Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 41 (1966-1967)

Artikel: Vollständige konforme Metriken und isolierte Singularitäten subharmonischer Funktionen.

Autor: Huber, Alfred

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-31374

Vollständige konforme Metriken und isolierte Singularitäten subharmonischer Funktionen

von ALFRED HUBER, Zürich

1. Einleitung

Im Rahmen von Untersuchungen zum Cohn-Vossenschen Problemkreis wurde R. FINN [2, 3] dazu geführt, die Gültigkeit eines gewissen Darstellungssatzes für vollständige konforme Metriken (Satz 1 der vorliegenden Arbeit) zu vermuten. Es gelang ihm, die in Frage stehende Darstellung nach Einführung einer zusätzlichen Voraussetzung (siehe Bemerkung 3 zu Satz 1) zu beweisen und damit den Zugang zu bedeutsamen geometrischen Resultaten zu finden.

Das wichtigste Ziel dieses Artikels ist ein Beweis der *vollen* Finnschen Vermutung. Als Konsequenzen ergeben sich daraus neue Kriterien für die Hebbarkeit isolierter Singularitäten subharmonischer und δ-subharmonischer Funktionen.

Auf geometrische Folgerungen gehen wir in der vorliegenden Arbeit nicht ein. Wir begnügen uns mit dem Hinweis, dass mit Satz 1 die von Finn auf Grund der Darstellung (1) hergeleiteten geometrischen Sätze wegen des Wegfallens der zusätzlichen Annahme einen wesentlich erweiterten Gültigkeitsbereich erhalten.

DEFINITION. Unter einem *in den Punkt z_0 führenden Weg* in der komplexen Ebene verstehen wir eine stetige – im Falle $z_0=\infty$ auf der Riemannschen Kugel stetige – Kurve γ mit folgenden Eigenschaften:

(1) γ verbindet z_0 mit einem Punkt $z_1 \neq z_0$;

(2) jeder z_0 nicht enthaltende abgeschlossene Teilbogen von γ ist rektifizierbar.

SATZ 1. *Sei $u(z)$ eine reellwertige Funktion, definiert und zweimal stetig differenzierbar im Gebiet $\Omega=\{z \mid R<|z|<\infty\}$, $R>0$, mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $$\iint_{\Omega} |\Delta u| \, dx \, dy < \infty\,;$$

(b) $$\int_{\gamma} e^{u(z)} |dz| = \infty$$

für jeden ins Unendliche führenden Weg γ. Dann gilt

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| \Delta u(\zeta) \, d\xi \, d\eta + c \log |z| + h(z) \quad (\zeta = \xi + i\eta), \tag{1}$$

wobei c eine Konstante und h eine in Ω und im Unendlichen harmonische Funktion bezeichnen.

BEMERKUNGEN

1. Die Eigenschaft (b) der Metrik $e^{u(z)}|dz|$ könnte man „Vollständigkeit im Unendlichen" nennen. Die Enden einer genügend regulären, vollständigen[1]), orientierbaren offenen Fläche mit summierbarer Gausscher Krümmung können durch konforme Metriken dargestellt werden, welche die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllen.

2. Es ist sofort klar, dass sich die Funktion u vom ersten Summanden auf der rechten Seite von (1) um eine harmonische Funktion unterscheidet; dies ist sogar richtig, wenn die Voraussetzung (b) gestrichen wird. Die wesentliche Aussage des Satzes besteht darin, dass bei Gültigkeit von (b) diese Differenzfunktion im Unendlichen entweder logarithmisch singulär oder harmonisch sein muss.

3. R. FINN [3] hat die Darstellung (1) bewiesen unter der zusätzlichen Annahme, dass die Menge $\{z \mid \Delta u(z)<0\}$ beschränkt sei. Es gelang ihm dies mit Hilfe einer kurzen indirekten Schlussweise, die sich jedoch einer Erweiterung auf den allgemeinen Fall zu entziehen scheint. Unsere Methode besteht in einer direkten Konstruktion der gesuchten Darstellung.

KOROLLAR. *Sei $u(z)$ eine reellwertige Funktion, definiert und zweimal stetig differenzierbar in der endlichen Ebene. Ist Δu summierbar und erfüllt u die Bedingung* (b) *von Satz* 1, *so gilt die Darstellung*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\zeta\text{-Ebene}} \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| \Delta u(\zeta)\, d\xi\, d\eta + c, \tag{2}$$

wobei c eine Konstante bezeichnet.

BEMERKUNG. Die Voraussetzungen dieses Korollars erfüllen diejenigen konformen Metriken $e^{u(z)}|dz|$, welche vollständige Flächen mit summierbarer Gaussscher Krümmung vom topologischen Typ der Ebene darstellen.

BEWEIS DES KOROLLARS. Wir wählen ein $R>0$ und machen Gebrauch von der Darstellung (1) der Funktion u im Gebiet $\Omega=\{z \mid R<|z|<\infty\}$. Die Funktion

$$H(z)=u(z)-\frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\zeta\text{-Ebene}} \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| \Delta u(\zeta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= c \log|z| + h(z) - \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{|\zeta|\leqq R} \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| \Delta u(\zeta)\, d\xi\, d\eta$$

[1]) im Sinne von H. HOPF und W. RINOW [6].

ist harmonisch in der endlichen z-Ebene. Im Unendlichen ist sie entweder logarithmisch singulär oder harmonisch. Also ist sie eine Konstante. *Q.E.D.*

Wir werden mit Satz 2 eine Aussage beweisen, die etwas allgemeiner ist als Satz 1. An Stelle der Existenz und Stetigkeit aller Ableitungen von u bis und mit der zweiten Ordnung fordern wir nur, dass u δ-subharmonisch sei. Man versteht darunter, dass die Funktion u in der Umgebung eines jeden Punktes ihres Definitionsgebietes als Differenz subharmonischer Funktionen darstellbar sein soll. Der Laplaceoperator ist dann im Sinne der Theorie der Distributionen zu verstehen: Δu ist ein Radonsches Mass, von welchem – in Verallgemeinerung von Bedingung (a) in Satz 1 – vorausgesetzt wird, dass seine totale Variation endlich sei.

Diese Allgemeinheit hat zunächst den Vorteil, dass durch die zugelassenen Metriken eine grosse Klasse von Flächen erfassbar wird, nämlich – nach einem Resultat von I. G. Reschetnjak [10] – die Klasse der Mannigfaltigkeiten von beschränkter Krümmung im Sinne von A. D. Alexandrow. Vor allem aber wird durch sie der potentialtheoretische Aspekt der bewiesenen Darstellung erst richtig beleuchtet. Dies zeigen die folgenden Sätze, deren Beweis – mit wesentlicher Anwendung von Satz 2 – im letzten Abschnitt erfolgt:

Satz 3. *Sei $u(z)$ δ-subharmonisch im Gebiete $G=\{z\,|\,0<|z|<R\}$, $R>0$. Dafür, dass u auch in der Umgebung von 0 δ-subharmonisch ist, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:*

(a) *die totale Variation des Masses Δu ist endlich in der Umgebung von* 0;

(b) *es existiert eine reelle Zahl α mit der Eigenschaft, dass*

$$\int_\gamma |z|^\alpha e^{u(z)}\,|dz| = \infty$$

für jeden in den Punkt 0 führenden Weg γ.

Bemerkungen

1. Die eine Hälfte von Satz 3, nämlich die Hinlänglichkeit der Bedingungen (a) und (b), ist im wesentlichen die Aussage von Satz 2, transformiert durch Inversion von einer Umgebung von ∞ auf eine Umgebung von 0.

2) Dass u sich in einer Umgebung von 0 als Differenz subharmonischer Funktionen, $u(z)=u_1(z)-u_2(z)$, darstellen lässt, bedeutet nicht, dass der Wert $u(0)$ definiert ist. Es kann vorkommen, dass für jede solche Darstellung von u der Ursprung zur Menge $\{z\,|\,u_1(z)=u_2(z)=-\infty\}$ gehört. Auf dieser bleibt u undefiniert.

Satz 4. *Sei $u(z)$ superharmonisch im Gebiet $G=\{z\,|\,0<|z|<R\}$, $R>0$. Dafür, dass u als superharmonische Funktion in den Punkt 0 hinein fortgesetzt werden kann, sind folgende Bedingungen notwendig und hinreichend:*

(a) *die totale Variation des Masses Δu ist endlich in der Umgebung von* 0;
(b) *es ist*

$$\int_\gamma \frac{e^{u(z)}}{|z|}\,|dz| = \infty$$

für jeden in den Punkt 0 *führenden Weg* γ.

Die Resultate dieser Arbeit sind in einer in den Comptes Rendus publizierten Note [9] angekündigt worden.

2. Einige Hilfssätze

In diesem Abschnitt betrachten wir eine Funktion v der Form

$$v(z) = k \log |z| + q(z). \tag{3}$$

Dabei bezeichnet k eine natürliche Zahl. Die Funktion q besitze folgende Eigenschaften: (a) q sei definiert und superharmonisch in $\mathbf{C}$ (= endliche komplexe Ebene); (b) q sei harmonisch in einer Umgebung von 0; (c) die totale Variation α der q zugeordneten Massenbelegung μ sei kleiner als $\frac{1}{2}$. Ferner setzen wir die Vollständigkeit der durch das Linienelement $e^{v(z)}|dz|$ erzeugten Metrik voraus, d.h. es soll gelten

$$\int_\gamma e^{v(z)}\,|dz| = \infty$$

für jeden ins Unendliche führenden Weg γ.

Für irgend zwei Punkte z_1 und z_2 in $\mathbf{C}$ definieren wir

$$\varrho(z_1, z_2) = \inf_{\gamma \in A(z_1, z_2)} \int_\gamma e^{v(z)}\,|dz|, \tag{4}$$

wobei $A(z_1, z_2)$ die Menge aller rektifizierbaren Verbindungskurven von z_1 und z_2 bezeichnet. Für zwei beliebige Mengen A und B in $\mathbf{C}$ bedeute

$$\varrho(A, B) = \inf_{\substack{z_1 \in A \\ z_2 \in B}} \varrho(z_1, z_2). \tag{5}$$

Die Funktion q ist in bekannter Weise darstellbar als Limes regularisierter Funktionen $q_n = \alpha_n * q (n = 1, 2, 3, \ldots)$, wobei etwa

$$\alpha_n(z) = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad |z| \geqq \dfrac{1}{n}, \\ k n^2 \exp\left\{\dfrac{1}{n^2|z|^2 - 1}\right\} \quad \text{für} \quad |z| < \dfrac{1}{n}, \end{cases} \tag{6}$$

mit
$$k = \left(2\pi \int_0^1 t \exp\left\{\frac{1}{t^2 - 1}\right\} dt\right)^{-1}.$$

Die Funktionen q_n sind definiert, unendlich oft differenzierbar und superharmonisch in **C**, und $q_n \uparrow q$ für $n \to \infty$. Es ist
$$\mu_n = \alpha_n * \mu \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{7}$$
wobei μ_n die q_n zugeordnete Massenbelegung (mit der Dichtefunktion $-\Delta q_n/2\pi$) bezeichnet (siehe [11], Bd. II, p. 16). Die totale Variation von μ_n stimmt überein mit der totalen Variation α von μ $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

Wir definieren $v_n(z) = k \log |z| + q_n(z)$ und bezeichnen mit $\varrho_n(z_1, z_2)$ (für $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$) und $\varrho_n(A, B)$ (für $A, B \subset \mathbf{C}$) die – entsprechend (4) und (5) – durch das Linienelement $e^{v_n(z)}|dz|$ erzeugten Abstandsfunktionen.

LEMMA 1. *Sei $\{\Omega_n\}$ eine monotone, **C** ausschöpfende Gebietsfolge. Dann gilt*
$$\varrho_n(0, \Gamma_n) \to \infty \qquad \text{für} \qquad n \to \infty, \tag{8}$$
wobei Γ_n den Rand von Ω_n bezeichnet $(n=1, 2, 3, \ldots)$.

BEWEIS. Wir definieren
$$\lambda_n = \liminf_{m \to \infty} \varrho_n(0, \Gamma_m) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{9}$$
und beweisen vorerst: Entweder gilt $\lambda_n \uparrow \infty$ für $n \uparrow \infty$ oder es ist $\lambda_n = \infty$ für alle genügend grossen Indizes n [2]). Da – zufolge der Monotonie der Funktionenfolge $\{v_n\}$ – die Zahlfolge $\{\lambda_n\}$ nicht abnimmt, genügt es, folgende Annahme ad absurdum zu führen:
$$\lambda_n \uparrow \lambda \qquad \text{für} \qquad n \uparrow \infty, \qquad \text{wobei} \qquad \lambda < \infty. \tag{10}$$

Nach Voraussetzung ist die Metrik ϱ vollständig. Also existieren zwei Kreise $C_j = \{z \mid |z| = r_j\}$ $(j=1, 2)$, $0 < r_1 < r_2 < \infty$, mit der Eigenschaft, dass
$$\varrho(C_1, C_2) = \Lambda > \lambda. \tag{11}$$

Wegen (10) gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine Folge $\{\gamma_n\}$ von C_1 mit C_2 verbindenden, rektifizierbaren Kurvenbogen mit der Eigenschaft, dass
$$\int_{\gamma_n} e^{v_n(z)} |dz| < \lambda + \varepsilon, \tag{12}$$

---

[2]) Aus dem zu beweisenden Satz 2 kann *a posteriori* geschlossen werden, dass alle Metriken ϱ_n vollständig (also alle $\lambda_n = \infty$) sind.

($n=1, 2, 3, \ldots$). Zur Darstellung dieser Kurven

$$\gamma_n : [0, 1], t \to \mathbf{C}, f_n(t)$$

benützen wir als Parameter $t = s/L_n$, wobei s die (euklidische) Bogenlänge auf γ_n – vom auf C_1 liegenden Anfangspunkt aus gemessen – und L_n die (euklidische) Länge von γ_n bezeichnet. Da die Funktionen v_n nach unten gleichmässig beschränkt sind, folgt aus (12) die Beschränktheit der Folge $\{L_n\}$. Daraus schliesst man unter Benützung der durch die Definition des Parameters t implizierten und für alle t_1, $t_2 \in [0,1]$ gültigen Ungleichung $|f_n(t_1) - f_n(t_2)| \leqq L_n |t_1 - t_2|$ auf die gleichgradige Stetigkeit der Funktionenfolge $\{f_n\}$ auf $[0,1]$. Da diese Folge ausserdem gleichmässig beschränkt ist, enthält sie nach dem Satz von Arzelà eine gleichmässig konvergente Teilfolge $\{f_{n_k}\}$. Es bezeichne $f(t) = \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(t)$ für alle $t \in [0,1]$. Die Kurve

$$\gamma : [0, 1], t \to \mathbf{C}, f(t)$$

ist rektifizierbar und verbindet C_1 mit C_2. Man beweist – mit Benützung der gleichmässigen Stetigkeit von v_m auf $\{z \mid r_1 \leqq |z| \leqq r_2\}$ – leicht, dass

$$\int_\gamma e^{v_m(z)} |dz| \leqq \liminf_{k\to\infty} \int_{\gamma_{n_k}} e^{v_m(z)} |dz| \tag{13}$$

für $m = 1, 2, 3, \ldots$. Aus der Monotonie der Folge $\{v_n\}$ und Ungleichung (12) schliessen wir, dass für $n_k \geqq m$

$$\int_{\gamma_{n_k}} e^{v_m(z)} |dz| \leqq \int_{\gamma_{n_k}} e^{v_{n_k}(z)} |dz| < \lambda + \varepsilon . \tag{14}$$

Aus (13) und (14) folgt

$$\int_\gamma e^{v_m(z)} |dz| \leqq \lambda + \varepsilon \qquad \text{für} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{15}$$

Lassen wir $m \to \infty$ streben, so erhalten wir aus (15) unter Anwendung des Fatouschen Lemmas

$$\int_\gamma e^{v(z)} |dz| \leqq \lambda + \varepsilon . \tag{16}$$

Wählt man ε kleiner als $\Lambda - \lambda$, so steht (16) im Widerspruch zu (11). Also kann (10) nicht gelten.

Nun nehmen wir an, es gebe eine Zahl C so, dass

$$\varrho_n(0, \Gamma_n) \leqq C \qquad \text{für} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots , \tag{17}$$

und zeigen, dass dies zu einem Widerspruch führt.

Nach dem eben bewiesenen Resultat gibt es eine natürliche Zahl N mit der Eigenschaft, dass

$$\lambda_N = \lim_{m\to\infty} \varrho_N(0, \Gamma_m) > C.$$

Daraus folgt $\varrho_N(0, \Gamma_M) > C$ für einen genügend grossen Index M. Für alle $n \geqq \max(M, N)$ gilt

$$\varrho_n(0, \Gamma_n) \geqq \varrho_N(0, \Gamma_M) > C. \tag{18}$$

Dies steht im Widerspruch zu (17).

Die Folge $\{\varrho_n(0, \Gamma_n)\}$ ist also unbeschränkt. Da sie monoton wächst, erfüllt sie (8). *Q.E.D.*

LEMMA 2. *Es gibt eine Folge $\{\Gamma_n\}$ von stückweise analytischen Jordankurven und eine Zahl A mit folgenden Eigenschaften:*

(a) $$\int_{\Gamma_n} e^{v_n(z)}|dz| < A\varrho_n(0, \Gamma_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots);$$

(b) *die Innengebiete G_n der Kurven Γ_n enthalten den Ursprung und streben mit $n\to\infty$ gegen* **C**.

BEWEIS. Um die Resultate von F. FIALA [1] über Parallelkurven auf analytischen Flächen positiver Krümmung anwenden zu können, approximieren wir die unendlich oft differenzierbaren Metriken $e^{v_n(z)}|dz|$ durch solche, die in den Variablen x und y analytisch sind.

Sei $\{R_n\}$, $R_0 > 1$, eine gegen ∞ strebende Folge von Radien, $C_n = \{z \mid |z| = R_n\}$ und $B_n = \{z \mid 1 \leqq |z| \leqq R_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Sei zunächst n eine feste natürliche Zahl. Die Funktion

$$w_n(x, y) = v_n(x, y) - \frac{1 + x^2 + y^2}{2(1 + R_n^2)}$$

kann durch ein Polynom $p_n(x, y)$ derart approximiert werden, dass sich auf B_n die Werte der Funktionen $w_n(x, y)$ und $p_n(x, y)$ sowie die Werte aller entsprechenden partiellen Ableitungen bis und mit der zweiten Ordnung voneinander um weniger als $1/2(1 + R_n^2)$ unterscheiden. Es gelten dann auf B_n die Ungleichungen

$$v_n - \log 3 < p_n < v_n, \tag{19}$$

$$\left|\frac{\partial v_n}{\partial x} - \frac{\partial p_n}{\partial x}\right| < 1, \quad \left|\frac{\partial v_n}{\partial y} - \frac{\partial p_n}{\partial y}\right| < 1, \tag{20}$$

$$\Delta p_n < 0. \tag{21}$$

Das Linienelement $e^{p_n(z)}|dz|$ erzeugt eine Metrik in **C**, deren Abstandsfunktion wir mit ϱ_n^* bezeichnen. Es ist (in der Terminologie von FIALA [1, p. 295]) eine analytische Riemannsche Ebene definiert, deren Gausssche Krümmung

$$K(z) = -\Delta p_n(z)/e^{2p_n(z)}$$

wegen (21) auf B_n positiv ist. Diese Fläche besitzt nicht alle der in [1] geforderten Eigenschaften; zum Beweis der hier benützten Aussagen macht jedoch Fiala von den noch fehlenden Voraussetzungen ($K>0$ auch ausserhalb B_n und Vollständigkeit) keinen Gebrauch.

Die Menge

$$\Gamma_n' = \{z \mid \varrho_n^*(C_0, z) = \varrho_n^*(C_0, C_n), |z| > R_0\}$$

ist Vereinigung von endlich vielen analytischen Kurvenbogen (vrai parallèle [1, p. 325]). Sie enthält als Teilmenge eine stückweise analytische Jordankurve, nämlich den Rand Γ_n der mit ∞ zusammenhängenden Gebietskomponente des Komplementes von Γ_n (composante extérieure [1, p. 326]). Es soll nun gezeigt werden, dass die Kurvenfolge $\{\Gamma_n\}(n=1, 2, 3, \ldots)$ die Bedingungen (a) – für genügend grosses A – und (b) erfüllt.

Aus (20) und der Konstruktion von v_n schliessen wir, dass

$$\int_{C_0} \frac{\partial p_n}{\partial v}|dz| \leqq 4\pi R_0 + \int_{C_0} \frac{\partial v_n}{\partial v}|dz| \leqq 2\pi(2R_0 + k), \tag{22}$$

wobei $\partial/\partial v$ die Ableitung in Richtung der äussern Normalen bezeichnet. Der linke Term in Ungleichung (22) ist das um 2π verminderte Integral über die geodätische Krümmung der Metrik $e^{p_n(z)}|dz|$ längs C_0. Beachten wir noch, dass die Gausssche Krümmung im Zwischengebiet von C_0 und Γ_n überall positiv ist, so erhalten wir durch Anwendung der Fialaschen Sätze 3 und 4 [1, p. 330]

$$\int_{\Gamma_n} e^{p_n(z)}|dz| \leqq \int_{\Gamma'_n} e^{p_n(z)}|dz| \leqq 2\pi(2R_0 + k + 1)\varrho_n^*(C_0, \Gamma_n'). \tag{23}$$

Aus (19) und (23) folgt

$$\int_{\Gamma_n} e^{v_n(z)}|dz| \leqq 3\int_{\Gamma_n} e^{p_n(z)}|dz| \leqq A\varrho_n^*(C_0, \Gamma_n') = A\varrho_n^*(C_0, \Gamma_n) \leqq$$

$$\leqq A\varrho_n(0, \Gamma_n), \quad \text{wobei} \quad A = 6\pi(2R_0 + k + 1).$$

Die Folge $\{\Gamma_n\}$ besitzt also die Eigenschaft (a).

Für $n \to \infty$ gilt nach Annahme $R_n \to \infty$, also nach Lemma 1 $\varrho_n(0, C_n) \to \infty$. Daraus folgt $\varrho_n(C_0, C_n) \to \infty$. Da für alle n die Ungleichungen

$$\begin{aligned} \varrho(0, \Gamma_n) \geqq \varrho_n(0, \Gamma_n) \geqq \varrho_n^*(0, \Gamma_n) \geqq \\ \geqq \varrho_n^*(C_0, \Gamma_n) = \varrho_n^*(C_0, C_n) \geqq \tfrac{1}{3} \varrho_n(C_0, C_n) \end{aligned}$$

erfüllt sind, schliessen wir, dass $\varrho(0, \Gamma_n) \to \infty$ für $n \to \infty$. Dies ist äquivalent mit der Gültigkeit von (b). *Q.E.D.*

BEMERKUNG. P. HARTMAN [5] hat kürzlich bewiesen, dass die wichtigsten Resultate von Fiala unter wesentlich abgeschwächten Voraussetzungen noch gültig sind. Durch Anwendung dieser tieferliegenden Sätze könnte der Beweis von Lemma 2 etwas kürzer gehalten werden.

LEMMA 3. *Es existieren eine die z-Ebene ausschöpfende Gebietsfolge* $\{\Omega_n\}$ *und eine Folge zugeordneter Abbildungen* $\{\varphi_n\}$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(a) φ_n *bildet* Ω_n *konform ab auf eine Kreisscheibe* $D_n = \{w \mid |w| < R_n\}$, wobei $\varphi_n(0) = 0$ *und* $\varphi_n(1) = 1$;

(b) *Sei* $e^{\tilde{v}_n(w)}|dw|$ *die durch Verpflanzung bei der Abbildung* φ_n *aus* $e^{v_n(z)}|dz|$ *hervorgehende Metrik. Es gilt die Darstellung*

$$\tilde{v}_n(w) = k \log |w| + \int_{D_n} g_n(w, \omega)\, d\tilde{\mu}_n(e_\omega) + c_n. \tag{24}$$

Dabei bezeichnen g_n *die Greensche Funktion von* D_n, $\tilde{\mu}_n$ *das durch Verpflanzung bei der Abbildung* φ_n *aus* μ_n *entstehende positive Mass, und* c_n *eine Konstante* $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

BEWEIS. Der Beweis dieses Hilfssatzes besteht aus zwei Teilen. Zuerst legen wir eine Konstruktion dar, welche jedem Gebiet G_n der in Lemma 2 auftretenden Gebietsfolge ein Gebiet Ω_n und eine Abbildung φ_n zuordnet derart, dass die Bedingungen (a) und (b) von Lemma 3 erfüllt sind. Dann beweisen wir unter Anwendung von Lemma 2, dass die so erhaltene Gebietsfolge $\{\Omega_n\}$ die z-Ebene ausschöpft.

Sei n eine natürliche Zahl, und sei G ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet in der z-Ebene, welches den Ursprung enthält. Wir ordnen dem Paar (n, G) nach folgender Vorschrift eine positive Zahl $\tau_n(G)$ zu. Es bezeichne h_n die Lösung des Dirichletschen Problems für das Gebiet G mit den Randwerten v_n, und es sei $H_n(z) = h_n(z) - kg(z, 0)$, wobei g die Greensche Funktion des Gebietes G bezeichnet. Wir definieren: $\tau_n(G)$ sei der Abstand des Ursprungs vom Rande Γ des Gebietes G, gemessen in der Metrik $e^{H_n(z)}|dz|$.

Die Funktion $v_n - H_n$ ist superharmonisch in G und nimmt auf Γ die Randwerte 0 an. Also ist sie nach dem Minimumprinzip nicht negativ in G. Daraus folgt

$$\tau_n(G) \leqq \varrho_n(0, \Gamma). \tag{25}$$

Im nun folgenden ersten Teil des Beweises wird n festgehalten. Wir setzen zur Abkürzung $\tau_n(G_n)=t_n$, wobei unter G_n das in Lemma 2 so bezeichnete Gebiet zu verstehen ist. Sei S_n die Menge aller beschränkten, einfach zusammenhängenden, den Ursprung enthaltenden Gebiete G in der z-Ebene, für welche $\tau_n(G)\geqq t_n$ gilt. Diese Menge ist nicht leer, denn $G_n \in S_n$. Zunächst beweisen wir:

(I) *S_n enthält ein „Minimalgebiet", d.h. es existiert ein Gebiet $\Omega_n \in S_n$ mit der Eigenschaft, dass $\Omega_n \subseteq G$ für alle $G \in S_n$.*

Sei M_n der Durchschnitt aller zu S_n gehörigen Gebiete, und sei I_n das Innere von M_n. Die Menge I_n ist nicht leer, denn aus (25) folgt

$$\{z \mid \varrho_n(0, z) < t_n\} \subseteq G \tag{26}$$

für alle $G \in S_n$. Wir bezeichnen mit Ω_n diejenige – wegen (26) existierende – Gebietskomponente von I_n, welche 0 enthält. Das Gebiet Ω_n ist einfach zusammenhängend; andernfalls müsste nämlich mindestens eines der zur Durchschnittsbildung herangezogenen Gebiete mehrfach zusammenhängend sein, was der Definition von S_n widerspräche.

Zum Beweise von (I) genügt es, nun noch zu zeigen, dass Ω_n in S_n liegt, d.h. dass $\tau_n(\Omega_n)\geqq t_n$ ist.

Wäre $\tau_n(\Omega_n)<t_n$, so gäbe es einen Punkt z_0 auf dem Rande Δ_n von Ω_n, einen 0 mit z_0 verbindenden analytischen Kurvenbogen γ_n in Ω_n und eine positive Zahl η derart, dass

$$\int_{\gamma_n} e^{H_n(z)}\,|dz| = t_n - \eta\,. \tag{27}$$

Darin bedeutet $H_n(z)=h_n(z)-kg(z, 0)$, wobei h_n die Lösung des Dirichletschen Problems für das Gebiet Ω_n mit den Randwerten v_n und g die Greensche Funktion von Ω_n bezeichnen. Wir definieren

$$\delta = \min\left(1, \frac{\eta}{2m}\right), \qquad \text{wobei} \qquad m = \max_{|z-z_0|\leqq 1} e^{v_n(z)}\,. \tag{28}$$

Da z_0 Randpunkt von Ω_n ist, existiert ein Gebiet $G^* \in S_n$, dessen Rand Γ^* die Kreisscheibe $\{z \mid |z-z_0|<\delta\}$ schneidet. Sei $H_n^*(z)=h_n^*(z)-kg^*(z, 0)$, wobei h_n^* die Lösung des Dirichletschen Problems für das Gebiet G^* mit den Randwerten v_n und g^* die Greensche Funktion von G^* bezeichnet.

Die Funktion $v_n-H_n^*$ ist superharmonisch in G^* und nimmt auf Γ^* die Randwerte 0 an. Nach dem Minimumprinzip gilt also

$$v_n(z) \geqq H_n^*(z) \qquad \text{für alle} \qquad z \in G^*\,. \tag{29}$$

Die Funktion $H_n-H_n^*$ ist harmonisch in Ω_n und nimmt auf Δ_n die Randwerte $v_n-H_n^*$

an. Da diese nach (29) nicht negativ sind, folgt aus dem Minimumprinzip

$$H_n(z) \geqq H_n^*(z) \qquad \text{für alle} \qquad z \in \Omega_n. \tag{30}$$

Sei z_1 zu z_0 (in der euklidischen Metrik der z-Ebene) nächstgelegener Punkt von Γ^*, so dass also

$$|z_1 - z_0| = \min_{z \in \Gamma^*} |z - z_0| < \delta. \tag{31}$$

Wir bezeichnen die geradlinige Verbindungsstrecke von z_0 und z_1 mit γ', und den zusammengesetzten Weg $\gamma_n \cup \gamma'$ mit γ_n'. Aus (27) bis (31) erhält man

$$\int_{\gamma'_n} e^{H^*_n(z)} |dz| \leqq \int_{\gamma_n} e^{H_n(z)} |dz| + \int_{\gamma'} e^{v_n(z)} |dz| \leqq t_n - \eta + m\delta < t_n.$$

Daraus folgt $\tau_n(G^*) < t_n$. Damit sind wir bei einem Widerspruch angelangt, denn $G^* \in S_n$ impliziert per definitionem $\tau_n(G^*) \geqq t_n$. Also gilt (I).

(II) *Es existiert eine Abbildung φ_n des Minimalgebietes Ω_n in die w-Ebene mit der Eigenschaft, dass Ω_n und φ_n miteinander die Bedingungen* (a) *und* (b) *in Lemma* 3 *erfüllen.*

Sei g die Greensche Funktion von Ω_n, h_n die Lösung des Dirichletschen Problems für das Gebiet Ω_n mit den Randwerten v_n, $H_n(z) = h_n(z) - kg(z, 0)$, $\tilde{H}_n$ eine zu H_n konjugiert harmonische Funktion. $\tilde{H}_n$ ist definiert und $\exp\{i\tilde{H}_n\}$ ist eindeutig in $\Omega_n - \{0\}$. Durch die Funktion

$$\psi_n : z \to w = \int_0^z \exp\{H_n(z) + i\tilde{H}_n(z)\}\, dz$$

wird Ω_n konform abgebildet auf eine über der w-Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche F_n. Diese besitzt einen über $w=0$ liegenden k-fachen Verzweigungspunkt und ist im übrigen unverzweigt.

Sei σ eine (auf irgendeinem Blatt von F_n liegende) geradlinige Strecke, die den Verzweigerungspunkt mit einem Randpunkt von F_n verbindet. Dann ist $\psi_n^{-1}(\sigma)$ ein 0 mit einem Randpunkt von Ω_n verbindender analytischer Kurvenbogen, und infolgedessen

$$\int_\sigma |dw| = \int_{\psi^{-1}{}_n(\sigma)} |\psi_n'(z)|\, |dz| = \int_{\psi^{-1}{}_n(\sigma)} e^{H_n(z)} |dz| \geqq \tau_n(\Omega_n) \geqq t_n. \tag{32}$$

Es bezeichne K_n diejenige der w-Ebene überlagerte Riemannsche Fläche, die man erhält, wenn man $k+1$ Exemplare der Kreisscheibe $\{w \mid |w| < t_n\}$ längs der positiven reellen Achse aufschneidet und so miteinander verheftet, dass über $w=0$ ein k-facher Verzweigerungspunkt entsteht. Aus (32) folgt, dass K_n in F_n enthalten ist. Nun beweisen wir, dass $K_n = F_n$ ist.

Nehmen wir an, K_n sei ein echter Teil von F_n. Dann ist $G^* = \psi_n^{-1}(K_n)$ – ein einfach zusammenhängendes, den Ursprung enthaltendes Gebiet – eine echte Teilmenge von Ω_n. Sei g^* die Greensche Funktion von G^*, h_n^* die Lösung des Dirichletschen Problems für das Gebiet G^* mit den Randwerten v_n, $H_n^*(z) = h_n(z) - kg^*(z, 0)$. Die Funktion $H_n^* - H_n$ ist harmonisch im Gebiete G^* und nimmt auf dessen Rand Γ^* die nicht negativen Werte $v_n - H_n$ an. Daraus folgt

$$H_n^*(z) \geqq H_n(z) \quad \text{für alle} \quad z \in G^*. \tag{33}$$

Sei γ irgend eine 0 mit einem Punkt von Γ^* verbindende Kurve in G^*. Dann verbindet die Bildkurve $\psi_n(\gamma)$ den Windungspunkt über $w=0$ mit einem Randpunkt von K_n. Unter Anwendung von (33) erhalten wir

$$\int_\gamma e^{H^*_n(z)}|dz| \geqq \int_\gamma e^{H_n(z)}|dz| = \int_{\psi_n(\gamma)} |dw| \geqq t_n.$$

Daraus schliessen wir, dass $\tau_n(G^*) \geqq t_n$, also $G^* \in S_n$. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass Ω_n Minimalgebiet in S_n ist, dass also kein echtes Teilgebiet von Ω_n zu S_n gehören kann. Unsere Annahme war falsch: es gilt $F_n = K_n$.

Wir definieren

$$\varphi_n : z \to w = \left(\frac{\psi_n(z)}{\psi_n(1)}\right)^{\frac{1}{k+1}} \qquad (z \in \Omega_n),$$

wobei die Bestimmung der Wurzel so festgelegt werde, dass $\varphi_n(1) = 1$ und φ_n in Ω_n analytisch ist. Durch φ_n wird Ω_n konform abgebildet auf eine Kreisscheibe $D_n = \{w \mid |w| < R_n\}$, und es ist $\varphi_n(0) = 0$.

Nach Definition von $\tilde{v}_n(w)$ muss gelten $e^{v_n(z)}|dz| = e^{\tilde{v}_n(w)}|dw|$, falls das Element $(z, z+dz)$ durch die Abbildung φ_n übergeführt wird in $(w, w+dw)$. Also ist

$$\tilde{v}_n(\varphi_n(z)) = v_n(z) - \log|\varphi_n'(z)| \quad (z \in \Omega_n). \tag{34}$$

Da die Abbildung φ_n konform und die Funktion $\log|\varphi_n'|$ harmonisch ist, entnehmen wir aus (34), dass die v_n und $\tilde{v}_n$ zugeordneten Masse Δv_n und $\Delta \tilde{v}_n$ durch Verpflanzung auseinander hervorgehen. Es gilt somit die Darstellung

$$\tilde{v}_n(w) = \tilde{h}_n(w) - kg_n(w, 0) + \int_{D_n} g_n(w, \omega)\, d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \quad (w \in D_n). \tag{35}$$

Dabei bezeichnen g_n die Greensche Funktion des Gebietes D_n, $\tilde{\mu}_n$ die Verpflanzung des Masses μ_n (charakterisiert durch $\tilde{\mu}_n(\varphi_n(e)) = \mu_n(e)$ für alle Borelmengen $e \subset \Omega_n$) und $\tilde{h}_n$ eine in D_n harmonische Funktion. Die letztere ist nach (34) die Verpflanzung von $h_n - \log|\varphi_n'|$, d.h.

$$\tilde{h}_n(\varphi_n(z)) = h_n(z) - \log|\varphi_n'(z)| \quad (z \in \Omega_n). \tag{36}$$

Unter Zurückgehen auf die Definition der Abbildung φ_n verifiziert man leicht, dass die Funktion $h_n - \log|\varphi_n'|$ auf Δ_n konstante Randwerte annimmt; da sie in Ω_n harmonisch ist, ist sie somit eine Konstante. Wir schliessen aus (36), dass $\tilde{h}_n$ eine Konstante ist. Ferner gilt $g_n(w, 0) = \log R_n - \log|w|$. Also folgt (24) aus (35). Damit ist (II) bewiesen.

Nun zeigen wir, dass

$$\tau_n(G_n) \to \infty \qquad \text{für} \qquad n \to \infty\,, \tag{37}$$

wobei $\{G_n\}$ die in Lemma 2 auftretende Gebietsfolge bezeichnet.

Damit führen wir den zweiten Teil des Beweises von Lemma 3 durch. Aus (25) und den einschlägigen Definitionen folgt nämlich die Ungleichung

$$\tau_n(G_n) = t_n \leqq \tau_n(\Omega_n) \leqq \varrho_n(0, \Delta_n) \leqq \varrho(0, \Delta_n).$$

Also impliziert (37), dass $\varrho(0, \Delta_n) \to \infty$ für $n \to \infty$. Dies ist aber äquivalent zur Aussage, dass die Gebietsfolge $\{\Omega_n\}$ die z-Ebene ausschöpft.

Wir halten zunächst n fest. Es bezeichne g_n die Greensche Funktion des Gebietes G_n, h_n die Lösung des Dirichletschen Problems für G_n mit den Randwerten v_n, $H_n(z) = h_n(z) - k\, g_n(z, 0)$, und $\tilde{H}_n$ eine zu H_n konjugiert harmonische Funktion ($\tilde{H}_n$ definiert und $\exp\{i\tilde{H}_n\}$ eindeutig in $G_n - \{0\}$). Durch

$$\psi_n : z \to w = \int_0^z \exp\{H_n(z) + i\,\tilde{H}_n(z)\}\, dz$$

wird das Gebiet G_n konform abgebildet auf eine über der w-Ebene ausgebreitete, einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche F_n, welche über $w = 0$ einen k-fachen Windungspunkt besitzt und im übrigen unverzweigt ist. Die Projektion (Durchdrückung) $\bar{F}_n$ von F_n in die w-Ebene ist enthalten in der Kreisscheibe

$$\{w \mid |w| < \tfrac{1}{2} A\, \varrho_n(0, \Gamma_n)\},$$

denn eine Anwendung von Lemma 2 ergibt[3])

$$\int_{\psi_n(\Gamma_n)} |dw| = \int_{\Gamma_n} e^{H_n(z)}|dz| = \int_{\Gamma_n} e^{v_n(z)}|dz| < A\,\varrho_n(0, \Gamma_n).$$

Daraus folgt – etwa durch Anwendung des Schwarzschen Lemmas – für die Greensche Funktion $\tilde{g}_n$ von F_n die Abschätzung

$$\tilde{g}_n(p, q) \leqq B + \log r_n - \log|w - \omega|\,. \tag{38}$$

---

[3]) Die Abbildung ψ_n ist auf dem Rande von G_n stetig und führt diesen in eine rektifizierbare Kurve über.

Dabei bezeichnen w und ω die Projektionen (Durchdrückungen) der Punkte p und q in die w-Ebene und B eine von n unabhängige Konstante. Zur Abkürzung setzen wir $\varrho_n(0, \Gamma_n) = r_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Die Funktion $v_n(z)$ besitzt die Darstellung

$$v_n(z) = H_n(z) + \int_{G_n} g_n(z, \zeta)\, d\mu_n(e_\zeta). \tag{39}$$

Sei $e^{\tilde{v}_n(w)}|dw|$ die durch Verpflanzung bei der Abbildung ψ_n aus $e^{v_n(z)}|dz|$ hervorgehende Metrik. Da $e^{H_n(z)}|dz| = |\psi_n'(z)|\,|dz| = |dw|$, geht (39) über in

$$\tilde{v}_n(w) = \int_{F_n} \tilde{g}_n(p, q)\, d\tilde{\mu}_n(e_q). \tag{40}$$

Dabei bezeichnet $\tilde{g}_n$ die Greensche Funktion von F_n und $\tilde{\mu}_n$ die Verpflanzung des Masses μ_n auf F_n bei der Abbildung ψ_n (charakterisiert durch $\tilde{\mu}_n(\psi_n(e)) = \mu_n(e)$ für alle Borelmengen $e \subset G_n$). Für p darf in (40) jeder über w liegende Punkt von F_n eingesetzt werden: $\tilde{v}_n(w)$ ist eine mehrdeutige Funktion auf $\bar{F}_n$.

Aus (38) und (40) folgt

$$\tilde{v}_n(w) \leqq \alpha_n(B + \log r_n) - \int_{\bar{F}_n} \log|w - \omega|\, d\bar{\mu}_n(e_\omega). \tag{41}$$

Darin bezeichnet $\bar{\mu}_n$ die Durchdrückung des Masses $\tilde{\mu}_n$ in die w-Ebene, und

$$\alpha_n = \bar{\mu}_n(\bar{F}_n) = \tilde{\mu}_n(F_n) = \mu_n(G_n) \leqq \alpha < \tfrac{1}{2}. \tag{42}$$

Die rechte Seite von (41) ist eine in der w-Ebene eindeutig definierte Funktion, welche alle Bestimmungen von $\tilde{v}_n(w)$ simultan majorisiert.

Die früher definierte Zahl $t_n = \tau_n(G_n)$ ist gleich dem Abstand (gemessen in der Metrik $|dw|$) des Randes von F_n von dem über $w=0$ gelegenen Verzweigungspunkt. Sei γ eine diesen Abstand realisierende Kürzeste auf F_n. Diese führt vom Verzweigungspunkt (Durchdrückung 0) geradlinig zum nächsten Randpunkt q_n (Durchdrückung $t_n e^{i\vartheta_n}$) von F_n. Mit Anwendung von (41) erhält man

$$\begin{aligned} r_n &\leqq \int_{0\ (\text{längs}\ \gamma)}^{t_n} \exp\{\tilde{v}_n(t e^{i\vartheta_n})\}\, dt \leqq \\ &\leqq r_n^{\alpha_n} e^{\alpha_n B} \int_0^{t_n} \exp\left\{\int_{\bar{F}_n} \log \frac{1}{|t e^{i\vartheta_n} - \omega|}\, d\bar{\mu}_n(e_\omega)\right\} dt. \end{aligned} \tag{43}$$

Es gilt die Ungleichung

$$\int_0^{t_n} \exp\left\{\int_{F_n} \log \frac{1}{|t\,e^{i\vartheta_n} - \omega|}\, d\bar{\mu}_n(e_\omega)\right\} dt \leqq \frac{2^{\alpha_n} t_n^{1-\alpha_n}}{1-\alpha_n}. \tag{44}$$

Um diese zu beweisen, nehmen wir zunächst an, das Mass $\bar{\mu}_n$ bestehe aus einer einzigen Punktmasse α_n, angebracht in einem Punkte ω_0. In diesem Falle besagt die Behauptung (44)

$$\int_0^{t_n} |t\,e^{i\vartheta_n} - \omega_0|^{-\alpha_n}\, dt \leqq \frac{2^{\alpha_n} t_n^{1-\alpha_n}}{1-\alpha_n}. \tag{45}$$

Zur Verifikation von (45) beachte man, dass für feste t_n, ϑ_n, α_n das Integral auf der linken Seite offenbar dann seinen grössten Wert annimmt, wenn $\omega_0 = t_n e^{i\vartheta_n}/2$ ist. Dann ist aber – wie eine leichte Rechnung zeigt – dieses Integral gleich der rechten Seite von (45).

Wir gehen nun dazu über, die Punktmasse $\bar{\mu}_n$ zu verschmieren. Betrachten wir zunächst den Fall, da $\bar{\mu}_n$ aus endlich vielen Einzelmassen besteht:

$$p_1\alpha_n \quad \text{in} \quad \omega_1, \quad p_2\alpha_n \quad \text{in} \quad \omega_2, \ldots, p_m\alpha_n \quad \text{in} \quad \omega_m$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = 1, \qquad p_j > 0$$

($j = 1, 2, \ldots, m$). Aus der Hölderschen Ungleichung (siehe z.B. [4], p. 140) und (45) schliessen wir

$$\int_0^{t_n} \exp\left\{\sum_{j=1}^{m} p_j\alpha_n \log \frac{1}{|t\,e^{i\vartheta_n} - \omega_j|}\right\} dt = \int_0^{t_n} \prod_{j=1}^{m} \left(|t\,e^{i\vartheta_n} - \omega_j|^{-\alpha_n}\right)^{p_j} dt \leqq$$

$$\leqq \prod_{j=1}^{m} \left(\int_0^{t_n} |t\,e^{i\vartheta_n} - \omega_j|^{-\alpha_n}\, dt\right)^{p_j} \leqq \frac{2^{\alpha_n} t_n^{1-\alpha_n}}{1-\alpha_n}.$$

Damit ist (44) auch für diesen Fall bewiesen. Ein naheliegender Grenzübergang liefert schliesslich die Gültigkeit dieser Ungleichung für beliebige positive Masse $\bar{\mu}_n$ mit Träger F_n und totaler Variation α_n.

Aus (42), (43) und (44) folgt zunächst

$$r_n \leqq 4\,e^B\, r_n^{\alpha_n} t_n^{1-\alpha_n},$$

und daraus, mit nochmaliger Anwendung von (42),

$$t_n \geqq \tfrac{1}{16} e^{-2B} r_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{46}$$

Nach Lemma 1 gilt $r_n = \varrho_n(0, \Gamma_n) \to \infty$ für $n \to \infty$. Also wird (37) durch (46) impliziert. Damit ist Lemma 3 bewiesen.

LEMMA 4. *Die in Lemma* 3 *auftretende Radienfolge* $\{R_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *strebt mit n gegen unendlich.*

BEWEIS. Aus (24) folgt

$$\tilde{v}_n(w) \geqq c_n + k \log |w| \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Da $e^{\tilde{v}_n(w)}|dw|$ das Linienelement der bei der Abbildung φ_n auf D_n verpflanzten Metrik ϱ_n darstellt und da ferner das reelle Intervall $[0, 1]$ die kürzeste Verbindung der Punkte 0 und 1 in der Metrik $\exp\{c_n + k \log |w|\}\,|dw|$ bildet, gilt

$$\varrho(0, 1) \geqq \varrho_n(0, 1) \geqq e^{c_n} \int_0^1 t^k \, dt = \frac{e^{c_n}}{1 + k}. \tag{47}$$

Andrerseits gilt

$$\begin{aligned} \varrho_n(0, \Delta_n) &\leqq \int_0^{R_n} e^{\tilde{v}_n(t)} \, dt = e^{c_n} \int_0^{R_n} t^k \exp\left\{\iint_{D_n} g_n(t, \omega) \, d\tilde{\mu}_n(e_\omega)\right\} dt \leqq \\ &\leqq e^{c_n} R_n^k \int_0^{R_n} \exp\left\{\iint_{D_n} \log \frac{2R_n}{|t - \omega|} \, d\tilde{\mu}_n(e_\omega)\right\} dt. \end{aligned} \tag{48}$$

Dabei wurde benützt, dass die Greensche Funktion g_n von D_n die Ungleichung

$$g_n(w, \omega) \leqq \log \frac{2R_n}{|w - \omega|}$$

erfüllt. Es gilt die Abschätzung

$$\int_0^{R_n} \exp\left\{\iint_{D_n} \log \frac{2R_n}{|t - \omega|} \, d\tilde{\mu}_n(e_\omega)\right\} dt \leqq \frac{2^{2\alpha_n}}{1 - \alpha_n} R_n < 4R_n, \tag{49}$$

wobei $\alpha_n = \tilde{\mu}_n(D_n) = \mu_n(\Omega_n) \leqq \alpha < \frac{1}{2}$. Die Verifikation von (49) überlassen wir dem Leser; sie verläuft ganz analog wie der Beweis von (44). Aus (47) bis (49) folgt

$$\varrho_n(0, \Delta_n) \leqq 4(1 + k)\varrho(0, 1) R_n^{1+k} \tag{50}$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Da nach Lemma 1 die linke Seite von (50) mit n gegen unendlich strebt, muss dies auch die rechte Seite – und damit R_n – tun. *Q.E.D.*

LEMMA 5. *Die in Lemma* 3 *vorkommende Abbildungsfolge* $\{\varphi_n\}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ *ist in der endlichen z-Ebene lokal gleichmässig beschränkt.*

Beweis. Für irgend zwei Punkte w_1 und w_2 in D_n definieren wir

$$\tilde{\varrho}_n(w_1, w_2) = \inf_{\gamma \in \Lambda_n(w_1, w_2)} \int_\gamma e^{\tilde{v}_n(w)} |dw| , \tag{51}$$

wobei $\Lambda_n(w_1, w_2)$ die Menge aller in D_n enthaltenen rektifizierbaren Verbindungskurven von w_1 und w_2 bezeichnet. Für irgend zwei Teilmengen A und B von D_n bedeute

$$\tilde{\varrho}_n(A, B) = \inf_{\substack{w_1 \in A \\ w_2 \in B}} \tilde{\varrho}_n(w_1, w_2). \tag{52}$$

Offenbar ist

$$\tilde{\varrho}_n(\varphi_n(z_1), \varphi_n(z_2)) \geqq \varrho_n(z_1, z_2) \tag{53}$$

für alle $z_1, z_2 \in \Omega_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Zu jedem Punktepaar $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ gibt es einen Index $N(z_1, z_2)$ derart, dass für alle $n > N$ in (53) die Gleichheit eintritt. (Z.B. besitzt jede natürliche Zahl N, für welche $\varrho_N(z_1, \Delta_N) > \varrho(z_1, z_2)$ ist, diese Eigenschaft). Entsprechende Aussagen gelten für die Mengenabstände. Wir leiten zunächst eine diese Metrik betreffende Ungleichung her.

Sei $B > 1$ eine vorgegebene positive Zahl. Im Folgenden lassen wir nur solche Indizes n zu, für welche $R_n > 2B$ ist; nach Lemma 4 gibt es höchstens endlich viele Indizes, welche diese Bedingung *nicht* erfüllen. Wir definieren

$$\beta_n = \tilde{\mu}_n(\{\omega \mid |\omega| \leqq 2B\})$$

und

$$\gamma_n(r) = \tilde{\mu}_n(\{\omega \mid 2B < |\omega| < r\})$$

für $2B < r < R_n$. Mit Anwendung von (24) erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{\varrho}_n(0, 1) &\leqq \int_0^1 e^{\tilde{v}_n(t)} dt \leqq e^{c_n} \int_0^1 t^k \exp\left\{\int_{D_n} g_n(t, \omega)\, d\tilde{\mu}_n(e_\omega)\right\} dt \leqq \\ &\leqq \exp\left\{c_n + \int_{r=2B}^{R_n} \log\left|\frac{R_n - r/R_n}{r-1}\right| d\gamma_n(r)\right\} \cdot \\ &\quad \cdot \int_0^1 \exp\left\{\int_{|\omega| \leqq 2B} \log \frac{2R_n}{|t-\omega|}\, d\tilde{\mu}_n(e_\omega)\right\} dt . \end{aligned} \tag{54}$$

Dabei wurde im letzten Schritt der Faktor $t^k (\leqq 1)$ durch die Konstante 1 ersetzt. Ausserdem wurde von folgenden Abschätzungen für die Greensche Funktion g_n von

D_n Gebrauch gemacht:

$$g_n(t, \omega) \leqq \log \frac{2R_n}{|t-\omega|} \quad \text{für} \quad |\omega| \leqq 2B,$$

$$g_n(t, \omega) \leqq g_n(t, |\omega|) \leqq g_n(1, |\omega|) = \log \left| \frac{R_n - \frac{|\omega|}{R_n}}{|\omega| - 1} \right| \quad \text{für} \quad 2B < |\omega| < R_n.$$

Auf analoge Weise wie Ungleichung (44) beweist man, dass

$$\int_0^1 \exp\left\{ \int_{|\omega| \leqq 2B} \log \frac{2R_n}{|t-\omega|} \, d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right\} dt \leqq \frac{2^{2\beta_n}}{1-\beta_n} R_n^{\beta_n} < 4 R_n^{\beta_n}. \tag{55}$$

Dabei wurde zuletzt benützt, dass $\beta_n \leqq \alpha < \frac{1}{2}$. Aus (54) und (55) folgt

$$\tilde{\varrho}_n(0, 1) \leqq 4 e^{c_n} R_n^{\beta_n} \exp\left\{ \int_{r=2B}^{R_n} \log \left| \frac{R_n - r/R_n}{r-1} \right| d\gamma_n(r) \right\}. \tag{56}$$

Nun soll $\tilde{\varrho}_n(0, C_B)$ nach unten abgeschätzt werden[4]). Für $|w| \leqq B$ ist

$$\tilde{v}_n(w) \geqq c_n + k \log |w| + \beta_n \log \frac{R_n}{3B} + \int_{r=2B}^{R_n} \log \frac{R_n + \frac{rB}{R_n}}{r+B} \, d\gamma_n(r). \tag{57}$$

Diese Ungleichung folgt aus (24) unter Beachtung folgender Abschätzungen für die Greensche Funktion g_n von D_n:

$$g_n(w, \omega) \geqq g_n(|w|, -|\omega|) \geqq g_n(B, -2B) = \log \frac{R_n + \frac{2B^2}{R_n}}{3B} > \log \frac{R_n}{3B}$$

für $|w| \leqq B$ und $|\omega| \leqq 2B$,

$$g_n(w, \omega) \geqq g_n(|w|, -|\omega|) \geqq g_n(B, -|\omega|) = \log \frac{R_n + \frac{|\omega|\, B}{R_n}}{|\omega| + B} \quad \text{für} \quad |w| \leqq B$$

und $2B < |\omega| < R_n$.

Die Metrik $e^{\tilde{v}^*_n(w)} |dw|$, wobei $\tilde{v}_n^*(w)$ die rechte Seite von (57) bezeichnet, ist rotationssymmetrisch bezüglich 0. Infolgedessen realisieren die von 0 ausgehenden (euklidisch geradlinigen) Strahlen die kürzeste Verbindung von 0 mit C_B in dieser Metrik. Aus

---

4) Wir führen die Bezeichnung $C_r = \{w \,|\, |w| = r\}$ ein.

dieser Tatsche folgt mit (57)

$$\tilde{\varrho}_n(0, C_B) \geqq \int_0^B e^{\tilde{v}^*_n(t)}\, dt =$$

$$= e^{c_n}\left(\frac{R_n}{3B}\right)^{\beta_n} \cdot \exp\left\{\int_{r=2B}^{R_n} \log \frac{R_n + \frac{rB}{R_n}}{r+B}\, d\gamma_n(r)\right\} \cdot \frac{B^{k+1}}{k+1}. \tag{58}$$

Berücksichtigt man, dass die Ungleichungen $B>1$, $k \geqq 1$ und $0 \leqq \beta_n \leqq \alpha < \frac{1}{2}$ die Abschätzung

$$\frac{B^{k+1-\beta_n}}{3^{\beta_n}} \geqq \frac{B}{3}$$

implizieren, so erhält man aus (56) und (58)

$$\frac{\tilde{\varrho}_n(0, C_B)}{\tilde{\varrho}_n(0, 1)} \geqq \frac{B}{12(k+1)} \cdot \exp\left\{\int_{r=2B}^{R_n} \log \left| \frac{R_n + \frac{rB}{R_n}}{R_n - \frac{r}{R_n}} \cdot \frac{r-1}{r+B} \right| d\gamma_n(r)\right\}. \tag{59}$$

Der Betrag des ersten Faktors des zwischen den Absolutstrichen stehenden Produktes ist offensichtlich grösser als 1; der zweite Faktor wird – wie eine elementare Betrachtung zeigt – nie kleiner als $\frac{1}{3}$. Der Integrand wird also minorisiert durch die Konstante

$$\log \tfrac{1}{3}, \quad \text{und da} \quad \int_{r=2B}^{R_n} d\gamma_n(r) \leqq \alpha < \tfrac{1}{2}$$

ist, folgt aus (59)

$$\frac{\tilde{\varrho}_n(0, C_B)}{\tilde{\varrho}_n(0, 1)} \geqq \frac{B}{12(k+1)3^{\alpha}} > \frac{B}{24(k+1)}. \tag{60}$$

Sei $A>0$ beliebig vorgegeben. Wir werden nun zeigen, dass es zwei positive Zahlen B und N gibt mit folgender Eigenschaft: Aus $|z| \leqq A$ folgt $|\varphi_n(z)| \leqq B$ für alle $n>N$. Damit wird Lemma 5 bewiesen sein.

Es gibt eine natürliche Zahl N_0 mit der Eigenschaft, dass

$$\varrho(0, C_{N_0}) \geqq \max_{|z| \leqq A} \varrho(0, z). \tag{61}$$

Wir definieren

$$B = \max\left(2,\, 24(k+1)\frac{\varrho(0, C_{N_0})}{\varrho_{N_0}(0, 1)}\right). \tag{62}$$

Nach Lemma 4 existiert ein Index N_1 so, dass

$$R_n > 2B \qquad \text{für alle} \qquad n > N_1. \tag{63}$$

Schliesslich gibt es einen Index N_2 mit der Eigenschaft, dass

$$\tilde{\varrho}_n(0, 1) = \varrho_n(0, 1) \qquad \text{für alle} \qquad n > N_2. \tag{64}$$

Wir definieren $N = \max(N_0, N_1, N_2)$.

Für beliebige z, $|z| \leqq A$, und alle $n > N$ folgt aus (61), (62), (63) und (60)

$$\frac{\varrho_n(0, z)}{\varrho_n(0, 1)} \leqq \frac{\varrho(0, C_{N_0})}{\varrho_n(0, 1)} \leqq \frac{\varrho(0, C_{N_0})}{\varrho_{N_0}(0, 1)} \leqq \frac{B}{24(k+1)} \leqq \frac{\tilde{\varrho}_n(0, C_B)}{\tilde{\varrho}_n(0, 1)}. \tag{65}$$

Aus (64) und (65) schliessen wir, dass

$$\varrho_n(0, z) \leqq \tilde{\varrho}_n(0, C_B) = \varrho_n(0, \varphi_n^{-1}(C_B)).$$

Es liegt also z im Innengebiet der Kurve $\varphi_n^{-1}(C_B)$, und dies impliziert $|\varphi_n(z)| \leqq B$.

Q.E.D.

3. Der Darstellungssatz

SATZ 2. *Die Funktion $u(z)$ sei δ-subharmonisch im Gebiete $\Omega = \{z \mid R < |z| < \infty\}$, $R > 0$, und erfülle folgende Bedingungen:*

(a) *die totale Variation des zugeordneten Masses $v = \Delta u / 2\pi$ sei endlich*[5])

(b) *für jeden ins Unendliche führenden Weg γ gilt*[6])

$$\int_\gamma e^{u(z)} |dz| = \infty.$$

Dann besitzt u die Darstellung

$$u(z) = \int_\Omega \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| dv(e_\zeta) + c \log |z| + h(z), \tag{66}$$

wobei c eine Konstante und h eine in Ω und im Unendlichen harmonische Funktion bezeichnet.

---

[5]) Der Laplaceoperator ist hier und im Folgenden im Sinne der Theorie der Distributionen [11] zu verstehen.

[6]) Auf jeder lokal rektifizierbaren Kurve γ ist e^u aus folgenden Gründen eine *messbare* Funktion der Bogenlänge: (1) u ist eine Differenz halbstetiger Funktionen; (2) die Menge Λ, auf welcher u undefiniert ist, schneidet γ in einer Menge vom Längenmass 0 auf γ. Da Λ die logarithmische Kapazität 0 besitzt, ergibt sich der Beweis von (2) durch Anwendung eines Resultates von M. TSUJI (Satz 7 in [12].) Hierauf hat mich Herr Pfluger hingewiesen.

Beweis. Es sei $\nu=\nu^+-\nu^-$ die Jordansche Zerlegung des Masses $\nu=\Delta u/2\pi$, und es bezeichne g_0 die Greensche Funktion des Gebietes $\Omega+\{\infty\}$. Die Funktion

$$u_1(z)=u(z)+\int_\Omega g_0(z,\zeta)\,d\nu^+(e_\zeta) \tag{67}$$

ist superharmonisch in Ω, und es gilt $u_1\geqq u$ und $\Delta u_1=-2\pi\nu^-$. Da

$$g_0(z,\zeta)=\log\left|\frac{R-\dfrac{z\bar\zeta}{R}}{z-\zeta}\right|,$$

folgt aus (67)

$$\begin{aligned} u(z)=u_1(z)&+\int_\Omega \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\nu^+(e_\zeta)\\ &-\nu^+(\Omega)\log|z|-\int_\Omega \log\left|\frac{R^2-z\bar\zeta}{Rz\zeta}\right| d\nu^+(e_\zeta). \end{aligned} \tag{68}$$

Wir wählen einen Radius $R_1>R$. Es existiert eine in ganz **C** definierte, δ-subharmonische Funktion u_2 mit der Eigenschaft, dass $u_2\equiv u_1$ in $\Omega_1=\{z\,|\,R_1<|z|<\infty\}$. (Man definiere etwa

$$u_2(z)=F(z)-\int_\Omega \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\nu^-(e_\zeta),$$

wobei F eine in ganz **C** definierte, reellwertige, zweimal stetig differenzierbare Funktion bezeichnet, welche auf Ω_1 mit der in Ω harmonischen Funktion

$$u_1(z)+\int_\Omega \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\nu^-(e_\zeta)$$

übereinstimmt).

Nun wählen wir einen Radius $R_2>R_1$ derart, dass $\nu^-(\{\zeta\,|\,|\zeta|>R_2\})<\frac{1}{2}$, und definieren

$$v(z)=u_2(z)+k\log|z|-\int_{|\zeta|\leqq R_2}\log|z-\zeta|\,d\sigma(e_\zeta), \tag{69}$$

wobei $\sigma=\Delta u_2/2\pi$ und k eine natürliche Zahl bezeichnet, welche die Ungleichung

$$k>\sigma(\{\zeta\,|\,|\zeta|\leqq R_2\}) \tag{70}$$

erfülle. Dann gilt:

Die Funktion v ist darstellbar in der Form (3) *und befriedigt die zu Beginn des Abschnitts* 2 *aufgezählten Voraussetzungen.*

Diese Eigenschaften von v ergeben sich direkt aus obiger Konstruktion. Insbesondere ist die Vollständigkeit der Metrik $e^{v(z)}|dz|$ eine Konsequenz von Eigenschaft (b) der Funktion u und von der – zufolge (70) und (67) – in einer Umgebung von ∞ gültigen Ungleichung $v(z) > u_2(z) = u_1(z) \geqq u(z)$.

Im Folgenden soll verifiziert werden, dass

$$v(z) = -\int_{\zeta\text{-Ebene}} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu(e_\zeta) + k \log|z| + d \tag{71}$$

für alle $z \in \mathbf{C}$, wobei μ das in Abschnitt 2 so bezeichnete Mass und d eine Konstante bedeutet.

Damit wird Satz 2 bewiesen sein: Denn aus (68), (69) und (71) folgt zunächst, dass u im Gebiete $\Omega_2 = \{z \mid R_2 < |z| < \infty\}$ die in Satz 2 behauptete Darstellung zulässt. Vermöge dieser Beziehungen kann nämlich u als Summe geschrieben werden, deren Glieder sämliche die erwähnte Darstellung besitzen. (Man beachte, dass der letzte Term auf der rechten Seite von (68) in $\Omega + \{\infty\}$ harmonisch ist). Es ist also die in Ω_2 harmonische Funktion

$$H_2(z) = u(z) - \int_{\Omega_2} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\nu(e_\zeta)$$

im Unendlichen entweder harmonisch oder logarithmisch singulär. Daraus folgt dieselbe Eigenschaft für die in Ω harmonische Funktion

$$H_2(z) - \int_{\Omega - \Omega_2} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\nu(e_\zeta) = u(z) - \int_{\Omega} \log\left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\nu(e_\zeta).$$

Dies ist aber die Aussage von Satz 2.

Zum Beweise von (71) machen wir Gebrauch von Lemma 3. Die Darstellung (24) kann auch in der Form

$$\tilde{v}_n(w) = k \log|w| + \int_{D_n} [g_n(w, \omega) - g_n(w, 0)]\, d\tilde{\mu}_n(e_\omega) + d_n \tag{72}$$

geschrieben werden. Es ist

$$g_n(w, \omega) - g_n(w, 0) = \log\left|1 - \frac{w\bar{\omega}}{R_n^2}\right| - \log\left|1 - \frac{w}{\omega}\right| \tag{73}$$

für alle $w, \omega \in D_n$. Aus (34), (72) und (73) folgt, dass für alle $z \in \Omega_n$

$$\begin{aligned} v_n(z) = {} & k \log|\varphi_n(z)| + \log|\varphi_n'(z)| + d_n + \\ & + \int_{D_n} \log\left|1 - \frac{\varphi_n(z)\bar{\omega}}{R_n^2}\right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) - \int_{D_n} \log\left|1 - \frac{\varphi_n(z)}{\omega}\right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \end{aligned} \tag{74}$$

($n=1, 2, 3, \ldots$). Wir dürfen annehmen, dass die Abbildungsfolge $\{\varphi_n\}$ in der endlichen z-Ebene lokal gleichmässig konvergiert. Durch Übergang auf eine geeignete Teilfolge unter Anwendung eines Diagonalverfahrens kann man dies jedenfalls erreichen, denn nach Lemma 5 ist die Folge $\{\varphi_n\}$ lokal gleichmässig beschränkt. Da $\varphi_n(0)=0$ und $\varphi_n(1)=1$ für alle n, kann die Grenzfunktion φ der Folge $\{\varphi_n\}$ keine Konstante sein. Aus dieser Tatsache und daraus, dass φ Limes der schlichten Funktionen $\varphi_n: \Omega_n \to D_n$ ist, schliessen wir, dass die endliche z-Ebene durch φ schlicht und konform auf die endliche w-Ebene abgebildet wird. Da ausserdem $\varphi(0)=0$ und $\varphi(1)=1$ ist, folgt $\varphi(z)=z$ für alle $z \in \mathbf{C}$. Also gilt

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = z \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \varphi_n'(z) = 1, \tag{75}$$

wobei die Konvergenz in $\mathbf{C}$ lokal gleichmässig erfolgt. Für alle auf $\mathbf{C}$ definierten, stetigen Funktionen f mit kompakten Träger ist

$$\lim_{n\to\infty} \int f(\omega)\, d\tilde{\mu}_n(e_\omega) = \lim_{n\to\infty} \int f(\varphi_n(\zeta))\, d\mu(e_\zeta) = \int f(\zeta)\, d\mu(e_\zeta),$$

d.h. mit $n \to \infty$ konvergiert $\tilde{\mu}_n$ schwach gegen μ.

Aus (75) folgt

$$\lim_{n\to\infty} [k \log |\varphi_n(z)| + \log |\varphi_n'(z)|] = k \log |z| \tag{76}$$

für alle $z \in \mathbf{C}$. Die Abschätzungen

$$\tilde{\mu}_n(D_n) \leqq \alpha < \tfrac{1}{2} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

und Lemma 4 implizieren

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} \log \left|1 - \frac{\varphi_n(z)\bar{\omega}}{R_n^2}\right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) = 0 \tag{77}$$

für alle $z \in \mathbf{C}$. Wir verifizieren nun, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_{D_n} \log \left|1 - \frac{\varphi_n(z)}{\omega}\right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) = \int_{\zeta\text{-Ebene}} \log \left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| d\mu(e_\zeta) \tag{78}$$

für alle z aus der Menge $E = \{z \neq 0 \mid v(z) < \infty\}$.

Damit wird (71) (und also auch Satz 2) bewiesen sein. Denn, da $v_n \uparrow v$ für $n \uparrow \infty$, schliesst man aus (74), (76), (77) und (78) – wobei man einen festen Punkt $z \in E$ betrachtet – auf die Konvergenz der Zahlfolge $\{d_n\}$. Sei

$$\lim_{n\to\infty} d_n = d. \tag{79}$$

Aus (74) und (76) bis (79) ersehen wir, dass (71) für alle $z \in E$ erfüllt ist. Da beide

Seiten von (71) in $\mathbf{C}-\{0\}$ superharmonische Funktionen sind, kann daraus auf die Gültigkeit dieser Darstellung in ganz $\mathbf{C}-\{0\}$ geschlossen werden. Für $z=0$ ist schliesslich (71) trivialerweise richtig.

Seien $z\in E$ und $\varepsilon>0$ vorgegeben. Sei N_0 eine natürliche Zahl so, dass $z\in\Omega_n$ für $n>N_0$. Es existiert eine positive Zahl $R(>|z|)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$\mu(\{\zeta|\,|\zeta|=R\})=0; \tag{a}$$

$$\left|\log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|\right|<\frac{\varepsilon}{4} \quad \text{und} \quad \left|\log\left|1-\frac{\varphi_n(z)}{\zeta}\right|\right|<\frac{\varepsilon}{4} \tag{b}$$

für $n=N_0+1, N_0+2, \ldots$ und alle ζ aus der Menge $G=\{\zeta|\,|\zeta|>R\}$. Da $\mu(G)<\frac{1}{2}$ und $\tilde{\mu}_n(G\cap D_n)<\frac{1}{2}$ für alle n, folgt

$$\left|\int_G \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\mu(e_\zeta)\right|<\frac{\varepsilon}{8} \tag{80}$$

und

$$\left|\int_{G\cap D_n} \log\left|1-\frac{\varphi_n(z)}{\omega}\right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega)\right|<\frac{\varepsilon}{8} \quad (n=N_0+1, N_0+2, \ldots). \tag{81}$$

Wir führen die Bezeichnung $D(z;r)=\{\zeta|\,|z-\zeta|<r\}$ ein. Es gibt ein δ, $0<\delta<R-|z|$, mit der Eigenschaft, dass (a) $\mu(\{\zeta|\,|z-\zeta|=\delta\})=0$ und (b) die Ungleichungen

$$\left|\int_{D(z;\delta)} \log|z-\zeta|\,d\mu(e_\zeta)\right|<\frac{\varepsilon}{8}, \quad \left|\int_{D(z;\delta)} \log|\zeta|\,d\mu(e_\zeta)\right|<\frac{\varepsilon}{8} \tag{82}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} &\left|\int_{D(z;\delta)\cap D_n} \log|\varphi_n(z)-\omega|\,d\tilde{\mu}_n(e_\omega)\right|<\frac{\varepsilon}{8}, \\ &\left|\int_{D(z;\delta)\cap D_n} \log|\omega|\,d\tilde{\mu}_n(e_\omega)\right|<\frac{\varepsilon}{8} \quad (n=N_0+1, N_0+2, \ldots) \end{aligned}\right. \tag{83}$$

erfüllt sind.

Zur Verifikation dieser Aussage bemerken wir zunächst, dass die Voraussetzung $v(z)<\infty$ äquivalent ist mit der Existenz des Integrals

$$\int_B \log|z-\zeta|\,d\mu(e_\zeta)$$

für beschränkte Borelmengen B. Es kann daher $\delta_1>0$ so klein gewählt werden, dass die erste der Abschätzungen (82) für $0<\delta<\delta_1$ erfüllt ist. Durch die Bedingung $v(z)<\infty$ wird auch $\mu(\{z\})=0$ impliziert. Daraus schliessen wir, dass für genügend kleine δ $(0<\delta<\delta_2)$ die zweite der Ungleichungen (82) ebenfalls befriedigt ist.

Da die Massenbelegungen $\tilde{\mu}_n$ unendlich oft differenzierbare Dichtefunktionen besitzen, gibt es zu jeder endlichen Menge I von natürlichen Zahlen ($>N_0$) ein $\delta_3>0$ derart, dass (83) für $n \in I$ und $0<\delta<\delta_3$ gültig ist. Es genügt daher, noch zu beweisen, dass ein Index N und ein $\delta_4>0$ existieren so, dass (83) für $n>N$ und $0<\delta<\delta_4$ erfüllt ist.

Es gibt ein η, $0<\eta<\frac{1}{3}$, mit den Eigenschaften

$$\left| \int\limits_{D(z;\,2\eta)} \log|z-\zeta|\, d\mu(e_\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{16} \tag{a}$$

und

$$\mu(D(z;\,2\eta)) < \frac{\varepsilon}{32}. \tag{b}$$

Es bezeichne μ_η die Einschränkung des Masses μ auf die Kreisscheibe $D(z;\,2\eta)$ (definiert durch $\mu_\eta(e)=\mu(e \cap D(z;\,2\eta))$ für alle Borelmengen e). Für alle $n>N_1=[1/\eta]$ gilt ($da_\tau=$ Flächenelement in der τ-Ebene)

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{D(z;\,\eta)} \log|z-\zeta|\, d\mu_n(e_\zeta) = \\
&\qquad = \left| \int\limits_{\tau\text{-Ebene}} da_\tau \log|z-\tau| \int \alpha_n(\tau-\zeta)\, d\mu_\eta(e_\zeta) \right| = \\
&\qquad = \int\limits_{\tau\text{-Ebene}} da_\tau \alpha_n(z-\tau) \left| \int \log|\tau-\zeta|\, d\mu_\eta(e_\zeta) \right| \leqq \\
&\qquad \leqq \left| \int \log|z-\zeta|\, d\mu_\eta(e_\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{16},
\end{aligned} \tag{84}$$

wobei α_n hier die durch (6) definierte Funktion bezeichnet. Dabei wurden benützt die Eigenschaft (a) der Zahl η, die Kommutativität des Faltungsproduktes sowie die Tatsache, dass die Funktion

$$\left| \int \log|\tau-\zeta|\, d\mu_\eta(e_\zeta) \right| \quad \text{in} \quad D(z;\,\eta)$$

superharmonisch ist. Eigenschaft (b) von η impliziert

$$\mu_n(D(z;\,\eta)) < \frac{\varepsilon}{32}. \tag{85}$$

Aus (75) folgt die Existenz einer Zahl N_2 so, dass

$$|\varphi_n'(\zeta)| \geqq \tfrac{1}{2} \tag{86}$$

für $n > N_2$ und $\zeta \in D(z; \eta)$. Schliesslich existieren ein Index N_3 und eine Zahl δ_4, $0 < \delta_4 < 1$, mit der Eigenschaft, dass $\varphi_n^{-1}(D(z; \delta_4)) \subset D(z; \eta)$ für alle $n > N_3$. Aus (84) bis (86) schliessen wir, dass für $n > N = \max(N_0, N_1, N_2, N_3)$ und $0 < \delta < \delta_4$ die Ungleichung

$$\left| \int_{D(z;\delta)} \log |\varphi_n(z) - \omega| \, d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right| \leqq \left| \int_{\varphi_n^{-1}(D(z;\delta))} \log |\varphi_n(z) - \varphi_n(\zeta)| \, d\mu_n(e_\zeta) \right| \leqq$$

$$\leqq \left| \int_{\varphi_n^{-1}(D(z;\delta))} \log \frac{|z-\zeta|}{2} \, d\mu_n(e_\zeta) \right| \leqq \left| \int_{D(z;\eta)} \log \frac{|z-\zeta|}{2} \, d\mu_n(e_\zeta) \right| \leqq$$

$$\leqq (\log 2) \mu_n(D(z; \eta)) + \left| \int_{D(z;\eta)} \log |z - \zeta| \, d\mu_n(e_\zeta) \right| < \frac{\varepsilon}{8}$$

erfüllt ist. Dieselbe Methode liefert auch die zweite der Abschätzungen (83). In diesem Falle seien jedoch die Details dem Leser überlassen.

Es gibt einen Index $M_1 \geqq N_0$ derart, dass

$$| \log |z - \zeta| - \log |\varphi_n(z) - \zeta|| < \frac{\varepsilon}{4}$$

für $n > M_1$ und alle ζ aus der Menge $H = \mathbf{C} - (G \cup D(z; \delta))$. Da $\tilde{\mu}_n(H \cap D_n) < \frac{1}{2}$, gilt für $n > M_1$

$$\left| \int_{H \cap D_n} \log \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) - \int_{H \cap D_n} \log \left| 1 - \frac{\varphi_n(z)}{\omega} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right| < \frac{\varepsilon}{8}. \tag{87}$$

Da die Folge $\{\tilde{\mu}_n\}$ schwach gegen μ konvergiert, folgt mit Berücksichtigung der Eigenschaften (a) von R und δ die Existenz einer Zahl $M_2 \geqq N_0$ derart, dass

$$\left| \int_{H} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu(e_\zeta) - \int_{H \cap D_n} \log \left| 1 - \frac{z}{\omega} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) \right| < \frac{\varepsilon}{8} \tag{88}$$

für alle $n > M_2$. (Der Singularität des Integranden im Ursprung braucht hier keine Beachtung geschenkt zu werden, da die Träger der Massenbelegungen μ und $\tilde{\mu}_n$ – letztere für genügend grosse n – zu einer festen Umgebung des Ursprungs disjunkt sind). Aus (80) bis (83), (86) und (87) schliessen wir unter Anwendung der Dreiecksungleichung, dass

$$\left| \int_{D_n} \log \left| 1 - \frac{\varphi_n(z)}{\omega} \right| d\tilde{\mu}_n(e_\omega) - \int_{\zeta\text{-Ebene}} \log \left| 1 - \frac{z}{\zeta} \right| d\mu(e_\zeta) \right| < \varepsilon$$

für alle $n > \max(M_1, M_2)$. Damit ist (78) bewiesen. *Q.E.D.*

4. Beweis der übrigen Sätze

Beweis von Satz 3

1. *Behauptung: Die Bedingungen* (a) *und* (b) *sind hinreichend.*
Beweis: Die Funktion

$$v(z) = u\left(\frac{1}{z}\right) - (\alpha + 2) \log |z|$$

ist δ-subharmonisch im Gebiet

$$\Omega = \{z \mid R_0 < |z| < \infty\}, \qquad R_0 > 1/R,$$

und erfüllt die Voraussetzungen von Satz 2. Das Mass Δv entsteht nämlich aus dem Mass Δu durch Verpflanzung bei der Abbildung

$$\varphi : z \to \frac{1}{z},$$

besitzt also eine endliche totale Variation. Ist ferner γ irgend ein ins Unendliche führender Weg, so führt der Weg $\gamma' = \varphi(\gamma)$ in den Ursprung, und es ist

$$\int_\gamma e^{v(z)} |dz| = \int_{\gamma'} e^{u(z)} |z|^\alpha |dz| = \infty .$$

Also gilt nach Satz 2 die Darstellung

$$v(z) = \int_\Omega \log \left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| dv(e_\zeta) + c \log |z| + h(z), \tag{89}$$

wobei $v = \Delta v / 2\pi$, c eine Konstante und h eine in Ω und im Unendlichen harmonische Funktion ist. Bezeichnet g_0 die Greensche Funktion des Gebietes $\Omega + \{\infty\}$, so ist

$$\begin{aligned} \int_\Omega \log \left|1 - \frac{z}{\zeta}\right| dv(e_\zeta) = &- \int_\Omega g_0(z, \zeta)\, dv(e_\zeta) \\ &+ v(\Omega) \log |z| + \int_\Omega \log \left|\frac{R^2 - z\bar{\zeta}}{R z \zeta}\right| dv(e_\zeta). \end{aligned} \tag{90}$$

Da der letzte Summand auf der rechten Seite von (90) in Ω und im Unendlichen harmonisch ist, folgt aus (89) und (90) die Darstellung

$$v(z) = - \int_\Omega g_0(z, \zeta)\, dv(e_\zeta) + c_1 \log |z| + h_1(z),$$

wobei c_1 eine Konstante und h_1 eine in Ω und im Unendlichen harmonische Funktion bezeichnen. Daraus folgt, dass die Funktion u im Gebiete $G_1=\{z|0<|z|<1/R_0\}$ die Darstellung

$$u(z)=-\int_{G_1} g(z,\zeta)\,d\mu(e_\zeta)-(\alpha+c_1+2)\log|z|+h_1\left(\frac{1}{z}\right) \tag{91}$$

zulässt, wobei $\mu=\Delta u/2\pi$ und g die Greensche Funktion des Gebietes $G_1+\{0\}$ bezeichnet. Die Funktion $h_1(1/z)$ ist in G_1 harmonisch. Man kann deshalb der Darstellung (91) entnehmen, dass u in G_1 δ-subharmonisch ist. *Q.E.D.*

2. *Behauptung: Die Bedingungen (a) und (b) sind notwendig.*

Beweis: Die Notwendigkeit von (*a*) ist klar. Zur Verifikation der Notwendigkeit von (*b*) stützen wir uns auf den folgenden Hilfssatz:

LEMMA 6. *Sei v ein Radonsches Mass endlicher totaler Variation mit dem Träger $\Omega=\{z|R_0<|z|<\infty\}$, $R_0>0$. Es bezeichne*

$$w(z)=\int_{\Omega}\log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|dv(e_\zeta). \tag{92}$$

Dann existieren eine reelle Zahl k und eine Menge positiver Zahlen E von endlichem linearem Lebesgueschem Mass derart, dass

$$\inf_{|z|=r} w(z)>k\log r \tag{93}$$

für alle nicht zu E gehörenden positiven Zahlen r.

ANMERKUNG. Sei $v=v_1-v_2$ die Jordansche Zerlegung von v. Es ist (nach Definition) $w(z)=w_1(z)-w_2(z)$, wobei

$$w_j(z)=\int_{\Omega}\log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right|dv_j(e_\zeta)\qquad(j=1,2). \tag{94}$$

Die Funktion w bleibt also undefiniert auf der Menge $\Lambda=\{z|w_1(z)=w_2(z)=-\infty\}$. Diese ist aber von der Kapazität 0 und für uns nicht von Belang. Bei der Bildung des Infimums in (93) sind in Λ liegende Punkte auszunehmen.

BEWEIS VON LEMMA 6. Wir definieren

$$M_j(r)=\max_{|z|=r} w_j(z)\qquad\text{und}\qquad m_j(r)=\inf_{|z|=r} w_j(z) \tag{95}$$

($j=1, 2$; $r>0$). Es gilt (Satz 5, p. 100 in [7])

$$\lim_{r\to\infty}\frac{M_j(r)}{\log r}=v_j(\Omega)\qquad(j=1,2). \tag{96}$$

Ferner wurde bewiesen (Satz 6, p. 100 in [7]): Zu jedem $\varepsilon>0$ gibt es eine Menge positiver Zahlen $L(\varepsilon)$ von endlichem linearem Mass mit der Eigenschaft, dass

$$m_1(r) \geqq (1-\varepsilon) M_1(r) \tag{97}$$

für alle im Komplement von $L(\varepsilon)$ liegenden r.

Nach (96) gibt es einen Radius R_1 so, dass

$$\left|\frac{M_j(r)}{\log r} - \nu_j(\Omega)\right| < 1 \tag{98}$$

für $r>R_1$ und $j=1, 2$. Definieren wir nun

$$E = L(\tfrac{1}{2}) \cup \{r \mid r \leqq R_1\},$$

so gilt wegen (95), (97) und (98) für alle $r \notin E$ die Ungleichung

$$\inf_{|z|=r} w(z) \geqq m_1(r) - M_2(r) \geqq \tfrac{1}{2} M_1(r) - M_2(r) \geqq$$
$$\geqq \left(\frac{\nu_1(\Omega)}{2} - \nu_2(\Omega) - \frac{3}{2}\right) \log r.$$

Wählen wir etwa $k = -\nu_2(\Omega) - 2$, so ist (93) für $r \notin E$ erfüllt. *Q.E.D.*

Zum Beweis der Notwendigkeit von (*b*) betrachten wir die Funktion $v(z)=u(1/z)$ in einem Gebiete $\Omega=\{z \mid R_1<|z|<\infty\}$, $R_1>1/R$. Sie besitzt dort die Darstellung (vgl. (90))

$$v(z) = -\int_\Omega g_0(z,\zeta)\, d\nu(e_\zeta) + c_1 \log|z| + h_1(z) =$$
$$= \int_\Omega \log\left|1-\frac{z}{\zeta}\right| d\nu(e_\zeta) + c \log|z| + h(z).$$

Dabei bezeichnen c_1 und c Konstante, h_1 und h in $\Omega+\{\infty\}$ harmonische Funktionen, g_0 die Greensche Funktion des Gebietes $\Omega+\{\infty\}$, und $\nu=\Delta u/2\pi$. Unter Anwendung von Lemma 6 schliessen wir: Es existieren zwei reelle Zahlen σ und τ sowie eine Menge positiver Zahlen E von endlichem linearem Mass derart, dass

$$\inf_{|z|=r} v(z) \geqq \sigma \log r + \tau \tag{99}$$

für alle im Komplement von E liegenden positiven Zahlen r.

Sei nun γ irgend ein in den Punkt 0 führender Weg, γ' sein ins Unendliche führendes Bild bei der Transformation $z \to 1/z$. Wählen wir $\alpha \leqq \sigma - 1$, so erhalten wir aus (99) – man beachte auch Fussnote[6]) –

$$\int_{\gamma} |z|^{\alpha} e^{u(z)} |dz| = \int_{\gamma'} |z|^{\alpha-2} e^{v(z)} |dz| \geqq$$

$$\geqq \int_{r_0}^{\infty} \exp \{ \inf_{|z|=r} v(z) - (\alpha+2) \log r \} \, dr \geqq \int_{(r_0,\infty)\cap CE} \frac{dr}{r} = \infty . \qquad Q.E.D.$$

BEWEIS VON SATZ 4

1. *Behauptung: Die Bedingungen* (a) *und* (b) *sind hinreichend.*

Beweis: Nach Satz 3 folgt aus der Gültigkeit von (a) und (b), dass u δ-subharmonisch ist im Gebiete $G+\{0\}$. Es bleibt zu verifizieren, dass das Mass $\mu = -\Delta u/2\pi$ in $G+\{0\}$ nicht negativ ist. In G erfüllt μ diese Bedingung jedenfalls, denn nach Voraussetzung ist u in G superharmonisch. Daher ist nur noch zu beweisen, dass $\mu(\{0\}) \geqq 0$ ist.

Nehmen wir an, es sei $\mu(\{0\}) = -\alpha < 0$. Es gibt einen Radius R_1, $0 < R_1 < R$, mit der Eigenschaft, dass

$$\mu(G_1) = \beta \leqq \min\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

wobei $G_1 = \{z \mid 0 < |z| < R_1\}$. Für alle $z \in G_1$ gilt

$$u(z) = \int_{G_1} g(z, \zeta) \, d\mu(e_\zeta) + \alpha \log |z| + h(z), \tag{100}$$

wobei g die Greensche Funktion von $G_1+\{0\}$ und h eine in $G_1+\{0\}$ harmonische Funktion bezeichnen. Da

$$g(z, \zeta) \leqq \log \frac{2R_1}{\big||z| - |\zeta|\big|},$$

schliessen wir aus (100) auf die Existenz einer Zahl c mit der Eigenschaft, dass

$$u(z) \leqq c + \alpha \log |z| + \int_{G_1} \log \frac{1}{\big||z| - |\zeta|\big|} \, d\mu(e_\zeta) \tag{101}$$

für alle z aus $G_0 = \left(z \,\middle|\, 0 < |z| < R_0 = \frac{R_1}{2} \right)$. Diese Abschätzung wird uns auf die Aussage

$$\int_0^{R_0} \frac{e^{u(t)}}{t} \, dt < \infty \tag{102}$$

führen. Da diese im Widerspruch zur Bedingung (b) steht, wird damit die Behauptung bewiesen sein. Das Integral in (102) soll von nun an zur Abkürzung mit I bezeichnet werden.

Betrachten wir zunächst den Spezialfall, wo die Masse $\mu(G_1)=\beta$ ganz in einem Punkte ζ_0 konzentriert ist. Dann gilt

$$I \leqq e^c \int_0^{R_0} t^{\alpha-1} \left| t - |\zeta_0| \right|^{-\beta} dt \leqq M, \tag{103}$$

wobei M eine von ζ_0 unabhängige endliche Zahl bedeutet. Zum Beweise von (103) unterscheiden wir zwei Fälle:

(I) $\alpha \geqq 1$. Dann ist

$$I \leqq e^c R_0^{\alpha-1} \int_0^{R_0} \left| t - |\zeta_0| \right|^{-\beta} dt \leqq 2 e^c R_0^{\alpha-1} \int_0^{R_0/2} \left| t - \frac{R_0}{2} \right|^{-\frac{1}{2}} dt. \tag{104}$$

(II) $0<\alpha<1$. Eine Anwendung der Hölderschen Ungleichung

$$\left(p = \frac{\alpha-2}{2\alpha-2}, \quad q = \frac{2-\alpha}{\alpha} \right)$$

ergibt

$$\begin{aligned} I &\leqq e^c \left(\int_0^{R_0} t^{p(\alpha-1)} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^{R_0} \left| t - |\zeta_0| \right|^{-\beta q} \right)^{\frac{1}{q}} \leqq \\ &\leqq e^c \left(\int_0^{R_0} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt \right)^{\frac{2\alpha-2}{\alpha-2}} \left(2 \int_0^{R_0/2} \left| t - \frac{R_0}{2} \right|^{\frac{\alpha}{2}-1} dt \right)^{\frac{\alpha}{2-\alpha}}. \end{aligned} \tag{105}$$

Da die rechten Seiten von (104) und (105) von ζ_0 unabhängige Zahlen sind, ist damit (103) bewiesen.

Betrachten wir nun den Fall, da die Einschränkung von μ auf G_1 aus endlich vielen Einzelmassen besteht:

$$p_1\beta \quad \text{in} \quad \zeta_1, \quad p_2\beta \quad \text{in} \quad \zeta_2, \ldots, \quad p_m\beta \quad \text{in} \quad \zeta_m,$$
$$\sum_{j=1}^m p_j = 1, \quad p_j > 0 (j = 1, 2, \ldots, m).$$

Aus der Hölderschen Ungleichung [4, p. 140] und (103) schliessen wir

$$\begin{aligned} I &\leqq e^c \int_0^{R_0} \exp\left\{ (\alpha-1) \log t + \sum_{j=1}^m p_j \beta \log \frac{1}{\left| t - |\zeta_j| \right|} \right\} dt = \\ &= e^c \int_0^{R_0} \prod_{j=1}^m \left(t^{\alpha-1} \left| t - |\zeta_j| \right|^{-\beta} \right)^{p_j} dt \leqq e^c \prod_{j=1}^m \left(\int_0^{R_0} t^{\alpha-1} \left| t - |\zeta_j| \right|^{-\beta} dt \right)^{p_j} \leqq M. \end{aligned}$$

Ein naheliegender Grenzübergang liefert schliesslich $I \leqq M$ für beliebiges μ, und damit (102). *Q.E.D.*

2. *Behauptung: Die Bedingungen* (a) *und* (b) *sind notwendig.*

Beweis: Die Notwendigkeit von (a) ist klar. Da superharmonische Funktionen lokal nach unten beschränkt sind, ergibt sich die Notwendigkeit von (b) leicht durch direkte Abschätzung des in Frage stehenden Integrals. *Q.E.D.*

LITERATURVERZEICHNIS

[1] F. Fiala: *Le problème des isopérimètres sur les surfaces ouvertes à courbure positive*, Comment. Math. Helv. *13* (1940–41), 293–346.

[2] R. Finn: *On normal metrics, and a theorem of Cohn-Vossen*, Bull. Amer. Math. Soc. *70* (1964), 772–773.

[3] R. Finn: *On a class of conformal metrics, with application to differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. *40* (1965), 1–30.

[4] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Pólya: *Inequalities*. Cambridge University Press, second edition, 1952.

[5] P. Hartman: *Geodesic parallel coordinates in the large*, American J. of Math. *86* (1964), 705–727.

[6] H. Hopf und W. Rinow: *Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*, Comment. Math. Helv. *3* (1931), 209–225.

[7] A. Huber: *Ueber Wachstumseigenschaften gewisser Klassen von subharmonischen Funktionen*, Comment. Math. Helv. *26* (1952), 81–116.

[8] A. Huber: *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, Comment. Math. Helv. *32* (1957), 13–72.

[9] A. Huber: *Métriques conformes complètes et singularités isolées de fonctions sousharmoniques*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris *260* (1965), 6267–6268.

[10] I. G. Reschetnjak: *Isotherme Koordinaten auf Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung* (Russisch) Sibirskii Mat. J. *1* (1960), 88–116 und 248–276.

[11] L. Schwartz: *Théorie des distributions*, Tomes *I/II*, Act. sci. et ind. 1091/1122, Paris 1950/51.

[12] M. Tsuji: *Beurling's theorem on exceptional sets*, Tohoku Math. J., ser. 2, *2* (1950), 113–125.

Eingegangen den 20. November 1965