**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 41 (1966-1967)

**Artikel:** Eine Zuordnung von Operatoren zu Funktionen.
**Autor:** Kind, Burckart C.
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-31382

# Eine Zuordnung von Operatoren zu Funktionen

von Burckart C. Kind

## Einleitung

Es soll im Folgenden eine Zuordnung von Operatoren in einem Hilbertschen Raume zu Funktionen zweier reeller Variablen $x$ und $p$ hergestellt werden. Dazu wird für zwei Funktionen $f(x, p)$ und $g(x, p)$, die gewissen Klassen angehören, eine nichtkommutative Multiplikation eingeführt, deren Produkt $f \cdot g$ wir als mechanisches Produkt bezeichnen. Für das übliche kommutative Produkt schreiben wir $fg$. Die mechanische Multiplikation ist assoziativ und wird durch die Distributivgesetze mit der Addition der Funktionen verknüpft. Durch die Relationen

$$O(f)g = f \cdot g \tag{1a}$$

$$O'(f)g = g \cdot f \tag{1b}$$

werden lineare Operatoren $O(f)$ und $O'(f)$ auf gewissen Funktionenklassen, insbesondere auf einer dichten Teilmenge des Hilbertraumes $L^2_{x\,p}$ der quadratisch integrierbaren Funktionen, eingeführt. Die Linearität dieser Operatoren ergibt sich unmittelbar aus den Distributivgesetzen, ebenso wie die Gleichung $O(f+g) = O(f) + O(g)$.

Dabei durchläuft $f$ in $O(f)$ zunächst nur die Klasse der Polynome, und die zugehörigen $O(f)$ bilden eine Algebra in $L^2_{x\,p}$. Die Reduktion dieser Algebra führt schliesslich zu lauter äquivalenten Bestandteilen, die sich mit einer Algebra in $L^2_\xi$ identifizieren lassen, deren Operatoren wir mit $O_\xi(f)$ bezeichnen. $L^2_\xi$ bedeutet hierbei den Raum der quadratisch integrierbaren Funktionen einer reellen Variablen $\xi$.

Dies ist im Wesentlichen der Inhalt der ersten vier Abschnitte. Abschnitt 5 und 6 befassen sich mit Verallgemeinerungen der Definition von $O(f)$ als Operatoren in $L^2_{x\,p}$; insbesondere wird die Voraussetzung, $f$ sei ein Polynom, fallengelassen.

## 1. Definition des mechanischen Produktes von Polynomen

Die in diesem und dem nächsten Abschnitt vorkommenden Funktionen sind ausschliesslich Polynome in $x$ und $p$, deren Klasse wir mit $\mathfrak{P}$ bezeichnen. Die durch (1a) und (1b) definierten Operatoren $O(f)$ und $O'(f)$ haben also als Definitionsbereich zunächst die Klasse der Polynome.

Das mechanische Produkt soll ausser den Assoziativ- und Distributiv-Gesetzen noch folgende Rechenregeln erfüllen:

$$f \cdot a = a \cdot f = af\,, \tag{2a}$$

falls $a$ eine Konstante ist;

$$x \cdot f + f \cdot x = 2xf \tag{2b}$$

$$x \cdot f - f \cdot x = i \frac{\partial f}{\partial p} \tag{2c}$$

$$p \cdot f + f \cdot p = 2pf \tag{2d}$$

$$p \cdot f - f \cdot p = -i \frac{\partial f}{\partial x} \tag{2e}$$

Aus (2b) und (2c) folgt sofort

$$O(x) + O'(x) = 2x \quad \text{und} \quad O(x) - O'(x) = i \frac{\partial}{\partial p},$$

woraus sich ergibt:

$$O(x) = x - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial p}, \quad O'(x) = x + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial p}; \tag{3a}$$

ebenso erhält man:

$$O(p) = p + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x}, \quad O'(p) = p - \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial x}. \tag{3b}$$

Daraus ergibt sich für die $m$-fach wiederholte Anwendung von $O(x)$ auf die Konstante 1:

$$O^m(x) 1 = x^m; \tag{4a}$$

entsprechend:

$$O^m(p) 1 = p^m. \tag{4b}$$

Allgemein ist jeder Ausdruck der Form

$$f = O^{m_1}(x) O^{m_2}(p) O^{m_3}(x) \ldots O^{m_k}(x) \ldots O^{m_N}(p) g, \tag{4c}$$

wo die $m_k$ positive ganze Zahlen und $g$ ein Polynom ist, wieder ein Polynom, und es gilt folgende Gradrelation:

$$\text{grad}(f) = \text{grad}(g) + \sum_{k=1}^{N} m_k. \tag{4d}$$

Diese Behauptungen lassen sich unmittelbar verifizieren.

Umgekehrt lässt sich jedes Basispolynom, d.h. jedes Polynom der Form

$$x^m p^n, \tag{4e}$$

und damit jedes Polynom, als Summe von Ausdrücken der Form (4c) mit $g = 1$ darstellen. Für die Konstante 1 ist das klar; hieraus ergibt sich die Gültigkeit der Behauptung für alle Basispolynome durch Induktion nach dem Polynomgrade, denn aus einer Zerlegung nach dem Muster

$$\begin{aligned} x^m p^n &= x(x^{m-1} p^n) = O(x)(x^{m-1} p^n) + \frac{1}{2i} \frac{\partial}{\partial p} (x^{m-1} p^n) = \\ &= O(x)(x^{m-1} p^n) + \frac{n}{2i} x^{m-1} p^{n-1} \end{aligned} \tag{4f}$$

folgt, dass die Behauptung für alle Basispolynome vom Grade $n$ gilt, falls sie schon für alle Basispolynome von einem Grade kleiner als $n$ gilt. Mit Hilfe des Assoziativgesetzes lässt sich $O(f)$ nunmehr für alle $f$ bestimmen. Aus $(f\cdot g)\cdot h = f\cdot(g\cdot h)$ folgt $O(O(f)g)h = O(f)O(g)h$ als notwendige und hinreichende Bedingung für die Gültigkeit des Assoziativgesetzes:

$$O(O(f)g) = O(f)O(g); \tag{5a}$$

hieraus folgt insbesondere

$$O(O(x)g) = O(x)O(g) \tag{5b}$$

und

$$O(O(p)g) = O(p)O(g). \tag{5c}$$

Wir zeigen jetzt, dass umgekehrt die Gleichungen (5b) und (5c) die Gleichung (5a) zur Folge haben. Wegen der Linearität dieser Gleichungen genügt es nach dem vorher Gesagten, zu zeigen, dass (5a) für $f=O(x)k$ und $f=O(p)k$ gilt, falls (5a) für $f=k$ erfüllt ist. Wir tun dies für den Fall $f=O(x)k$:

$$\begin{aligned} O(O(f)g) &= O(O(O(x)k)g) = O(O(x)O(k)g) = O(x)O(O(k)g) = \\ &= O(x)O(k)O(g) = O(O(x)k)O(g) = O(f)O(g) \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Die Gleichungen (5b) und (5c) sind Rekursionsformeln zur Bestimmung von $O(f)$ für alle Polynome $f$. Die Lösung (es kann offensichtlich höchstens eine Lösung geben) dieser Formeln ist gegeben durch:

$$O(f)g = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} a_{kl}(\partial^{kl}f)\partial^{lk}g, \tag{3c}$$

d.h.

$$O(f) = \sum_k\sum_l a_{kl}(\partial^{kl}f)\partial^{lk}, \tag{3d}$$

wobei

$$a_{kl} = \frac{(-1)^k}{(2i)^{k+l}k!\,l!} = \bar{a}_{lk} = (-1)^{k+l}a_{lk} \tag{3e}$$

Hierbei bezeichnet $\bar{a}$ die zu $a$ konjugiert komplexe Zahl und $\partial^{kl}$ den Differentiationsoperator

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}\frac{\partial^l}{\partial p^l} = \frac{\partial^l}{\partial p^l}\frac{\partial^k}{\partial x^k}.$$

Ausserdem ist zu beachten, dass die Doppelsumme nach endlich vielen Termen abbricht, weil $f$ ein Polynom ist.

Es bleibt zu verifizieren, dass diese Definition von $O(f)$ die Gleichungen (5b) und (5c) erfüllt; wir tun dies wieder für den ersteren Fall. Wegen

$$O(x)g = xg + \frac{i}{2}\frac{\partial g}{\partial p}$$

ist zu zeigen:

$$O(xg)+\frac{i}{2}O\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)=O(x)O(g).$$

Es ist:

$$O(xg)=\sum_{k,l}a_{kl}(\partial^{kl}xg)\partial^{lk}=xO(g)+\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{kl}\binom{k}{1}(\partial^{k-1,l}g)\partial^{lk}.$$

Setzt man: $m=k-1$, so erhält man wegen

$$\binom{k}{1}a_{kl}=k\,a_{kl}=\frac{i}{2}a_{k-1,l}:$$

$$O(xg)=xO(g)+\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{ml}(\partial^{ml}g)\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}=xO(g)+\frac{i}{2}O(g)\frac{\partial}{\partial p};$$

andererseits gilt:

$$O(x)O(g)=\left(x+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial p}\right)O(g)=xO(g)+\frac{i}{2}O\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)+\frac{i}{2}O(g)\frac{\partial}{\partial p}.$$

Durch Vergleich ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung. Für $O'(f)$ (siehe (1b)) findet man:

$$O'(f)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{lk}(\partial^{kl}f)\partial^{lk} \tag{3f}$$

Aus der Konstruktion der $O(f)$ ergibt sich, dass alle $O(f)$ Polynome in $O(x)$ und $O(p)$ sind; ebenso sind die $O'(f)$ Polynome in $O'(x)$ und $O'(p)$. Da nun jeder der Operatoren $O(x)$ und $O(p)$ mit $O'(x)$ und $O'(p)$ kommutiert, gilt auch allgemein

$$O(f)O'(g)-O'(g)O(f)=O. \tag{6}$$

Dies ist eine notwendige Folge der Assoziativität des mechanischen Produktes: $O(f)O'(g)h=f\cdot(h\cdot g)=(f\cdot h)\cdot g=O'(g)O(f)h$.

Aus dem Vorangehenden folgt, dass die Polynome in $x$ und $p$ auch eine Algebra bilden, wenn als Kompositionen die Addition und das mechanische Produkt genommen werden. Die $O(f)$ bilden die sogenannte reguläre Darstellung dieser assoziativen Algebra, Gleichung (5a) ist die Darstellungsrelation. Da $O(f)$ ersichtlich nur gleich dem Nulloperator ist, falls $f$ gleich Null ist, ist diese Darstellung treu.

## 2. Zwei Identitäten

Behauptung: Es gelten die beiden Identitäten für $O(f)$ (siehe (3c)):

$$O(f)g=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{kl}\partial^{lk}g\,\partial^{kl}f \tag{7a}$$

$$O(f)g=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}a_{kl}\partial^{kl}f\,\partial^{lk}g \tag{7b}$$

Zu beachten ist hier, dass der linke Differentiationsoperator auf den ganzen rechts von ihm stehenden Ausdruck wirkt. Wir beweisen (7a), d.h.

$$\sum_{k,l} a_{kl}(\partial^{kl} f)\partial^{lk} = \sum_{k,l} a_{kl}\partial^{lk}(\partial^{kl} f) \tag{7c}$$

Es gilt:

$$\sum_{k,l} a_{kl}\partial^{lk}(\partial^{kl} f) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{\varrho}\sum_{\sigma} a_{kl}\binom{k}{\sigma}\binom{l}{\varrho}(\partial^{k+l-\varrho,k+l-\sigma} f)\partial^{\varrho\sigma}$$

Dabei läuft die Summation über $\varrho$ und $\sigma$ ganzzahlig gemäss:

$$0 \leq \varrho \leq l, \qquad 0 \leq \sigma \leq k.$$

Ordnen wir die Reihe nach den Indizes $\sigma$ und $\varrho$, so wird sie gleich

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{k}^{\infty}\sum_{l}^{\infty} a_{kl}\binom{l}{\varrho}\binom{k}{\sigma}(\partial^{k+l-\varrho,k+l-\sigma} f)\partial^{\varrho\sigma},$$

wobei jetzt über $k$ und $l$ summiert wird gemäss $k \geq \sigma$, $l \geq \varrho$. Wir führen als neuen Summationsindex $n = k + l$ ein und setzen $l = n - k$. Es gilt:

$$a_{kl}\binom{k}{\sigma}\binom{l}{\varrho} = \frac{(-1)^k}{l!\,k!\,(2i)^{k+l}}\cdot\frac{k!\,l!}{(k-\sigma)!\,\sigma!\,(l-\varrho)!\,\varrho!} =$$

$$= \frac{(-1)^k}{(2i)^n\varrho!\,\sigma!\,(k-\sigma)!\,(n-\varrho-k)!}$$

und somit wird die obige Reihe gleich

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\sum_{n}^{\infty}\sum_{k}\frac{(-1)^k}{(2i)^n\varrho!\,\sigma!\,(k-\sigma)!\,(n-\varrho-k)!}(\partial^{n-\varrho,n-\sigma} f)\partial^{\varrho\sigma} \tag{8}$$

Dabei läuft $n$ ganzzahlig von $\varrho+\sigma$ bis $\infty$, und für $k$ gilt: $\sigma \leq k \leq n-\varrho$. Die Summanden mit gleichen Indizes $\varrho$, $\sigma$ und $n$ sind Vielfache des Operators $(\partial^{n-\varrho,n-\sigma} f)^{\varrho\sigma}$. Wir fassen sie zusammen, d.h. summieren über $k$ bei festen $\varrho$, $\sigma$ und $n$. Wir haben also im Wesentlichen die Summe

$$\sum_{k}\frac{(-1)^k}{(k-\sigma)!\,(n-\varrho-k)!}$$

mit $\sigma \leq k \leq n-\varrho$; $n \geq \varrho+\sigma$; $\varrho, \sigma \geq 0$ zu berechnen. Sei zunächst $n = \varrho+\sigma$. Dann ist $k = \sigma$, die Summe besteht aus einem einzigen Summanden und ist gleich $(-1)^\sigma$. Sei jetzt $n > \varrho+\sigma$. Wir setzen $n-\varrho-\sigma = t$, $k-\sigma = s$, $(t>0)$; dann ist $n-\varrho-k = n-\varrho-\sigma-(k-\sigma) = t-s$ und wir erhalten für die obige Summe $(t>0,\ 0 \leq s \leq t)$:

$$\sum_{s}\frac{(-1)^{s+\sigma}}{s!\,(t-s)!} = \frac{(-1)^\sigma}{t!}\sum_{s}\frac{(-1)^s t!}{s!\,(t-s)!} = \frac{(-1)^\sigma}{t!}\sum_{s}(-1)^s\binom{t}{s} = \frac{(-1)^\sigma}{t!}(1-1)^t = 0$$

Im Ausdruck (8) erhalten wir also nur einen Beitrag für $n=\varrho+\sigma$, so dass (8) wird zu

$$\sum_{\varrho=0}^{\infty}\sum_{\sigma=0}^{\infty}\frac{(-1)^{\sigma}}{(2i)^{\varrho+\sigma}\varrho!\,\sigma!}(\partial^{\sigma\varrho}f)\partial^{\varrho\sigma},$$

was mit der Definition (3d) von $O(f)$ identisch ist, q.e.d. Ebenso beweist man die Identität (7b).

### 3. $O(f)$ als Operator in $L^2_{xp}$

Bisher haben wir nur Ausdrücke $O(f)h$ betrachtet, falls $f$ und $h$ Polynome waren. Sei $f$ weiterhin ein Polynom. Da $O(f)$ eine endliche Summe von Produkten von Differentiations- und Multiplikationsoperatoren ist, lässt sich $O(f)h$ definieren für jede Funktion $h(x,p)$, die hinreichende analytische Eigenschaften hat. Man überzeugt sich leicht davon, dass $O(f)h$ immer definiert ist, falls $h$ partielle Ableitungen bis und mit der $n$-ten Ordnung besitzt, wo $n$ den Grad von $f$ bedeutet. Wir definieren weiterhin: $f\cdot h \doteq O(f)h$, sobald die rechte Seite sich definieren lässt. Ebenso setzen wir $h\cdot f=O'(f)h$, wenn die rechte Seite einen Sinn hat, d.h. wenn $h$ genügend oft differenzierbar ist. Sind $f$ und $h$ beide Polynome, so stimmen die beiden Definitionen $h\cdot f=O'(f)h$ und $h\cdot f=O(h)f$ miteinander und mit der früher gegebenen Definition von $h\cdot f$ überein. Die in den vorangehenden Nummern bewiesenen Eigenschaften von $O(f)$ und $O'(f)$ gelten auch jetzt noch, da sie allesamt Identitäten zwischen den in $O(f)$ resp. $O'(f)$ vorkommenden Multiplikations- und Differentiationsoperatoren sind.

Um $O(f)$ in $L^2_{xp}$ zu definieren, machen wir von einer orthonormierten Basis in $L^2_{xp}$ Gebrauch, die wir in Abschnitt 5 näher bestimmen werden. Wir bezeichnen ihre Elemente mit $h_{kl}(x,p)$; sie sind von der Form $h_{kl}(x,p)=P_{kl}(x,p)\exp(-x^2-p^2)$, wo $P_{kl}(x,p)$ ein Polynom in $x$ und $p$ ist. Die lineare Hülle der $h_{kl}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{L}$. Es ist klar, dass die Funktionen $O(f)\psi$ und $O'(f)\psi$ wieder zu $L^2_{xp}$ gehören für jedes $\psi\in\mathfrak{L}$ und $f\in\mathfrak{P}$; sie gehören sogar zu $\mathfrak{L}$, da $O(x)h_{kl}$ und $O(p)h_{kl}$ Linearkombinationen von $h_{k+1,l}$ und $h_{k-1,l}$, $O'(x)h_{kl}$ und $O'(p)h_{kl}$ solche von $h_{k,l+1}$ und $h_{k,l-1}$ sind; dies wird sich später sofort aus von der Quantenmechanik her bekannten Resultaten ergeben. Der Definitionsbereich von $O(f)$ in $L^2_{xp}$ ist also zunächst $\mathfrak{L}$; in Abschnitt 6 werden wir ihn erweitern. Seien nun $f$ und $g$ aus $\mathfrak{P}$, $\psi$ aus $\mathfrak{L}$ gegeben. Es gilt dann:

$$\iint g(f\cdot\psi)\,dx\,dp=\iint(g\cdot f)\psi\,dx\,dp\,;\qquad g,f\in\mathfrak{P}\,;\qquad \psi\in\mathfrak{L}. \tag{9a}$$

Die Integration erstreckt sich hierbei über die ganze $(x,p)$-Ebene. Der Beweis folgt aus der Identität (7a) mit Hilfe von partieller Integration:

$$\iint g\,O(f)\psi\,dx\,dp=\iint g\sum_{k,l}a_{kl}\partial^{lk}(\partial^{kl}f)\psi=$$
$$=\iint\sum_{k,l}(-1)^{k+l}a_{kl}(\partial^{lk}g)(\partial^{kl}f)\psi\,.$$

Wegen $(-1)^{k+l} a_{kl} = a_{lk}$ (siehe (3e)) ist dies gleich

$$\iint (O'(f)g)\psi \, dx\, dp, \qquad \text{q.e.d.}$$

Wir vermerken noch die Relation

$$\overline{(f \cdot g)} = \bar{g} \cdot \bar{f}, \tag{10}$$

die man leicht nachprüft (siehe (3e)).

Weiter definieren wir für zwei beliebige messbare Funktionen $f$ und $g$, sobald die rechte Seite existiert:

$$\langle g, f \rangle = \lim_{a \to \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \bar{g}(x,p) f(x,p) \, dx\, dp. \tag{11a}$$

Nehmen wir für $f$ und $g$ zwei Funktionen $\psi$ und $\phi$ aus $L^2_{xp}$, so ist (11a) identisch mit ihrem Skalarprodukt in $L^2_{xp}$, welches wir auch in runden Klammern schreiben:

$$(\phi, \psi) = \frac{1}{2\pi} \iint \bar{\phi}(x,p) \psi(x,p) \, dx\, dp, \qquad \phi, \psi \in L^2_{xp}. \tag{11b}$$

Wir schreiben, wenn $\psi$ zu $L^2_{xp}$ gehört:

$$\|\psi\| = (\psi, \psi)^{\frac{1}{2}}. \tag{11c}$$

Nunmehr lässt sich (9a) in der Form schreiben:

$$\langle g, f \cdot \psi \rangle = \langle \bar{f} \cdot g, \psi \rangle \tag{9b}$$

Offenbar bleibt (9a) auch gültig, falls $g \in \mathfrak{P}$ durch eine Funktion $\phi \in \mathfrak{L}$ ersetzt wird; also hat man auch:

$$(\phi, O(f)\psi) = (\phi, f \cdot \psi) = (\bar{f} \cdot \phi, \psi) = (O(\bar{f})\phi, \psi) \tag{9c}$$

Hierbei sind gemäss den Ausführungen zu Anfang dieses Abschnittes $f \cdot \psi$ als $O(f)\psi$ und $\phi \cdot f$ als $O'(f)\phi$ definiert. Ganz analog beweist man unter Benützung von (7b) für $f$ und $g$ aus $\mathfrak{P}$, $\psi$ aus $\mathfrak{L}$:

$$\langle g, f \cdot \psi \rangle = \langle g \cdot \bar{\psi}, f \rangle. \tag{9d}$$

Mit Hilfe von (10) lässt sich leicht zeigen, dass die Gleichungen (9) gültig bleiben, wenn man auf beiden Seiten die Faktoren des mechanischen Produktes miteinander vertauscht.

Wir machen nun Gebrauch vom Begriff der Adjungierten $A^*$ eines linearen Operators $A$ in einem beliebigen Hilbertraum $\mathfrak{H}$; vorausgesetzt wird, dass der Definitionsbereich von $A$ dicht in $\mathfrak{H}$ ist. Sei ein Element $\phi \in \mathfrak{H}$ gegeben; genau dann wird $A\phi$

definiert, falls ein Element $\phi' \in \mathfrak{H}$ existiert, sodass die Relation

$$(\phi, A\psi) = (\phi', \psi)$$

für alle Elemente $\psi$ des Definitionsbereiches von $A$ besteht. Da dieser Bereich dicht in $\mathfrak{H}$ ist, bestimmt $\phi$ eindeutig das Element $\phi'$, welches gleich $A^* \phi$ gesetzt wird. $A^*$ ist wieder ein linearer Operator in $\mathfrak{H}$, dessen Definitionsbereich aber nicht dicht in $\mathfrak{H}$ zu sein braucht. (siehe [1], Seite 284).

Nehmen wir für $A$ speziell den Operator $O(f)$ $(f \in \mathfrak{P})$, dessen Definitionsbereich gleich $\mathfrak{L}$ und folglich dicht im Hilbertraum $L^2_{xp}$ ist, so folgt aus (9c) unmittelbar, dass $\mathfrak{L}$ zum Definitionsbereich von $O^*(f)$ gehört, und dass in $\mathfrak{L}$ $O^*(f) = O(\bar{f})$, mithin also gilt:

$$O^*(f) \supseteq O(\bar{f}). \tag{9e}$$

Insbesondere ist $O(f)$ symmetrisch, falls $f$ reell ist.

## 4. Transformation von $O(x)$ und $O'(x)$ auf Diagonalform

Im Folgenden werde $O(f)$ als Operator in $L^2_{xp}$ betrachtet. Da $O(x)$ und $O'(x)$ kommutieren, kann man versuchen, sie gleichzeitig auf Diagonalform zu bringen. Wir suchen also eine unitäre Transformation des Raumes $L^2_{xp}$ auf einen Raum $L^2_{\xi\eta}$, derart, dass die Operatoren $O(x)$ und $O'(x)$ in die Multiplikationsoperatoren $\xi$ und $\eta$ transformiert werden. Das Skalarprodukt in $L^2_{\xi\eta}$ wird wie üblich definiert:

$$(\phi_1, \phi_2) = \iint \bar{\phi}_1(\xi, \eta)\, \phi_2(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{12}$$

Wir bezeichnen die gesuchte Transformation mit $U$ und schreiben:

$$(U\psi)(\xi, \eta) = \phi(\xi, \eta); \quad (U^{-1}\phi)(x, p) = \psi(x, p) \tag{13a}$$

$$U\,O(f)\,U^{-1} = O_\xi(f); \quad U\,O'(f)\,U^{-1} = O'_\eta(f) \tag{13b}$$

Transformieren wir zunächst:

$$\chi(x, \sigma) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(x, p)\, e^{-ip\sigma}\, dp, \quad \psi(x, p) = \int \chi(x, \sigma)\, e^{ip\sigma}\, d\sigma, \tag{14a}$$

so gehen die Operatoren $O(x)$, $O(p)$, $O'(x)$, $O'(p)$ über in:

$$O(x) \to x + \frac{\sigma}{2}, \quad O'(x) \to x - \frac{\sigma}{2}, \quad O(p) \to \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right), \quad O'(p) \to \frac{1}{i}\left(\frac{\partial}{\partial\sigma} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\right).$$

Die Transformation (14a) ist für jedes $x$ die sogenannte Fouriertransformation:

$$\chi(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int \psi(p) \exp(-ip\sigma)\, dp$$

Sie hat die Inverse:

$$\psi(p) = \int \chi(\sigma) \exp(ip\sigma)\, d\sigma$$

Sie ist eine (bei geeigneter Definition der Skalarprodukte unitäre) Transformation des Raumes $L_p^2$ auf den Raum $L_\sigma^2$. Wenn die Integrale auch nicht immer im üblichen Sinne konvergieren, so konvergieren sie doch für alle Elemente der Räume $L_p^2$ und $L_\sigma^2$ in dem Sinn, dass:

$$\|\chi(\sigma) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{+\omega} \psi(p) \exp(-ip\sigma)\,dp\| \to 0, \quad \text{für} \quad \omega \to \infty \qquad \text{([1], Seite 277f)}$$

Ausserdem gilt für alle $\sigma$ (nicht nur bis auf eine Menge vom Mass Null):

$$\chi(\sigma) = \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{+a} \left(\int \chi(\tau) \exp(ip\tau)\,d\tau\right) \exp(-ip\sigma)\,dp, \tag{14b}$$

falls $\chi(\sigma)$ stetig, absolut integrierbar und in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation ist. Entsprechendes gilt für $\psi(p)$. Setzen wir weiter:

$$x + \frac{\sigma}{2} = \xi,\ x - \frac{\sigma}{2} = \eta, \quad \text{also} \quad x = \tfrac{1}{2}(\xi + \eta),\ \sigma = \xi - \eta, \tag{14c}$$

$$\phi(\xi,\eta) = \chi\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \xi - \eta\right); \quad \chi(x,\sigma) = \phi\left(x + \frac{\sigma}{2}, x - \frac{\sigma}{2}\right), \tag{14d}$$

so erhalten wir schliesslich:

$$\phi(\xi,\eta) = \frac{1}{2\pi}\int \psi\left(\frac{\xi+\eta}{2}, p\right) \exp(i(\xi-\eta)p)\,dp, \tag{15a}$$

$$\psi(x,p) = \int \phi\left(x + \frac{\sigma}{2}, x - \frac{\sigma}{2}\right) \exp(-ip\sigma)\,d\sigma. \tag{15b}$$

$$O_\xi(x) = \xi, \quad \text{d.h.} \quad O_\xi(x)\phi(\xi,\eta) = \xi\phi(\xi,\eta); \quad O_\xi(p) = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial\xi} \tag{13c}$$

$$O'_\eta(x) = \eta; \quad O'_\eta(p) = i\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{13d}$$

Nach (14b) gilt für alle $\xi$ und $\eta$:

$$(U(U^{-1}\phi))(\xi,\eta) = \phi(\xi,\eta), \tag{14e}$$

falls $\phi(x + (\sigma/2), x - (\sigma/2))$ für jedes feste $x$ als Funktion von $\sigma$ stetig, absolut integrierbar und in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation ist. Aus den Gleichungen

(13c) folgt, dass $O_\xi(f)$ ($f$ ein Polynom) nur auf die Variable $\xi$ wirkt, denn $O_\xi(f)$ ist ein Polynom in $O_\xi(x)$ und $O_\xi(p)$. Betrachten wir nun die Gesamtheit der Elemente $\chi(\xi)a(\eta)\in L^2_{\xi\eta}$, wo $a(\eta)$ jeweils fest gewählt ist und $\chi(\xi)$ ganz $L^2_\xi$ durchläuft. Sie bildet einen Unterraum, der nach dem Vorangehenden von den $O_\xi(f)$ in sich transformiert wird und offenbar auch nicht weiter in gegenüber allen $O_\xi(f)$ invariante Unterräume zerlegt werden kann. Der Raum $L^2_{\xi\eta}$ lässt sich somit in eine orthogonale Summe von invarianten Teilräumen zerlegen, die mit $L^2_\xi$ identifiziert werden können, und auf denen $O_\xi(f)$ zu ein und demselben Operator in $L^2_\xi$ reduziert wird, den wir der Einfachheit halber auch mit $O_\xi(f)$ bezeichnen. (Diese Zerlegung ist natürlich nicht eindeutig, obwohl $O_\xi(f)$ es ist.) Vermöge der Transformation $U$ überträgt sich diese Zerlegung auf $L^2_{xp}$ und die Operatoren $O(f)$. Entsprechendes gilt für die $O'_\eta(f)$ und $O'(f)$.

## 5. Definition von $O(\psi)$ für $\psi$ aus $L^2_{xp}$

Definieren wir:

$$\bar{O}(f) = \sum_{k,l} \bar{a}_{kl}(\partial^{kl} \bar{f})\partial^{lk}, \tag{16a}$$

so gilt:

$$O'(f) = \bar{O}(\bar{f}). \tag{16b}$$

Bezeichnen wir die antiunitäre Transformation, die jedem $\psi\in L^2_{xp}$ die Funktion $\bar{\psi}$ zuordnet, mit $J$ ($J^2$ ist gleich der Identität). Es gilt:

$$O(f) = J\bar{O}(f)J; \qquad \bar{O}(f) = JO(f)J. \tag{16c}$$

Somit können wir schliesslich schreiben:

$$O'(f) = JO(\bar{f})J \tag{16d}$$

Wir definieren weiter die antiunitäre Transformation $In$ in $L^2_{\xi\eta}$ durch

$$(In\,\phi)(\xi,\eta) = \bar{\phi}(\eta,\xi), \qquad \phi(\xi,\eta)\in L^2_{\xi\eta}. \tag{17a}$$

Man prüft anhand der Formeln (15) leicht nach, dass

$$UJU^{-1} = In \tag{17b}$$

Mit $H$ bezeichnen wir die Funktion $H(x,p)=\frac{1}{2}(x^2+p^2)$. Die Operatoren

$$O_\xi(H) = \frac{1}{2}\left(\xi^2 - \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right), \qquad O'_\eta(H) = \frac{1}{2}\left(\eta^2 - \frac{\partial^2}{\partial\eta^2}\right) \tag{18a}$$

sind aus der Quantenmechanik vom Problem des Oscillators her bekannt. Sie haben, aufgefasst als Operatoren in $L^2_\xi$ resp. $L^2_\eta$, ein diskretes, einfaches Spektrum mit den Eigenwerten

$$\lambda_k = k + \tfrac{1}{2}, \qquad k = 0,1,2,\ldots \tag{18b}$$

Die zugehörigen orthonormierten Eigenfunktionen sind die Hermiteschen Funktionen, die wir mit $H_k$ bezeichnen:

$$H_k(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2} p_k(\xi), \qquad H_l(\eta) = e^{-\frac{1}{2}\eta^2} p_l(\eta), \qquad \bar{H}_k = H_k \tag{18c}$$

Dabei sind die $p_k(\xi)$ Polynome in $\xi$ vom Grade $k$. Das Skalarprodukt in $L^2_\xi$ sei:

$$(\chi_1, \chi_2)_\xi = \int \bar{\chi}_1(\xi)\chi_2(\xi)\,d\xi\,; \qquad \chi_1, \chi_2 \in L^2_\xi\,; \tag{18d}$$

analog für $\eta$. Die Funktionen:

$$H_{kl}(\xi,\eta) = H_k(\xi)\,H_l(\eta), \qquad I\,n\,H_{kl} = H_{lk}, \tag{18e}$$

bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2_{\xi\eta}$. Die Funktionen

$$h_{kl} = U^{-1} H_{kl} \in L^2_{xp} \tag{18f}$$

wurden in Abschnitt 3 zur Definition von $O(f)$ als Operator in $L^2_{x\eta}$ verwendet und dort auch mit $h_{kl}$ bezeichnet; sie erzeugen die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{L}$. Wegen $I n H_{kl} = H_{lk}$ gilt auch:

$$\bar{h}_{kl} = J\,h_{kl} = h_{lk} \tag{18g}$$

Wie in Anhang V gezeigt wird, haben die $h_{kl}$ die Form:

$$h_{kl} = r^{|n|} \exp(-i\,n\,\varphi)\,P_{kl}(r^2) \exp(-r^2)\,; \qquad P_{kl} = P_{lk}. \tag{18h}$$

Dabei ist:

$$r \exp(i\varphi) = x + ip, \; n = k - l \tag{18i}$$

und $P_{kl}(r^2)$ ist ein Polynom in $r^2$ vom Grade $(k+l-|k-l|)/2$ mit reellen Koeffizienten. Die Gleichungen

$$O(H)\,h_{kl} = \lambda_k h_{kl}, \qquad O'(H)\,h_{kl} = \lambda_l h_{kl} \tag{19a}$$

sind nach Definition gleichbedeutend mit

$$H \cdot h_{kl} = \lambda_k h_{kl} \tag{19b}$$

und

$$h_{kl} \cdot H = \lambda_l h_{kl}\,; \tag{19c}$$

insbesondere ist $(h_k \equiv h_{kk})$:

$$H \cdot h_k = h_k \cdot H = \lambda_k h_k \tag{19d}$$

Früher haben wir schon den Ausdruck $O'(f)h_{kl}(f \in \mathfrak{P})$ definieren können, der nach (1b) gleich dem Produkt $h_{kl} \cdot f$ ist. Nach (1a) ist er dann auch gleich $O(h_{kl})f$. Mithin bestand der Definitionsbereich von $O(h_{kl})$ bisher aus allen Polynomen.

Nun soll versucht werden, den Definitionsbereich von $O(h_{kl})$ auf $L^2_{xp}$ auszudehnen, wobei $O(h_{kl})$ weiterhin als Operator aufgefasst werden soll, der aus der regulären Darstellung einer gewissen Produktbildung (eben des mechanischen Produktes) resultiert. Dies soll nach Möglichkeit so geschehen, dass reellen Funktionen weiterhin symmetrische Operatoren entsprechen, dass die Gleichung (6) gültig bleibt und dass in den Gleichungen (9) statt der Polynome $f$ und $g$ auch die $h_{kl}$ eingesetzt werden können. Wir werden gleich sehen, dass $O(h_{kl})$ durch diese Forderungen eindeutig bestimmt ist als Operator in $L^2_{x\,p}$. Daraus ergibt sich unmittelbar und eindeutig die Definition von $O(\phi)$ für beliebiges $\phi$ aus $L^2_{x\,p}$. Anschliessend wird umgekehrt gezeigt, dass die so gefundenen Operatoren die oben formulierten Forderungen erfüllen.

Aus (19d) folgt:

$$O(H)O(h_k) = O(h_k)O(H), \tag{19e}$$

da ja allgemein $O(f\cdot g)=O(f)O(g)$ sein muss. Weiter ist nach (6):

$$O'(H)O(h_k) = O(h_k)O'(H). \tag{19f}$$

Die Gleichungen (19e) und (19f) bedeuten, dass $O(h_k)$ jeden Unterraum von $L^2_{x\,p}$, der zu einem Eigenwert $\lambda_k$ von $O(H)$ und zu einem Eigenwert $\lambda_l$ von $O'(H)$ gehört, in sich transformiert; diese Unterräume sind aber gerade die von den $h_{kl}$ gebildeten eindimensionalen Räume. Es gilt also insbesondere $O(h_k)h_k=\mu h_k$, und wie wir sehen werden, ist $\mu=1$, d.h. man hat:

$$O(h_k)\,h_k = h_k\cdot h_k = h_k \tag{19g}$$

und daraus folgt wie nach (19d):

$$O(h_k)O(h_k) = O(h_k). \tag{19h}$$

Nun ist $h_k$ reell (siehe (18g)), also muss sein:

$$O^*(h_k) \supseteq O(h_k). \quad \text{(vgl. dazu (9e))} \tag{19i}$$

Aus den Gleichungen (19h) und (19i) folgt, dass $O(h_k)$ ein Projektionsoperator ist ([1], Seite 252ff).

Aus (19d) folgt weiter: $O(H)O(h_k)=\lambda_k O(h_k)$ und somit auch

$$O_\xi(H)O_\xi(h_k) = \lambda_k O_\xi(h_k). \tag{19k}$$

Da $O_\xi(h_k)$ mit $O_\xi(H)$ kommutiert, und zu $\lambda_k$ nur die Funktion $H_k(\xi)$ als Eigenelement gehört, ist $O_\xi(h_k)$ der auf $H_k$ projizierende Operator (siehe Anhang I).

Bestimmen wir noch $\mu$ (siehe unmittelbar vor (19g)).

Wegen der Normierung der $h_k$ und wegen (2a) muss gelten:

$$1 = (h_k, h_k) = (1\cdot h_k, h_k)$$

Um dies weiter umzuformen, benützen wir die Gleichung (9d), wobei aber jetzt für $g$ ein Element aus $\mathfrak{L}$ (nämlich $h_k$) gewählt wird; dass (9d) auch in diesem Falle gültig sei, ist ja eine unserer Forderungen. Wegen $h_k \cdot h_k = \mu h_k$ findet man also:

$$1 = (1 \cdot h_k, h_k) = \langle 1, h_k \cdot h_k \rangle = \mu \langle 1, h_k \rangle \text{ mit} \tag{20a}$$

$$\langle 1, h_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \iint h_k(x,p)\, dx\, dp \tag{20b}$$

Der Ausdruck

$$\frac{1}{2\pi} \int h_k(x,p)\, dp$$

ist nach (15a) gleich $H_{kk}(x, x)$, denn man überzeugt sich auf Grund von (18c) davon, dass $H_{kk}$ die für die Gültigkeit von (14e) hinreichenden Voraussetzungen erfüllt. Wegen der Normierung der $H_k$ erhält man folglich für (20b):

$$\langle 1, h_k \rangle = \int H_{kk}(x,x)\, dx = \int H_k^2(x)\, dx = 1 \tag{20c}$$

Zusammen mit (20a) ergibt sich somit: $\mu = 1$, q.e.d.
Es bleibt noch $O(h_{kl})$ zu bestimmen. Sei $f$ ein Polynom; mit Hilfe der schon in (20a) benützten Verallgemeinerung von (9d) ergibt sich:

$$\begin{aligned} \langle h_{kl} \cdot \bar{h}_{kl}, f \rangle &= (h_{kl}, O(f)\, h_{kl}) = (H_{kl}, O_\xi(f)\, H_{kl}) = \\ &= (H_k, O_\xi(f)\, H_k)_\xi (H_l, H_l)_\eta = (H_k, O_\xi(f)\, H_k)_\xi . \end{aligned} \tag{21a}$$

Die Ausdrücke in (21a) hängen also garnicht von $l$ ab, und folglich findet man, indem man $l = k$ setzt:

$$\langle h_{kl} \cdot \bar{h}_{kl}, f \rangle = \langle h_k \cdot h_k, f \rangle = \langle h_k, f \rangle \tag{21b}$$

Da $f$ ein beliebiges Polynom sein kann, so folgt:

$$h_{kl} \cdot \bar{h}_{kl} = h_k \tag{22a}$$

Mit Hilfe von

$$\langle \bar{h}_{kl} \cdot h_{kl}, f \rangle = (h_{kl}, O'(f)\, h_{kl})$$

beweist man entsprechend:

$$\bar{h}_{kl} \cdot h_{kl} = h_l . \tag{22b}$$

Schliesslich findet man:

$$\begin{aligned} (H_k, O_\xi(h_{kl})\, H_l)_\xi &= (H_{kl}, O_\xi(h_{kl})\, H_{ll}) = (h_{kl}, O(h_{kl})\, h_l) = \\ &= (h_{kl}, h_{kl} \cdot h_l) = (\bar{h}_{kl} \cdot h_{kl}, h_l) = (h_l, h_l) = 1 , \end{aligned} \tag{22c}$$

wobei von (22b) Gebrauch gemacht wurde. Wegen (9e) folgt aus den Gleichungen (22), dass $O_\xi(h_{kl})$ in $L_\xi^2$ gegeben ist durch

$$O_\xi(h_{kl})\, H_m = \delta_{lm} H_k , \tag{23a}$$

woraus sich ergibt:

$$O(h_{kl})\, h_{mn} = h_{kl} \cdot h_{mn} = \delta_{lm} h_{kn} = O'(h_{mn})\, h_{kl} \tag{23b}$$

$\delta_{lm}$ ist das bekannte Kroneckersche Symbol. Die Herleitung von (23a) aus den Gleichungen (22) ist im Anhang II gegeben.

Seien nun zwei Funktionen $\psi_1$ und $\psi_2$ aus $L^2_{xp}$ gegeben. Wir entwickeln sie in Reihen nach den $h_{kl}$:

$$\psi_1 = \sum_{k,l} a_{kl} h_{kl}, \qquad \psi_2 = \sum_{k,l} b_{kl} h_{kl} \tag{24a}$$

mit

$$\sum_{kl} |a_{kl}|^2 = \|\psi_1\|^2 < \infty, \sum_{k,l} |b_{kl}|^2 < \infty; \tag{24b}$$

die Zahlenreihen

$$c_{kl} = \sum_m a_{km} b_{ml} \tag{24c}$$

konvergieren wegen (24b) absolut. Weiter ist

$$\sum_{k,l} |c_{kl}|^2 = \sum_{k,l} |\sum_m a_{km} b_{ml}|^2 \leq \sum_{k,l} \sum_m |a_{km}|^2 \sum_n |b_{nl}|^2 = \|\psi_1\|^2 \, \|\psi_2\|^2. \tag{24d}$$

Daher definiert die Reihe

$$\sum_{k,l} c_{kl} h_{kl} = \psi_3 \tag{24e}$$

eine Funktion $\psi_3$ in $L^2_{xp}$, und wir setzen fest:

$$\psi_1 \cdot \psi_2 = \psi_3 \tag{24f}$$

Man erhält $\psi_3$ formal durch gliedweises Ausmultiplizieren der Reihen (24a) für $\psi_1$ und $\psi_2$; nach (24d) gilt zudem:

$$\|\psi_1 \cdot \psi_2\| \leq \|\psi_1\| \, \|\psi_2\| \tag{24g}$$

Auf Grund dieser Gleichung ist die Definition von $\psi_1 \cdot \psi_2$ unabhängig von der Wahl einer Basis in $L^2_{xp}$ und eindeutig für jedes Paar $\psi_1, \psi_2 \in L^2_{xp}$ gegeben.

Dem mechanischen Produkt in $L^2_{xp}$ entspricht vermöge $U$ eine Produktbildung in $L^2_{\xi\eta}$: Für $\phi_1, \phi_2 \in L^2_{\xi\eta}$ legen wir fest:

$$\phi_1 \cdot \phi_2 = U((U^{-1}\phi_1) \cdot (U^{-1}\phi_2)) \tag{24h}$$

Mit Hilfe der Gleichung (23a) ergibt sich:

$$(O_\xi(h_{kl}) H_m)(\xi) = \int H_{kl}(\xi, \eta) H_m(\eta) \, d\eta \tag{25a}$$

und daraus

$$(O_\xi(\psi)\phi)(\xi, \eta) = \int \phi_\psi(\xi, \zeta) \phi(\zeta, \eta) \, d\zeta; \qquad \psi \in L^2_{xp}; \qquad \phi, \phi_\psi \in L^2_{\xi\eta}, \tag{25b}$$

wobei $U\psi = \phi_\psi$ gesetzt wurde. Hieraus folgt unmittelbar:

$$(\phi_1 \cdot \phi_2)(\xi, \eta) = \int \phi_1(\xi, \zeta) \phi_2(\zeta, \eta) \, d\zeta \quad \text{mit} \quad \|\phi_1 \cdot \phi_2\| \leq \|\phi_1\| \, \|\phi_2\| \tag{25c}$$

Wegen $\|\phi_\psi\| < \infty$ ist der in (25b) gegebene Integraloperator vom Hilbert-Schmidtschen Typ und die Integrale in (25b) existieren für fast alle $\xi$, d.h. für alle $\xi$ mit Ausnahme eventuell einer Nullmenge, sofern $\phi(\xi, \eta)$ bei festem $\eta$ zu $L_\xi^2$ gehört, d.h. sofern $\int |\phi|\xi, \eta|^2 d\xi < \infty$. Das ist für fast alle $\eta$ der Fall, wegen $\|\phi\| < \infty$ ([1], Seite 135ff).

Nachdem wir durch eine Reihe von Forderungen die Operatoren $O(\psi)$, $\psi \in L_{xp}^2$, eindeutig festgelegt haben, müssen wir noch zeigen, dass diese Forderungen tatsächlich von den $O(\psi)$ erfüllt werden.

Man überzeugt sich anhand der Gleichungen (24h), (25b), (25c) von der Gültigkeit der Relation:

$$O(\psi_1 \cdot \psi_2) = O(\psi_1) O(\psi_2); \qquad \psi_1, \psi_2 \in L_{xp}^2. \tag{26a}$$

Ebenso findet man, da $O_\xi(f)$ nur auf die Variable $\xi$ wirkt:

$$O(O(f)\psi) = O(f) O(\psi); \qquad f \in \mathfrak{P}, \psi \in \mathfrak{L}. \tag{26b}$$

Ausserdem ist unmittelbar klar, dass für $f \in \mathfrak{P}$, $\psi_1$, $\psi_2 \in L_{xp}^2$,

$$[O(\psi_1), O'(\psi_2)] = [O(\psi_1), O'(f)] = [O(f), O'(\psi_1)] = 0, \tag{26c}$$

und dass

$$O'(\psi) = J\, O(\bar{\psi}) J, \ (\psi \in L_{xp}^2).$$

Der zu $\phi_\psi$ in Gleichung (25b) adjungierte Kern ist bekanntlich gegeben durch $\phi_\psi^*(\xi, \eta) = \bar{\phi}_\psi(\eta, \xi)$. Wegen (17) gilt $\phi_\psi^* = \phi_{\bar{\psi}}^*$, also hat man:

$$O^*(\psi) = O(\bar{\psi}) \tag{26d}$$

Diese Gleichung entspricht den Gleichungen (9) für den Fall, dass alle drei beteiligten Funktionen zu $L_{xp}^2$ gehören; die Gültigkeit dieser Relation ergibt sich auch direkt aus der folgenden Gleichung ($\bar{h}_{kl} = h_{lk}$):

$$(h_{mn}, h_{kl} \cdot h_{\varrho\sigma}) = \delta_{mk} \delta_{l\varrho} \delta_{n\sigma} = (h_{lk} \cdot h_{mn}, h_{\varrho\sigma}) \tag{26e}$$

Es bleibt die Relation

$$(\phi, O(f)\psi) = \langle \phi \cdot \bar{\psi}, f \rangle; \qquad f \in \mathfrak{P}, \ \phi, \psi \in \mathfrak{L} \tag{26f}$$

zu beweisen; wir können uns auf die $h_{kl}$ beschränken. Es ist also zu zeigen, dass

$$(h_{kl}, f \cdot h_{mn}) = \langle h_{kl} \cdot h_{nm}, f \rangle = \delta_{ln} \langle h_{km}, f \rangle.$$

Da wir bereits wissen, dass alle Terme in der obigen Gleichung verschwinden für $l \neq n$, können wir von vornherein $l = n$ annehmen, d.h. wir zeigen: $(h_{kl}, f \cdot h_{ml}) = \langle h_{km}, f \rangle$. Sei zunächst $f = 1$. Dann ist zu zeigen $((h_{kl}, h_{ml}) = \delta_{km})$:

$$\delta_{km} = \langle h_{km}, 1 \rangle = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} h_{km} \, dx \, dp.$$

Hierbei ist:

$$h_{km}(x,p)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma p}\chi_{km}(x,\sigma)\,d\sigma$$

mit

$$\chi_{km}(x,\sigma)=H_k\left(x+\frac{\sigma}{2}\right)H_m\left(x-\frac{\sigma}{2}\right).$$

$\chi_{km}(x,\sigma)$ ist für jedes $x$ absolut integrierbar:

$$\int\left|H_k\left(x+\frac{\sigma}{2}\right)\right|\left|H_m\left(x-\frac{\sigma}{2}\right)\right|d\sigma\leq 2\left(\int\left|H_k\left(x+\frac{\sigma}{2}\right)\right|^2\frac{d\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int\left|H_m\left(x-\frac{\sigma}{2}\right)\right|^2\frac{d\sigma}{2}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=2\,\|H_k\|\;\|H_m\|=2.$$

Betrachten wir die Funktionen

$$\chi_b(\sigma)=\int_{-b}^{+b}\chi(x,\sigma)\,dx \tag{27a}$$

($\chi_{km}$ ist kurz mit $\chi$ bezeichnet). $\chi_b(\sigma)$ ist offenbar für jedes $\sigma$ stetig und in jedem endlichen Intervall von beschränkter Variation; die Absolutwert-Integrale konvergieren gleichmässig in $b$:

$$\int_{N_1}^{N_2}|\chi_b(\sigma)|\,d\sigma=\int_{N_1}^{N_2}\left|\int_{-b}^{+b}\chi(x,\sigma)\,dx\right|d\sigma\leq\int_{N_1}^{N_2}\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi(x,\sigma)|\,dx\,d\sigma\leq\varepsilon$$

$$\text{für}\quad N_\varepsilon<N_1\leq N_2\quad\text{oder}\quad N_1\leq N_2<-N_\varepsilon,\ N_\varepsilon>0,$$

denn es ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\chi(x,\sigma)|\,dx\,d\sigma=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|H_k\left(x+\frac{\sigma}{2}\right)\right|\left|H_m\left(x-\frac{\sigma}{2}\right)\right|dx\,d\sigma=$$

$$=\int|H_k(\xi)|\,d\xi\int|H_m(\eta)|\,d\eta<\infty,$$

da $\int|H_k(\xi)|\,d\xi<\infty$ für alle $k$ (siehe (18c)). Folglich ist:

$$\left|\int_{-a}^{+a}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ip\sigma}\chi_b(\sigma)\,d\sigma\right)dp-\chi_b(0)\right|<\varepsilon,\qquad\text{für}\quad a>a(\varepsilon,b). \tag{27b}$$

Nun sind die $\chi_b(\sigma)$ im Punkte $\sigma=0$ gleichmässig für alle $b$ stetig (Anhang III); daraus ergibt sich nach der Theorie der Fourier-Integrale, dass (27b) gleichmässig in $b$ konvergiert. Man hat also insbesondere für $b=a$:

$$\int_{-a}^{+a}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\sigma}\left(\int_{-a}^{+a}\chi(x,\sigma)\,dx\right)d\sigma\right\}dp \to \int_{-a}^{+a}\chi(x,0)\,dx \quad \text{für} \quad a\to\infty; \tag{27c}$$

weiter gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\sigma}\left(\int_{-a}^{+a}\chi(x,\sigma)\,dx\right)d\sigma = \int_{-a}^{+a}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ip\sigma}\chi(x,\sigma)\,d\sigma\right)dx$$

wegen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\chi(x,\sigma)|\,d\sigma < \infty$$

(siehe oben).

Setzt man für $\chi(x,\sigma)$ ein und lässt $a$ über alle Grenzen wachsen, so folgt:

$$\int_{-a}^{+a}\int_{-a}^{+a} h_{km}\,dx\,dp \to \int_{-a}^{+a} H_k(x)\,H_m(x)\,dx \to \delta_{km} \qquad \text{q.e.d.}$$

Wir haben also $(\phi, 1\cdot\psi)=\langle\phi\cdot\bar{\psi}, 1\rangle$ für alle $\phi$ und $\psi$ aus $\mathfrak{L}$. Daraus ergibt sich (26f) für alle $f$ aus $\mathfrak{P}$ durch Rekursion; wir zeigen nämlich, dass (26f) für $f=g\cdot x$ und $f=g\cdot p$ gilt, falls (26f) für $f=g$ gilt: Nach Voraussetzung ist $(\phi, g\cdot x\cdot\psi)=\langle\phi\cdot\bar{\psi}\cdot x, g\rangle$, da $x\cdot\psi$ zu $\mathfrak{L}$ gehört. Da auch $\phi\cdot\bar{\psi}$ wieder zu $\mathfrak{L}$ gehört, so erhält man mittels partieller Integration $\langle\phi\cdot\bar{\psi}\cdot x, g\rangle=\langle\phi\cdot\bar{\psi}, g\cdot x\rangle$, woraus sich die Behauptung ergibt. Mit $p$ anstelle von $x$ verfährt man entsprechend. Damit ist (26f) bewiesen.

Betrachten wir schliesslich eine Zerlegung von $\phi\in L^2_{\xi\eta}$ von der Art:

$$\phi(\xi,\eta)=\sum_k \phi_k(\xi,\eta)=\sum_k \varphi_k(\xi)\,\alpha_k(\eta), \tag{28a}$$

wo die $\alpha_k(\eta)$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2_\eta$ bilden, und die Funktionen $\varphi_k(\xi)$ zu $L^2_\xi$ gehören. Wie oben sei $In\phi$ mit $\phi^*$ bezeichnet. Auf Grund von (25c) findet man:

$$(\phi_1\cdot\phi_2^*)(\xi,\eta)=\sum_k(\phi_{1k}\cdot\phi_{2k}^*)(\xi,\eta)=\sum_k\varphi_{1k}(\xi)\,\bar{\varphi}_{2k}(\eta); \tag{28b}$$

Setzt man für

$$\psi\in L^2_{xp}:\ \phi=U\psi,\quad \psi_k=U^{-1}\phi_k,\quad \psi=\sum_k\psi_k,$$

so gilt analog:

$$(\psi_1\cdot\bar{\psi}_2)=\sum_k\psi_{1k}\cdot\bar{\psi}_{2k};\quad \psi_{1k}\cdot\bar{\psi}_{2l}=0 \quad \text{für} \quad k\neq l. \tag{28c}$$

Hierbei gilt:

$$\psi_{1k}\cdot\bar{\psi}_{2k}=\psi_{1l}\cdot\bar{\psi}_{2l}, \quad \text{falls} \quad \varphi_{1k}=\varphi_{1l} \quad \text{und} \quad \varphi_{2k}=\varphi_{2l} \quad \text{ist.} \tag{28d}$$

## 6. Definition von $O(f)$ für messbare Funktionen

Ist Gleichung (26f) erfüllt, so bedeutet das, dass man, ohne zu der ursprünglich in Abschnitt 3 gegebenen Definition in Widerspruch zu geraten, $O(f)\psi$ $(f\in\mathfrak{P},\ \psi\in\mathfrak{L})$ durch die rechte Seite von (26f) definieren kann. Dieses Verfahren soll jetzt auf allgemeinere Funktionenklassen ausgedehnt werden.

Mit $L_\alpha$ bezeichnen wir in Folgenden den Unterraum von $L^2_{x\,p}$, dessen Elemente $\psi$ die Eigenschaft haben, dass

$$(U\psi)(\xi,\eta)=\tau(\xi)\alpha(\eta),\ \psi(\xi)\in L^2_\xi,\ \alpha(\eta)\in L^2_\eta,\ \|\alpha\|=1\,, \tag{29a}$$

mit einem festen $\alpha(\eta)\in L^2_\eta$. Für jedes vollständige orthonormierte System $\{\alpha_k\}$ in $L^2_\eta$ ist die (orthogonale) Summe der zugehörigen $L_{\alpha_k}$ gleich dem ganzen Raum $L^2_{x\,p}$. Hieraus schliesst man mit Hilfe der Gleichung (28c), dass jeder durch die Bilinearform $\langle f,\phi\cdot\bar{\psi}\rangle$ gemäss Gleichung (26f) definierte Operator notwendig den Raum $L_\alpha$ für beliebiges $\alpha\in L^2_\eta$ in sich transformiert. Wir setzen also zunächst voraus, dass die betrachteten Funktionen $\psi\in L^2_{x\,p}$ zu einem festen $L_\alpha$ gehören.

Bezeichnen wir weiter mit $\mathfrak{M}$ die lineare Hülle der $H_k(\xi)$ in $L^2_\xi$, mit $\mathfrak{M}_\alpha$ die Gesamtheit der Funktionen $\psi\in L_\alpha$, für die $\tau(\xi)$ in Gleichung (29a) zu $\mathfrak{M}$ gehört.

Sei im Folgenden $f$ eine messbare Funktion in $x$ und $p$.

Für festes $\psi\in\mathfrak{M}_\alpha$ definiert die Bilinearform

$$F(\phi)=\langle f,\phi\cdot\bar{\psi}\rangle,\qquad \psi\in\mathfrak{M}_\alpha,\qquad \psi \text{ fest}\,, \tag{29b}$$

in $\mathfrak{M}_\alpha$ ein lineares Funktional von $\phi\in\mathfrak{M}_\alpha$. Wir definieren nun $O(f)\psi$ für $\psi\in\mathfrak{M}_\alpha$ genau dann, wenn

a) (29b) für alle $\phi\in\mathfrak{M}_\alpha$ existiert
b) $|F(\phi)|\leq C\,\|\phi\|$ für alle $\phi\in\mathfrak{M}_\alpha$ mit einer von $\phi$ unabhängigen Zahl $C\geq 0$.

Die Bedingung b) ist notwendig und hinreichend dafür, dass sich das zunächst auf $\mathfrak{M}_\alpha$ definierte Funktional (29b) zu einem beschränkten Funktional in $L_\alpha$ ausdehnen lässt, d.h. zu einem Funktional, das für jedes $\phi\in L_\alpha$ existiert (Wir erinnern daran, dass ein Funktional $F(\phi)$ in $L_\alpha$ beschränkt heisst, wenn $F(\phi)\leq C\,\|\phi\|$ für alle $\phi\in L_\alpha$ mit festem $C$). Man setzt nämlich einfach:

$$F(\phi)=\lim_{n\to\infty}F(\phi_n),\qquad \text{falls}\qquad \phi=\lim_{n\to\infty}\phi_n,\ \phi_n\in\mathfrak{M}_\alpha$$

Nach dem Satze von Fréchet-Riesz ([1], Seite 55) existiert dann ein eindeutig bestimmtes Element $\psi'\in L_\alpha$, für welches gilt: $F(\phi)=(\psi',\phi)$ für alle $\phi\in L_\alpha$, und wir legen fest:

$$\psi'=O(f)\psi\equiv o_\alpha(f)\psi\,. \tag{29c}$$

Dies bedeutet insbesondere:

$$(o_\alpha(f)\psi,\phi) = (O(f)\psi,\phi) = \langle f,\phi\cdot\bar{\psi}\rangle\,; \qquad (\phi\in\mathfrak{M}_\alpha). \tag{29g}$$

Bezeichnen wir den so erhaltenen Operator mit $o_\alpha(f)$. Sein Definitionsbereich $d_\alpha(f)$ besteht aus einer Teilmenge von $\mathfrak{M}_\alpha$; ist er dicht in $L_\alpha$, so lässt sich der zu $o_\alpha(f)$ adjungierte Operator $o_\alpha^*(f)$ bilden: Man setzt:

$$\overline{(o_\alpha(f)\phi,\psi)} = (o_\alpha^*(f)\psi,\phi) \tag{29d}$$

für festes $\psi$, falls die linke Seite für alle $\phi\in d_\alpha(f)\subseteq\mathfrak{M}_\alpha$ existiert und sich zu einem beschränkten Funktional in $L_\alpha$ fortsetzen lässt. Gehört $\psi$ zu $\mathfrak{M}_\alpha$, so gilt:

$$\overline{(o_\alpha(f)\phi,\psi)} = \overline{\langle f,\psi\cdot\bar{\phi}\rangle} = \langle\bar{f},\phi\cdot\bar{\psi}\rangle \quad (\phi\in d_\alpha(f)) \tag{29e}$$

Gehört $\psi$ zu $d_\alpha(\bar{f})$, so existiert der rechte Ausdruck in (29e) für alle $\phi\in\mathfrak{M}_\alpha$ (und damit für alle $\phi\in d_\alpha(f)$) und lässt sich auf $L_\alpha$ zu einem beschränkten Funktional fortsetzen. Es gilt also

$$o_\alpha^*(f) \supseteq o_\alpha(\bar{f}). \tag{29f}$$

Sei

$$(U\psi)(\xi,\eta) = \tau(\xi)\alpha(\eta)$$

und

$$(U\psi')(\xi,\eta) = (U\,o_\alpha(f)\psi)(\xi,\eta) = \tau'(\xi)\alpha(\eta)$$

Die Zuordnung $\tau'(\xi) = O_\xi(f)\tau(\xi)$ definiert einen linearen Operator $o_\xi(f)$ in $L^2_\xi$, der nach Gleichung (28d) nicht von der Wahl von $\alpha(\eta)$ und damit nicht von $L_\alpha$ abhängt. Wir schränken nunmehr die Klasse der Funktionen $f$ so ein, dass die Definitionsbereiche $d(f)$ und $d(\bar{f})$ von $o_\xi(f)$ und $o_\xi(\bar{f})$ dicht sind in $L^2_\xi$. Dann ist nach (29f) auch der Bereich von $o_\xi^*(f)$ dicht in $L^2_\xi$, und $o_\xi(f)$ besitzt eine eindeutig bestimmte minimale Abschliessung (die für symmetrische Operatoren wieder symmetrisch ist), nämlich $o_\xi^{**}(f)$. Diesen abgeschlossenen Operator bezeichnen wir mit $O_\xi(f)$, seinen Definitionsbereich mit $D(f)$. (Wir erinnern daran, dass ein Operator $A$ abgeschlossen heisst, falls aus dem Bestehen der Relationen $\psi_n\to\psi$ und $A\psi_n\to\psi'$ folgt, dass $A\psi$ existiert und gleich $\psi'$ ist). Für den Beweis des eben benützten Satzes verweisen wir auf [1], Seiten 290 und 293.

Um $O_\xi(f)$ auf $L^2_{\xi\eta}$ auszudehnen, verfahren wir folgendermassen: Wir wählen eine orthonormierte Basis $\{\alpha_k\}$ in $L^2_\eta$ und setzen für $\phi\in L^2_{\xi\eta}$:

$$\phi(\xi,\eta) = \sum_k \varphi_k(\xi)\alpha_k(\eta), \qquad \varphi_k(\xi)\in L^2_\xi, \qquad k = 1,2,3,\ldots \tag{30a}$$

Existiert $\varphi'_k = O_\xi(f)\varphi_k$ für jedes $\varphi_k$, und ist $\sum_k \|O_\xi(f)\varphi_k\|^2 < \infty$, so setzen wir:

$$O_\xi(f)\phi(\xi,\eta) = \sum_k (O_\xi(f)\varphi_k(\xi))\alpha_k(\eta) = \sum_k \varphi'_k(\xi)\alpha_k(\eta) \tag{30b}$$

Es bleibt zu zeigen, dass diese Definition nicht von der Wahl der $\alpha_k(\eta)$ abhängt. Sei also für eine zweite orthonormierte Basis $\{\beta_l\}$ in $L^2_\eta$:

$$\phi(\xi,\eta)=\sum_l \psi_l(\xi)\beta_l(\eta) \tag{30c}$$

$$O_\xi(f)\phi(\xi,\eta)=\sum_l \chi_l(\xi)\beta_l(\eta) \tag{30d}$$

und

$$\alpha_k(\eta)=\sum_l c_{kl}\beta_l(\eta) \tag{30e}$$

Setzt man (30e) in (30a) ein und vergleicht mit (30c), so erhält man

$$\psi_l(\xi)=\sum_k c_{kl}\varphi_k(\xi) \tag{30f}$$

Diese Reihe konvergiert (stark) in $L^2_\xi$ (siehe Anhang IV). Ebenso gilt:

$$\chi_l(\xi)=\sum_k c_{kl}\varphi'_k(\xi)=\sum_k c_{kl}O_\xi(f)\varphi_k(\xi) \tag{30g}$$

Durch Vergleich der beiden letzten Gleichungen ergibt sich wegen der Abgeschlossenheit von $O_\xi(f)$: $\chi_l(\xi)=O_\xi(f)\psi_l(\xi)$ q.e.d.

Schliesslich definiert man den Operator $O(f)$ in $L^2_{xp}$ gemäss:

$$O(f)=U^{-1}O_\xi(f)U \tag{31}$$

Dieser Operator kann ohne Umweg über $L^2_{\xi\eta}$ direkt erhalten werden, indem man $L^2_{xp}$ beispielsweise in die Räume $L_{H_k}$ zerlegt; $\mathfrak{M}_{H_k}$ wird dann von den $h_{lk}$ mit festem $k$ erzeugt. $L_{H_k}$ reduziert den Operator (31) zu $O_{H_k}(f)$, die Abschliessung des zu Anfang des Abschnittes eingeführten Operators $o_{H_k}(f)$.

Wir bemerken noch, dass $O_\xi(x)$ gleich dem Multiplikationsoperator $\xi$, $O_\xi(p)$ gleich dem Differentiationsoperator $-i\partial/\partial\xi$ ist.

Die soeben gegebene Definition von $O_\xi(f)$ ist insofern willkürlich, als sie sich auf die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{M}$ stützt, was voraussetzt, dass immer die Grössen $\langle h_{kl}, f\rangle$ existieren.

Es ist klar, dass man statt von $\mathfrak{M}$ von irgendeiner in $L^2_\xi$ dichten Menge von Funktionen ausgehen kann; man kann auch zwei Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ wählen und in Gleichung (29b) $\psi\in\mathfrak{V}_\alpha$, $\phi\in\mathfrak{W}_\alpha$ voraussetzen. Will man dabei die Gültigkeit von (29f) beibehalten, so muss dann mit $\bar{f}$ anstelle von $f$ in (29b) $\psi\in\mathfrak{W}_\alpha$ und $\phi\in\mathfrak{V}_\alpha$ gewählt werden. $O_\xi(f)$ hängt im Allgemeinen von der Wahl von $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{W}$ ab.

Sei nun der Einfachheit halber $f$ reell. In diesem Falle ist $\mathfrak{V}$ gleich $\mathfrak{W}$, und $O_\xi(f)$ ist symmetrisch. Gilt

$$\psi\in d(f),\qquad \varphi\in\mathfrak{V}, \tag{32}$$

so lässt sich nach Definition $(\varphi,\, O_\xi(f)\psi)$ darstellen durch das Integral

$$\lim_{a\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\int_{-a}^{a} {}_\varphi e_\psi(x,p)f(x,p)\,dx\,dp=(\varphi,O_\xi(f)\psi) \tag{33}$$

mit

$$_{\varphi}e_{\psi} = U^{-1}(\psi(\xi)\bar{\varphi}(\eta)) \in L^2_{xp},$$

vgl. Gleichungen (29g), (11a), (10) und (28). Ist insbesondere $\varphi = \psi$, so stellt $e_\psi \equiv {}_\psi e_\psi$ den auf $\psi \in L^2_\xi$ projizierenden Operator dar. $e_\psi$ ist reell, kann aber in der Regel auch negative Werte annehmen, sodass eine Interpretation von $1/2\pi e_\psi(x,p)$ als Wahrscheinlichkeitsdichte im $(x,p)$-Raum nicht gut möglich ist. Falls $\psi(\xi)$ gewisse Regularitätsbedingungen erfüllt (siehe (14)), gilt jedoch

$$\frac{1}{2\pi}\int e_\psi(x,p)\,dp = |\psi(x)|^2 . \tag{34}$$

Dies ist die Wahrscheinlichkeitsdichte im Ortsraum. Ebenso erhält man für

$$\frac{1}{2\pi}\int e_\psi(x,p)\,dx$$

die Wahrscheinlichkeitsdichte im Impulsraum. Ist (32) nicht mehr erfüllt, d.h. gilt lediglich $\psi \in D(f)$, so gilt i.A. auch die Darstellung (33) nicht mehr, da das Integral auf der linken Seite von (33) nur stetig in $\psi$ und $\varphi$ ist, falls $\int\int |f(x,p)|^2\,dx\,dp < \infty$.

*Anhang I*

Wir wählen in $L^2_\xi$ als Basis einer Matrixdarstellung die $H_k(\xi)$. Man erhält:

$$O_\xi(H) = \{\delta_{mn}\lambda_m\} \tag{40a}$$

$$O_\xi(h_k) = \{\delta_{mn}a_m\} \quad \text{mit} \quad a_m = 0 \quad \text{oder} \quad a_m = 1 \tag{40b}$$

als Matrixdarstellungen der Operatoren $O_\xi(H)$ und $O_\xi(h_k)$.
Gleichung (19k)

$$O_\xi(H)\,O_\xi(h_k) = \lambda_k O_\xi(h_k)$$

wird jetzt zu:

$$\{\delta_{mn}a_m\lambda_m\} = \{\delta_{mn}a_m\lambda_k\} \tag{40c}$$

Daraus folgt $a_m = 0$ für $\lambda_m \neq \lambda_k$ (d.h. für $m \neq k$, da jeder Eigenwert nur einfach vorkommt). Da $O_\xi(h_k) \neq 0$ ist, so folgt noch $a_k = 1$, und es ergibt sich $O_\xi(h_k) = \{\delta_{mn}\delta_{mk}\}$ q.e.d.

*Anhang II*

Bezeichnen wir für feste $k$ und $l$ den Operator $O_\xi(h_{kl})$ mit $A$. Die Gleichungen (22a) und (22b) bedeuten, dass

$$O_\xi(h_{kl})\,O_\xi(\bar{h}_{kl}) = O_\xi(h_k) \quad \text{und} \quad O_\xi(\bar{h}_{kl})\,O_\xi(h_{kl}) = O_\xi(h_l).$$

Da $O^*_\xi(h_{kl}) \geq O_\xi(\bar{h}_{kl})$ und da die $O_\xi(h_k)$ in ganz $L^2_\xi$ definiert sind, gelten die eben notierten Relationen erst recht mit $O^*_\xi(h_{kl})$ an stelle von $O_\xi(\bar{h}_{kl})$. Zusammen mit Gleichung (22c) hat man also:

$$A A^* = E_k \quad (E_k \equiv O_\xi(h_k)) \tag{41a}$$

$$A^* A = E_l \tag{41b}$$

$$(H_k, A H_l)_\xi = 1 \tag{41c}$$

Aus (41b) folgt für jedes Element $\psi$ des Definitionsbereiches von $A$, dass

$$\|A\psi\|^2 = (A\psi, A\psi) = (\psi, A^* A\psi) = (\psi, E_l\psi) \leq \|\psi\| \; \|E_l\psi\| \leq \|\psi\|^2 .$$

Hieraus ergibt sich, dass $A$ notwendig beschränkt ist. Wir wählen wieder die $H_k(\xi)$ als Basis einer Matrixdarstellung und setzen $A = \{A_{mn}\}$. Weiter hat man $E_k = \{\delta_{mk}\delta_{nk}\}$, $E_l = \{\delta_{ml}\delta_{nl}\}$. Setzen wir dies in die Gleichungen (41a) und (41b) ein, so erhalten wir:

$$\sum_i A_{mi}\bar{A}_{ni} = \delta_{mk}\delta_{nk} \tag{41d}$$

$$\sum_i \bar{A}_{im} A_{in} = \delta_{ml}\delta_{nl} \tag{41e}$$

Insbesondere für $m = n$:

$$\sum_i |A_{mi}|^2 = \sum_i A_{mi}\bar{A}_{mi} = \delta_{mk} \tag{41f}$$

$$\sum_i |A_{im}|^2 = \delta_{ml} \tag{41g}$$

Daraus folgt sofort, dass nur $A_{kl}$ nicht verschwindet. Nach (41c) ist überdies $A_{kl} = 1$, sodass man schliesslich hat:

$$A = \{A_{mn}\} = \{\delta_{km}\delta_{ln}\} \quad \text{q.e.d.}$$

*Anhang III*

Die Funktion $\varphi_\sigma(x) = \varphi(x + \sigma/2)$ konvergiert für jedes $\varphi \in L_x^2$ gegen $\varphi$, falls $\sigma$ gegen 0 strebt: $\|\varphi_\sigma(x) - \varphi(x)\| \to 0$ falls $|\sigma| \to 0$. Insbesondere lässt sich ein $\delta > 0$ finden, sodass

$$\|\psi_\sigma - \psi\| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \|\phi_{-\sigma} - \phi\| < \varepsilon, \tag{42}$$

sobald $|\sigma| < \delta$, für zwei beliebige Funktionen $\phi$ und $\psi \in L_x^2$.

Bezeichnen wir mit $E_b$ den Projektionsoperator, der auf den Unterraum von $L_x^2$ projiziert, welchen die Funktionen bilden, die für $x > b$ und $-x < -b$ verschwinden ($b > 0$). $\chi_b(\sigma)$ lässt sich dann schreiben:

$$\chi_b(\sigma) = (E_b\phi_{-\sigma}, E_b\psi_\sigma) = (\phi_{-\sigma}, E_b\psi_\sigma) \tag{42b}$$

mit $H_k(x) = \psi(x)$ und $H_m(x) = \phi(x)$ (siehe (27a)). Hieraus folgt ($\psi_\sigma - \psi = \delta\psi$, $\phi_{-\sigma} - \phi = \delta\phi$):

$$\begin{aligned} |\chi_b(\sigma) - \chi_b(0)| &= |(\phi_{-\sigma}, E_b\psi_\sigma) - (\phi, E_b\psi)| = \\ &= |(\phi + \delta\phi, E_b\psi + E_b\delta\psi) - (\phi, E_b\psi)| \leq \\ &\leq \|\phi\| \; \|E_b\delta\psi\| + \|\delta\phi\| \; \|E_b\psi\| + \|\delta\phi\| \; \|E_b\delta\psi\| \leq \\ &\leq \varepsilon(2 + \varepsilon), \end{aligned}$$

sobald $|\sigma| < \delta$ ist (für beliebiges $\psi$ ist $\|E_b\psi\| \leq \|\psi\|$).

Diese Abschätzung ist unabhängig von $b$, q.e.d.

*Anhang IV*

Wir zeigen zunächst, dass die auf der rechten Seite von (30f) stehende Reihe konvergiert. Dazu bemerken wir, dass die $c_{kl}$ die Matrixelemente einer unitären Transformation in $L^2_\eta$ sind. Daraus ergibt sich insbesondere, dass $\sum\limits_k |c_{kl}|^2 = 1$ und somit:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} |c_{kl}|^2 < \varepsilon, \quad \text{sobald} \quad N_1, N_2 > t_\varepsilon, \quad (l \text{ fest}). \tag{43a}$$

Aus (30a) folgt $\sum\limits_k \|\varphi_k\|^2 < \infty$ und daher auch:

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} \|\varphi_k\|^2 < \varepsilon, \quad \text{sobald} \quad N_1, N_2 > s_\varepsilon. \tag{43b}$$

Setzen wir

$$\varrho_n = \sum_{k=1}^{n} c_{kl}\varphi_k.$$

Man findet:

$$\|\varrho_{N_2} - \varrho_{N_1}\| \le \sum_{k=N_1}^{N_2} |c_{kl}| \, \|\varphi_k\| \le \left(\sum_{k=N_1}^{N_2} |c_{kl}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k=N_1}^{N_2} \|\varphi_k\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \varepsilon,$$

falls

$$N_1, N_2 > \max(t_\varepsilon, s_\varepsilon).$$

Das beweist die Konvergenz der genannten Reihe; um zu zeigen, dass sie gleich $\psi_l$ ist, bilden wir mit $\gamma(\xi) \in L^2_\xi$ die Funktion

$$\Gamma_l(\xi, \eta) = \gamma(\xi)\beta_l(\eta) \in L^2_{\xi\eta}.$$

Nach (30c) erhalten wir

$$(\Gamma_l, \phi) = (\gamma, \psi_l)_\xi; \tag{43c}$$

nach (30a) erhält man

$$(\Gamma_l, \phi) = \sum_k (\gamma, \varphi_k)_\xi (\beta_l, \alpha_k)_\eta = \sum_k c_{kl}(\gamma, \varphi_k)_\xi. \tag{43d}$$

Da $\gamma \in L^2_\xi$ beliebig ist, folgt

$$\psi_l = \sum_k c_{kl}\varphi_k \qquad \text{q.e.d.}$$

*Anhang V*

Die $h_{kl}$ genügen den Gleichungen (siehe (18) und (19)):

$$O(H)h_{kl} = (k + 1/2)h_{kl}, \qquad O'(h_{kl}) = (l + 1/2)h_{kl}. \tag{44a}$$

Nach einfachen Rechnungen ergibt sich (vgl. (18i)):

$$O(H) - O'(H) = i\frac{\partial}{\partial\varphi} \tag{44b}$$

und daher

$$i \frac{\partial}{\partial \varphi} h_{kl} = n h_{kl}, \qquad n = k - l. \tag{44c}$$

Wegen

$$h_{kl} = U^{-1} H_{kl} \quad \text{und} \quad H_{kl}(\xi, \eta) = e^{-(\xi^2+\eta^2)/2} p_k(\xi) p_l(\eta)$$

ist

$$\begin{aligned} h_{kl}(x, p) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+\sigma/2)^2/2-(x-\sigma/2)^2/2} p_k(x+\sigma/2) p_l(x-\sigma/2) e^{-ip\sigma} d\sigma = \\ &= \exp(-x^2-p^2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sigma/2+ip)^2} p_k(x+\sigma/2) p_l(x-\sigma/2) d\sigma = \\ &= 2 \exp(-r^2) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} p_k(r e^{-i\varphi}+t) p_l(r e^{i\varphi}-t) dt \\ &= \exp(-r^2) \sum_{\mu,\nu} c_{\mu\nu} e^{-i(\mu-\nu)\varphi} r^{\mu+\nu} \end{aligned} \tag{45a}$$

Hierbei wurde $\sigma/2 + ip = t$ gesetzt. Die $c_{\mu\nu}$ sind Konstanten, die nach (44c) für $\mu - \nu \neq n$ verschwinden. Da folglich $\mu + \nu$ in (45a) entweder gleich $|n| + 2\mu$ oder gleich $|n| + 2\nu$ ist, folgt aus (45a):

$$h_{kl}(r, \varphi) = e^{-in\varphi} r^{|n|} P_{kl}(r^2) \exp(-r^2) \tag{45b}$$

Für $h_{lk}$ ergibt sich derselbe Ausdruck, lediglich mit $-\varphi$ anstelle von $\varphi$; dies erkennt man leicht, wenn man in (45a) $k$ und $l$ vertauscht und $t$ durch $-t$ ersetzt. Also ist $P_{lk} = P_{kl}$ und wegen $\bar{h}_{kl} = h_{lk}$ folgt hieraus weiter, dass $P_{kl}$ reell ist. Auch der Grad von $P_{kl}$ ist aus den Gleichungen (45) leicht zu bestimmen.

## LITERATURANGABE

[1] F. Riesz / B. Sz.-Nagy: Vorlesungen über Funktionalanalysis, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1956

Eingegangen den 1. März 1966