

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 41 (1966-1967)

Artikel: Sur l'ensemble des valeurs stationnaires d'une application différentiable.
Autor: Holy, Jean-Claude
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-31376>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 13.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur l'ensemble des valeurs stationnaires d'une application différentiable

par JEAN-CLAUDE HOLY

Introduction

Soit f une application d'un ouvert G de R^m dans R^p , $f(x_1, \dots, x_m) = (y_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_p(x_1, \dots, x_m))$. Supposons $p \leq m$ et f de classe C^1 .

Un point ξ en lequel le rang de la matrice des dérivées premières

$$A = \left\| \left\| \frac{\partial y_j(\xi)}{\partial x_i} \right\| \right\| (j = 1, 2, \dots, p; i = 1, \dots, m)$$

est $< p$ est appelé un *point critique* de f , et son image $f(\xi)$ est appelée une *valeur critique* de f .

Le rang de A est par définition le *rang* du point critique ξ et de la valeur critique $f(\xi)$.

Si l'on a, r étant un nombre ≥ 1 non nécessairement entier,

$$\lim_{\eta \rightarrow \xi} \frac{|f(\xi) - f(\eta)|}{|\xi - \eta|^r} = 0,$$

nous dirons que ξ est un *point stationnaire d'ordre r* et $f(\xi)$ une *valeur stationnaire d'ordre r* de f . Un point critique de rang 0 est un point stationnaire d'ordre 1.

A. SARD [5] a établi les théorèmes suivants:

1. Si f est de classe C^q et $q \geq m - p + 1$, la mesure de l'ensemble des valeurs critiques de f est nulle.
2. Si $q \geq m/p$, la mesure de l'ensemble des valeurs critiques de rang 0 est nulle.

La notion de s -mesure, de HAUSDORFF [1] permet de généraliser [6] ces théorèmes. Rappelons-en la définition: Soit E une partie de R^m , s et δ deux nombres positifs, $0 < s < +\infty$, $0 < \delta < +\infty$; désignons par \mathcal{R}_δ tout recouvrement dénombrable $\{E_1, E_2, \dots\}$ de E par des ensembles E_i dont les diamètres $\delta(E_i)$ ne dépassent pas δ , et soit $m_s(E, \delta)$ la borne inférieure des nombres $\sum_{i=1}^{\infty} [\delta(E_i)]^s$ pour tous les recouvrements \mathcal{R}_δ . La s -mesure de E est par définition:

$$m_s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} m_s(E, \delta).$$

On montre que si $m_s(E) = \alpha > 0$, $\alpha \neq +\infty$, alors $m_{s'}(E) = 0$ pour tout $s' > s$ et $m_{s''}(E) = +\infty$ pour tout $s'' < s$. La borne inférieure des nombres s pour lesquels $m_s(E) = 0$ est appelée la dimension au sens de Hausdorff de l'ensemble E . En désignant par $|A|$ la mesure extérieure de Lebesgue d'un ensemble $A \subset R^m$, on démontre que [7]

$$m_m(A) = C |A|,$$

C étant le volume de la sphère de diamètre unité dans R^m .

3. Si $E \subset R^m$ est un ensemble de points critiques d'une application f de classe C^q , de s -mesure finie ou une réunion dénombrable de tels ensembles, et $q \geq s - p + 1$ alors $m_p f(E) = 0$.
4. Si $E \subset R^m$ est un ensemble de points critiques de rang 0 de f , de s -mesure finie, ou une réunion dénombrable de tels ensembles, et $q \geq s/p$, alors $m_{s/q} f(E) = 0$.

Les théorèmes 2 et 4 peuvent être encore précisés de la manière suivante:

5. Si $E \subset R^m$ est un ensemble de points stationnaires d'ordre r de f , $m_{m/r} f(E) = 0$.
6. Si $E \subset R^m$ est un ensemble de points stationnaires d'ordre r de f , et si la s -mesure de E est finie (ou si E est réunion dénombrable de tels ensembles), alors $m_{s/r} f(E) = 0$.

Des exemples de H. WHITNEY [8] et A. SARD [5, 6] montrent que, dans les énoncés 1 et 3, la limite donnée pour q ne peut pas être abaissée:

Si q est un entier $< s - p + 1$, il existe une application $f: R^m \rightarrow R^p$, de classe C^q , ayant un ensemble E de points critiques, de s -mesure finie, telle que $m_{s/q} f(E) > 0$.

Ainsi, les théorèmes 1 et 3 ne peuvent être améliorés. Nous montrerons ici qu'il en est de même pour les théorèmes 2, 4, 5 et 6.

D'une manière précise, pour tout $\varepsilon > 0$, nous construisons une application f d'un parallélotope \square à m dimensions sur un parallélotope Δ à p dimensions, de classe C^q avec $m/p - 1 \leq q < m/p$, qui possède un ensemble P de points stationnaires d'ordre $r = m/p - \varepsilon$, telle que $f(P) = \Delta$.

Ainsi, les théorèmes 2 et 5 ne peuvent être améliorés. L'ensemble P est totalement discontinu, mais on peut faire en sorte que P soit contenu dans un arc simple Γ , dont tous les points sont stationnaires d'ordre r , et dont l'image $f(\Gamma)$, est une courbe de Peano qui remplit Δ .

Par une construction analogue, pour tout s tel que $0 < s < m$, pour tout $r \geq 1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, nous obtenons une application $f: \square \rightarrow \Delta$, qui possède un ensemble P de points stationnaires d'ordre r tel que $0 < m_s(P) < +\infty$, et $m_{s/(r+\varepsilon)} f(P) > 0$, ce qui montre que les théorèmes 4 et 6 ne peuvent être améliorés.

Les résultats ci-dessus généralisent un théorème démontré par M. G. DE RHAM [2].

Dans le texte complet de cette thèse qui n'est pas reproduit ici, nous donnons certaines conditions suffisantes pour que la mesure $|f(K)|$ de l'image $f(K)$ d'un compact $K \subset R^m$ varie continûment avec f pour la C^1 -topologie.

J'exprime à M. G. de Rham, ma très vive reconnaissance pour l'aide qu'il m'a apportée.

1. Nous donnons ici une démonstration rapide du Théorème 5, et du théorème 6 avec une hypothèse d'uniformité.

Théorème 5: Démonstration:

On peut supposer E de m -mesure finie. Etant donnés $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$, pour chaque point

$x \in E$, on peut trouver un nombre $\varrho(x)$, satisfaisant à $0 < \varrho(x) \leq \delta$, tel que, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x, \varrho)$ étant une boule fermée de centre x et de rayon $\varrho < \varrho(x)$, on ait :

$$\delta(f(\mathcal{B})) \leq \delta \quad \text{et} \quad |f(x') - f(x)| \leq \varepsilon |x' - x|^r,$$

pour tout $x' \in \mathcal{B}$. Cela entraîne

$$\delta(f(\mathcal{B})) \leq 2 \sup_{x' \in \mathcal{B}} |f(x') - f(x)| \leq 2\varepsilon \varrho^r < 2\varepsilon \delta^r(\mathcal{B})$$

d'où $\delta^{m/r}(f(\mathcal{B})) < (2\varepsilon)^{m/r} \delta^m(\mathcal{B})$.

Or, comme E est de m -mesure finie, on peut extraire [7] de la famille des boules $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x, \varrho)$, ($0 < \varrho < \varrho(x)$), un recouvrement dénombrable de E , \mathcal{B}_i ($i=1, 2, \dots$), tel que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^m(\mathcal{B}_i) < M, M$$

étant fini et ne dépendant que de la mesure de E . Alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{m/r}(f(\mathcal{B}_i)) \leq (2\varepsilon)^{m/r} M,$$

d'où $m_{m/r}(f(E), \delta) \leq (2\varepsilon)^{m/r} M$ et $m^{m/r} f(E) = 0$.

Pour le théorème 6, nous nous bornerons à indiquer une démonstration dans le cas où les points de E sont uniformément stationnaires d'ordre r , c'est-à-dire si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ tel que, si $\xi \in E$ et $|\eta - \xi| < \delta$, on ait $|f(\xi) - f(\eta)| \leq \varepsilon |\xi - \eta|^r$.

Lemme 1. *Si l'application f est hölderienne d'exposant $e > 0$ sur l'ensemble E , c'est-à-dire s'il existe une constante C telle que*

$$|f(p) - f(q)| \leq C |p - q|^e \tag{1}$$

pour tout couple de points p et q de E , alors pour tout $s > 0$, on a

$$m_s f(E) \leq C^s m_{es}(E). \tag{2}$$

Remarquons tout de suite que f est uniformément continue sur E . Soient $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, fixes, arbitrairement petits; il existe un recouvrement \mathcal{R}_δ de E au moyen d'ensembles E_i , ($i=1, 2, \dots$) tels que $\delta(E_i) < \delta$, $\delta(f(E_i)) < \delta$ et

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^{es}(E_i) \leq \alpha + \varepsilon, \quad \alpha = m_{es}(E); \tag{3}$$

les ensembles $f(E_i) = F_i$ constituent un recouvrement de $f(E)$ et (1) implique

$$\sum_{i=1}^{\infty} \delta^s(F_i) \leq C^s \sum_{i=1}^{\infty} \delta^{es}(E_i) \leq C^s(\alpha + \varepsilon) \tag{4}$$

par suite, pour tout $\delta > 0$, $m_s(f(E), \delta) \leq C^s(\alpha + \varepsilon)$, ce qui entraîne $m_s f(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0}$

$m_s(f(E), \delta) \leq C^s(\alpha + \varepsilon)$. Comme ε est arbitraire on a :

$$m_s f(E) \leq C^s m_{\varepsilon s}(E).$$

Pour démontrer le théorème 6, il suffit d'appliquer le lemme 1, il vient :

$$m_{s/r} f(E) \leq \varepsilon^{s/r} m_s(E) \quad \text{et comme } s/r \text{ est } > 0,$$

et ε arbitraire, on a bien $m_{s/r} f(E) = 0$.

2. Construction d'applications différentiables non constantes dont toutes les valeurs sont stationnaires.

Considérons un compact $\square \subset R^m$ et h similitudes $F_i, (i=1, \dots, h)$ de même rapport $q < 1$, qui changent \square en les h compacts $F_i \square = \square_i \subset \overset{\circ}{\square}$ deux-à-deux disjoints. Pour tout entier k , les h^k compacts $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_k} \square = \square_{a_1 a_2 \dots a_k} (a_i = 1, \dots, h)$ sont deux-à-deux disjoints. Soit $\square^k = \bigcup \square_{a_1 \dots a_k}$ leur réunion; on a $\square^k \supset \square^{k+1}$ et l'intersection $P = \bigcap_{k=1}^{\infty} \square^k$ est un ensemble parfait, totalement discontinu. Pour toute suite infinie $a_1 a_2 \dots a_k \dots, (a_k = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } \dots \text{ ou } h)$, les $\square_{a_1 a_2 \dots a_k} (k=1, 2, \dots)$ forment une suite décroissante ayant pour intersection un point de P , et l'on a ainsi une bijection b de l'ensemble de ces suites sur P . Posons encore $D_0 = \square - \square^1, D_k = \square^k - \square^{k+1}$. On a

$$\square^{k+1} = \bigcup_{j=1}^h F_j \square^k, \quad D_{k+1} = \bigcup_{j=1}^h F_j D_k.$$

Les ensembles P et $D_k (k=0, 1, 2, \dots)$ sont deux-à-deux disjoints et ont pour réunion \square . Comme $\square_i \subset \overset{\circ}{\square}$, on a $\square^1 \subset \overset{\circ}{\square}$ et la distance d de \square^1 à $C \square$ est positive; la distance de $F_a \square^1$ à $C \square_a$ est alors $\alpha = q d > 0$, indépendante de a .

Considérons encore un compact $\Delta \subset R^p$ et h similitudes $T_i (i=1, \dots, h)$ de rapport $q' < 1$ telles que $T_i \Delta \subset \Delta$, sans supposer les $T_i \Delta$ deux-à-deux disjoints. Soit encore Δ^k la réunion des h^k compacts $T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_k} \Delta$ et P' l'intersection $P' = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^k$. On définit comme ci-dessus une application s de l'ensemble des suites $a_1 a_2 \dots a_k \dots$ sur P' , qui est surjective mais non injective lorsque les $T_i \Delta$ ne sont pas deux-à-deux disjoints, et P' n'est en général pas totalement discontinu.

Théorème (7):

a) Il existe une application $f: \square \rightarrow \Delta$, et une seule qui satisfait aux équations fonctionnelles:

$$T_a \circ f = f \circ F_a, \quad (a = 1, 2, \dots, h) \tag{2.2}$$

et dont la restriction à D_0 est une application donnée $\varphi: D_0 \rightarrow \Delta$

b) La restriction f à P est $f|P = s \circ b^{-1}$, en sorte qu'elle ne dépend pas de φ et $f(P) = P'$.

c) Il est possible de choisir φ de manière que f soit C^∞ dans $\square - P$.

d) Si q est le plus grand entier tel que $q' < q^q$ et si f est C^q dans $\square - P$, f est C^q dans \square ,

toutes ses dérivées d'ordre $\leq q$ sont nulles sur P et elle est hölderienne d'exposant $e = \log \varrho' / \log \varrho$ aux points de P .

La dernière partie du théorème entraîne que tous les points de P sont des points stationnaires d'ordre r de f pour tout $r < e$.

Tout d'abord, f étant donnée sur D_0 , on peut la définir de proche en proche sur les ensembles D_k ($k = 1, 2, \dots$) de manière à satisfaire à (2.2); si en effet, $\xi \in D_{k+1}$, on a $\xi \in F_a D_k$ pour une valeur de a , ($1 \leq a \leq h$), $F_a^{-1}(\xi) \in D_k$ et l'on étend la définition de f de D_k à D_{k+1} en posant:

$$f(\xi) = T_a \circ f \circ F_a^{-1}(\xi)$$

L'application f est ainsi déterminée sur $\bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \square - P$ lorsque $f|_{D_0} = \varphi$ est donnée.

Pour définir f sur P , remarquons que (2.2) entraîne les équations plus générales,

$$T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_k} \circ f = f \circ F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_k}. \tag{2.3}$$

Si au point $\xi \in P$ correspond la suite $b^{-1}(\xi) = a_1 a_2 \dots a_k \dots$ on doit avoir d'après (2.3), $f(\xi) \in T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_k} \Delta$ pour tout k , donc $f(\xi) = s \circ b^{-1}(\xi)$. L'application ainsi définie sur P satisfait effectivement à (2.2) et l'on a $f(P) = P'$. On a ainsi établi a) et b).

Si φ est C^∞ à l'intérieur de D_0 , il résulte de la définition ci-dessus que f sera C^∞ à l'intérieur de D_k pour tout entier k . Mais il y aura en général des discontinuités à la frontière des D_k . Toutefois, comme la frontière intérieure de D_k (qui est en même temps la frontière extérieure de D_{k+1} , et la frontière de \square^{k+1}) est la réunion des h^k images de la frontière intérieure de D_0 par les h^k applications $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_k}$, en vertu de (2.2) il suffira que f soit C^∞ sur la frontière intérieure de D_0 pour qu'elle le soit en tous les points frontière de tous les D_k , et par suite dans $\square - P$.

Pour réaliser cette condition, considérons un voisinage ouvert U de la frontière de \square , tel que $\bar{U}, F_a \bar{U}$, ($a = 1, \dots, h$) soient deux-à-deux disjoints, et soit $1 = \psi_0 + \psi_1 + \dots + \psi_h$ une partition de l'unité dans R^m en $h+1$ fonctions C^∞ et ≥ 0 , telles que $\psi_0 = 1$ dans U , $\psi_a = 1$ dans $F_a U$. Si alors χ est une application C^∞ de R^m dans R_p , telle que $\chi(\square) \subset \Delta$, par exemple une application constante de R^m sur un point de Δ , l'application

$$\varphi = \psi_0 \chi + \psi_1 (T_1 \circ \chi \circ F_1^{-1}) + \dots + \psi_h (T_h \circ \chi \circ F_h^{-1})$$

est C^∞ , égale à χ dans U , à $T_a \circ \chi \circ F_a^{-1}$ dans $F_a U$ ($a = 1, 2, \dots, h$).

L'application f égale à φ dans D_0 qui satisfait à (2.2) est alors encore égale à φ dans $F_a U$, ($a = 1, 2, \dots, h$), elle est donc C^∞ sur les frontières des \square_i ($i = 1, 2, \dots, h$) c.à.d. sur la frontière intérieure de D_0 et par suite dans $\square - P$, ce qui prouve c).

Soit dx un vecteur unité dans R^m et t une variable réelle qu'on fera tendre vers 0; comme f est C^∞ , en tout point $x \in \square - P$, on a un développement asymptotique

$$f(x + t dx) - f(x) \cong \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} P_k(x, dx) \tag{2.4}$$

où $P_k(x, dx)$, différentielle d'ordre k de $f(x)$, est un polynôme homogène de degré k en les composantes de dx , dont les coefficients sont les dérivées partielles d'ordre k de f en x .

Si $x \in D_n$, il existe une suite $a_1 a_2 \dots a_n$ et un point $x_n \in D_0$ tels que $x = F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}(x_n)$. Les similitudes F_a ($a=1, 2, \dots, h$) agissent sur les vecteurs de R^m comme une rotation F'_a suivie d'une homothétie de rapport ϱ , par suite dx est l'image par $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}$ du vecteur $\varrho^{-n} F_{a_n}'^{-1} F_{a_{n-1}}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1}$, ce qui entraîne :

$$x + t dx = F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_n}(x_n + t \varrho^{-n} F_{a_n}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1} dx) \quad (2.5)$$

D'autre part, chaque transformation T_1, T_2, \dots, T_h agit sur les vecteurs de R^p comme une rotation T'_a ($a=1, \dots, h$) suivie d'une homothétie de rapport ϱ' , ce qui entraîne en tenant compte de (2.3) et (2.5)

$$f(x + t dx) - f(x) = \varrho^m T_{a_1}' \dots T_{a_n}' [f(x_n + t \varrho^{-n} F_{a_n}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1} dx) - f(x_n)] \quad (2.6)$$

En identifiant le développement (2.4) avec celui qu'on obtient en appliquant cette même formule (2.4) au second membre de (2.6) il vient :

$$P_k(x, dx) = (\varrho' \varrho^{-k})^n T_{a_1}' \dots T_{a_n}' P_k(x_n, F_{a_n}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1} dx) \quad (2.7)$$

Comme x_n varie dans D_0 , où chaque dérivée de f est bornée, et $F_{a_n}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1} dx$ étant comme dx un vecteur unité, $|P_k(x_n, F_{a_n}'^{-1} \dots F_{a_1}'^{-1} dx)|$ admet une borne supérieure A_k , d'où

$$|P_k(x, dx)| \leq (\varrho' \varrho^{-k})^n A_k \quad \text{pour } x \in D_n \quad \text{et} \quad |dx| = 1 \quad (2.8)$$

Si $k \leq q$, en vertu de (2.1;d), on a $\varrho' \varrho^{-k} < 1$. Si alors $x \in \square - P$ tend vers un point de P , n tend vers l'infini, par suite $P_k(x, dx) \rightarrow 0$.

Nous avons prouvé que si $x \in \square - P$ tend vers un point de P , les dérivées de $f(x)$ d'ordre $\leq q$ tendent vers 0.

Montrons encore que ces dérivées existent et sont nulles sur P . Soit $x \in P$ et $a_1 a_2 \dots a_n \dots$ la suite telle que $x \in \square a_1 a_2 \dots a_n$ pour tout n . Si $x \neq x'$, il existe un entier déterminé n , tel que $x' \in \square a_1 \dots a_n$ et $x' \notin \square a_1 \dots a_n a_{n+1}$. Il existe alors deux points x_n et x'_n de \square , tels que $x = F_{a_1} \dots F_{a_n} x_n$, $x' = F_{a_1} \dots F_{a_n} x'_n$; et l'on a $x'_n \notin \square a_{n+1}$, $x_n \in \square a_{n+1} a_{n+2} \subset F_{a_{n+1}} \square 1$. La distance de x_n à x'_n est par suite supérieure au nombre positif α , $|x'_n - x_n| \geq \alpha$ d'où

$$|x' - x| \geq \alpha \varrho^n. \quad (2.9)$$

D'autre part, si δ est le diamètre de Δ , on a :

$$|f(x'_n) - f(x_n)| \leq \delta \quad \text{d'où} \quad |f(x') - f(x)| \leq \varrho^n \delta$$

Cela entraîne la continuité de f en x . De plus, on a

$$\frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|} \leq \frac{\delta}{\alpha} (\varrho' \varrho^{-1})^n$$

d'où résulte si $q \geq 1$, que la différentielle première de f existe et est nulle en x , car $\varrho' \varrho^{-1} < 1$ en vertu de (2.1; d), et $n \rightarrow \infty$ si $x' \rightarrow x$.

Si $q > 1$, raisonnant par récurrence, supposons que pour $k \leq q - 1$, la différentielle d'ordre k , $P_k(x, dx)$, existe et est nulle en x et montrons qu'il en est de même de la différentielle d'ordre $k + 1$. En tenant compte alors de (2.8) et de (2.9), on a :

$$\frac{|P_k(x', dx) - P_k(x, dx)|}{|x' - x|} = \frac{|P_k(x', dx)|}{|x' - x|} \leq (\varrho' \varrho^{-k-1})^n \frac{A_k}{\alpha}$$

ce qui tend bien vers 0 pour $x' \rightarrow x$, ou $n \rightarrow \infty$, car, $\varrho' \varrho^{-k-1} \leq \varrho' \varrho^{-q} < 1$.

Enfin, si $e = \log \varrho' / \log \varrho$, on a $\varrho' \varrho^{-e} = 1$, d'où en tenant compte de (2.9)

$$\frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|^e} \leq \frac{\delta}{\alpha^e} (\varrho' \varrho^{-e})^n = \frac{\delta}{\alpha^e}$$

ce qui montre que $f(x)$ est hölderienne d'exposant e aux points de P . On voit de même que pour $k \leq q$, les dérivées d'ordre k de $f(x)$ sont hölderiennes d'exposant $e - k$ aux points de P .

Nous allons maintenant examiner quelques cas particuliers du précédent Théorème.

Prenons pour \square le parallélotope défini dans R^m par

$$0 \leq x_j \leq 2^{(1-j)/m} \quad (j = 1, 2, \dots, m)$$

Le plan $x_1 = 1/2$ partage \square en deux parallélotopes égaux entre eux et semblables à \square dans le rapport $2^{-1/m}$. Les applications

$$T_0: \begin{cases} x'_1 &= 2^{-1/m} x_m \\ x'_{j+1} &= 2^{-1/m} x_j \end{cases} \quad (j = 1, \dots, m - 1)$$

et

$$T_1: \begin{cases} x'_1 &= 2^{-1/m} x_m + \frac{1}{2} \\ x'_{j+1} &= 2^{-1/m} x_j \end{cases} \quad (j = 1, \dots, m - 1)$$

sont des similitudes de rapport $2^{-1/m}$ qui changent \square en ses deux moitiés $T_0 \square$ et $T_1 \square$.

Soit H une homothétie ayant pour centre le centre de \square , de rapport < 1 . Les similitudes $F_0 = T_0 \circ H$ et $F_1 = T_1 \circ H$ de rapport $\varrho < 2^{-1/m}$, changent \square en deux parallélotopes $F_0 \square = \square_0$ et $F_1 \square = \square_1$ contenus dans \square et disjoints.

Prenons pour Δ le parallélotope défini de la même manière dans R^p et pour T_0 et T_1 les applications analogues à celles définies ci-dessus; ce sont des similitudes de rapport $\varrho' = 2^{-1/p}$, $T_0 \Delta$ et $T_1 \Delta$ ont pour réunion Δ mais ne sont pas disjoints. Les 2^k parallélotopes $T_{a_1} T_{a_2} \dots T_{a_k} \Delta$ ont pour réunion Δ , quel que soit k .

Les applications F_0 et F_1 sont des similitudes de rapport $\varrho < 2^{-1/m}$, qu'on pourra supposer aussi voisin que l'on veut de $2^{-1/m}$. Soit q le plus grand entier strictement

inférieur à m/p , $m/p > q \geq m/p - 1$. Alors $1/pq > 1/m$ et

$$2^{-1/pq} < 2^{-1/m}$$

Nous choisirons q de manière que l'on ait:

$$2^{-1/pq} < q < 2^{-1/m}$$

en sorte que

$$q' = 2^{-1/p} < q^q.$$

Le Théorème (7) s'applique dans ce cas, on a $h=2$, $q' = 2^{-1/p}$ et dans les formules (2.5), (2.6), (2.7) on peut remplacer T'_a , F'_a respectivement par les rotations uniques T et F . L'ensemble P' devient le parallélotope Δ . Les points de P sont ainsi des points stationnaires d'ordre r aussi voisin qu'on veut de e , et cependant $f(P) = \Delta$. D'après (2.1; d), on a $q < r < e < m/p$, en choisissant q assez voisin de $2^{-1/m}$, e sera aussi voisin qu'on veut de m/p et q le plus grand entier inférieur à m/p .

Lemme (1): Soit $E \subset R^m$ alors $m_s(E) = 0$ si $s > m$. Démonstration: Il suffit de supposer que E soit le cube unité dans R^m . E est donc défini par $0 \leq x_i \leq 1$, ($i=1, 2, \dots, \dots, m$). On peut partager E en h^m cubes E_j de côtés $1/h$ donnés par les inégalités: $m_{i-1}/h \leq x_j \leq m_i/h$, $i=1, 2, \dots, h$. Les ensembles E_j recouvrent E , et le diamètre d'un cube E_j vaut (\sqrt{m}/h) . Soit $\varepsilon > 0$, fixe, arbitrairement petit, et $\delta > 0$; il existe h tel que $h^{m-s} \leq \varepsilon$ et $(\sqrt{m}/h) < \delta$. On a:

$$\sum_{j=1}^{h^m} \delta^s(E_j) = h^m \left(\frac{\sqrt{(m)}}{h} \right)^s = m^{s/2} h^{m-s} \leq \varepsilon m^{s/2}$$

alors $m_s(E, \delta) \leq \varepsilon$ pour tout δ , et par suite $m_s(E) \leq \varepsilon$ et comme ε est arbitraire, on a $m_s(E) = 0$.

Des lemmes (1, § 1 et 1 § 2) il découle que $m_s f(E) = 0$ pour $s > m/e$. En particulier $m_p f(E) = 0$ si $p > m/e$ c'est-à-dire $e > m/p$.

Or, dans l'exemple,

$$m_p f(E) > 0 \quad \text{et} \quad e = \frac{\log q'}{\log q} = \frac{\log 2^{-1/p}}{\log q}$$

est aussi voisin qu'on veut de $\log 2^{-1/p} / \log 2^{-1/m} = m/p$, on ne peut donc améliorer ni l'exemple, ni le Théorème 2 de A. Sard.

Avant de prouver que l'on ne peut améliorer le théorème 4 de A. Sard, nous allons étudier la s -mesure de l'ensemble P . Nous montrerons que la dimension de P au sens de Hausdorff est égale à $s_0 = -\log 2 / \log q$ et que $m_{s_0}(P)$ est positive, non infinie.

Lemme 2: Soit $s_0 = -\log 2 / \log q$ alors $m_{s_0}(P) > 0$, $\neq \infty$. Démonstration: Dans le cas où f est la fonction prenant ses valeurs dans R^1 , nous avons d'après le théorème

(7):
$$|f(p) - f(q)| \leq A |p - q|^e$$

le nombre e vaut précisément $-\log 2 / \log \varrho$ car $\varrho' = 1/2$. D'après le lemme (1, § 1), $m_e(P)$ ne peut être nulle car $m_1 f(P) = 1$ et en posant $s = 1$ dans le lemme (1, § 1), on a $m_1 f(P) \leq A m_e(P)$. D'autre part $m_e(P)$ n'est pas infinie, car à tout $\delta > 0$ on peut faire correspondre un indice n , tel que $\varrho^n \delta(P) < \delta$ et comme l'ensemble P est contenu dans la réunion des 2^n ensembles $\square_{a_1 \dots a_n}$ deux-à-deux disjoints, semblables à \square dans le rapport ϱ^n , et que $2\varrho^e = 1$, on aura:

$$\sum_{(i=1, \dots, n), a_i=0,1} \delta^e(\square_{a_1 \dots a_n}) = 2^n \varrho^{ne} \delta^e(\square) = \delta^e(\square),$$

d'où il résulte que $m_e(P, \delta) \leq \delta^e(\square)$ et comme δ est aussi petit que l'on veut on a:

$$m_e(P) \leq \delta^e(\square)$$

On peut ainsi remarquer qu'à chaque valeur de e , comprise entre 0 et m , $0 < e < m$, il correspond un nombre ϱ tel que $2\varrho^e = 1$ et un ensemble $P \subset R^m$, tels que $m_e(P) > 0$, $\neq +\infty$.

En nous basant sur les théorèmes (6, § 1) et (1, § 2), et le lemme (2, § 2), nous allons montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $1 > \varepsilon > 0$, fixe, et tout couple d'entiers m et p , $m \geq 1$, $p \geq 1$, il existe pour tout nombre $r \geq 1$, et pour tout nombre e_1 , $0 < e_1 < m$, une application f_ε d'un ouvert G de R^m dans R^p , de classe C^q , $q = [r]$ et un ensemble P de points stationnaires d'ordre r de f_ε , $m_{e_1}(P) \neq 0$, tels que

$$m_{e_1/r + \varepsilon} f_\varepsilon(P) \neq 0$$

Nous nous plaçons dans le cas où l'on a deux similitudes F_0 et F_1 de rapport $\varrho_1 = h_1 2^{-1/m}$, et deux similitudes T_0 et T_1 de rapport $\varrho_2 = h_2 2^{-1/p}$. D'après le théorème (7), si $x \in P$ on a:

$$\frac{|f(x') - f(x)|}{|x' - x|^r} \leq \frac{A}{\alpha^r} \left(\frac{h_2 \cdot 2^{-1/p}}{h_1^r \cdot 2^{-r/m}} \right)^n$$

et cette dernière quantité tendra vers 0 pour $n \rightarrow \infty$, c.à.d. lorsque $x' \rightarrow x$, si

$$h_2 < h_1^r 2^{-r/m + 1/p}$$

de sorte que l'on peut écrire:

$$h_2 = (1 - \varepsilon') h_1^r 2^{-r/m + 1/p}, \quad \varepsilon' > 0.$$

Du théorème (7), il découle que l'application f_ε que l'on obtient est de classe C^q , $q = [r]$ dans \square et les points de P sont des points stationnaires d'ordre r de f_ε . L'application f_ε vérifie les hypothèses du théorème (6, § 1), sur P et il vient:

$$m_{e_1/r} f_\varepsilon(P) = 0.$$

En vertu du lemme (2, § 2), à tout nombre e_1 , $0 < e_1 < m$, il correspond un nombre ϱ_1 et un ensemble P , tels que

$$m_{e_1}(P) > 0, \quad m_{e_1}(P) \neq \infty$$

Cela implique

$$e_1 = \frac{-\log 2}{\log \varrho_1} = \frac{-\log 2}{\log h_1 - 1/m \log 2}$$

Pour les mêmes raisons, au nombre h_2 il correspond

$$e_2 = \frac{-\log 2}{\log \varrho_2} \quad \text{et} \quad m_{e_2}(P') > 0, \neq \infty$$

Nous avons

$$e_2 = \frac{-\log 2}{\log(1 - \varepsilon') h'_1 - r/m \log 2} < \frac{e_1}{r}$$

et l'on peut poser $e_2 = e_1/(r + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$.

On peut rendre e_2 aussi voisin que l'on veut de e_1/r , il suffit pour cela de choisir ε' suffisamment petit. Comme $m_{e_2}(P') > 0$, on a bien $m_{e_1/r + \varepsilon} f_\varepsilon(P) \neq 0$. On ne peut donc améliorer ni les théorèmes 5 et 6 § 1, ni le théorème 4 de Sard.

3. En nous basant sur le cas particulier du paragraphe 2, nous allons construire une courbe simple C passant par P et une application $f: \square \rightarrow \Delta$ telle que $f(P) = \Delta$ dont tous les points de C sont stationnaires d'ordre $r = m/p - \varepsilon$.

Pour construire C , considérons les applications $t_0(z) = (1+z)/5$ et $t_1(z) = (3+z)/5$ de l'intervalle $I = (0 \leq z \leq 1)$. Le théorème (7), montre qu'il existe une application $g: I \rightarrow \square$ et une seule, qui satisfait aux équations

$$g \circ t_a = F_a \circ g \quad a = 0, 1, \quad (3.1)$$

et dont les restrictions aux intervalles $0 \leq z \leq 1/5$, $2/5 < z < 3/5$, et $4/5 < z \leq 1$ sont données. Dans ce cas, $r = 0$ et g est continue.

Désignons par Q le sommet de \square opposé à O , et supposons que les restrictions de g à ces trois intervalles définissent trois arcs simples α , β et γ , joignant respectivement O à $F_0 O$, $F_0 Q$ à $F_1 O$ et $F_1 Q$ à Q , ces arcs étant deux-à-deux disjoints et contenus dans D_0 à l'exception des extrémités qui sont sur D_1 . Alors l'application g définit un arc simple C , joignant O à Q , égal à la réunion de P et des arcs α , β , γ et de toutes leurs images pour toutes les applications $F_{a_1} F_{a_2} \dots F_{a_k}$ ($a_i = 0, 1$; $k = 1, 2, \dots$). Supposons $p = 1$. Les transformations T_0 et T_1 se réduisent alors à $T_0 y = y/2$ et $T_1 y = (1+y)/2$, de sorte que $T_0 O = O$, $T_0 1 = T_1 O = 1/2$, $T_1 1 = 1$. Si la solution f des équations (2.2) satisfait à $f(O) = 0$ et $f(Q) = 1$, on aura par suite $f(F_0(O)) = 0$, $f(F_0(Q)) = f(F_1(O)) =$

$=1/2$ et $f(F_1(Q))=1$ c.à.d. que f prend la même valeur aux deux extrémités de chacun des arcs α , β et γ . Il en résulte qu'on peut choisir la restriction φ de f à D_0 de manière que f soit constante égale à 0 dans un voisinage W_1 de α , constante égale à $1/2$ dans un voisinage W_2 de β et constante égale à 1 dans un voisinage W_3 de γ et C^∞ dans $\square - P$. La fonction f est alors stationnaire d'ordre ∞ aux points de α , β , γ et en leurs images par toutes les transformations $F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_k}$ ($a_i=0,1; k=1,2,\dots$). Comme elle est stationnaire d'ordre $r=m-\varepsilon$ aux points de P , elle est stationnaire d'ordre r en tous les points de la courbe C et $f(C)=f(P)=I$.

Cas de $p > 1$.

A partir de la construction précédente et du cas particulier du théorème (7), nous allons obtenir une application f d'un ouvert G de R^m dans R^p , de classe C^q , $m/p > q \geq \geq m/p - 1$ stationnaire d'ordre $r = m/p - \varepsilon$, $m/p - 1 < q < r < e < m/p$, sur un arc de courbe Γ , telle que $f(\Gamma) = \Delta$. Nous pouvons prendre pour β un arc de courbe contenant un exemplaire de l'arc de courbe C construit ci-dessus, et disposer C de manière que seules son origine et son extrémité rencontrent respectivement les ensembles $F_0 W_3$ et $F_1 W_0$ et l'on raccordera C aux points $F_0 Q$ et $F_1 O$ au moyen d'arcs de courbe C' , C'' , rectifiables, entièrement contenus dans W_2 .

Soient P_0 et P_1 deux sommets de Δ dont nous supposons qu'ils vérifient la condition $T_0 P_0 = P_0$ et $T_1 P_1 = P_1$, et a le segment de droite qui joint $T_0 P_1$ à $T_1 P_0$. Nous pouvons maintenant choisir φ de manière que $\varphi(x) = P_0$ dans W_1 , $\varphi(x) = P_1$ dans W_3 et que φ soit stationnaire d'ordre $m - \varepsilon$ sur C avec $\varphi(C) = a$, $\varphi(C') = P_0$, $\varphi(C'') = P_1$. Le segment a , image de β par φ est donc entièrement constitué de valeurs stationnaires d'ordre $m - \varepsilon$ de φ .

Soit Γ l'arc de courbe formé de la réunion de α , β , γ , de toutes leurs images par les applications $F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_n}$, ($a_j=0,1; n=1,2,\dots$) et de P . L'application f qu'on déduit de φ est stationnaire d'ordre $r = m/p - \varepsilon$ sur Γ et C^∞ en dehors de Γ . En effet, f est stationnaire d'ordre $m - \varepsilon$ sur tous les ensembles $F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_n}(C)$, cela découle de la formule:

$$f \circ F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_n}(x) = T_{a_1}T_{a_2}\dots T_{a_n} \circ f(x),$$

car si x est critique pour f il l'est aussi pour l'application $T_{a_1}T_{a_2}\dots T_{a_n} \circ f(x)$ car les T_a sont des difféomorphismes C^∞ , et comme il en va de même pour les F_a , le point $F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_n}(x)$ est aussi critique pour f . En vertu de ces équations, si x est stationnaire d'ordre r pour f , alors $F_{a_1}F_{a_2}\dots F_{a_n}(x)$ est également stationnaire d'ordre r pour f . Comme on peut choisir ε de telle sorte que $m - \varepsilon > m/p > r$, f est bien stationnaire d'ordre r sur Γ et $f(\Gamma) = \Delta$.

On peut encore remarquer que l'image de Γ est une courbe de Peano qui remplit le pavé Δ , et le graphe de l'application f dans R^{m+p} est une variété à m dimensions de classe C^q . Le m -plan tangent π à cette variété, varie continûment le long d'une courbe Γ' qui est l'image de Γ par l'application $\Omega(x) = (x, f(x))$, et en chaque point de Γ' , π est parallèle à R^m . La projection de Γ' sur R^p est Δ .

4. Voici une autre construction d'une application du paralléloétope à m dimensions \square dans un cube à p dimensions Δ de classe C^q , $m/p - 1 \leq q < r < m/p$, et stationnaire d'ordre $r = m/p - \varepsilon$ en tous les points d'une courbe C , dont l'image $f(C)$ remplit néanmoins Δ .

Désignons par Δ le cube unité de R^p , $0 \leq x_i \leq 1$ ($i=1, 2, \dots, p$). Ordonnons ses sommets S_i ($i=1, 2, \dots, 2^p$) de manière que S_{i-1} et S_i ($i=2, 3, \dots, 2^p$) ainsi que S_{2^p} et S_1 soient les extrémités d'une même arête. On peut déterminer cet ordre par récurrence, de manière que S_i ($i=1, 2, \dots, 2^{p-1}$) soient les sommets de la face de Δ contenue dans le plan $x_p=0$ rangés dans un ordre satisfaisant à la condition ci-dessus, et prenant pour S_j si $j > 2^{p-1}$ le sommet de la face contenue dans le plan $x_p=1$ qui se projette sur S_{2^p+1-j} . On peut supposer que $S_1 = (0, 0, \dots, 0) = 0$, alors $S_{2^p} = (0, 0, \dots, 0, 1)$.

Partageons Δ en 2^p cubes égaux, par les plans $x_k=1/2$, ($k=1, 2, \dots, p$) et désignons par Δ_i celui qui contient le sommet S_i . Choisissons dans chaque Δ_i une arête orientée A_i , de manière que l'extrémité de A_i coïncide avec l'origine de A_{i+1} ($i=1, \dots, 2^p-1$) et que S_1 soit l'origine de A_1 et S_{2^p} l'extrémité de A_{2^p} . On peut faire ce choix par récurrence: si B_i ($i=1, 2, \dots, 2^{p-1}$) sont des arêtes des bases des Δ_i dans le plan $x_p=0$, on prendra $A_i=B_i$ (les B_i satisfaisant par hypothèse à la condition énoncée pour $p-1$) pour $i < 2^{p-1}$, A_{2^p-1} = arête parallèle à O_{x_p} ayant pour origine l'extrémité de B_{2^p-1-1} , et si $j > 2^{p-1}$, A_j sera l'arête de Δ_j qui se projette sur A_{2^p+1-j} , avec l'orientation opposée.

Si alors T_i est une similitude (de rapport $\frac{1}{2}$) qui change Δ en Δ_i et l'arête $\overline{S_1 S_{2^p}}$ de Δ en A_i , ($i=1, 2, \dots, 2^p$), on a:

$$T_i S_{2^p} = T_{i+1} S_1, (i = 1, \dots, 2^p - 1), T_1 S_1 = S_1, T_{2^p} S_{2^p} = S_{2^p} \quad (4.1)$$

Considérons alors les 2^p similitudes $F_{a_1} \dots F_{a_p}$ ($a_j=0, 1$) les F_a étant les similitudes (de rapport q) définies au § 2 et désignons-les par ϕ_i ($i=1, 2, \dots, 2^p$). Le Théorème (7), fournit alors une application f qui satisfait aux équations fonctionnelles

$$T_i \circ f = f \circ \phi_i \quad (i = 1, 2, \dots, 2^p) \quad (4.2)$$

Soient α_i , ($i=0, 1, \dots, 2^p$), 2^p+1 arcs simples, deux-à-deux disjoints contenus (sauf les extrémités) dans D_0 , α_0 joignant O à $\phi_1 O$, α_i joignant $\phi_i Q$ à $\phi_{i+1} O$, ($i=1, \dots, 2^p-1$) et α_{2^p} joignant $\phi_{2^p} Q$ à Q . La réunion de P avec les arcs α_i et toutes leurs images par toutes les applications $\phi_{i_1} \dots \phi_{i_k}$, ($i_j=1, \dots, 2^p$; $k=1, 2, \dots$) est un arc simple C , joignant O à Q .

Si la solution f des équations (2.2) satisfait à $f(0)=S_1, f(Q)=S_{2^p}$, en vertu de (4.1) elle prend la même valeur $T_i S_{2^p} = T_{i+1} S_1$ aux deux extrémités de l'arc α_i . On en déduit que l'on peut choisir la restriction φ de f à D_0 de manière que f soit C^∞ dans $\square - P$ et constante égale à $T_i S_{2^p} = T_{i+1} S_1$ dans un voisinage de α_i . C'est alors une application stationnaire d'ordre r en tous les points de C , telle que $f(C) = \Delta$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. HAUSDORFF, Dimension und äusseres Mass, *Math. Ann.* 79 (1919) 157–179.
- [2] G. DE RHAM, Celebrazioni archimedee del secolo XX, Siracusa 11–16 aprile 1961. Vol. II: simposio di analisi, 61–65. Sur quelques fonctions différentiables dont toutes les valeurs sont des valeurs critiques.
- [3] S. SAKS, *Theory of the integral*, Warszawa, 1937.
- [4] S. SAKS et S. MAZURKIEWICZ, Sur les projections d'un ensemble fermé, *Fundamenta mathematicae*, 8 (1900) 109–113.
- [5] A. SARD, The measure of critical values of differentiable maps, *Bull. Amer. Math. Soc.* 48, (1942) 883–890.
- [6] A. SARD, Images of critical sets, *Annals of mathematics.* 68 (1958) 247–259.
- [7] A. SARD, The equivalence of n -measure and Lebesgue measure in E^n , *Bull. Amer. Math. Soc.* 49 (1943) 758–759.
- [8] H. WHITNEY, A function not constant on a connected set of critical points, *Duke. Math. Journal.* 1, (1935) 514–517.

Reçu le 24 novembre 1965