega} f_\iota(f_\omega(\beta+\nu)+f_\omega(\beta)) = f_\omega(\beta+\nu+1) = \\ &= f_\alpha(\beta+\nu+1) = f_\alpha(\beta+x).\end{aligned}$$

Fall 2.2.2. $\alpha=\lambda+\omega$; deshalb ist $\theta_\alpha=\omega$ und $\eta_\iota=\lambda+2\iota+1$, wobei λ eine Limeszahl ist:

Nach der Induktionsvoraussetzung c) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, gilt

$$\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) = \phi_{\lambda+2\iota+1}(\omega\cdot f_\alpha(\beta), f_{\lambda+\iota}(f_\alpha(\beta+\nu))) = f_{\lambda+\iota}(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)),$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha} \phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{\iota<\omega} f_{\lambda+\iota}(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)).$$

Aus (6) ergibt sich

$$\begin{aligned}\operatorname*{Lim}_{\iota<\omega} f_{\lambda+\iota}(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)) &= \operatorname*{Lim}_{\iota<\omega} f_{\lambda+\iota}(f_{\lambda+\omega}(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)) = \\ &= f_{\lambda+\omega}(\beta+\nu+1) = f_\alpha(\beta+\nu+1) = f_\alpha(\beta+x).\end{aligned}$$

Fall 2.2.3. $\alpha=\omega\cdot\lambda$; deshalb ist $\theta_\alpha=\lambda$ und $\eta_\iota=\omega\cdot\iota+3$, wobei λ eine Limeszahl ist:
Nach der Induktionsvoraussetzung c) nach α, angewandt auf $\eta_\iota<\alpha$, gilt

$$\begin{aligned}\phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) &= \phi_{\omega\cdot\iota+3}(\omega\cdot f_\alpha(\beta), f_{\omega\cdot\iota+1}(f_\alpha(\beta+\nu))) = \\ &= f_{\omega\cdot\iota+1}(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)),\end{aligned}$$

also

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\theta_\alpha} \phi_{\eta_\iota}(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta+\nu)) = \operatorname*{Lim}_{\iota<\lambda} f_{\omega\cdot\iota+1}(f_\alpha(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)).$$

Aus (6) ergibt sich

$$\operatorname*{Lim}_{\iota<\lambda} f_{\omega\cdot\iota+1}(f_{\omega\cdot\lambda}(\beta+\nu)+f_\alpha(\beta)) = f_{\omega\cdot\lambda}(\beta+\nu+1) = f_\alpha(\beta+\nu+1) = f_\alpha(\beta+x).$$

Fall 3. x sei eine Limeszahl:
Nach der Induktionsvoraussetzung d) nach x, angewandt auf $y<x$, gilt

$$\phi_\alpha^x(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{y<x} \phi_\alpha^y(f_\alpha(\beta), f_\alpha(\beta)) = \operatorname*{Lim}_{y<x} f_\alpha(\beta+y) = f_\alpha(\beta+x).$$

Damit ist der Beweis von Satz 1. beendet.

SATZ 2. Die Gleichungen $\phi_x(\omega,\omega)=x$ und $f_x(0)=x$ besitzen dieselben Lösungen, also sind speziell die kleinsten Lösungen einander gleich.

Beweis: Zuerst behaupten wir, dass, für $\alpha>0$, $\phi_\alpha(\omega,\omega)$ und $f_\alpha(0)$ Limeszahlen sind. Daraus folgt, dass Lösungen der Gleichungen $\phi_x(\omega,\omega)=x$ und $f_x(0)=x$ auch Limeszahlen sind. Ist α eine Lösung der Gleichung $\phi_\alpha(\omega,\omega)=x$, so erhält man nach Satz 1. d):

$$\alpha = \phi_\alpha(\omega,\omega) = \phi_\alpha^1(f_\alpha(-1), f_\alpha(-1)) = f_\alpha(-1+1) = f_\alpha(0),$$

d.h., α ist eine Lösung der Gleichung $f_x(0)=x$.

Wir gehen nun daran, unsere Behauptung zu beweisen:

(i) $f_\alpha(0)$ ist für $\alpha>0$ eine Limeszahl, weil $f_\alpha(0)$ eine ε-Zahl ist.

(ii) Für $\phi_\alpha(\omega, \omega)$ unterscheiden wir zwei Fälle:

Fall 1. $\alpha=\nu+1$:

$$\phi_\alpha(\omega,\omega) = \phi_{\nu+1}(\omega,\omega) = \operatorname*{Lim}_{n<\omega} \phi_\nu^n(\omega,\omega).$$

Also brauchen wir nur zu zeigen, dass $\{\phi_\nu^n(\omega, \omega)\}$ eine wachsende Folge vom Typ ω ist. Nun gilt aber nach [4, Satz 1.]

$$\phi_\nu^n(\omega,\omega) < \phi_\nu(\omega, \phi_\nu^n(\omega,\omega)) = \phi_\nu^{n+1}(\omega,\omega).$$

Fall 2. α sei eine Limeszahl:

$$\phi_\alpha(\omega,\omega) = \operatorname*{Lim}_{\lambda<\alpha} \phi_\lambda(\omega,\omega),$$

und die Folge $\{\phi_\lambda(\omega, \omega)\}$ vom Typ α ist wachsend wegen [4, Satz 4]. (*Q.E.D.*)

SATZ 3. Sei κ eine Lösung der Gleichung $f_x(0)=x$.
Wenn α, ξ, η kleiner als κ sind, so ist $\phi_\alpha(\xi, \eta)$ kleiner als κ.

Beweis: Zuerst wählt man eine Limeszahl λ, so dass $\alpha<\lambda<\kappa$ ist. Sodann setzt man $\tau=\mathrm{Max}(\xi, \eta)$.

Fall 1. $1\leq\xi$, $1<\eta$:

Aus $f_\lambda(\tau)\geq\tau$, [4, Sätze 5, 6, 7], und unserem Satz 1 ergibt sich

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(\xi,\eta) &\leq \phi_\alpha(\xi,\tau) \leq \phi_\alpha(\xi,f_\lambda(\tau)) = \phi_\alpha(f_\lambda(\tau),f_\lambda(\tau)) \leq \phi_\lambda(f_\lambda(\tau),f_\lambda(\tau)) = \\ &= f_\lambda(\tau+1) < f_\lambda(\kappa) = f_\lambda(f_\kappa(0)) = f_\kappa(0) = \kappa.\end{aligned}$$

Fall 2. $\xi=0$ oder $\eta\leq1$:
Aus [4, Satz 9] ergibt sich $\phi_\alpha(\xi, \eta)<\kappa$. (*Q.E.D.*)

LITERATUR

[1] BACHMANN, H., Transfinite Zahlen, *Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgeb.* Neue Folge 1, Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg, 1955.

[2] —, Vergleich und Kombination zweier Methoden von Veblen und Finsler zur Lösung des Problems der ausgezeichneten Folgen von Ordnungszahlen, *Comment. Math. Helv. 26* (1952), 55–62.

[3] FEFERMAN, S., Systems of Predicative analysis, *J. Symbolic Logic 29* (1964), 1–30.

[4] FINSLER, P., Eine transfinite Folge arithmetischer Operationen, *Comment. Math. Helv. 25* (1951), 75–90.

[5] SCHÜTTE, K., Predicative well-orderings, *Formal Systems and Recursive Functions*, edited by F. N. Crossley and M. A. E. Dummett, North Holland, Amsterdam, 1965.

[6] —, Eine Grenze für die Beweisbarkeit der transfiniten Induktion in der verzweigten Typenlogik, wird erscheinen im *Archiv. f. math. Logik und Grundlagenforschung.*

[7] VEBLEN, O., Continuous increasing functions of finite and transfinite ordinals, *Trans. Amer. Math. Soc. 9* (1908), 280–292.

Eingegangen den 5. Mai 1966