Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 41 (1966-1967)

Artikel: L'élimination des points doubles dans le cas combinatoire.
Autor: Weber, C.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31378

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

L'élimination des points doubles dans le cas combinatoire

Par C. WEBER

Introduction

Dans [7] WHITNEY donne un procédé pour l'élimination de certaines paires de points d'intersection. Ce procédé est devenu un outil essentiel en topologie différentielle, en particulier dans la théorie de SMALE. Voir, par exemple, [5] chap. 6. C'est l'opinion unanime des topologues que l'on peut aussi faire la théorie de SMALE dans le cas combinatoire et que les théorèmes analogues au cas différentiable sont vrais. Cependant, il semble qu'aucune démonstration complète de ce fait n'a été donnée jusqu'à ce jour. Il est clair que certains procédés techniques ne peuvent se traduire immédiatement du différentiable au combinatoire. Il en va ainsi, par exemple, du procédé de WHITNEY. L'absence d'une théorie convenable des fibrés normaux dans le cas combinatoire empêche de réaliser le modèle abstrait pour la séparation des points d'intersection.

Bien sûr, une façon expéditive de régler le problème est de lisser toute la situation (locale), d'appliquer WHITNEY différentiable, puis de retrianguler. C'est, en somme, le parti choisi par SHAPIRO dans [6] et par WU dans [9]

On propose ici une version purement combinatoire du procédé de WHITNEY. Le pas essentiel de la démonstration, qui en quelque sorte «remplace» les fibrés normaux défaillants, consiste à utiliser un théorème d'IRWIN (voir [2] et [3]), qui donne, sous certaines conditions homotopiques, une généralisation du lemme de DEHN.

La terminologie et les notations utilisées ici sont celles de [11]. On a traduit «poly» par «semi-linéaire».

Je remercie chaleureusement M. le Professeur A. HAEFLIGER de m'avoir suggéré cette rédaction.

Enoncé du lemme de Whitney

Empruntons à KERVAIRE cet énoncé commode du lemme de WHITNEY. Voir [4]. σ^r désignera le simplexe standard de dimension r.

LEMME. *Soit V^m une variété semi-linéaire, sans bord, compacte ou non. Soit $m=p+q$. Soient $\varphi:\sigma^q\to V$ et $\psi:\sigma^p\to V$ deux plongements semi-linéaires, tels que $\varphi(\sigma^q)$ et $\psi(\sigma^p)$ se coupent en position générale en exactement 2 points A et B, situés dans $\varphi(\mathring{\sigma}^q)$ et $\psi(\mathring{\sigma}^p)$. On suppose que:*

1. *$p\geq 3$, $q\geq 3$ ou $p=2$, $q\geq 3$ et φ est un plongement localement non-noué.*
2. *Il existe un chemin c dans $\varphi(\mathring{\sigma}^q)$ reliant A à B et un chemin c' dans $\psi(\mathring{\sigma}^p)$ reliant A à B, tels que $c^{-1}\cdot c'$ est homotope à zéro (librement) dans V.*

3. *Par rapport à une orientation (choisie arbitrairement) d'un voisinage de* $\varphi(\sigma^q)\cup\psi(\sigma^p)$ *dans* V, *les points d'intersection* A *et* B *sont de signes opposés, ou, ce qui revient au même, le nombre d'intersection* $\varphi(\sigma^q)\cdot\psi(\sigma^p)=0$.

Alors, il existe une isotopie ambiante H_1 *de* V, *dont le support est une boule combinatoire de dimension* m, *laissant en particulier* $\varphi(\partial\sigma^q)$ *et* $\psi(\partial\sigma^p)$ *fixes, telle que:*

$$H_1(\psi(\sigma^p))\cap\varphi(\sigma^q)=\emptyset$$

Il est clair que, dans le cas différentiable, ce lemme est équivalent au procédé de WHITNEY. Voir [6] et [7].

Ce lemme admet des généralisations au cas $p+q>m$. Pour le cas différentiable, voir [1] et pour le cas combinatoire, voir [8].

Preuve du lemme dans le cas $p \geq 3$

Par position générale, on peut supposer que c et c' sont des plongements semi-linéaires, de sorte que $c^{-1}\cdot c'$ fournit un plongement de $\partial\sigma^2$ dans V.

D'après l'hypothèse 2, ce plongement s'étend en une application continue $F:\sigma^2\to V$.

Encore une fois par position générale (voir [11], chap. 6) on peut s'arranger pour que F soit un plongement tel que:

$$F(\sigma^2)\cap\varphi(\sigma^q)=c(I)\qquad F(\sigma^2)\cap\psi(\sigma^p)=c'(I)$$

Triangulons un voisinage de $\varphi(\sigma^q)\cup\psi(\sigma^p)\cup F(\sigma^2)$ dans V, de telle façon que $\varphi(\sigma^q)$, $\psi(\sigma^p)$, $F(\sigma^2)$ soient des sous-complexes. Soit B^m un voisinage de $F(\sigma^2)$ dans V qui soit un deuxième dérivé. Voir [11], chap. 3, p. 14. D'après WHITEHEAD, B^m est une boule semi-linéaire de dimension m. Par construction on a:

$$B^m\cap\varphi(\sigma^q)=B^q\subset\varphi(\mathring{\sigma}^q)\qquad B^m\cap\psi(\sigma^p)=B^p\subset\psi(\mathring{\sigma}^p)$$

B^p et B^q sont des boules semi-linéaires de dim. p et q.

Par position générale, on voit facilement que B^m-B^q est $(m-q-2)$-connexe (homotopiquement).

D'après l'hypothèse 3), ∂B^p est homologue à zéro dans B^m-B^q. Comme $p\geq 3$, par HUREWICZ l'inclusion $\partial B^p\subset B^m-B^q$ est homotope à zéro dans B^m-B^q.

D'après le théorème d'IRWIN énoncé ci-dessous, ∂B^p bordera un disque plongé B'^p dans B^m-B^q si:

$$m-q-2\geq 2p-m+1 \qquad (*)$$

Comme $p+q=m$, cette dernière condition est équivalente à $q\geq 3$, ce qui est toujours vrai d'après l'hypothèse 1.

C'est maintenant une conséquence immédiate du unknotting balls de ZEEMAN et du truc d'ALEXANDER que B^p et B'^p sont isotopes dans B^m, par une isotope fixe sur

le bord. (Voir [11] chap. 4). Etendant cette isotopie par l'identité en dehors de B^m, on obtient l'isotopie cherchée.

THÉORÉME D'IRWIN: *Soient X^x et Y^y deux variétés semi-linéaires, X étant supposée compacte. Soit $\alpha: X \to Y$ une application semi-linéaire telle que $\alpha|\partial X$ soit un plongement de ∂X dans ∂Y. Alors si les 3 conditions suivantes sont remplies, α est homotope à un plongement β, rel. ∂X:*

(i) $y-x \geq 3$

(ii) *X est $(2x-y)$-connexe (homotopiquement).*

(iii) *Y est $(2x-y+1)$-connexe (homotopiquement).*

Ce théorème est démontré dans [3].

On applique le théorème d'IRWIN en choisissant pour X la boule B^p, pour Y la variété $B^m - B^q$ et pour α n'importe quelle application de B^p dans $B^m - B^q$, qui soit l'identité sur ∂B^p.

On posera $B'^p = \beta(B^p)$.

REMARQUE: Si une condition supplémentaire sur les dimensions est satisfaite, la démonstration du théorème d'IRWIN dans la situation qui nous intéresse est particulièrement simple. Par exemple:

a) $p<q$. On obtient β en mettant α en position générale dans $B^m - B^q$.

b) $p<2(q-1)$. En mettant α en position générale dans $B^m - B^q$, (modulo le bord), on aura Sing $(\alpha) \subset \mathring{B}^p$ de dimension $\leq 2p-m$. B^p étant collapsible, on peut facilement trouver un polyèdre collapsible K dans $\mathring{B}^p$, de dimension $\leq 2p-m+1$, contenant Sing (α).

D'après l'inégalité $(*)$, $\alpha(K)$ est homotope à zéro dans $B^m - B^q$. L'inclusion de $\alpha(K)$ dans $B^m - B^q$ s'étend en une application du cône $C\alpha(K)$ sur $\alpha(K)$. Par position générale, si $p<2(q-1)$, on peut plonger $C\alpha(K)$ dans $B^m - B^q$, de telle façon que:

$$C\alpha(K) \cap \alpha(B^p) = \alpha(K)$$

Tout est prêt maintenant pour utiliser l'argument de PENROSE-WHITEHEAD-ZEEMAN. On triangule B^p et B^m de telle façon que α soit simpliciale et que $C\alpha(K)$ soit un sous-complexe. En prenant les voisinages de K dans B^p et de $C\alpha(K)$ dans B^m qui sont des deuxièmes barycentriques on obtient des boules $\delta^p \subset \mathring{B}^p$ et $\delta^m \subset B^m - B^q$ telles que α est une application de triples: α: B^p, $B^p - \mathring{\delta}^p$, $\partial(\delta^p) \to B^m - B^q$, $B^m - B^q - \mathring{\delta}^m$, $\partial(\delta^m)$ et $\alpha|B^p - \mathring{\delta}^p$ est un plongement. On obtient le plongement β charché en posant:

a) $\beta|B^p - \mathring{\delta}^p = \alpha|B^p - \mathring{\delta}^p$

b) $\beta|\delta^p \to \delta^m$ une extension conique de $\alpha|\partial(\delta^p) \to \partial(\delta^m)$.

Preuve du lemme dans la cas $p = 2$

La preuve est la même que dans le cas précédent, à l'exception de la démonstration du fait que l'inclusion $\partial B^p \subset B^m - B^q$ est homotope à zéro dans $B^m - B^q$.

D'après l'hypothèse 3, on sait que ∂B^p est homologue à zéro dans $B^m - B^q$. On ne peut utiliser HUREWICZ, car la position générale nous donne seulement que $B^m - B^q$ est 0-connexe. Cependant, si l'on montre que la paire de codimension 2 (B^m, B^q) est non nouée, il est clair que l'inclusion $\partial B^p \subset B^m - B^q$ sera homotope à zéro dans $B^m - B^q$.

Comme φ est un plongement localement plat, d'après [12] corollaire 10, il suffit de montrer que B^m est un voisinage régulier de B^q dans B^m, c'est-à-dire que $B^m \searrow B^q$.

LEMME: *Soient $V \subset W$ deux variétés semi-linéaires. Soit $K \subset \mathring{W}$ un sous-polyèdre $K \cap V = L \subset \mathring{V}$. Supposons que V, K, L, soient des sous-complexes pour une certaine triangulation de W. Soit M un 2e voisinage dérivé de K dans W. Alors:*

1. *$M \cap \mathring{V} = N$ est un 2e voisinage dérivé de L dans V.*
2. *$M \searrow (N \cup K)$.*

Ce lemme se démontre facilement en utilisant les méthodes de [11], chap. 3.

D'après ce lemme et par construction, on a donc:

$$B^m \searrow (B^q \cup F(\sigma^2)) \searrow B^q.$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. HAEFLIGER, *Plongements différentiables dans le domaine stable*. Comment. Math. Helv. *37* (1963) 155–176.

[2] M. C. IRWIN, *Combinatorial embeddings of manifolds*, Bulletin Am. Math. Soc. *68* (1962) 25–27.

[3] M. C. IRWIN. *Embeddings of polyedral manifolds*. Annals of Math. *82* (1965) 1–14.

[4] M. KERVAIRE. *Geometric and algebraic intersection numbers*. Comment. Math. Helv. *39* (1965) 271–280.

[5] J. MILNOR, *Lectures on the h-cobordism theorem* (1964, Princeton).

[6] A. SHAPIRO. *Obstructions to the embedding of a complex in a euclidean space. The first obstruction.* Annals of Math. *66* (1957) 256–269.

[7] H. WHITNEY. *The self-intersection of a smooth n-manifold in 2n-space*. Annals of Math. *45* (1944) 220–246.

[8] C. WEBER. (thèse).

[9] W. T. WU. *On the realisation of complexes in euclidean space (3)*. Scientia Sinica *8* (1959) 133–150.

[10] E. C. ZEEMAN. *Unknotting combinatorial balls*. Annals of Math. *78* (1963) 501–526.

[11] E. C. ZEEMAN. *Notes on combinatorial topology*. I.H.E.S. (1963).

[12] J. F. P. HUDSON et E. C. ZEEMAN. *On regular neighborhoods*. Proc. London Math. Soc. *14* (1964) 719–746.

Institut Mathématique Université
16 bd d'Yvoy
GENÈVE

Reçu le 21 décembre 1965.