Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 41 (1966-1967)

Artikel: Ein Differenzierbarkeitsbegriff in limitierten Vektorräumen.

Autor: Binz, Ernst

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31375

Ein Differenzierbarkeitsbegriff in limitierten Vektorräumen

ERNST BINZ (Zürich)

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit soll der Versuch unternommen werden, eine Differenzierbarkeit für Abbildungen zwischen limitierten Vektorräumen zu erklären.

Im ersten Kapitel sind die notwendigen Begriffe der Filtertheorie (s. [2]) und der Limesräume (s. [3]) zusammengestellt.

Die limitierten Vektorräume werden in (2.) eingeführt. Für die Theorie der topologischen Vektorräume sei auf [5] verwiesen. In (2.1.) finden wir eine Verallgemeinerung eines Satzes von TYCHONOFF über endlichdimensionale limitierte Vektorräume (Satz (2.1.5.)). Von stetigen linearen und stetigen multilinearen Abbildungen zwischen limitierten Vektorräumen handelt (2.2.). In (2.3.) wird der induktive Limes limitierter Vektorräume betrachtet und die feinste für einen gegebenen Vektorraum noch zulässige Limitierung bestimmt. Für diese Limitierung zeigen wir einige spezifische Eigenschaften auf.

Die Definition eines Restgliedes zwischen limitierten Vektorräumen wird in Kapitel (3.) aufgestellt. Sie ist eine Verallgemeinerung der Definition eines Restgliedes zwischen topologischen Vektorräumen in [6]. Weiter werden Spezialfälle untersucht, Beispiele von Restgliedern angegeben und einige speziellere Eigenschaften der Restglieder zusammengestellt, welche hernach in (4.) Anwendung finden.

Das Kapitel (4.) widmet sich einigen Sätzen über differenzierbare Abbildungen zwischen limitierten Vektorräumen. So werden unter anderem die Kettenregel, der Mittelwertsatz und der Hauptsatz der Integralrechnung bewiesen.

1. Limitierungen

1.1. VORBEMERKUNGEN

Sei E eine nicht leere Menge. Die Halbordnung der Filter auf E sei mit $\mathscr{F}(E)$ bezeichnet. Die untere Grenze von Φ, $\Psi \in \mathscr{F}(E)$ wird durch $\Phi \wedge \Psi$ dargestellt. Sie besteht aus dem Mengensystem $\{M \cup N \mid M \in \Phi,\ N \in \Psi\}$.

Definition 1.1.1. Ein Element I aus der Potenzmenge $\mathscr{P}(\mathscr{F}(E))$ von $\mathscr{F}(E)$ heisst ein $\wedge$*-Ideal in* $\mathscr{F}(E)$, falls mit $\Phi, \Psi \in \mathscr{F}(E)$ auch $\Phi \wedge \Psi \in \mathscr{F}(E)$ und mit $\Phi \in \mathscr{F}(E)$ auch alle seine Oberfilter auf E in I liegen.

I heisst ein $\wedge$*-Hauptideal in* $\mathscr{F}(E)$, wenn es aus allen Oberfiltern zu einem festen $\Phi \in \mathscr{F}(E)$ besteht. Wir nennen dann I das von Φ erzeugte Hauptideal in $\mathscr{F}(E)$.

Sei A eine nicht leere Teilmenge von E. Existiert die Spur eines Filters $\Phi \in \mathscr{F}(E)$ auf A, wird diese mit Φ_A bezeichnet.

Alle Filter aus einem $\wedge$-Ideal in $\mathscr{F}(E)$, welche eine Spur auf A haben, erzeugen in $\mathscr{F}(A)$ ein $\wedge$-Ideal (s.[3]).

Ist B ein Mengensystem auf E und existiert der von B erzeugte Filter in $\mathscr{F}(E)$, wird dieser mit $[B]_E$ bezeichnet. Sei $x \in E$. Den vom Mengensystem $\{\{x\}\}$, bestehend aus der einelementigen Menge $\{x\}$, erzeugte Ultrafilter in $\mathscr{F}(E)$ nennen wird fortan $\dot{x}$.

1.2. Limitierungen

Sei E eine nicht leere Menge.

Definition 1.2.2. Eine Abbildung $\Lambda: E \longrightarrow \mathscr{P}(\mathscr{F}(E))$ heisst eine *Limitierung auf E*, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

(1.) Für jedes $x \in E$ ist $\Lambda(x)$ ein $\wedge$-Ideal in $\mathscr{F}(E)$.

(2.) Für jedes $x \in E$ ist $\dot{x} \in \Lambda(x)$.

Die Elemente in $\Lambda(x)$ heissen bezüglich Λ gegen $x \in E$ *konvergente* Filter auf E. Das Paar (E, Λ), wofür wir oft E_Λ setzen, heisst ein *Limesraum*. Die Gesamtheit aller Limitierungen auf E sei mit $\mathscr{S}$ bezeichnet.

Sei $\Lambda \in \mathscr{S}$. Bilden für jedes $x \in E_\Lambda$ die bezüglich Λ gegen x konvergenten Filter ein $\wedge$-Hauptideal in $\mathscr{F}(E)$, heisst Λ eine *Hauptideallimitierung* auf E. Es bedeute $\mathscr{S}_1$ die Menge aller Hauptideallimitierungen auf E.

Eine Hauptideallimitierung $\Lambda \in \mathscr{S}_1$ ist eine *Topologie* auf E, wenn für jedes $x \in E_\Lambda$ das gröbste Element $\Phi^0(x) \in \Lambda(x)$ zusätzlich der folgenden Bedingung genügt: Zu jedem $U \in \Phi^0(x)$ existiert ein $V \in \Phi^0(x)$, sodass für alle $y \in V$ folgt $U \in \Phi^0(y)$.

Bezeichnet $\mathscr{S}_0$ das System aller Topologien auf E, so gilt $\mathscr{S} \supset \mathscr{S}_1 \supset \mathscr{S}_0$.

Nun sei $\Lambda \in \mathscr{S}$. In $\mathscr{F}(E)$ existiert für jedes $x \in E$ die untere Grenze $\Phi^0(x)$ aller Filter aus $\Lambda(x)$. Das von $\Phi^0(x)$ erzeugte $\wedge$-Hauptideal $\psi \Lambda(x)$ in $\mathscr{F}(E)$ ist durch Λ eindeutig bestimmt. Also wird durch $x \longmapsto \psi \Lambda(x)$ eine Hauptideallimitierung $\psi \Lambda$ auf E definiert. Durch $\Lambda \longmapsto \psi \Lambda$ wird eine natürliche Abbildung $\psi: \mathscr{S} \to \mathscr{S}_1$ bestimmt, für die $\psi | \mathscr{S}_1 \circ \psi = \psi$ gilt.

Definition 1.2.3. Sei $\Lambda \in \mathscr{S}$. Eine Menge $U \subset E_\Lambda$ heisst *Λ-offen*, wenn aus $x \in U$ folgt, dass $U \in \Phi$ für jedes $\Phi \in \Lambda(x)$.

Lemma 1.2.4. Sei E_Λ ein Limesraum. Für irgend ein x aus der Λ-offenen Menge $U \subset E_\Lambda$ sei $\Phi \in \Lambda(x)$. Dann existiert die Spur Φ_U auf U und es ist $\Phi = [\Phi_U]_E$.

Beweis: Aus $U \in \Phi$ folgert man für jedes $M \in \Phi$, dass $M \cap U \neq \emptyset$. Somit existiert Φ_U. Es ist $\Phi \leq [\Phi_U]_E$. Umgekehrt gibt es zu jedem $M' \in [\Phi_U]_E$ ein $M \in \Phi$, so dass $M' \supset M \cap U$. Das beweist $M' \in \Phi$. Also gilt $[\Phi_U]_E \leq \Phi$ und wegen $\Phi \leq [\Phi_U]_E$ resultiert $\Phi = [\Phi_U]_E$.

Sei $\Lambda \in \mathcal{S}$. Das System der Λ-offenen Mengen in E_Λ genügt den Axiomen eines topologischen Raumes. Daher hat man eine natürliche Abbildung $\varphi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}_0$. Weil eine Menge $U \subset E_\Lambda$ genau dann Λ-offen ist, wenn sie $\psi\Lambda$-offen ist, folgt $\varphi = \varphi | \mathcal{S}_1 \circ \psi$. Wir nennen $E_{\varphi\Lambda}$ den zu E_Λ *assoziierten topologischen* Raum.

Definition 1.2.5. Sind auf einer Menge E die beiden Limitierungen Λ und Λ' definiert, heisst Λ *feiner als* Λ' (in Zeichen $\Lambda' \leq \Lambda$), wenn für jedes $x \in E$ gilt $\Lambda(x) \subset \Lambda'(x)$.

Die auf $\mathcal{S}_0$ von $\leq$ induzierte Ordnungsrelation stimmt mit der üblichen Anordnung von Topologien überein (s. [3]).

Wir benötigen noch folgenden Begriff:

Definition 1.2.6. Eine Limitierung Λ auf E heisst *separiert*, wenn für $x, y \in E_\Lambda$ aus $x \neq y$ folgt, dass $\Lambda(x) \cap \Lambda(y) = \emptyset$ ist.

1.3. Abbildungen zwischen Limesräumen

Seien E und F zwei nicht leere Mengen. Eine Abbildung $f : E \longrightarrow F$ führt einen Filter $\Phi \in \mathcal{F}(E)$ in das Mengensystem $B = \{f(M) | M \in \Phi\}$ über. Dieses ist eine Filterbasis auf F. Der Filter $f(\Phi) := [B]_E$ soll das Bild von Φ unter f heissen.

Nun seien E_Λ und $F_{\Lambda'}$ zwei Limesräume.

Definition 1.3.7. Eine Abbildung $f : E_\Lambda \longrightarrow F_{\Lambda'}$ heisst *an der Stelle* $x \in E_\Lambda$ *stetig*, falls für jedes $\Phi \in \Lambda(x)$ folgt $f(\Phi) \in \Lambda'(f(x))$.

Ist f an jeder Stelle $x \in E_\Lambda$ stetig, heisst f *stetig* in E_Λ.

1.4. Produktlimitierung

Seien E_Λ und $F_{\Lambda'}$ Limesräume. Auf $E \times F$ führen wir die gröbste Limitierung ein, für welche die Projektionen $\mathrm{pr}_E : E \times F \longrightarrow E_\Lambda$ und $\mathrm{pr}_F : E \times F \longrightarrow F_{\Lambda'}$ stetig sind. Diese Limitierung heisst *Produktlimitierung* $\Lambda \times \Lambda'$ auf $E \times F$.

Sind $\Phi \in \mathcal{F}(E)$ und $\Psi \in \mathcal{F}(F)$, so versteht man unter dem *Produktfilter* $\Phi \times \Psi$ den von der Filterbasis $B = \{M \times N | M \in \Phi, N \in \Psi\}$ auf $E \times F$ erzeugten Filter. Sind B und B' Filterbasen auf E bezw. auf F, so heisst $B \times B' = \{M \times N | M \in B, N \in B'\}$ die *Produktfilterbasis* auf $E \times F$ von B und B'. Es gilt der

Satz 1.4.8. *Seien* E_Λ und $F_{\Lambda'}$ *zwei Limesräume. Ein Filter* $X \in \mathcal{F}(E \times F)$ *konvergiert bezüglich* $\Lambda \times \Lambda'$ *genau dann gegen* $(x, y) \in E \times F$, *wenn* $\mathrm{pr}_E(X) \in \Lambda(x)$ *und* $\mathrm{pr}_F(X) \in \Lambda'(y)$.

Die Produktlimitierung $\Lambda \times \Lambda'$ ist genau dann separiert, wenn Λ und Λ' separiert sind.

1.5. Spurlimitierung

Definition 1.5.9. Seien E_Λ ein Limesraum und A eine nicht leere Teilmenge von E. Jedem $x \in A$ wird das von $\Lambda(x)$ in $\mathcal{F}(A)$ induzierte $\wedge$-Ideal $\Lambda_A(x)$ in $\mathcal{F}(A)$ zugeordnet.

Dann ist $\Lambda_A : A \longrightarrow \mathscr{P}(\mathscr{F}(A))$ eine Limitierung auf A und heisst die von Λ auf A induzierte Limitierung oder *Spurlimitierung auf A*.

FISCHER beweist in [3] den

Satz 1.5.10. *Für $\Phi' \in \mathscr{F}(A)$ ist $\Phi' \in \Lambda_A(x)$ genau dann, wenn $[\Phi']_E \in \Lambda(x)$.*

2. Limitierte Vektorräume

2.1. Einführung der limitierten Vektorräume

Wir betrachten im folgenden Vektorräume über dem Körper der reellen Zahlen **R**. Statt reeller Vektorraum schreiben wir kurz Vektorraum.

Sei E ein Vektorraum. Der Körper **R** trage die natürliche Topologie T.

Definition 2.1.1. Eine Limitierung Λ auf E heisst *mit der Vektorraumstruktur von E verträglich* oder auch *zulässig für E*, wenn die Abbildungen $(x, y) \longmapsto x+y$ und $(\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x$ von $(E \times E, \Lambda \times \Lambda)$ bezw. von $(\mathbf{R} \times E, T \times \Lambda)$ nach E_Λ stetig sind.

Ist Λ eine für den Vektorraum E zulässige Limitierung, so heisst das Paar (E, Λ), wofür wir oft E_Λ setzen, *limitierter Vektorraum*. Wenn E endlichdimensional ist und Λ die natürliche Topologie auf E bedeutet, schreiben wir statt (E, Λ) oder E_Λ oft nur E.

Die Gesamtheit aller für den Vektorraum E zulässigen Limitierungen sei mit $\mathscr{S}^E$ bezeichnet. Zur Formulierung eines notwendigen und hinreichenden Kriteriums (Satz 2.1.3.) für $\Lambda \in \mathscr{S}^E$, benötigen wir noch folgende Begriffe.

Seien $\Phi, \Psi \in \mathscr{F}(E)$. Unter $\Phi + \Psi$ verstehen wir den von der Filterbasis $\{M+N \mid M \in \Phi, N \in \Psi\}$ auf E erzeugten Filter. $\Lambda(x) + \Lambda(y)$ bezeichnet die Menge $\{\Phi + \Psi \mid \Phi \in \Lambda(x), \Psi \in \Lambda(y)\}$. Ist $\lambda \cdot \Phi := [\{\lambda \cdot M \mid M \in \Phi\}]_E$ für festes $\lambda \in \mathbf{R}$, so bedeutet $\lambda \cdot \Lambda(x)$ die Menge $\{\lambda \cdot \Phi \mid \Phi \in \Lambda(x)\}$. Sei $\Phi^0_{\mathbf{R}}$ der Nullumgebungsfilter in **R**. Wir denken ihn uns erzeugt vom System der abgeschlossenen symmetrischen Intervalle $\{[-\varepsilon, \varepsilon] \mid \varepsilon > 0\}$. Für festes $x \in E$ steht $\Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot x$ für $[\{R \cdot x \mid R \in \Phi^0_{\mathbf{R}}\}]_E$. Für $\Phi \in \mathscr{F}(E)$ ist $\Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi := [\{R \cdot M \mid R \in \Phi^0_{\mathbf{R}}, M \in \Phi\}]_E$. Hat $\Phi \in \mathscr{F}(E)$ die Filterbasis B, erkennt man, dass $\Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi$ schon von der Filterbasis $\{[-\varepsilon, \varepsilon] \cdot M \mid \varepsilon > 0, M \in B\}$ erzeugt wird. Statt $\{\Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi \mid \Phi \in \Lambda(x)\}$ schreiben wir $\Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Lambda(x)$.

In diesem Zusammenhang sei noch erwähnt:

Lemma 2.1.2. Sei $\Phi \in \mathscr{F}(E)$. Das Mengensystem $\{M \cup [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot M \mid \varepsilon > 0, M \in \Phi\}$ ist eine Filterbasis von $\bar{\Phi} = \Phi \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi$ und es ist $\bar{\Phi} = \bar{\Phi} \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \bar{\Phi}$.

Beweis: Den ersten Teil des Lemmas beweist man leicht. Den zweiten Teil sieht man wie folgt ein. Seien $\Phi, \Phi' \in \mathscr{F}(E)$. Für $\Phi \wedge \Phi'$ folgt $\Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot (\Phi \wedge \Phi') = \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi'$. Das erhält man aus der Beziehung $R(M \cup M') = R \cdot M \cup R \cdot M'$ für $R \in \Phi^0_{\mathbf{R}}$, $M \in \Phi$ und

$M' \in \Phi'$. Da weiter $\Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot (\Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi) = \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi$ gilt, resultiert $\bar{\Phi} \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \bar{\Phi} = (\Phi \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi) \wedge \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot (\Phi \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi) = \Phi \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi$ oder also $\bar{\Phi} \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \bar{\Phi} = \bar{\Phi} \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \bar{\Phi}$.

In [3] beweist Fischer den

Satz 2.1.3. *Eine Limitierung Λ ist genau dann für den Vektorraum E zulässig, falls gilt*

1.) $\Lambda(0) + \Lambda(0) \subset \Lambda(0)$

2.) $\lambda \cdot \Lambda(0) \subset \Lambda(0)$ *für jedes* $\lambda \in \mathbf{R}$

3.) $\Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Lambda(0) \subset \Lambda(0)$ *und*

4.) $\Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot x \in \Lambda(0)$ *für jedes* $x \in E$.

Lemma 2.1.4. Sei E ein endlichdimensionaler Vektorraum. Die natürliche Topologie T auf E ist die feinste zulässige Limitierung für E.

Beweis: Sei $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von E. Für irgend ein $\Lambda \in \mathscr{S}^E$ folgern wir aus Satz (2.1.3.), dass $\Phi = \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot e_1 + \cdots + \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot e_n$ gegen $0 \in E$ konvergiert. Ein Element $M \in \Phi$ umfasst eine Menge der Form $[-\varepsilon, \varepsilon] \cdot e_1 + \cdots + [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot e_n = \{\sum_{i=n}^{i=n} \lambda^i e_i \,|\, |\lambda_i| \leq \varepsilon\}$, wobei $\varepsilon > 0$. Das beweist, dass Φ gröber als der Nullumgebungsfilter in $T(0)$ ist, was aber $\Lambda \leq T$ nach sich zieht.

Wir betrachten wieder einen beliebigen limitierten Vektorraum E_Λ. Die bezüglich Λ stetigen Seminormen definieren die feinste lokalkonvexe Topologie, welche noch gröber als Λ ist. Diese Topologie bezeichnet Fischer in [3] mit $\psi^0 \Lambda$ und nennt sie die zu Λ *assoziierte lokalkonvexe Topologie*. Nun gilt der

Satz 2.1.5. *Sei E_Λ ein endlichdimensionaler limitierter Vektorraum. Weiter sei $\psi^0 \Lambda$ als separiert vorausgesetzt. Dann ist Λ identisch mit der natürlichen Topologie T auf E.*

Beweis: Weil $\psi^0 \Lambda$ separiert ist, muss $T = \psi^0 \Lambda$ gelten, weshalb $T \leq \Lambda$ folgt. Aus Lemma (2.1.4.) resultiert nun unmittelbar die Behauptung.

Wir wenden uns noch kurz den Λ-offenen Mengen in einem limitierten Vektorraum E_Λ zu. Mit $E_{\varphi\Lambda}$ sei der zu E_Λ assoziierte topologische Raum bezeichnet (s. (1.2.)).

Definition 2.1.6. Ein Limesraum Z_Λ heisst *zusammenhängend*, wenn der zu Z_Λ assoziierte topologische Raum $Z_{\varphi\Lambda}$ zusammenhängend ist.

Eine *Teilmenge* $A \subset Z_\Lambda$ heisst *zusammenhängend*, wenn (A, Λ_A) zusammenhängend ist.

Man zeigt leicht: Z_Λ ist zusammenhängend, wenn irgend zwei Elemente x und x' aus Z_Λ in einer zusammenhängenden Teilmenge von Z_Λ liegen.

In einem limitierten Vektorraum E_Λ liegen zwei Elemente x, $x' \in E_\Lambda$ in $g = \{x + \tau \cdot (x - x') \,|\, -\infty < \tau < \infty\}$. Die Abbildung $i: \mathbf{R} \longrightarrow g$, welche durch $\tau \frown\!\!\longrightarrow x + \tau \cdot (x - x')$ definiert ist, ist bezüglich $\varphi \Lambda_g$ stetig. Deshalb ist (g, Λ_g) zusammenhängend, woraus man folgern kann:

Satz 2.1.7. *Jeder limitierte Vektorraum E_Λ ist zusammenhängend.*

Lemma 2.1.8. Sei U eine Λ-offene Teilmenge eines limitierten Vektorraumes E_Λ. Für $a \in E_\Lambda$ ist $U+a$ ebenfalls Λ-offen.

Beweis: U ist Λ-offen bedeutet: für jedes $x \in U$ und jedes $\Phi \in \Lambda(x)$ ist $U \in \Phi$. Für $a \in E_\Lambda$ kann man zu jedem $\Phi' \in \Lambda(x+a)$ ein $\Phi \in \Lambda(x)$ derart finden, dass $\Phi' = \Phi + a$ gilt. Aus $U \in \Phi$ ergibt sich dann $U + a \in \Phi + a$. Demnach ist also $U+a$ Λ-offen.

Definition 2.1.9. Eine Teilmenge M eines Vektorraumes E heisst *absorbierend*, wenn zu jedem $x \in E$ eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, so dass $\lambda \cdot x \in M$ für alle $\lambda \in \mathbf{R}$ mit $|\lambda| \leq \varepsilon$.

Lemma 2.1.10. Jede den Nullvektor enthaltende Λ-offene Menge U in einem limitierten Vektorraum E_Λ ist absorbierend.

Beweis: Für irgend ein $x \in E_\Lambda$ ist $\Phi_{\mathbf{R}}^0 \cdot x \in \Lambda(0)$. Weil U den Nullvektor enthält, ist $U \in \Phi_{\mathbf{R}}^0 \cdot x$. Daraus folgt $U \supset [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot x$ für ein gewisses $\varepsilon > 0$, d.h. es ist $\lambda \cdot x \in U$ für alle $\lambda \in \mathbf{R}$ mit $|\lambda| \leq \varepsilon$.

Aus dem Lemma (2.1.10.) ergibt sich, dass jede den Nullvektor enthaltende Λ-offene Menge eines limitierten Vektorraumes E_Λ den Vektorraum E erzeugt.

2.2. Stetige lineare und stetige multilineare Abbildungen zwischen limitierten Vektorräumen

Seien (E_i, Λ_i), wo $i = 1, 2, \ldots, n$, E_Λ und $F_{\Lambda'}$ limitierte Vektorräume. Es bedeuten $L(E; F)$ und $L(E_1, E_2, \ldots, E_n; F)$ die Vektorräume der linearen Abbildungen von E nach F resp. der n-linearen Abbildungen von $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ nach F. Mit $\mathscr{L}(E_\Lambda; F_{\Lambda'})$ bezeichnen wir den Vektorraum der stetigen linearen Abbildungen von E_Λ nach $F_{\Lambda'}$. Unter $\mathscr{L}((E_1, \Lambda_1), (E_2, \Lambda_2), \ldots, (E_n, \Lambda_n); F_{\Lambda'})$ verstehen wir den Vektorraum der stetigen n-linearen Abbildungen von dem mit der Produktlimitierung versehenen Vektorraum $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ nach $F_{\Lambda'}$.

Satz 2.2.11. *Seien E_Λ ein limitierter und F ein beliebiger Vektorraum. Eine lineare Abbildung $\ell \in L(E; F)$, welche auf einer Λ-offenen Menge $U \subset E_\Lambda$ identisch verschwindet, ist die Nullabbildung.*

Beweis: Dieser Satz folgt unmittelbar daraus, dass für jedes $a \in U$ die Menge $U \dot{-} a$ den Vektorraum E erzeugt.

Als Korollare von Lemma (2.1.4.) ergeben sich die beiden folgenden Sätze.

Satz 2.2.12 *Trägt $\mathbf{R}^n$ die natürliche Topologie, so ist $\mathscr{L}(\mathbf{R}^n; F_{\Lambda'}) = L(\mathbf{R}^n; F)$ für jeden limitierten Vektorraum $F_{\Lambda'}$.*

Beweis: Sei $\ell \in L(\mathbf{R}^n; F)$. Wir bezeichnen die natürliche Topologie auf $\ell(\mathbf{R}^n)$ mit

T. Die Abbildung $\ell: \mathbf{R}^n \longrightarrow \ell(\mathbf{R}^n)_T$ ist stetig. Aus Lemma (2.1.4.) folgt daher die Stetigkeit von $\ell: \mathbf{R}^n \longrightarrow F_{A'}$.

Satz 2.2.13. *Seien E_i, $i=1, 2, \ldots, n$ endlichdimensionale Vektorräume, versehen mit der natürlichen Topologie. Für jeden limitierten Vektorraum F folgt*

$$\mathscr{L}(E_1, E_2, \ldots, E_n; F_{A'}) = L(E_1, E_2, \ldots, E_n; F)$$

Dieser Satz wird analog bewiesen wie Satz (2.2.12.). In [3] beweist FISCHER den

Satz 2.2.14. *Für einen limitierten Vektorraum E_A ist $\mathscr{L}(E_A; \mathbf{R}) = \mathscr{L}(E_{\psi^0 A}; \mathbf{R})$.*

Wenn $\psi\,{}^0 A$ separiert ist, dann existiert zu jedem $x \neq 0$ aus $E_{\psi^0 A}$ ein $\ell \in \mathscr{L}(E_{\psi^0 A}; \mathbf{R})$ mit $\ell(x)=1$. Daraus folgert man:

Satz 2.2.15. *Sei E_A ein limitierter Vektorraum. Ist die zu A assoziierte lokalkonvexe Topologie $\psi^0 A$ separiert, folgt* $\bigcap_{\ell \in \mathscr{L}(E_A; \mathbf{R})} \operatorname{Kern} \ell = \{0\}$.

Als nächstes führen wir auf $\mathscr{L}(E_A; F_{A'})$ und $\mathscr{L}((E_1, A_1), (E_2, A_2), \ldots, (E_n, A_n); F_{A'})$ je eine zulässige Limitierung ein. Zu diesem Zwecke betrachten wir für zwei Limesräume Y_A und $Z_{A'}$ die Menge $\mathscr{C}(Y_A, Z_{A'})$ der stetigen Abbildungen von Y_A nach $Z_{A'}$. Für $g \in \mathscr{C}(Y_A, Z_{A'})$ und $y \in Y_A$ wird durch die Zuordnung $(g, y) \longmapsto g(y)$ eine Abbildung $\omega: \mathscr{C}(Y_A, Z_{A'}) \times Y \longrightarrow Z$ definiert. Nach [1] existiert unter allen Limitierungen $\bar{A}$ auf $\mathscr{C}(Y_A, Z_{A'})$, für die $\omega: (\mathscr{C}(Y_A, Z_{A'}) \times Y, \bar{A} \times A) \longrightarrow Z_{A'}$ stetig ist, eine gröbste. Diese sei mit A_c bezeichnet. Ein Filter Θ auf $\mathscr{C}(Y_A, Z_{A'})$ konvergiert bezüglich A_c genau dann gegen $g \in \mathscr{C}(Y_A, Z_{A'})$, wenn für jedes $y \in Y_A$ und jedes $\Phi \in A(y)$ folgt $\omega(\Theta \times \Phi) \in A'(g(y))$. In [1] wird A_c die Limitierung der *stetigen Konvergenz* genannt. Für eine Menge S und eine Abbildung $f: S \longrightarrow \mathscr{C}(Y_A, Z_{A'})$ sei $\tilde{f} := \omega \circ (f \times \mathrm{id}_Y)$. Es gelten die beiden nachstehenden in [1] bewiesenen Sätze.

Satz 2.2.16. *Sei $S_{A''}$ ein Limesraum. Eine Abbildung $f: S_{A''} \longrightarrow \mathscr{C}(Y_A, Z_{A'})_{A_c}$ ist genau dann stetig, wenn $\tilde{f}: (S \times Y, A'' \times A) \longrightarrow Z_{A'}$ stetig ist.*

Als Folgerung davon ergibt sich:

Lemma 2.2.17. Die von A_c auf einer Teilmenge $\mathscr{H} \subset \mathscr{C}(Y_A, Z_{A'})$ induzierte Limitierung ist unter allen Limitierungen $\bar{A}$ auf $\mathscr{H}$, für welche $\omega|\mathscr{H} \times Y: (\mathscr{H} \times Y, \bar{A} \times A) \longrightarrow Z_{A'}$ stetig ist, die gröbste.

Die von A_c auf $\mathscr{H}$ induzierte Limitierung nennen wir ebenfalls Limitierung der stetigen Konvergenz auf $\mathscr{H}$ und bezeichnen sie auch mit A_c. Statt $\omega|\mathscr{H} \times Y$ schreiben wir künftig nur ω. Es folgt unmittelbar:

Lemma 2.2.18. Seien $S_{A''}$ ein Limesraum und $f: S_{A''} \longrightarrow \mathscr{H}_{A_c}$ eine Abbildung. Genau dann ist f stetig, wenn $\tilde{f} = \omega \circ (f \times \mathrm{id}_Y): (\mathscr{H} \times Y, A_c \times A) \longrightarrow Z_{A'}$ stetig ist.

Auf $\mathscr{L}(E_\Lambda;F_{\Lambda'})\subset\mathscr{C}(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ und $\mathscr{L}(E_1, \Lambda_1),\ldots,(E_n, \Lambda_n);F_{\Lambda'})\subset\mathscr{C}((E_1\times E_2\times\cdots\times E_n, \Lambda_1\times\Lambda_2\times\cdots\times\Lambda_n), F_{\Lambda'})$ führen wir nun die Limitierung der stetigen Konvergenz ein. Diese ist für beide Vektorräume zulässig und ist separiert, wenn Λ' separiert ist (s. [1]).

Satz 2.2.19. *Auf* $\mathscr{L}(E_\Lambda;F_{\Lambda'})$ *resp. auf* $\mathscr{L}((E_1, \Lambda_1),(E_2,\Lambda_2),\ldots,(E_n, \Lambda_n);F_{\Lambda'})$ *ist* $\psi^0\Lambda_c$ *separiert, wenn* $\psi^0\Lambda'$ *separiert ist.*

Beweis: Wir nehmen $\psi^0\Lambda'$ als separiert an und zeigen, dass auch $\psi^0\Lambda_c$ separiert ist. Ist $\ell_0\in\mathscr{L}(E_\Lambda;F_{\Lambda'})$ nicht die Nullabbildung, so existiert ein $x_0\in E_\Lambda$, für welches $\ell_0(x_0)\neq 0$ gilt. Weil $\psi^0\Lambda'$ separiert ist, finden wir in $\mathscr{L}(F_\Lambda;\mathbf{R})$ ein g mit $g(\ell_0(x_0))\neq 0$. Für $\ell\in\mathscr{L}(E_\Lambda;F_{\Lambda'})$ definiert die Zuordnung $\ell\hookrightarrow g(\ell(x_0))$ eine stetige lineare Abbildung von $\mathscr{L}(E_\Lambda;F_{\Lambda'})_{\Lambda_c}$ nach $\mathbf{R}$, welche auf ℓ_0 nicht verschwindet. Weil $\ell_0\neq 0$ beliebig war, resultiert die Separiertheit von $\psi^0\Lambda_c$. Den zweiten Teil des Lemmas beweist man analog.

Nun soll für limitierte Vektorräume E_Λ, $F_{\Lambda'}$ und $G_{\Lambda''}$ gezeigt werden, dass $\mathscr{L}(E_\Lambda;\mathscr{L}(F_{\Lambda'};G_{\Lambda''})_{\Lambda_c})_{\Lambda_c}$ und $\mathscr{L}(E_\Lambda, F_{\Lambda'}; G_{\Lambda''})_{\Lambda_c}$ natürlich homöomorph sind.

Die bilineare Abbildung

$$\omega:(\mathscr{L}(F_{\Lambda'};G_{\Lambda''})\times F, \Lambda_c\times\Lambda')\longrightarrow G_{\Lambda''}$$

ist stetig. Daher ist für jedes $v\in\mathscr{L}(E_\Lambda;\mathscr{L}(F_{\Lambda'};G_{\Lambda''})_{\Lambda_c})$ die bilineare Abbildung $\tilde{v}=\omega\circ(v\times\mathrm{id}_F)$ stetig. Die Abbildung $I:\mathscr{L}(E_\Lambda;\mathscr{L}(F_{\Lambda'};G_{\Lambda''})_{\Lambda_c})\longrightarrow\mathscr{L}(E_\Lambda,F_{\Lambda'};G_{\Lambda''})$, definiert durch $v\hookrightarrow\tilde{v}$, ist ein Monomorphismus.

Lemma 2.2.20. *I* ist ein Isomorphismus.

Beweis: Es genügt zu zeigen, dass I epimorph ist. Sei $u\in\mathscr{L}(E_\Lambda, F_{\Lambda'}; G_{\Lambda''})$. Für ein festes $x\in E_\Lambda$ definieren wir u_x durch $y\hookrightarrow u(x, y)$, wobei $y\in F_{\Lambda'}$. Es ist $u_x\in\mathscr{L}(F_{\Lambda'};G_{\Lambda''})$. Durch $x\hookrightarrow u_x$ ist eine lineare Abbildung $v:E_\Lambda\longrightarrow\mathscr{L}(F_{\Lambda'};G_{\Lambda''})$ definiert. Weil $\tilde{v}=\omega\circ(v\times\mathrm{id}_F)=u$ ist, ist v nach Lemma (2.2.18.) stetig.

Satz 2.2.21. *Seien* E_Λ, $F_{\Lambda'}$ *und* $G_{\Lambda''}$ *limitierte Vektorräume. Dann ist die lineare Abbildung*

$$I:\mathscr{L}(E_\Lambda;\mathscr{L}(F_{\Lambda'};G_{\Lambda''})_{\Lambda_c})_{\Lambda_c}\longrightarrow\mathscr{L}(E_\Lambda, F_{\Lambda'};G_{\Lambda''})_{\Lambda_c}$$

definiert durch $v\hookrightarrow\tilde{v}$ *ein Homöomorphismus.*

Beweis: Wir haben nur noch die Stetigkeit von I und I^{-1} nachzuweisen. Weil $\tilde{I}$ stetig ist, ist nach Lemma (2.2.18.) I stetig. Durch zweimaliges Anwenden von Lemma (2.2.18.) beweist man die Stetigkeit von I^{-1}.

Nun beweist man mit einer Induktion nach n, dass die natürliche Abbildung von

$$\mathscr{L}((E_1, \Lambda_1);\mathscr{L}((E_2, \Lambda_2);\ldots;\mathscr{L}((E_n, \Lambda_n);F_{\Lambda'})_{\Lambda_c})_{\Lambda_c}\cdots)_{\Lambda_c})_{\Lambda_c}$$

nach $\mathscr{L}(E_1, \Lambda_1),(E_2, \Lambda_2),\ldots,(E_n, \Lambda_n);F_{\Lambda'})$ ein Homöomorphismus ist.

Satz 2.2.22. *Seien* $F \neq \{0\}$ *und* $E_i \neq \{0\}$ *für* $i=1,\dots,n$. *Aus* $\psi^0\, \Lambda_i$ *separiert für* $i=1,\dots,n$ *folgt dann, dass* $\mathscr{L}((E_1, \Lambda_1), (E_2, \Lambda_2), \dots, (E_n, \Lambda_n); F_{\Lambda'}) \neq \{0\}$.

Beweis: Wegen der Voraussetzungen ist $\mathscr{L}((E_n, \Lambda_n); \mathbf{R}) \neq \{0\}$. Weil $\mathscr{L}(\mathbf{R}; F_{\Lambda'}) \neq \{0\}$ erhalten wir $\mathscr{L}((E_n, \Lambda_n); F_{\Lambda'}) \neq \{0\}$. Nun sei $\mathscr{L}((E_2, \Lambda_2), (E_3, \Lambda_3), \dots, (E_n, \Lambda_n); F_{\Lambda'}) \neq \{0\}$ schon bewiesen. Dann ergibt sich aus $\mathscr{L}((E_1, \Lambda_1); \mathbf{R}) \neq \{0\}$, dass $\mathscr{L}((E_1, \Lambda_1); \mathscr{L}((E_2, \Lambda_2), (E_3, \Lambda_3), \dots, (E_n, \Lambda_n); F_{\Lambda'}) \neq \{0\}$ und daher $\mathscr{L}((E_1, \Lambda_1), (E_2, \Lambda_2), \dots, (E_n, \Lambda_n); F_{\Lambda'}) \neq \{0\}$.

2.3. Induktiver Limes limitierter Vektorräume

Sei $\{(E_\alpha, \Lambda_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ eine Familie limitierter Vektorräume mit den Eigenschaften:

1.) I ist durch $\leq$ gerichtet.

2.) Für $\alpha \leq \beta$ ist E_α linearer Unterraum von E_β.

3.) Für $\alpha \leq \beta$ ist die natürliche Inklusionsabbildung $i_\beta^\alpha \colon (E_\alpha, \Lambda_\alpha) \longrightarrow (E_\beta, \Lambda_\beta)$ stetig.

Auf dem Vektorraum $E = \bigcup_{\alpha \in I} E_\alpha$ existiert unter allen Limitierungen Λ, für welche alle natürlichen Abbildungen $i_\alpha \colon (E_\alpha, \Lambda_\alpha) \longrightarrow E_\Lambda$ stetig sind, eine feinste. Diese ist für E zulässig (s. [3]) und soll mit $\operatorname{ind}_{\alpha \in I} \Lambda_\alpha$ bezeichnet werden. Der limitierte Vektorraum $(E, \operatorname{ind}_{\alpha \in I} \Lambda_\alpha)$ heisst *induktiver Limes* der limitierten Vektorräume $(E_\alpha, \Lambda_\alpha)$.

Bemerkung 2.3.23. Ein Filter $\Phi \in \mathscr{F}(E)$ konvergiert bezüglich $\operatorname{ind}_{\alpha \in I} \Lambda_\alpha$ genau dann gegen $0 \in E$, wenn ein $\alpha \in I$ und ein $\Phi_\alpha \in \Lambda_\alpha(0)$ existieren, so dass $[\Phi_\alpha]_E = \Phi$ gilt (s. [3]).

In [3] finden wir noch die folgenden beiden Sätze bewiesen.

Satz 2.3.24. $\operatorname{ind}_{\alpha \in I} \Lambda_\alpha$ *ist genau dann separiert, wenn jedes* Λ_α *separiert ist.*

Satz 2.3.25. *Sei* $F_{\Lambda'}$ *ein beliebiger Limesraum. Eine Abbildung* $f \colon (E, \operatorname{ind}_{\alpha \in I} \Lambda_\alpha) \longrightarrow F_{\Lambda'}$ *ist genau dann stetig, wenn* $f \circ i_\alpha \colon (E_\alpha, \Lambda_\alpha) \longrightarrow F_{\Lambda'}$ *für jedes* $\alpha \in I$ *stetig ist.*

Für einen beliebigen Vektorraum E bezeichne I die Menge aller endlichdimensionalen linearen Unterräume von E. Für $H, K \in I$ heisse $H \leq K$, wenn $H \subset K$. Dann ist I durch $\leq$ gerichtet. Jedes H aus I trage die natürliche Topologie T_H. Für $H \leq K$ ist die Inklusionsabbildung $i_K^H \colon H \longrightarrow K$ stetig. Den Vektorraum $E = \bigcup_{H \in I} H$ versehen wir mit $\Lambda_0 = \operatorname{ind}_{H \in I} T_H$. Wie man leicht feststellt, ist Λ_0 dann und nur dann eine Topologie, wenn E endlichdimensional ist.

Satz 2.3.26. *Trägt ein Vektorraum E die Limitierung* Λ_0, *folgt* $\mathscr{L}(E_{\Lambda_0}; F_{\Lambda'}) = L(E; F)$ *für jeden limitierten Vektorraum* $F_{\Lambda'}$.

Beweis: Sei $\ell \in L(E; F)$. Für jeden endlichdimensionalen linearen Unterraum

$H \subset E$ ist $\ell \circ i_H : H \longrightarrow F_{\Lambda}$, nach Satz (2.2.12) stetig, was aber wegen Satz (2.3.25.) die Stetigkeit von ℓ impliziert.

Daraus folgt unmittelbar

Satz 2.3.27. *Für einen Vektorraum E ist Λ_0 die feinste zulässige Limitierung. Daher ist $\psi^0 \Lambda_0$ die feinste lokalkonvexe Topologie auf E.*

Satz (2.3.26.) und Satz (2.3.27.) besagen zusammen:

Satz 2.3.28. *Sei E ein Vektorraum. Eine für E zulässige Limitierung Λ ist genau dann mit Λ_0 identisch, wenn für jeden limitierten Vektorraum $F_{\Lambda'}$ gilt $\mathscr{L}(E_\Lambda; F_{\Lambda'}) = L(E;F)$.*

Satz 2.3.29. *Jeder der Vektorräume E_i, wobei $i=1,\dots,n$ trage die Limitierung Λ_0. Dann gilt für jeden limitierten Vektorraum $F_{\Lambda'}$*

$$\mathscr{L}((E_1, \Lambda_0), (E_2, \Lambda_0), \dots, (E_n, \Lambda_0); F_{\Lambda'}) = L(E_1, E_2, \dots, E_n; F).$$

Beweis: Wir führen den Beweis mit einer Induktion nach n. Es ist $\mathscr{L}((E_1, \Lambda_0); F_{\Lambda'}) = L(E_1; F)$. Wir nehmen $\mathscr{L}((E_1, \Lambda_0), (E_2, \Lambda_0), \dots, (E_{n-1}, \Lambda_0); F_{\Lambda'}) = L(E_1, E_2, \dots, E_{n-1}; F)$ als bewiesen an. Weil nun jede n-lineare Abbildung

$$u : (E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n, \Lambda_0 \times \Lambda_0 \times \cdots \times \Lambda_0) \longrightarrow F_{\Lambda'}$$

eine (n-1)-lineare Abbildung

$$v : (E_1 \times E_2 \cdots \times E_{n-1}, \Lambda_0 \times \Lambda_0 \times \cdots \times \Lambda_0) \longrightarrow \mathscr{L}((E_n, \Lambda_0); F_{\Lambda'})_{\Lambda_c}$$

mit $u = \tilde{v}$ induziert, folgt aus der Induktionsvoraussetzung und Lemma (2.2.18) die Behauptung.

Satz 2.3.30. *Für jeden Vektorraum E ist $\psi^0 \Lambda_0$ separiert.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Sätzen (2.3.26.) und (2.3.14.).

3. Restglieder zwischen limitierten Vektorräumen

3.1. Definition und einige allgemeine Eigenschaften der Restglieder zwischen limitierten Vektorräumen

Die in diesem Kapittel auftretenden Räume E_Λ, $F_{\Lambda'}$ und $G_{\Lambda''}$ seien limitierte separierte Vektorräume.

. Sei $U \subset E_\Lambda$ eine Λ-offene Menge. Für $x \in U$ besitzt jedes $\Phi \in \Lambda(x)$ eine Spur Φ_U auf U, und es ist $[\Phi_U]_E = \Phi$. Dazu sei auf Lemma (1.2.4.) verwiesen. Wir bezeichnen ein Element aus $\Lambda_U(x)$ mit Φ_U, wobei Φ der Filter aus $\Lambda(x)$ ist, dessen Spur auf U gerade Φ_U ist. In der nachstehenden Definition verwenden wir die im folgenden Lemma formulierte Tatsache.

Lemma 3.1.1. Seien $U \subset E_\Lambda$ eine den Nullvektor enthaltende Λ-offene Menge und

$\Phi_U \in \Lambda_U(0)$. Dann existieren ein $M \in \Phi_U$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass $\lambda \cdot M \subset U$ für alle $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Beweis: Weil U Λ-offen ist, gilt $U \in \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Phi \in \Lambda(0)$. Also existieren ein $M \in \Phi_U$ und ein $\varepsilon > 0$, so dass $[-\varepsilon, \varepsilon] \cdot M \subset U$.

Die im folgenden auftretenden σ seien reelle Funktionen, definiert (für $\varepsilon > 0$) auf dem abgeschlossenen Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon] \subset \mathbf{R}$ mit den Eigenschaften $\lim_{\lambda \to 0} \sigma(\lambda)/\lambda = 0$ und $\sigma(0) = 0$.

Definition 3.1.2. Sei $U \subset E_\Lambda$ eine den Nullvektor enthaltende Λ-offene Menge. Eine an der Stelle $0 \in U$ stetige Abbildung $r: U \longrightarrow F_{\Lambda'}$ heisst ein *Restglied*, wenn zu jedem $\Phi_U \in \Lambda_U(0)$ ein $\Psi \in \Lambda'(0)$ existiert, das die folgende Bedingung erfüllt:

(B) Zu jedem $N \in \Psi$ gibt es ein $M \in \Phi_U$ und ein σ, so dass $r(\lambda \cdot M) \subset \sigma \cdot (\lambda) \cdot N$ für alle λ aus dem Definitionsbereich $[-\varepsilon, \varepsilon]$ von σ.

Die Menge $R(U \subset E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ der Restglieder von $U \subset E_\Lambda$ nach $F_{\Lambda'}$ ist nicht leer, denn wie man leicht nachprüft, enthält sie die Nullabbildung.

Lemma 3.1.3. Für die Abbildung $r: U \subset E_\Lambda \longrightarrow F_{\Lambda'}$, $\Phi \in \mathscr{F}(U)$ und $\Psi \in \mathscr{F}(F)$ sei die Bedingung (B) erfüllt. Gelten für $\Phi' \in \mathscr{F}(U)$ und $\Psi \in \mathscr{F}(F)$ die Beziehungen $\Phi \leq \Phi'$ und $\Psi' \leq \Psi$, so ist für r, Φ' und Ψ' die Bedingung (B) gültig.

Beweis: Für jedes $N \in \Psi'$ ist $N \in \Psi$. Daraus folgt: Zu jedem $N \in \Psi'$ existieren ein $M \in \Phi$ und ein σ derart, dass $r(\lambda \cdot M) \subset \sigma(\lambda) \cdot N$ für alle λ aus dem Definitionsbereich $[-\varepsilon, \varepsilon]$ von σ. Weil jedes $M \in \Phi$ auch in Φ' enthalten ist, resultiert die Behauptung.

Damit ergibt sich leicht:

Lemma 3.1.4. Seien $\Lambda, \bar{\Lambda} \in \mathscr{S}^E$ und $\Lambda', \bar{\Lambda}' \in \mathscr{S}^F$. Wenn $\Lambda \leq \bar{\Lambda}$ und $\bar{\Lambda}' \leq \Lambda'$, dann folgt aus $r \in R(U \subset E_\Lambda, F_{\Lambda'})$, dass $r \in R(U \subset E_{\bar{\Lambda}}, F_{\bar{\Lambda}'})$.

Bemerkung 3.1.5. Für jedes $r \in R(U \subset E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ folgt $r(0) = 0$. Das ergibt sich direkt aus der Gültigkeit der Bedingung (B) für ein Tripel r, $\Phi \in \Lambda(0)$, $\Psi' \in \Lambda'(0)$.

Also können wir uns wegen der Lemmas (3.1.3.) und (2.1.2) in der Definition (3.1.2.) fortan $\Psi \leq r(\Phi_U)$ und sogar von der Form $\Psi = \Psi \wedge \Phi^0_{\mathbf{R}} \cdot \Psi$ denken.

Wir definieren zu einem Restglied $r \in R(U \subset E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ die Abbildung $r': E_\Lambda \longrightarrow F_{\Lambda'}$ durch

$$r'(x) = \begin{cases} r(x) & \text{für} \quad x \in U \\ \text{beliebig für} & x \notin U. \end{cases}$$

Lemma 3.1.6. r' ist ein Restglied.

Beweis: Aus Lemma (1.2.4.) folgt die Stetigkeit von r' an der Stelle $0 \in E_\Lambda$. Weil $\Phi \in \Lambda(0)$ von der Filterbasis Φ_U auf E erzeugt wird, folgt aus der Gültigkeit der Bedingung (B) für $r = r' | U$, Φ_U und $\Psi \in \Lambda'(0)$, dass auch für r', Φ und Ψ die Bedingung (B) erfüllt ist.

Die Menge der Restglieder $r: E_\Lambda \longrightarrow F_{\Lambda'}$ sei mit $R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ bezeichnet.

Lemma 3.1.7. Seien $r \in R(E_A, F_{A'})$ und $U \subset E_A$ eine den Nullvektor enthaltende A-offene Menge. Dann ist $r|U$ ein Restglied.

Beweis: $r|U$ ist an der Stelle $0 \in E_A$ stetig. Zu jedem $\Phi \in A(0)$ existiert ein $\Psi \in A'(0)$ mit: Zu jedem $N \in \Psi$ gibt es ein $M \in \Phi$ und ein σ, so dass $r(\lambda \cdot M) \subset \sigma(\lambda) \cdot N$ für alle λ aus dem Definitionsbereich $[-\varepsilon, \varepsilon]$ von σ. Nach Lemma (3.1.1.) können zu U ein $M' \in \Phi_U$ und ein $\varepsilon' > 0$ gefunden werden, so dass $\lambda \cdot M \subset U$ für alle $\lambda \in [-\varepsilon', \varepsilon']$. Wir setzen $M'' = M' \cap M$. Also finden wir zu jedem $N \in \Psi$ ein $M'' \in \Phi_U$, mit $r(\lambda \cdot M'') \subset \sigma(\lambda) \cdot N$, sobald $|\lambda| \leq \text{Min}(\varepsilon, \varepsilon')$.

Die beiden letzten Lemmas besagen zusammen:

Satz 3.1.8. *Sei $U \subset E_A$ eine A-offene Menge, welche den Nullvektor enthält. Eine Abbildung $r: E_A \longrightarrow F_{A'}$ ist genau dann ein Restglied, wenn $r|U$ ein Restglied ist.*

Wir beschränken uns also im folgenden auf Restglieder, welche auf ganz E definiert sind.

3.2. Restglieder zwischen speziellen limitierten Vektorräumen

(a.) Seien A eine zulässige Limitierung für E, A' eine zulässige Topologie für F und $r: E_A \longrightarrow F_{A'}$ ein Restglied.

Wegen Lemma (3.1.3.) ist die Bedingung (B) für r, jedes $\Phi \in A(0)$ und den Nullumgebungsfilter $\Psi^0 \in A'(0)$ erfüllt.

Gilt umgekehrt (B) für eine an der Stelle $0 \in E_A$ stetige Abbildung $r: E_A \longrightarrow F_{A'}$, jedes $\Phi \in A(0)$ und Ψ^0, so ist r ein Restglied.

(b.) Sei A wieder eine zulässige Limitierung für E und $F_{A'}$ ein normierter Vektorraum, wobei $y \curvearrowright\!\!\longrightarrow \|y\|$ die Norm in F ist.

Die Definition eines Restgliedes kann hier wie folgt gefasst werden:

Eine an der Stelle $0 \in E_A$ stetige Abbildung $r: E_A \longrightarrow F_{A'}$ heisst ein Restglied, wenn in jedem $\Phi \in A(0)$ ein M existiert, so dass $\lim_{\lambda \to 0} r(\lambda \cdot x)/\lambda = 0$ gleichmässig in M.

Wir haben (B) für r, jedes $\Phi \in A(0)$ und den Nullumgebungsfilter $\Psi^0 \in A'(0)$ nachzuweisen. Dabei kann Ψ^0 durch die Filterbasis, bestehend aus dem Mengensystem $\{K_\varrho = \{y \mid \|y\| \leq \varrho\} \mid \varrho > 0\}$, ersetzt werden.

Seien $\Phi \in A(0)$ und $M \in \Phi$. Es bedeutet $\lim_{\lambda \to 0} r(\lambda \cdot x)/\lambda = 0$ gleichmässig in M: Zu jedem K_ϱ existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $r(\lambda \cdot x)/\lambda \in K_\varrho$ für alle $x \in M$ und $0 < |\lambda| \leq \varepsilon$. Sei also K_ϱ beliebig. Wir denken uns $\varepsilon \leq 1$. Nun definieren wir $\sigma'(\lambda) = \text{Sup}_{x \in M}\, r(\lambda \cdot x)$ für $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Dann gilt $\sigma'(\lambda) \leq \varrho$ für alle $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Damit resultiert $r(\lambda \cdot M) \subset \sigma'(\lambda) \cdot K_1$ für $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Setzen wir noch $\sigma(\lambda) = 1/\varrho \cdot \sigma'(\lambda)$, ergibt sich $r(\lambda \cdot M) \subset \sigma(\lambda) \cdot K_\varrho$ für jedes $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.·

Umgekehrt sei r ein Restglied. Weiter seien $\Phi \in A(0)$ und $K_\varrho \in \Psi^0$ vorgegeben. Dann existieren ein $M \in \Phi$ und ein σ, so dass $r(\lambda \cdot M) \subset \sigma(\lambda) \cdot K_\varrho$ für alle $\lambda \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Für ein gewisses $\varepsilon' > 0$ und $0 < |\lambda| \leq \varepsilon'$ gilt $|\sigma(\lambda)/\lambda| \leq 1$. Also hat man $r(\lambda \cdot x)/\lambda \in \sigma(\lambda)/\lambda \cdot K_\varrho \subset K_\varrho$ oder $\|r(\lambda \cdot x)/\lambda\| \leq \varrho$ für alle $x \in M$, sobald $0 < |\lambda| \leq \text{Min}\,(\varepsilon, \varepsilon')$.

(c.) Nun seien E_A ein topologischer und $F_{A'}$ ein beliebig limitierter Vektorraum. Ohne Mühe weist man nach:

Eine an der Stelle $0 \in E_A$ stetige Abbildung $r: E_A \longrightarrow F_{A'}$ ist genau dann ein Restglied, wenn ein $\Psi \in \Lambda'(0)$ existiert, so dass die Bedingung (B) für r, den Nullumgebungsfilter Φ^0 in E_A und Ψ erfüllt ist.

(d.) Seien E_A ein normierter, $F_{A'}$ ein limitierter Vektorraum und $r: E_A \longrightarrow F_{A'}$ ein Restglied. Den Nullumgebungsfilter in E_A bezeichnen wir mit Φ^0.

Dann gibt es einen Filter $\Psi \in \Lambda'(0)$ (s. Bemerkung (3.1.5.)), so dass zu jedem $N \cup [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot N$ aus Ψ ein $K_\varrho \in \Phi^0$ und ein σ existieren, mit der Eigenschaft, dass $r(\lambda \cdot K_\varrho) \subset \sigma(\lambda) \cdot (N \cup [-\varepsilon, \varepsilon] N)$ für alle λ aus dem Definitionsbereich $[-\varepsilon', \varepsilon']$ von σ. Für den Rest dieses Abschnitts (d.) sei λ stets positiv. Nun setzen wir $K_{\varrho'} = \lambda \cdot K_\varrho$ und drücken jedes $x' \in K_{\varrho'}$ durch ein $x \in K_\varrho$ mit $\|x\| = \varrho$ in der Form $x' = \lambda \cdot x$ aus. Dann folgt $r(x')/\|x'\| \in \sigma(\|x'\|/\varrho)/\|x'\| \cdot (N \cup [-\varepsilon, \varepsilon] N)$, falls $0 < \|x'\| \leq \varrho'$. Wir denken uns ε' noch so klein, dass $\sigma(\|x'\|/\varrho)/\|x'\| \leq \mathrm{Min}\,(\varepsilon, 1)$. Damit resultiert $r(x')/\|x'\| \in$ $\in N \cup [-\varepsilon, \varepsilon] \cdot N$, weshalb wir $\lim_{x' \to 0} r(x')/\|x'\| = 0$ folgern können.

(e.) Seien E_A und $F_{A'}$ topologische Vektorräume mit den Nullumgebungsfiltern Φ^0 bezw. Ψ^0.

Aus (a.) und (c.) folgt:

Eine Abbildung $r: E_A \longrightarrow F_{A'}$ ist genau dann ein Restglied, wenn für r, Φ^0 und Ψ^0 die Bedingung (B) gültig ist.

Das ist aber gerade die Definition eines Restgliedes, die S. LANG in [6] gibt.

(f.) Sind E_A und F_A lokalkonvexe Vektorräume, fallen unsere Restglieder wegen (e.) mit den F-Restgliedern in [4] zusammen.

(g.) Seien $\{(E_\alpha, T_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ und $\{(F_{\alpha'}, T_{\alpha'})\}_{\alpha' \in I'}$ Familien topologischer Vektorräume; $(E, \mathrm{ind}_{\alpha \in I}\, T_\alpha)$ und $(F, \mathrm{ind}_{\alpha' \in I'}\, T_{\alpha'})$ seien bezw. ihre induktiven Limites. Die Nullumgebungsfilter in (E_α, T_α) und $(F_{\alpha'}, T_{\alpha'})$ bezeichnen wir mit Φ^0_α und $\Phi^0_{\alpha'}$.

Lemma 3.2.9. Eine Abbildung r von $(E, \mathrm{ind}_{\alpha \in I}\, T_\alpha)$ nach $(F, \mathrm{ind}_{\alpha \in I'}\, T_{\alpha'})$ ist genau dann ein Restglied, wenn zu jedem $\alpha' \in I$ ein $U_\alpha \in \Phi^0_\alpha$ und ein $\alpha' \in I'$ existieren, so dass

(1.) $r(U_\alpha) \subset F_{\alpha'}$

(2.) $r|U_\alpha : (U_\alpha, T_{\alpha U_\alpha}) \longrightarrow (F_{\alpha'}, T_{\alpha'})$ ein Restglied ist.

Beweis: Sei r ein Restglied. Aus den Bemerkungen (2.3.23.) und (3.1.5.) folgt: Zu jedem $\alpha \in I$ existiert ein $\alpha' \in I'$ derart, dass es zu jedem $V_{\alpha'} \in \Phi^0_{\alpha'}$ ein $U' \in \Phi^0_\alpha$ und ein σ gibt, mit der Eigenschaft, dass $r(\lambda \cdot U'_\alpha) \subset \sigma(\lambda) \cdot V_{\alpha'}$ für alle λ aus dem Definitionsbereich $[-\varepsilon, \varepsilon]$ von σ. Wir können U'_α und $V_{\alpha'}$ als kreisförmig (s. [5], p. 149) annehmen. Es lässt sich ein ε' mit $0 < \varepsilon' \leq 1$ finden, so dass für $\lambda \in [-\varepsilon', \varepsilon']$ gilt $\sigma(\lambda) \cdot V_{\alpha'} \subset V_{\alpha'}$. Ersetzt man für ein festes $\lambda \in [-\varepsilon', \varepsilon']$ die Menge $\lambda \cdot U'_\alpha$ durch U_α, resultiert (1.). Aus (e.) ergibt sich (B) für $r|U_\alpha$, die Spur von Φ^0_α auf U_α und $\Phi^0_{\alpha'}$. Die Umkehrung folgert man leicht aus Bemerkung (2.3.23.) und den Lemmas (1.2.4.) und (3.1.6.).

3.3. Beispiele eines Restgliedes

(1.) Seien E_A und $F_{A'}$ limitierte Vektorräume. Wir setzen $\psi^0 A$ als separiert voraus. Zu einer n-linearen Abbildung $u:(E\times E\times\cdots\times E,\ A\times A\times\cdots\times A)\longrightarrow F_{A'}$ definieren wir die Abbildung

$$\bar{u}: E_A \longrightarrow F_{A'}$$

durch $x \frown\!\!\longrightarrow u(x, x,\ldots, x)$ für $x\in E_A$. Nun sei $n\geq 2$ und u symmetrisch und stetig (s. Satz (2.2.22.)). Dann ist $\bar{u}$ ein nicht identisch verschwindendes Restglied. Für $\Phi\in A(0)$ existiert nämlich zu jedem $N\in u(\Phi)$ ein $M\in\Phi$, so dass $u(M)\subset N$. Also ergibt sich $u(\lambda\cdot M)=\lambda^n\cdot u(M)\subset\lambda^n\cdot N$ für alle $\lambda\in\mathbf{R}$.

3.4. Weitere Eigenschaften der Restglieder

Seien E und F Vektorräume. Für Abbildungen $g,f:E\longrightarrow F$ und $h:EE\longrightarrow\mathbf{R}$ definieren wir:

(A.) $g+f:E\longrightarrow F$ durch $(g+f)(x)=g(x)+f(x)$
(B.) $h\cdot f:E\longrightarrow F$ durch $(h\cdot f)(x)=h(x)\cdot f(x)$
(C.) $\tau\cdot f:E\longrightarrow F$ durch $(\tau\cdot f)(x)=\tau\cdot f(x)$ für $\tau\in\mathbf{R}$.

Lemma 3.4.10. $R(E_A, F_{A'})$ ist ein Vektorraum (bez. der Operationen unter (A.) und (C.)).

Beweis: Seien $r_1, r_2\in R(E_A, F_{A'})$ und $\tau\in\mathbf{R}$ fest.

Erst soll $(r_1+r_2)\in R(E_A, F_{A'})$ nachgewiesen werden. Nach der Definition eines Restgliedes existieren für $i=1,2$ zu jedem $\Phi\in A(0)$ gewisse $\Psi_i\in A'(0)$, so dass r_i, Φ und Ψ_i der Bedingung (B) genügen. Die Filter Ψ_1 und Ψ_2 können wir uns noch so beschaffen denken, dass für $\Psi=\Psi_1\wedge\Psi_2$ gilt $\Psi=\Psi\wedge\Phi^0_{\mathbf{R}}\cdot\Psi\leq r_i(\Phi)$, wobei $i=1,2$ (s. Bemerkung (3.1.5.)). Daraus folgt $\Psi+\Psi\leq r_1(\Phi)+r_2(\Phi)\leq(r_1+r_2)(\Phi)$. Also ist r_1+r_2 an der Stelle $0\in E_A$ stetig. Ein Element $N\in\Psi+\Psi$ umfasst ein Element der Form $N'+N'$ mit $N'\in\Psi$. Sei $i=1,2$. Zu $N'\in\Psi$ gibt es Mengen $M_i\in\Phi$ und reelle Funktionen σ_i, definiert auf $[-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$, wobei $\varepsilon_i>0$, so dass $r_i(\lambda\cdot M)\subset\sigma_i(\lambda)\cdot N'$ für alle $\lambda\in[-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ folgt. Wir setzen $\varepsilon=\operatorname{Min}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ und $M=M_1\cap M_2$. Dann resultiert

$$(*)\qquad (r_1+r_2)(\lambda\cdot M)\subset r_1(\lambda\cdot M)+r_2(\lambda\cdot M)\subset\sigma_1(\lambda)\cdot N'+\sigma_2(\lambda)\cdot N'.$$

Die Menge $N'\in\Psi$ kann noch von der Form $N''\cup[-\varepsilon', \varepsilon']\cdot N''$ mit $N''\in\Psi$ und $0<\varepsilon'\leq 1$ angenommen werden. Für $\mu, \mu'\in\mathbf{R}$ mit $|\mu/\mu'|<\varepsilon'$ stellt man dann $\mu/\mu'\cdot$ $\cdot(N''\cup[-\varepsilon', \varepsilon']\cdot N'')\subset N''\cup[-\varepsilon', \varepsilon']\cdot N''$ oder also $\mu N'\subset\mu' N'$ fest. Wir definieren für $\lambda\in[-\varepsilon, \varepsilon]$: .

$$\sigma(\lambda)=\begin{cases}\sigma_1(\lambda)/\varepsilon' & \text{falls}\quad |\sigma_1(\lambda)|\geq|\sigma_2(\lambda)|\\ \sigma_2(\lambda)/\varepsilon' & \text{falls}\quad |\sigma_2(\lambda)|\geq|\sigma_1(\lambda)|.\end{cases}$$

Es ist $\lim_{\lambda\to 0}\sigma(\lambda)/\lambda=0$ und $|\varepsilon'\cdot\sigma(\lambda)|\geq\operatorname{Max}(\sigma_1(\lambda), \sigma_2(\lambda))$. Daraus folgert man

$$\sigma(\lambda)\cdot N'\supset\sigma_1(\lambda)\cdot N', \sigma_2(\lambda)\cdot N'.$$

Damit leitet man nun aus (*)

$$(r_1+r_2)(\lambda\cdot M)\subset\sigma(\lambda)\cdot N'+\sigma(\lambda)\cdot N'$$

oder

$$(r_1+r_2)(\lambda\cdot M)\subset\sigma(\lambda)\cdot(N'+N')$$

also endlich

$$(r_1+r_2)(\lambda\cdot M)\subset\sigma(\lambda)\cdot N$$

für alle $\lambda\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ her. Demnach ist also für r_1+r_2, $\Phi\in\Lambda(0)$ und $\Psi\in\Lambda'(0)$ die Bedingung (B) gültig.

Aus $r\in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ und $\tau\in\mathbf{R}$ soll noch $\tau\cdot r\in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ gefolgert werden. An der Stelle $0\in E_\Lambda$ ist $\tau\cdot r$ stetig. Sei für r, $\Phi\in\Lambda(0)$ und $\Psi\in\Lambda'(0)$ die Bedingung (B) erfüllt. Also finden wir zu einem $N\in\Psi$ ein $M\in\Phi$ und ein σ, so dass $r(\lambda\cdot M)\subset\sigma(\lambda)\cdot N$ oder $(\tau\cdot r)(\lambda\cdot M)\subset\sigma(\lambda)\cdot(\tau\cdot N)$, sobald $\lambda\in[-\varepsilon,\varepsilon]$. Da das Mengensystem $\{\tau\cdot N|N\in\Psi\}$ eine Filterbasis von $\tau\cdot\Psi$ ist, folgt (B) für $\tau\cdot r$, Φ und $\tau\cdot\Psi$.

Mühelos verifiziert man als letztes die Axiome eines Vektorraumes für $R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$.

Lemma 3.4.11. (i) $R(E_\Lambda,\mathbf{R})$ ist ein Ring (bez. der Operationen unter (A.) und (B.)) und $R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ ist ein Modul über $R(E_\Lambda,\mathbf{R})$. (ii) Für $\ell\in\mathscr{L}(E_\Lambda;\mathbf{R})$ und $r\in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ ist $\ell\cdot r\in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$. (iii) Aus $r\in R(E_\Lambda,\mathbf{R})$ und $\ell\in\mathscr{L}(E_\Lambda; F_{\Lambda'})$ folgt $r\cdot\ell\in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$.

Beweis: (i): Wir weisen nur $r'\cdot r\in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ für $r\in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ und $r'\in R(E_\Lambda,\mathbf{R})$ nach. Die natürliche Topologie auf $\mathbf{R}$ bezeichnen wir mit T_0. Die Abbildung $r'\cdot r$ ist an der Stelle $0\in E_\Lambda$ stetig. Die Bedingung (B) sei erfüllt für die Tripel r, $\Phi\in\Lambda(0)$, $\Psi\in\Lambda'(0)$ und r', $\Phi\in\Lambda(0)$, $X\in T_0(0)$. D.h. zu $N\in\Psi$ und $P\in X$ gibt es ein M und reelle Funktionen σ_1 und σ_2, mit $r(\lambda\cdot M)\subset\sigma_1(\lambda)\cdot N$ und $r'(\lambda\cdot M)\subset\sigma_2(\lambda)\cdot P$ für alle λ aus dem Durchschnitt der Definitionsbereiche $[-\varepsilon,\varepsilon]$ von σ_1 und σ_2. Daraus ergibt sich dann

$$(r'\cdot r)(\lambda\cdot M)\subset r'(\lambda\cdot M)\cdot r(\lambda\cdot M)\subset\sigma_1(\lambda)\cdot\sigma_2(\lambda)\cdot P\cdot N$$

für alle $\lambda\in[-\varepsilon,\varepsilon]$. Weil das Mengensystem $\{P\cdot N|N\in\Psi, P\in X\}$ eine Filterbasis von $X\cdot\psi\in\Lambda'(0)$ ist, gilt (B) für $r'\cdot r$, $\Phi\in\Lambda(0)$ und $X\cdot\Psi\in\Lambda'(0)$.

(ii) Auch hier zeigen wir nur $\ell\cdot r\in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ falls $r\in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ und $\ell\in\mathscr{L}(E;\mathbf{R})$. An der Stelle $0\in E_\Lambda$ ist die Abbildung $\ell\cdot r$ stetig. Sei (B) für r, $\Phi\in\Lambda(0)$ und $\Psi\in\Lambda'(0)$ richtig. Wir zeigen die Gültigkeit der Bedingung (B) für $\ell\cdot r$, $\Phi\in\Lambda(0)$ und $\ell(\Phi)\cdot\Psi\in$ $\in\Lambda'(0)$. Zu einem $N\in\Psi$ existiert ein $M\in\Phi$, so dass mit einem gewissen σ: $[-\varepsilon,\varepsilon]\to\mathbf{R}$ für alle $\lambda\in[-\varepsilon,\varepsilon]$ folgt $r(\lambda\cdot M)\subset\sigma(\lambda)\cdot N$. Daraus entnimmt man $(\ell\cdot r)(\lambda\cdot M)\subset$ $\subset\ell(\lambda\cdot M)\cdot r(\lambda\cdot M)\subset\sigma(\lambda)\cdot\ell(M)\cdot N$. Die Behauptung resultiert nun unmittelbar aus der Tatsache, dass das Mengensystem $\{\ell(M)\cdot N|N\in\Psi, M\in\Phi\}$ eine Filterbasis von $\ell(\Phi)\cdot\Psi$ ist.

(iii): Analog wie die Aussage unter (ii) beweist man diese Behauptung.

Lemma 3.4.12. Aus $r\in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$ und $\ell\in\mathscr{L}(F_{\Lambda'}; G_{\Lambda''})$ folgt $\ell\circ r\in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$.

Beweis: An der Stelle $0 \in E_\Lambda$ ist $\ell \circ r$ stetig. Aus der Beziehung (B) für r, $\Phi \in \Lambda(0)$ und $\Psi \in \Lambda'(0)$ leitet man leicht (B) für $\ell \circ r$, $\Phi \in \Lambda(0)$ und $\ell(\Psi) \in \Lambda'(0)$ her.

Lemma 3.4.13. Für $\ell \in \mathscr{L}(E_\Lambda; F_{\Lambda'})$ und $r \in R(F_{\Lambda'}, G_{\Lambda''})$ ist $r \circ \ell \in R(E_\Lambda, G_{\Lambda''})$.

Beweis: Die Abbildung $r \circ \ell$ ist an der Stelle $0 \in E_\Lambda$ stetig. Weiter folgert man mühelos (B) für $r \circ \ell$, $\Phi \in \Lambda(0)$ und $X \in \Lambda''(0)$ aus der Gültigkeit der Bedingung (B) für r, $\ell(\Phi) \in \Lambda'(0)$ und $X \in \Lambda''(0)$.

Ist speziell $E = \mathbf{R}$ und wird für ein festes $y_0 \in F_{\Lambda'}$ die lineare Abbildung $\ell : \mathbf{R} \longrightarrow F_{\Lambda'}$ durch $\lambda \mapsto \lambda \cdot y_0$ definiert, ergibt sich $r \circ \ell \in R(\mathbf{R}, G_{\Lambda''})$. Dann ist $\lim_{\lambda \to 0} r \circ \ell(\lambda)/\lambda = 0$, d.h. $\lim_{\lambda \to 0} r(\lambda \cdot y_0)/\lambda = 0$ (s. (d) in (3.2.)). Daraus entnehmen wir

Lemma 3.4.14. $R(F_{\Lambda'}, G_{\Lambda''}) \cap \mathscr{L}(F_{\Lambda'}; G_{\Lambda''}) = \{0\}$

Lemma 3.4.15. Aus $r_1 \in R(E_\Lambda, F_{\Lambda'})$, $\ell \in \mathscr{L}(E_\Lambda; F_{\Lambda'})$ und $r_2 \in R(F_{\Lambda'}, G_{\Lambda''})$ resultiert $r_2 \circ (\ell + r_1) \in R(E_\Lambda, G_{\Lambda''})$.

Beweis: Die Abbildung $r_2 \circ (\ell + r_1)$ ist an der Stelle $0 \in E_\Lambda$ stetig. Für r_1, $\Phi \in \Lambda(0)$ und ein gewisses $\Psi \in \Lambda'(0)$ sei (B) erfüllt. Anderseits wissen wir von der Gültigkeit der Bedingung (B) für r_2, $\ell(\Phi) + \Psi \in \Lambda'(0)$ und ein bestimmtes $X \in \Lambda''(0)$. Wir leiten nun (B) für das Tripel $r_2 \circ (\ell + r_2)$, $\Phi \in \Lambda(0)$ und $\Psi \in \Lambda''(0)$ her. Zu $P \in X$ existieren ein $\ell(M) + N \in \ell(\Phi) + \Psi$ und ein σ_2, so dass $r_2(\lambda \cdot (\ell(M) + N)) \subset \sigma_2(\lambda) \cdot P$ oder

$$(**) \qquad r_2(\lambda \cdot \ell(M) + \lambda \cdot N) \subset \sigma_2(\lambda) \cdot P$$

für alle λ aus dem Definitionsbereich $[-\varepsilon, \varepsilon]$ von σ_2. Die Menge $N \in \Psi$ können wir von der Form $N \cup [-\varepsilon', \varepsilon'] N$, mit $0 < \varepsilon' \leq 1$, denken. Es lässt sich ein ε'' mit $0 < \varepsilon'' \leq \varepsilon'$ finden, so dass $|\sigma_1(\lambda)/\lambda| \leq \varepsilon''$ für alle $\lambda \in [-\varepsilon'', \varepsilon'']$. Daher gilt für ein gewisses $M' \in \Phi$ und für alle $\lambda \in [-\varepsilon'', \varepsilon'']$ die Beziehung $r_1(\lambda \cdot M') \subset \sigma_1(\lambda) \cdot N \subset \lambda \cdot N$. Also folgern wir aus (**), dass

$$r_2(\lambda \cdot \ell(M) + r_1(\lambda \cdot M') \subset \sigma_2(\lambda) \cdot P$$

für alle $\lambda \in \mathbf{R}$ mit $|\lambda| \leq \mathrm{Min}\,(\varepsilon, \varepsilon'') = \varepsilon'''$. Setzen wir noch $M'' = M \cap M'$, so ergibt sich

$$r_2 \circ (\ell + r_1)\,(\lambda \cdot M) \subset \sigma_2(\lambda) \cdot P$$

für alle $\lambda \in [-\varepsilon''', \varepsilon''']$.

4. Differenzierbarkeit in limitierten Vektorräumen

4.1. Definition und Eindeutigkeit der Ableitung

Die in diesem Kapitel auftretenden Räume E_Λ, $F_{\Lambda'}$ und $G_{\Lambda''}$ seien limitierte separierte Vektorräume.

Definition 4.1.1. Sei $U \subset E_\Lambda$ eine Λ-offene Menge.

Eine Abbildung $f: U \longrightarrow F_{\Lambda'}$ heisst *differenzierbar an der Stelle* $x \in U$, falls ein $\ell \in \mathscr{L}(E_A; F_{A'})$ und ein $r \in R(E_A, F_{A'})$ existieren, so dass

$$f(x+h)-f(x)=\ell h+r(h)$$

identisch in $U-x$ gilt.

$Df(x):=\ell$ heisst die Ableitung von f an der Stelle $x \in U$.

Wenn f in allen Punkten einer Teilmenge $M \subset U$ differenzierbar ist, heisst f *differenzierbar in* M.

Wenn f in ganz U differenzierbar ist, heisst f *differenzierbar.*

Satz 4.1.2. *Seien* $U \subset E_A$ Λ*-offen und* $f: U \longrightarrow F_{A'}$ *an der Stelle* $x \in U$ *differenzierbar. Dann ist* $Df(x)$ *eindeutig bestimmt.*

Beweis: Wäre $Df(x)$ nicht eindeutig bestimmt, gäbe es Restglieder $r, r' \in R(E_A, F_{A'})$ und zwei verschiedene Elemente $\ell, \ell' \in \mathscr{L}(E_A; F_{A'})$, so dass

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x)&=\ell h+r(h) \quad \text{und} \\ f(x+h)-f(x)&=\ell' h+r'(h) \end{aligned}$$

identisch in $U-x$ erfüllt sind. Also gilt $(\ell'-\ell)|(U-x)=(r-r')|(U-x)$. Das Restglied $(r-r')|(U-x)$ kann aber zu $(\ell'-\ell)\neq 0$ erweitert werden. Wegen Lemma (3.1.6.) folgt $(\ell'-\ell)\in R(E_A, F_{A'})$, was aber Lemma (3.4.14.) widerspricht.

4.2. Lokalität der Ableitung

Die Abbildung $f: E_A \longrightarrow F_{A'}$ sei an der Stelle $x \in E_A$ differenzierbar und habe die Ableitung $Df(x)$. Für eine Λ-offene Menge $U \subset E_A$, welche den Vektor x enthält, ist $f|U$ wegen Satz (3.1.8.) an der Stelle x differenzierbar und hat dort ebenfalls die Ableitung $Df(x)$. Umgekehrt habe $g: U \longrightarrow F_{A'}$ an der Stelle $x \in U$ die Ableitung $Dg(x)$. Aus Satz (3.1.8.) und der Definition der Ableitung an der Stelle $x \in U$ folgt, dass $g: E_A \longrightarrow F_{A'}$, definiert durch

$$g(x)=\begin{cases} g(x) & \text{für} \quad x \in U \\ \text{beliebig} & \text{für} \quad x \notin U, \end{cases}$$

an der Stelle $x \in E_A$ die Ableitung $Dg(x)$ besitzt.

Mit $D_x(U \subset E_A, F_{A'})$ bezeichnen wir die an der Stelle $x \in U$ differenzierbaren Abbildungen von $U \subset E_A$ nach $F_{A'}$. Sei $D_x(E_A, F_{A'})$ die Menge der an der Stelle $x \in E_A$ differenzierbaren Abbildungen von E_A nach $F_{A'}$.

Die obigen Überlegungen zeigen: $f \in D_x(E_A, F_{A'})$ gilt genau dann, wenn $f|U \in$ $\in D_x(U \subset E_A, F_{A'})$.

4.3. Beispiele

1.) Jedes $r \in R(E_A, F_{A'})$ ist eine an der Stelle $0 \in E_A$ differenzierbare Abbildung mit $Dr(0)=0$.

2.) Eine konstante Abbildung $c\colon E_A \longrightarrow F_{A'}$ hat an jeder Stelle $x \in E_A$ die Ableitung $\mathrm{D}c(x)=0$.

3.) Für jedes $\ell \in \mathscr{L}(E_A; F_{A'})$ und jedes $x \in E_A$ gilt $\mathrm{D}\ell(x)=\ell$.

4.) Sei $u\colon(E \times E \times \cdots \times E, \Lambda \times \Lambda \times \cdots \times \Lambda) \longrightarrow F_{A'}$ eine n-lineare ($n \geq 2$) stetige Abbildung. Sei $\bar{u}_i\colon E_A \longrightarrow F_{A'}$ definiert durch $\bar{u}_i(h)=u(x, x, \ldots, h, \ldots, x)$ mit h an der i-ten Stelle für ein festes $x \in E_A$. In (3.3.) wurde $\bar{u}$ definiert. Man stellt nun leicht fest, dass $\bar{u}$ an jeder Stelle $x \in E_\Lambda$ differenzierbar ist und dort die Ableitung $\mathrm{D}u(x)= =\sum_{i=1}^{i=n} \bar{u}_i$ hat.

Weitere Beispiele können mit Hilfe des folgenden Satzes konstruiert werden.

Satz 4.3.3. (i) $\mathrm{D}_x(E_A, \mathbf{R})$ *ist ein Ring (für die gewöhnliche Addition und Multiplikation reeller Funktionen* s. (3.4.)). (ii) $\mathrm{D}_x(E_A, F_{A'})$ *ist ein Modul über dem Ring* $\mathrm{D}_x(E_A, \mathbf{R})$. (iii) *Für* $s \in \mathrm{D}_x(E_A, \mathbf{R})$ *und* $f, g \in \mathrm{D}_x(E_A, F_{A'})$ *hat man*

$$\begin{aligned} \mathrm{D}(f+g)(x) &= \mathrm{D}f(x)+\mathrm{D}g(x) \quad \textit{und} \\ \mathrm{D}(s \cdot f)h &= (\mathrm{D}s(x)h) \cdot f(x)+s(x) \cdot \mathrm{D}f(x)h. \end{aligned}$$

Beweis: Wir beweisen nur die letzte Behauptung.

Es gilt identisch in h:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x)+\mathrm{D}f(x)h+r_f(h) \\ g(x+h) &= g(x)+\mathrm{D}g(x)h+r_g(h) \qquad \text{und} \\ s(x+h) &= s(x)+\mathrm{D}s(x)h+r_s(h). \end{aligned}$$

Daraus resultiert

$$(f+g)(x+h)=(f+g)(x)+\mathrm{D}f(x)h+\mathrm{D}g(x)h+r_f(h)+r_g(h)$$

und

$$s(x+h) \cdot f(x+h)=(s(x)+\mathrm{D}s(x)h+r_s(h)) \cdot (f(x)+\mathrm{D}f(x)h+r_f(h))$$

oder

$$\begin{aligned} s(x+h) \cdot f(x+h) = {} & s(x) \cdot f(x)+(\mathrm{D}s(x)h) \cdot f(x)+s(x) \cdot \mathrm{D}f(x)h+ \\ & +(\mathrm{D}s(x)h) \cdot (\mathrm{D}f(x)h)+r_s(h) \cdot \mathrm{D}f(x)h+ \\ & +(\mathrm{D}s(x)h) \cdot r_f(h)+s(x) \cdot r_f(h)+r_s(h) \cdot f(x)+ \\ & +r_s(h) \cdot r_f(h). \end{aligned}$$

Man stellt leicht fest, dass $r_s(h) \cdot f(x)$ ein Restglied ist. Die Behauptung (iii) folgert man nun aus den Lemmas (3.4.10.) und (3.4.11.).

4.4. Kettenregel und Mittelwertsatz

Satz 4.4.4. *Wenn* $f \in \mathrm{D}_x(E_A, F_{A'})$ *und* $g \in \mathrm{D}_{f(x)}(F_{A'}, G_{A''})$, *dann ist* $g \circ f \in \mathrm{D}_x(E_A, G_{A''})$ *und hat an der Stelle* $x \in E_A$ *die Ableitung* $\mathrm{D}g(f(x)) \circ \mathrm{D}f(x)$.

Beweis: Für jedes $h \in E_A$ gilt

$$\begin{aligned} g(f(x+h)) &= g(f(x)+\mathrm{D}f(x)h+r_f(h))= \\ &= g \circ f(x)+\mathrm{D}g(f(x))(\mathrm{D}f(x)h+r_f(h))+r_g(\mathrm{D}f(x)+r_f(h))=g \circ f(x)+ \\ &\quad +\mathrm{D}g(f(x)) \circ \mathrm{D}f(x)h+\mathrm{D}g(f(x)) \circ r_f(h)+r_g \circ (\mathrm{D}f(x)+r_f)(h). \end{aligned}$$

Die Behauptung erhalten wir nun aus den Lemmas (3.4.12.), (3.4.15.) und (3.4.10.).

Seien $c_{x_0}: \mathbf{R} \longrightarrow E_\Lambda$ durch $c_{x_0}(\tau) = x_0$ und $i: \mathbf{R} \longrightarrow E_\Lambda$ durch $i(\tau) = \tau(x_1 - x_0)$ für feste $x_0, x_1 \in E_\Lambda$ definiert. Aus $g := c_{x_0} + i$ folgt $\mathrm{D}g(\lambda) = i$ für jedes $\lambda \in \mathbf{R}$.

Es bedeuten (0,1) das offene und [0,1] das abgeschlossene Intervall der reellen Zahlen zwischen 0 und 1.

Die Abbildung $f: E_\Lambda \longrightarrow F_{\Lambda'}$ sei in $g([0,1])$ stetig und in $g((0,1))$ differenzierbar. Für $\ell \in \mathscr{L}(F_\Lambda; \mathbf{R})$ ergibt sich, dass $h := \ell \circ f \circ g$ stetig in [0,1] und differenzierbar in (0,1) ist. Mit einem festen $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ gilt $\mathrm{D}h(\lambda_0) = \ell \circ \mathrm{D}f(g(\lambda_0)) \circ i$ oder $\mathrm{D}h(\lambda_0)\tau = \ell \circ \mathrm{D}f(g(\lambda_0))\tau(x_1 - x_0)$ identisch in $\mathbf{R}$. Für h sind die Voraussetzungen für den Mittelwertsatz erfüllt und deshalb resultiert

$$\mathrm{h}(1) - h(0) = \mathrm{D}h(\vartheta)1$$

für ein gewisses $\vartheta \in (0, 1)$, das allerdings von ℓ abhängt. Wir setzen $g(\vartheta) = x(\vartheta)$. Da $h(1) = \ell(f(x_1))$ und $h(0) = \ell(f(x_0))$ ist, folgt dann

$$\ell(f(x_1) - f(x_0)) = \ell \circ \mathrm{D}f(x(\vartheta))\,(x_1 - x_0).$$

Damit wissen wir:

Satz 4.4.5. *Sind $x_0, x_1 \in E_\Lambda$ feste Vektoren und ist $f: E_\Lambda \longrightarrow F_{\Lambda'}$ stetig in $\{x_0 + \tau(x_1 - x_0) | 0 \leq \tau \leq 1\}$ und differenzierbar in $\{x_0 + \tau(x_1 - x_0) | 0 < \tau < 1\}$, dann gilt für $\ell \in \mathscr{L}(F_{\Lambda'}; \mathbf{R})$ und ein gewisses $x(\vartheta) \in \{x_0 + \tau(x_1 - x_0) | 0 < \tau < 1\}$*

$$\ell(f(x_1) - f(x_0)) = \ell \circ \mathrm{D}f(x(\vartheta))\,(x_1 - x_0).$$

Für das weitere setzen wir $\psi^0 \Lambda'$ separiert voraus. Mit Hilfe von Satz (2.2.15.) zeigt man dann leicht:

Lemma 4.4.6. Seien $x_0, x_1 \in E_\Lambda$. Eine in $\{x_0 + \tau(x_1 - x_0) | 0 \leq \tau \leq 1\}$ stetige und in $\{x_0 + \tau(x_1 - x_0) | 0 < \tau < 1\}$ differenzierbare Abbildung $f: E_\Lambda \longrightarrow F_{\Lambda'}$ der Ableitung $\mathrm{D}f(x) = 0$ an jeder Stelle $x \in \{x_0 + \tau(x_1 - x_0) | 0 < \tau < 1\}$ ist auf $\{x_0 + \tau(x_1 - x_0) | 0 \leq \tau \leq 1\}$ konstant.

Sei $U \subset E_\Lambda$ eine Λ-offene, bezüglich $x_0 \in U$ sternförmig konvexe Menge. Die Abbildung $f: E_\Lambda \longrightarrow F_{\Lambda'}$ sei differenzierbar in U und habe an jeder Stelle $x \in U$ die Ableitung 0. Da mit $x \in U$ auch $x_0 + \tau(x - x_0)$ für alle $0 \leq \tau \leq 1$ in U liegt, folgt aus dem Lemma (4.4.6.), dass f auf U konstant ist. Umgekehrt hat jede auf U konstante Abbildung $c: E_\Lambda \longrightarrow F_{\Lambda'}$ an jeder Stelle in U die Ableitung 0. Zusammengefasst heisst das:

Satz 4.4.7. *Sei $U \subset E_\Lambda$ eine Λ-offene, sternförmig konvexe Menge. Eine in U differenzierbare Abbildung $f: E_\Lambda \longrightarrow F_{\Lambda'}$ ist genau dann konstant auf U, wenn $\mathrm{D}f(x) = 0$ für jedes $x \in U$.*

LITERATURVERZEICHNIS

[1] BINZ E. u. KELLER H. H.: *Funktionenräume in der Kategorie der Limesräume* Ann. Acad. Sci. Fenn. Serie A 383 (1966)
[2] BOURBAKI N.: *Topologie Général*, Chap. I 3e ed. (1961).
[3] FISCHER H. R.: *Limesräume*, Math. Ann. *137* (1959).
[4] KELLER H. H.: *Differenzierbarkeit in topologischen Vektorräumen*, Comment. Math. Helv. *38* (1964).
[5] KOETHE G.: *Topologische lineare Räume*, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg (1960).
[6] LANG S.: *Introduction to differentiable manifolds*, Interscience, New York–London (1963).

Eingegangen den 22. Nov. 1965