

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 41 (1966-1967)

**Artikel:** Über eine spezielle Klasse von Nabelpunkten und analoge Singularitäten in der zentroaffinen Flächentheorie.  
**Autor:** Münzner, Hans Friedrich  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31373>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über eine spezielle Klasse von Nabelpunkten und analoge Singularitäten in der zentroaffinen Flächentheorie

VON HANS FRIEDRICH MÜNZNER

## 1. Einleitung und Ergebnisse

Es sei  $F$  eine Fläche der Klasse  $C^3$  im dreidimensionalen euklidischen Raum;  $k_1$  und  $k_2$  ( $k_1 \geq k_2$ ) seien die Hauptkrümmungen auf  $F$ . K. Voss [9] hat im Anschluß an Untersuchungen von ST. COHN-VOSSEN und H. SCHILT [7] gezeigt:

*Gilt außer in einem Punkt  $P$  auf  $F$  überall  $(k_1 - c)(k_2 - c) < 0$  für eine geeignete Konstante  $c$ , so ist der Poincarésche Index des Krümmungsliniennetzes in  $P$  nicht positiv.*

Dieser Satz über den Index spezieller isolierter Nabel und der Vosssche Beweis besitzen „lokalen“ Charakter. Da sich aber bekanntlich jedem kompakten, stückweise glatt berandeten Bereich, auf dessen Rand keine Nabel liegen, ein Index des Krümmungsliniennetzes zuordnen läßt, erhebt sich die Frage nach einer Verallgemeinerung, bei der die Nabel nicht als isoliert vorausgesetzt werden.

Ist  $F$  eine offene Fläche, auf der die Menge aller Nabel kompakt ist, so bezeichnen wir mit  $j(F)$  den Index des Krümmungsliniennetzes in einem stückweise glatt berandeten, kompakten Bereich  $B$  auf  $F$ , dessen offener Kern alle Nabel enthält;  $j(F)$  hängt offenbar nicht von der Wahl des Bereiches  $B$  ab. Wir zeigen

SATZ 1.1. *Auf  $F$  gelte*

$$(k_1 - c)(k_2 - c) \leq 0 \quad (1.1)$$

*für eine geeignete Konstante  $c$ . Ist dann die Menge der Punkte von  $F$ , in denen (1.1) mit dem Gleichheitszeichen erfüllt ist, kompakt und gestattet  $F$  eine reguläre Parallelprojektion, so gilt  $j(F) \leq 0$ .*

Die Projektion braucht dabei nicht einwertig zu sein; auch darf die Fläche Selbstdurchdringungen besitzen. Wesentlich ist, daß die durch die Projektion vermittelte differenzierbare Abbildung in jedem Punkt den Rang 2 hat; dies bedeutet regulär. Daß der Satz falsch wird, wenn man die Voraussetzung der regulären Projizierbarkeit streicht, zeigen wir in Nr. 7 am Beispiel einer Rotationsfläche. Ein Korollar des obigen Satzes ist

SATZ 1.2. *Jede einfach zusammenhängende Rotationsfläche<sup>1)</sup>, die eine einwertige Projektion gestattet und auf der (1.1) gilt, ist Stück einer Kugel oder Ebene. Speziell*

---

<sup>1)</sup> Im Begriff der Rotationsfläche sei enthalten, daß mit einem Punkt der ganze durch ihn bestimmte Breitenkreis zur Fläche gehört.

sind die Kugeln die einzigen vollständigen elliptisch gekrümmten Rotationsflächen mit der Eigenschaft (1.1).

Wahrscheinlich sind die Kugeln auch die einzigen Eiflächen, auf denen (1.1) gilt, aber Satz 1.1 gibt keine Anhaltspunkte zu einem Beweis dieser Vermutung.

Wir wenden uns Analoga der genannten Resultate zu, die der zentroaffinen Flächentheorie angehören. Bekanntlich untersucht man dort Flächen im dreidimensionalen Vektorraum, deren Tangentialebenen den Nullvektor (das Raumzentrum) nicht enthalten und die entweder nur aus elliptischen oder nur aus hyperbolischen Punkten bestehen. Wird die Fläche  $F$  der Klasse  $C^4$  lokal als Vektorfunktion  $\mathfrak{C}(u^i)$  in den Parametern  $u^1$  und  $u^2$  dargestellt und ist  $\xi(u^i)$  der durch  $\langle \xi \mathfrak{C} \rangle = 1$  normierte Kovektor, der die Tangentialebenen beschreibt, so lauten die zentroaffinen Ableitungsgleichungen

$$\mathfrak{C}_{i||k} = A_{ik}{}^l \mathfrak{C}_l + G_{ik} \mathfrak{C}, \quad (1.2)$$

$$\xi_{i||k} = -A_{ik}{}^l \xi_l + G_{ik} \xi. \quad (1.3)$$

Dabei dient  $G_{ik}$  als Maßtensor, und der Doppelstrich vor dem Index der Ableitung bedeutet kovariante Differentiation.

Wenn nun die kubische Grundform  $\alpha = A_{ikl} du^i du^k du^l$  überall auf  $F$  in reelle Linearfaktoren zerfällt, kann für das Tripelnetz ihrer Nulllinien ein ganzzahliger Index  $j(\alpha, F)$  definiert werden in ähnlicher Weise, wie für das Netz der Krümmungslinien (vgl. Nr. 2,3). Zur Formulierung der Resultate, die  $j(\alpha, F)$  betreffen, ist es zweckmäßig, den Tensor

$$P_{ik} = \sigma \varepsilon^{lm} \varepsilon^{np} A_{lin} A_{mpk} \quad (1.4)$$

und die Invariante

$$\pi = \sigma \det (P_i^k) \quad (1.5)$$

einzuführen; dabei ist  $\sigma = \text{sign det } (G_{ik})$ , und  $\varepsilon_{12} = -\varepsilon_{21} = |(\det (G_{ik}))|^{\frac{1}{2}}$ ,  $\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = 0$  sind die Komponenten des Diskriminantentensors. Gilt in einem Flächenpunkt  $\pi > 0$ , so zerfällt dort  $\alpha$  in drei paarweise linear unabhängige reelle Linearformen; gilt  $\pi = 0$ , so ist  $\alpha$  durch ein Linearformenquadrat teilbar; in den Nullstellen von  $P_{ik}$  ist  $\alpha$  die dritte Potenz einer Linearform. Die Stellung von  $P_{ik}$  im Formelapparat der zentroaffinen Flächentheorie wird verdeutlicht durch die Beziehung

$$S + 1 = -\frac{1}{2} G^{ik} P_{ik},$$

wobei  $S$  der Krümmungsskalar zu  $G_{ik}$  ist.

Wir geben nun ein Analogon zu Satz 1.1 an.

**SATZ 1.3.** *Auf  $F$  sei*

$$\pi \geq 0 \quad (1.6)$$

*erfüllt. Ist dann die Menge aller Nullstellen von  $P_{ik}$  kompakt und gestattet  $F$  eine reguläre Parallelprojektion, so gilt  $j(\alpha, F) \leq 0$ .*

Elliptisch gekrümmte eigentliche Affinsphären, deren Mittelpunkt im Raumzentrum liegt, genügen der Bedingung (1.6); auf ihnen gilt nämlich  $A^i_{ik} = 0$ , und hieraus kann man  $\pi = (A^{ikl} A_{ikl})^2/4$  schließen. Da in jenem Fall, außer wenn es sich um eine Quadrik handelt, die Nullstellen von  $A_{ikl}$  isoliert liegen, kann die Blaschkesche Kennzeichnung des Ellipsoids als geschlossene Affinsphäre mit Hilfe von Satz 1.3 und der Poincaréschen Indexsummenformel bewiesen werden<sup>2)</sup>. Wir notieren eine weitere Anwendung des Satzes.

**SATZ 1.4.** *F sei eine einfach zusammenhängende Affinrotationsfläche elliptischen Typs<sup>3)</sup>, deren Achse durch das Raumzentrum gehe. Gilt dann (1.6) und gestattet F eine einwertige Projektion, so ist F Stück eines Ellipsoids oder eines zweischaligen Hyperboloids.*

Speziell ist jede eigentlich affinsphärische Affinrotationsfläche elliptischen Typs, die von ihrer Achse getroffen wird, eine Fläche zweiter Ordnung; ferner folgt eine Kennzeichnung der Ellipsoide unter den geschlossenen Affinrotationsflächen.

Der Satz 1.3 gilt für elliptisch und für hyperbolisch gekrümmte Flächen. Im folgenden sei  $F$  elliptisch gekrümmt. Dann ist das Tripelfeld der Darboux'schen Richtungen, welche sich als Nullrichtungen der Form

$$\hat{\alpha} = C_{ikl} du^i du^k du^l = \alpha - \frac{3}{2} G_{(ik} V_{l)} du^i du^k du^l \quad (V_l = \frac{1}{2} A^i_{il})$$

ergeben, reell, und unter den Voraussetzungen von Satz 1.3 stimmen  $j(\alpha, F)$  und  $j(\hat{\alpha}, F)$  überein. Die durch  $\alpha=0$  und  $\hat{\alpha}=0$  gegebenen Tripelnetze verhalten sich zueinander, wie Asymptotenliniennetz und Krümmungsliniennetz. Es erhebt sich die Frage nach Bedingungen, die  $j(\hat{\alpha}, F) \leq 0$  implizieren und nicht davon abhängen, ob die Nullrichtungen von  $\alpha$  reell sind. In der Tat gilt  $j(\hat{\alpha}, F) \leq 0$  auch für analytischen Flächen, auf denen die Bedingung

$$|V^l V_l| \leq q |C_{ikl} C^{ikl}| \quad (1.7)$$

mit einer Konstanten  $q < 1$  erfüllt ist<sup>2)</sup>. Dieses Resultat überschneidet sich mit Satz 1.3, da (1.6) die Ungleichung (1.7) mit  $q=1$  nach sich zieht. Eine gemeinsame Verallgemeinerung der beiden Ergebnisse scheint schwer zu beweisen.

Wir geben noch einige Hinweise zum Inhalt der folgenden Abschnitte. In Nr. 2 und 3 wird eine Theorie des Poincaréschen Index für die Nulllinien homogener Differentialformen beliebigen Grades skizziert. Dabei zeigt sich, daß die Berechnung dieses Index auch bei Formen  $n$ -ten Grades, deren Nulllinien sich ja im allgemeinen nicht auf Kurvenscharen verteilen, auf die Berechnung des Index für eine Linearform (Kurvenschär) zurückgeführt werden kann; für quadratische Formen benutzten dies schon H. HOPF und H. SAMELSON [4]. Da wir nicht nur isolierte Singularitäten behandeln, ist

<sup>2)</sup> Vgl. [6].

<sup>3)</sup> d.h. eine affin verzerrte übliche Rotationsfläche; vgl. [8] und Fußnote 1).

eine Definition des Index im Großen erforderlich; wir verwenden hierfür in Nr. 3 eine Integralformel<sup>4)</sup>. In Nr. 4 geben wir die benötigten Sätze über Gradientenfelder und Niveaulinien an; auch hier werden beliebig gestaltete Singularitätenmengen zugelassen. Die Sätze 1.1–1.4 werden in den beiden folgenden Abschnitten auf die Ergebnisse über Gradientenfelder zurückgeführt; für Satz 1.4 wird noch eine lokale Kennzeichnung von Quadriken unter den Affinrotationsflächen elliptischen Typs benötigt, die wir in Nr. 6 beweisen. Die letzten Abschnitte sind Beispielen gewidmet; so zeigen wir in Nr. 8, daß jede negative ganze Zahl als Index einer isolierten Nullstelle der zentroaffinen kubischen Fundamentalform vorkommt, und zwar sowohl auf elliptisch wie auf hyperbolisch gekrümmten Flächen. Ferner wird eine geometrische Interpretation dieses Index angedeutet, die dem Satz von ST. COHN-VOSSEN und H. SCHILT analog ist, der den Index eines isolierten Flachpunktes des Asymptotenliniennetz mit der Sattelordnung in Beziehung setzt.

## 2. Der Index in der Ebene

Es sei  $\alpha = \alpha(\xi, \eta) = \alpha(u, v, \xi, \eta)$  eine reellwertige stetige Funktion der reellen Veränderlichen  $u, v, \xi$  und  $\eta$ ; dabei variere  $(u, v)$  in einem Gebiet  $G$  der  $(u, v)$ -Ebene, und für festes  $(u, v)$  sei  $\alpha(\xi, \eta)$  ein homogenes Polynom  $n$ -ten Grades ( $n \geq 1$ ) in  $\xi$  und  $\eta$ , welches in reelle Linearfaktoren zerfällt oder das Nullpolynom ist. Die Punkte von  $G$ , in denen das Letztere eintritt, nennen wir aus naheliegenden geometrischen Gründen die Singularitäten von  $\alpha$ . Wir untersuchen eine ganzzahlige topologische Invariante der Gesamtheit aller Lösungskurven des gewöhnlichen Differentialgleichungssystems

$$\alpha(u, v, \dot{u}, \dot{v}) = 0 \quad (2.1)$$

in einem kompakten Bereich  $B \subset G$ , auf dessen Rand  $\partial B$  keine Singularitäten von  $\alpha$  liegen, den Index  $j(\alpha, B)$ .

Zunächst sei  $B$  einfach zusammenhängend und werde von einer geschlossenen Jordanschen Kurve  $\Gamma$  berandet, die  $B$  im positiven Sinne umläuft. Für eine Linearform  $\alpha = A_1(u, v)\xi + A_2(u, v)\eta$  setzen wir

$$j(\alpha, B) = j(\alpha, \Gamma) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg (A_1 + i A_2). \quad (2.2)$$

Wenn  $\alpha(\xi, \eta)$  vom Grade  $n \geq 2$  ist, kann man versuchen,  $\alpha$  auf der  $n$ -fachen Überlagerung der Randkurve,  $n\Gamma$ , als Produkt von  $n$  stetigen Linearformen darzustellen

$$\alpha|_{n\Gamma} = \prod_{k=1}^n \alpha_k,$$

---

<sup>4)</sup> Das Material der Abschnitte 2 und 3 ist ein Auszug aus Kapitel 1 in [6] und wurde zusammen mit einem Spezialfall von Satz 1.3 auf der Geometrietagung in Oberwolfach 1964 vorgetragen.

um dann zu definieren

$$j(\alpha, B) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n j(\alpha_k, n\Gamma). \quad (2.3)$$

Wir werden  $j(\alpha, B)$  im Anschluß an [4] auf andere Weise einzuführen. Dazu betrachten wir  $\alpha(\xi, \eta)$  für festes  $(u, v)$  als Polynom in den komplexen Veränderlichen  $\zeta = \xi + i\eta$  und  $\bar{\zeta} = \xi - i\eta$ :

$$\alpha = \sum_{i=0}^n a_i \zeta^i \bar{\zeta}^{n-i} \quad (a_i = \bar{a}_{n-i}) \quad (2.4)$$

und setzen

$$\hat{\alpha} = a_0 \bar{\zeta}^n + \bar{a}_0 \zeta^n, \quad [\alpha] = a_0. \quad (2.5)$$

$\hat{\alpha}$  ist in reelle Linearfaktoren zerlegbar, und die Figur der Nullrichtungen von  $\hat{\alpha}$  ist in jedem Punkt invariant gegenüber Drehungen um den Winkel  $\pi/n$ . Offenbar läßt sich  $\hat{\alpha}$  als das einzige Polynom mit den folgenden Eigenschaften charakterisieren: 1.  $\alpha - \hat{\alpha}$  ist durch  $|\zeta|^2$  teilbar; 2.  $(\partial^2 \hat{\alpha} / \partial \zeta \partial \bar{\zeta}) = 0$ . Da  $\alpha$  reell zerfällt, impliziert die Eigenschaft 1, daß  $[\alpha] = 0$  nur in den Singularitäten von  $\alpha$  eintreten kann. Da  $[\alpha]$  ferner in  $(u, v)$  stetig ist, können wir definieren:

$$j(\alpha, B) = j(\hat{\alpha}, B) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg [\alpha]. \quad (2.6)$$

Dies steht im Einklang mit der Definition (2.2), da für eine Linearform  $[\alpha] = \frac{1}{2}(A_1 + iA_2)$  gilt. Für je zwei homogene Polynome  $\alpha, \beta$  in  $\xi, \eta$  gilt  $[\alpha\beta] = [\alpha][\beta]$ . Hieraus folgt, daß die Ansätze (2.3) und (2.6) äquivalent sind; außerdem hat man unter entsprechenden Voraussetzungen

$$j(\alpha\beta, B) = j(\alpha, B) + j(\beta, B). \quad (2.7)$$

Jetzt sei  $\beta = B_1 \xi + B_2 \eta$ , wobei  $B_1$  und  $B_2$  stetige Funktionen in  $G$  sind; ferner sei der Grad  $n$  von  $\alpha$  größer als Eins. Das Polynom

$$\delta = B_1 (\partial \alpha / \partial \xi) + B_2 (\partial \alpha / \partial \eta) \quad (2.8)$$

zerfällt bekanntlich mit  $\alpha$  in jedem Punkt von  $G$  in reelle Linearfaktoren. Denn nach Durchführung der Substitution  $\xi = B_1 s - B_2 t, \eta = B_2 s + B_1 t$  ergibt sich  $\delta = \partial \alpha / \partial s$ ; setzt man dann  $t=1$ , so hat man die Frage nach der reellen Zerfällbarkeit von  $\alpha$  und  $\delta$  auf dieselbe Frage für ein Polynom einer Veränderlichen und seine Ableitung zurückgeführt, die man mit Hilfe des Satzes von Rolle sofort übersieht.

Eine zentrale Rolle in unseren Überlegungen spielt die folgende Tatsache, die von H. HOPF und H. SAMELSON [4] für  $n=2$  und singularitätenfreies  $\beta$  ausgesprochen wurde:

**SATZ 2.1.** Wenn  $\delta$  auf  $\Gamma$  keine Singularitäten besitzt, gilt

$$j(\delta, B) = j(\alpha, B) - j(\beta, B).$$

Speziell gilt also  $j(\alpha, B) = j((\partial^{n-1} \alpha / \partial^l \xi \partial^k \eta), B)$  ( $l+k=n-1$ ), wenn  $\partial^{n-1} \alpha / \partial^l \xi \partial^k \eta$  auf  $\Gamma$  keine Singularitäten besitzt.

Dem Beweis des Satzes schicken wir einen Hilfssatz voraus.

**HILFSSATZ.** *Es sei  $\alpha(\xi, \eta)$  ein homogenes Polynom  $n$ -ten Grades ( $n \geq 1$ ) und  $P = A\xi^2 + 2B\xi\eta + C\eta^2$  eine positiv definite quadratische Form. Dann verschwindet das Polynom*

$$\mu = A\xi(\partial\alpha/\partial\xi) + B(\eta(\partial\alpha/\partial\xi) + \xi(\partial\alpha/\partial\eta)) + C\eta(\partial\alpha/\partial\eta)$$

*nicht identisch; wenn  $\alpha$  in reelle Linearfaktoren zerfällt, gilt dies auch für  $\mu$ .*

*Beweis des Hilfssatzes:* Da man  $P$  durch eine orthonormale Substitution auf Diagonalgestalt transformieren kann, werde o.B.d.A.  $B=0$  angenommen. Dann ist  $\mu \neq 0$  evident. Wir setzen  $f(\xi) = \alpha(\xi, 1)$  und

$$F(\xi) = \mu(\xi, 1) = (A - C)\xi f'(\xi) + nCf(\xi). \quad (2.9)$$

Es seien  $\xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m$  diejenigen Nullstellen von  $f'$ , in denen  $f$  nicht verschwindet; ferner wähle man  $\xi_0$  und  $\xi_{m+1}$  so, daß  $f(\xi) \neq 0 \neq F(\xi)$  für  $\xi \leq \xi_0$  und  $\xi \geq \xi_{m+1}$  gilt. Mit  $n_i$  bzw.  $N_i$  bezeichnen wir die algebraische Anzahl der Nullstellen im offenen Intervall  $]\xi_i, \xi_{i+1}[$  ( $0 \leq i \leq m$ ) von  $f$  bzw.  $F$ . Da  $f$  in jedem dieser Intervalle höchstens einmal verschwindet, folgt aus (2.9)  $N_i \geq n_i - 1$ . Andererseits gilt, da  $A$  und  $C$  positiv sind,  $\text{sign } F(\xi_j) = \text{sign } f(\xi_j)$  ( $j=0, \dots, m+1$ ) und damit  $n_i \equiv N_i \pmod{2}$ . Es folgt  $N_i \geq n_i$ . Wenn also  $f$  in reelle Linearfaktoren zerfällt, gilt dies auch für  $F$ , da  $f$  und  $F$  gleichen Grad besitzen. Damit ist der Hilfssatz gezeigt.

Zum Beweis des Satzes bilden wir

$$\mu(t) = t n \alpha + (1-t) \beta \delta \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (2.10)$$

Bei Verwendung der Eulerschen Relation für homogene Funktionen erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu(t) &= (t + (1-t)B_1^2)\xi(\partial\alpha/\partial\xi) + \\ &+ (1-t)B_1B_2(\xi(\partial\alpha/\partial\eta) + \eta(\partial\alpha/\partial\xi)) + (t + (1-t)B_2^2)\eta(\partial\alpha/\partial\eta). \end{aligned}$$

Aus dem Hilfssatz folgt, daß auf  $\Gamma$  für  $t > 0$   $[\mu(t)] \neq 0$  gilt. Wegen der Ganzzahligkeit des Index und der Beziehung (2.7) ergibt sich schließlich:

$$j(\alpha, B) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg [\mu(1)] = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg [\mu(0)] = j(\delta, B) + j(\beta, B).$$

### 3. Der Index auf zweidimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

Wir skizzieren eine Verallgemeinerung der bisherigen Überlegungen, bei der das ebene Gebiet  $G$  durch eine orientierte zweidimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit  $M$  ersetzt wird und  $B$  ein kompakter, von endlich vielen stückweise glatten

Kurven berandeter Bereich auf  $M$  ist. In einer Karte mit den lokalen Parametern  $u^i (i=1, 2)$  besitzt das Differentialgleichungssystem (2.1) die Gestalt

$$\alpha = A_{i_1 \dots i_n} du^{i_1} \dots du^{i_n} = 0,$$

wobei  $A_{i_1 \dots i_n}$  das Komponentenschema eines symmetrischen, stetigen Tensors auf  $M$  darstellt und  $\alpha$ , aufgefaßt als Polynom in den Koordinatendifferentialen, in jedem Punkt reell zerfällt. Um die Zuordnung  $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ , die den Kern des vorigen Abschnitts bildet, zu bewerkstelligen, führen wir eine positiv definite Riemannsche Metrik  $ds^2 = G_{ik} du^i du^k$  ein. Wir definieren dann  $\hat{\alpha} = \hat{A}_{i_1 \dots i_n} du^{i_1} \dots du^{i_n}$  als die eindeutig bestimmte Form mit den folgenden Eigenschaften: 1.  $\alpha - \hat{\alpha}$  ist durch  $ds^2$  teilbar; 2. es gilt

$$G^{ik} \hat{A}_{ik i_3 \dots i_n} = 0. \quad (3.1)$$

Offenbar sind es dieselben Eigenschaften, die wir im vorigen Abschnitt für  $\hat{\alpha}$  herausgestellt haben. Die Koeffizienten von  $\hat{\alpha}$  sind rationale Funktionen in denen von  $\alpha$  und  $ds^2$  und bilden einen symmetrischen Tensor. Da  $\alpha$  punktal reell zerfällt, besitzen  $\alpha$  und  $\hat{\alpha}$  dieselben Singularitäten.

Jetzt gehöre der Koeffiziententensor von  $\alpha$  zur Klasse  $C^1$  und besitze keine Nullstellen auf dem Rand von  $B$ . Die der Formel (2.6) entsprechende Definition lautet

$$j(\alpha, B) = j(\hat{\alpha}, B) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\partial B} \varepsilon^{k l} \hat{A}_k^{i_2 \dots i_n} \frac{D}{ds} \hat{A}_{l i_2 \dots i_n} |\hat{\alpha}|^{-2} ds + n \int_B S do \right), \quad (3.2)$$

wobei  $|\hat{\alpha}|^2 = \hat{A}^{i_1 \dots i_n} \hat{A}_{i_1 \dots i_n}$  gesetzt ist und  $D/ds$  die absolute Differentiation nach dem Randparameter  $s$ ,  $\varepsilon^{kl}$  den Diskriminantentensor und  $S$  den Krümmungsskalar zu  $G_{ik}$  bezeichnet.

Wenn  $\alpha$  in  $B$  keine Singularitäten besitzt, gilt  $j(\alpha, B) = 0$ ; dies bestätigt man leicht mit Hilfe des Stokesschen Integralsatzes. Der Index ist stets eine ganze Zahl. Diese Tatsache läßt sich auf den Fall isolierter Singularitäten zurückführen; dann braucht die Formel (3.2) wegen der vorher erwähnten Eigenschaft nur auf Bereiche angewendet zu werden, die sich allein mit einer Karte beschreiben lassen. Für derartige Bereiche kann man bei Benutzung isothermer Parameter die Formeln (3.2) und (2.6) ineinander überführen.<sup>5)</sup>

Unmittelbar aus der Ganzzahligkeit folgt, daß  $j(\alpha, B)$  nicht von der Wahl der Metrik abhängt; denn je zwei positiv definite Metriken  $G_{ik}$  und  $\bar{G}_{ik}$  lassen sich durch die stetige Schar  $tG_{ik} + (1-t)\bar{G}_{ik} (0 \leq t \leq 1)$  verbinden, und die Koeffizienten von  $\hat{\alpha}$  sowie die Integrale in (3.2) hängen stetig von der Metrik ab.

<sup>5)</sup> Wir begnügen uns mit diesen Andeutungen, da die Integralformel (3.2) hier hauptsächlich als Hinweis dafür dient, wie sich die in Nr. 2 dargestellten Ansätze auch im Großen durchführen lassen.

Um die allgemeine Gültigkeit von (2.7) zu beweisen, untersuchen wir den Integranden des Wegintegrals in (3.2). Die Bedingung (3.1) impliziert die Symmetrie des Tensors  $\varepsilon_k^{i_1} \hat{A}^{k i_2 \dots i_n}$  und die Identität

$$\hat{A}_j^{i_2 \dots i_n} \hat{A}_{k i_2 \dots i_n} = \frac{1}{2} |\hat{\alpha}|^2 G_{jk}.$$

Hieraus folgt

$$\varepsilon^{jk} \hat{A}_j^{i_2 \dots i_n} \frac{D}{ds} \hat{A}_{k i_2 \dots i_n} = \varepsilon^{jk} \hat{A}_j^{i_2 \dots i_n} \frac{d}{ds} \hat{A}_{k i_2 \dots i_n} - \frac{n}{2} |\hat{\alpha}|^2 \varepsilon_i^j \Gamma_{ji}^i \frac{du^i}{ds},$$

wobei die  $\Gamma_{ik}^l$  die Christoffelgrößen zu  $G_{ik}$  sind. Bei Verwendung isothermer Parameter ( $ds^2 = h((du^1)^2 + (du^2)^2)$ ) läßt sich  $\hat{\alpha}$  wie in (2.4) und (2.5) konstruieren, und aus

$$a_o \zeta^n + \bar{a}_o \zeta^n = \hat{A}_{i_1 \dots i_n} du^{i_1} \dots du^{i_n} \quad (\zeta = du^1 + i du^2)$$

gewinnt man durch Koeffizientenvergleich  $[\alpha] = a_o = \frac{1}{2} (\hat{A}_{11 \dots 1} + i \hat{A}_{21 \dots 1})$ . Benutzt man die aus (3.1) folgende Identität  $\hat{A}_{11 i_3 \dots i_n} + \hat{A}_{22 i_3 \dots i_n} = 0$  und die Symmetrie des Tensors, so erhält man nach leichter Rechnung:

$$|\alpha|^{-2} \varepsilon^{ik} \hat{A}_i^{i_2 \dots i_n} \frac{D}{ds} \hat{A}_{k i_2 \dots i_n} = \frac{d}{ds} \arg [\alpha] - \frac{n}{2} \varepsilon_i^j \Gamma_{ji}^i \frac{du^i}{ds}. \quad (3.3)$$

Da  $\alpha\beta = \eta$  die Beziehung  $[\alpha][\beta] = [\eta]$  nach sich zieht, folgt aus (3.2) und (3.3), daß (2.7) allgemein gilt.

Jetzt sei  $n \geq 2$  und  $\beta = B_i du^i$ . Dem Ausdruck (2.8) entspricht

$$\delta = n A_{k i_2 \dots i_n} B^k du^{i_2} \dots du^{i_n},$$

und Satz 2.1 läßt sich auf den allgemeinen Fall übertragen, d.h. es gilt wieder  $j(\delta, B) = j(\alpha, B) - j(\beta, B)$ , wenn auf  $\partial B$  keine Singularitäten von  $\delta$  liegen. Zum Beweis betrachtet man die Homotopie (2.10). Man muß nur bestätigen, daß für jedes  $t$  mit  $0 \leq t \leq 1$  die Form  $\hat{\mu}(t)$  dieselben Singularitäten wie  $\delta$  besitzt, und dies folgt nach Einführung isothermer Parameter wieder aus dem Hilfssatz in Nr. 2.

Ist  $M$  eine offene Mannigfaltigkeit und ist die Menge der Singularitäten von  $\alpha$  kompakt, so setzen wir  $j(\alpha, M) = j(\alpha, B)$ , wobei  $B$  ein beliebiger stückweise glatt berandeter kompakter Bereich ist, dessen offener Kern alle Singularitäten von  $\alpha$  enthält.

#### 4. Der Index von Gradientenfeldern

Es sei  $f$  eine Funktion der Klasse  $C^2$  auf der offenen orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$ . Die Menge  $\mathfrak{S}$  der kritischen Punkte von  $f$  sei kompakt. Wir untersuchen den Index der Form  $df = f_i du^i$ , der mit dem Index des Gradientenfeldes von  $f$  übereinstimmt.

Ein stückweise glatt berandeter kompakter Bereich  $B$  heiße ein „ $f$ -Bereich“, wenn jede Zusammenhangskomponente von  $\partial B$  entweder eine geschlossene Niveaulinie zu

einem nichtkritischen Wert von  $f$  oder ein Polygonzug ist, der aus Niveauliniestücken zu nicht kritischen Werten von  $f$  – den „N-Kanten von  $B$ “ – und aus in  $M \setminus \mathfrak{S}$  gelegenen Stücken von Orthogonaltrajektorien der Niveaulinienschar – den „T-Kanten von  $B$ “ – besteht. Eine N-Kante  $k$  heiße I-Kante bzw. A-Kante, wenn die durch  $k$  gehende Niveaulinie an beiden Endpunkten von  $k$  in das Innere von  $B$  eintritt bzw. aus  $B$  austritt. Bezeichnet man die Anzahl der I-Kanten bzw. A-Kanten von  $B$  mit  $i(B)$  bzw.  $a(B)$ , so wird der Index eines  $f$ -Bereiches dargestellt durch

$$j(df, B) = \frac{1}{2}(i(B) - a(B)) + \chi(B), \quad (4.1)$$

wobei  $\chi(B)$  die Eulersche Charakteristik von  $B$  ist. (Vgl. HAMBURGER [2].)

Diese Beziehung kann aus der Formel (3.2) hergeleitet werden. Denn längs des Randes eines  $f$ -Bereiches ist der Gradient von  $f$  tangential oder normal; bei Beachtung der Formeln von Frenet und Gauß-Bonnet geht (3.2) also über in

$$j(df, B) = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\partial B} c \, ds + \int_B S \, do \right) = \chi(B) - \frac{1}{2\pi} \sum \omega_i,$$

wobei  $c$  die geodätische Krümmung längs der glatten Randstücke und die  $\omega_i$  die Außenwinkel von  $\partial B$  bedeuten. Die einer N-Kante anliegenden Außenwinkel ergänzen sich im Falle einer I-Kante zu  $-\pi$ , einer A-Kante zu  $+\pi$  und sonst zu Null; also folgt (4.1).

Die in Nr. 1 angegebenen Sätze lassen sich auf das folgende Ergebnis zurückführen:

**SATZ 4.1.** *Es sei  $B$  ein  $f$ -Bereich, und es gelte*

$$j(df, B) = n > 0. \quad (4.2)$$

*Dann sind in  $B$  mindestens  $n$  paarweise disjunkte einfach zusammenhängende Bereiche enthalten, die jeweils durch eine geschlossene Niveaulinie berandet werden, welche Punkte aus  $\partial B$  enthält.*

**Folgerung.** *Es sei  $C$  eine kompakte Teilmenge von  $M$ , die  $\mathfrak{S}$  umfaßt. Gilt  $j(df, M) > 0$ , so gibt es einen einfach zusammenhängenden Bereich auf  $M$ , der Punkte aus  $M \setminus C$  enthält und dessen Rand eine Niveaulinie von  $f$  ist.*

Der Übergang vom Satz zur Folgerung wird vermittelt durch den

**HILFSSATZ.** *Es sei  $C$  eine kompakte Teilmenge von  $M$ , die  $\mathfrak{S}$  umfaßt. Dann gibt es ein System endlich vieler  $f$ -Bereiche, deren offene Kerne  $C$  überdecken und paarweise disjunkt sind.*

Beweis des Hilfssatzes: Da nach M. und A. P. MORSE [5] die Menge der nicht kritischen Werte von  $f$  im Wertebereich dicht liegt, kann man jedem Punkt  $P$  aus  $M \setminus C$  einen ihn enthaltenden  $f$ -Bereich  $K(P)$ , etwa ein „Rechteck“, zuordnen, das ganz

in  $M \setminus C$  liegt. Es sei  $W$  eine kompakte Umgebung von  $C$ . Das Mengensystem  $\{K(P)^\circ \mid P \in \partial W\}$ <sup>6)</sup> bildet eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $\partial W$ . Also ist  $\partial W$  schon in der Vereinigung von endlich vielen Elementen dieses Mengensystems, etwa  $K_1^\circ, \dots, K_s^\circ$ , enthalten. Die kompakten Zusammenhangskomponenten von  $(M \setminus \bigcup_1^s K_i)^\circ$  ergeben dann endlich viele  $f$ -Bereiche, deren offene Kerne die Menge  $C$  überdecken.

**Beweis zu Satz 4.1:** Es sei  $k$  eine I-Kante von  $B$  und  $q$  der Wert von  $f$  auf  $k$ . Wir setzen  $B(q) = \{P \in M \mid f(P) \leq q\}$ . Da  $f$  längs jeder T-Kante monoton und  $q$  ein nicht kritischer Wert von  $f$  ist, besitzt die Menge  $(B^\circ \cap B(q))^\circ$  bzw.  $(B \setminus B(q))^\circ$  nur endlich viele Komponenten  $B_1, \dots, B_k$  bzw.  $B_{k+1}, \dots, B_l$ . Die  $B_j$  ( $j=1, \dots, l$ ) bilden eine Zerlegung von  $B$  in zusammenhängende  $f$ -Bereiche. Jede N-Kante eines  $B_j$ , die in  $\partial B(q)$  liegt, ist eine A-Kante dieses Bereiches, da in ihren Endpunkten die Niveaulinie zu  $q$  aus  $B_j$  austritt; alle anderen N-Kanten von  $B_j$  gehören schon  $B$  als Randkanten an. Es folgt  $\sum_{j=1}^l i(B_j) < i(B)$ ; wir haben gewissermaßen die zu  $q$  gehörenden I-Kanten, unter ihnen  $k$ , durch Zerlegung von  $B$  beseitigt. Wir zerlegen nun jedes  $B_j$ , welches I-Kanten besitzt, in der eben beschriebenen Weise und wiederholen diesen Prozess so oft, bis wir eine Zerlegung von  $B$  in zusammenhängende  $f$ -Bereiche  $C_1, \dots, C_r$  mit  $\sum_1^r i(C_j) = 0$  erhalten.

Tritt in ihr ein Bereich  $C_k$  auf, dessen Rand eine geschlossene Niveaulinie von  $f$  ist, die keine Punkte von  $\partial B$  enthält, so gehen wir zu einer neuen Zerlegung von  $B$  über, indem wir  $C_k$  mit seinem einzigen Nachbarbereich  $C_{k'}$  verschmelzen. Da jede T-Kante eines  $C_j$  schon in  $\partial B$  enthalten ist, gilt  $\partial(C_k \cup C_{k'}) = \partial C_k \setminus \partial C_{k'}$ , und der  $f$ -Bereich  $C_k \cup C_{k'}$  besitzt ebenso wie  $C_{k'}$  keine I-Kanten. Wenn wir diesen Verschmelzungsprozess hinreichend oft durchführen, erhalten wir schließlich eine Zerlegung von  $B$  in zusammenhängende  $f$ -Bereiche  $D_1, \dots, D_m$  mit  $\sum_1^m i(D_j) = 0$ , in der jeder Bereich, dessen Rand aus einer geschlossenen Niveaulinie besteht, Punkte mit  $\partial B$  gemeinsam hat.

Wenn (4.2) gilt, gibt es wegen  $\sum_1^m j(df, D_j) = j(df, B)$  einige  $D_j$ , etwa  $n'$  Stück, mit positivem Index. Aus  $j(df, D_s) > 0$  und  $i(D_s) = 0$  folgt bei Beachtung von (4.1)  $\chi(D_s) = 1$  und  $a(D_s) = 0$ , da die Eulersche Charakteristik eines zusammenhängenden Bereiches auf  $M$  nicht größer als Eins sein kann und der Index eine ganze Zahl ist.  $D_s$  ist dann also ein einfach zusammenhängender Bereich, dessen Rand eine Niveaulinie von  $f$  ist, die nach Konstruktion der  $D_j$  mit  $\partial B$  einen nicht leeren Durchschnitt besitzt. Ferner folgt  $j(df, D_j) \leq 1$  und also wegen (4.2)  $n' \geq n$ .

**SATZ 4.2.** *Es seien  $f$  und  $g$  Funktionen der Klasse  $C^2$  auf  $M$ , und es gelte dort überall*

$$\varepsilon^{ij} f_i g_j \leq 0. \quad (4.3)$$

<sup>6)</sup>  $A^\circ$  bzw.  $A^-$  sei der offene Kern bzw. die abgeschlossene Hülle einer Menge  $A \subset M$ .

<sup>7)</sup> Die Bedingung (4.3) ist definiert, wenn man auf  $M$  nur orientierungstreue Kartentransformationen zuläßt.

Dann hat man in jedem kompakten Bereich  $B$ , dessen Rand aus endlich vielen Niveaulinien von  $f$  besteht,

$$\varepsilon^{ij} f_i g_j = 0. \quad (4.4)$$

Ist ferner die Menge  $C$  der Punkte, in denen (4.4) erfüllt ist, kompakt, so gilt  $j(df, M) \leq 0$ . (Vgl. [4], S. 756.)

Beweis: Wird  $B$  durch endlich viele Niveaulinien von  $f$  berandet, so folgt aus dem Stokesschen Satz

$$\int_B \varepsilon^{ij} f_i g_j d\sigma = \int_{\partial B} f \frac{dg}{ds} ds = 0,$$

und (4.3) impliziert (4.4). Wäre  $j(df, M) > 0$ , so gäbe es nach der Folgerung zu Satz 4.1 einen kompakten Bereich  $B'$ , der von einer Niveaulinie von  $f$  berandet würde und Punkte aus  $M \setminus C$  enthielte. In  $B'$  müßte dann (4.4) gelten, und hieraus folgt  $B' \subset C$ . Das ergibt einen Widerspruch.

## 5. Die Beweise der Sätze 1.1 und 1.2

Es sei  $\mathfrak{C}(u^i)$  ( $i=1, 2$ ) der Ortsvektor einer orientierten Fläche  $F$  der Klasse  $C^3$  im dreidimensionalen euklidischen Raum und  $\xi(u^i)$  der Normalenvektor, ferner  $\gamma = G_{ik} du^i du^k$  und  $\beta = B_{ik} du^i du^k$  die erste und die zweite Grundform auf  $F$ . Wir setzen  $\alpha = \beta - H\gamma$ , wobei  $H$  die mittlere Krümmung ist. Anstelle des Krümmungsliniennetzes untersuchen wir das durch die Differentialgleichung  $\alpha = 0$  gegebene Netz seiner Winkelhalbierenden; die beiden Netze sind für Indexbetrachtungen gleichwertig, da die zugehörigen Richtungsdoppelfelder stetig ineinander überführbar sind.

Jetzt gelte (1.1); wir setzen  $\bar{\alpha} = \bar{A}_{ik} du^i du^k = \beta - c\gamma$ . Wegen

$$\det(\bar{A}_i^k) = K - 2Hc + c^2 = (k_1 - c)(k_2 - c) \leq 0$$

zerfällt  $\bar{\alpha}$  in reelle Linearfaktoren; da ferner  $\hat{\alpha} = \alpha$  gilt (vgl. Nr. 4), hat man  $j(\bar{\alpha}, F) = j(\alpha, F)$ , wenn diese Zahl existiert.

Wenn  $F$  eine reguläre Parallelprojektion zuläßt, gibt es Vektoren  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  so, daß die Funktionen  $x = \langle \mathfrak{a} | \mathfrak{C} \rangle$  und  $y = \langle \mathfrak{b} | \mathfrak{C} \rangle$  überall auf  $F$  der Bedingung  $\varepsilon^{ik} x_i y_k > 0$  genügen. Wegen der Weingartenschen Ableitungsgleichungen  $\xi_i = -B_i^j \mathfrak{C}_j$  gilt für die Funktionen  $f = -\langle \mathfrak{a} | (\xi + c\mathfrak{C}) \rangle$ ,  $g = -\langle \mathfrak{b} | (\xi + c\mathfrak{C}) \rangle$

$$f_i = \bar{A}_{ij} x^j, \quad g_i = \bar{A}_{ij} y^j. \quad (5.1)$$

Es folgt

$$\varepsilon^{ik} f_i g_k = \det(\bar{A}_i^j) \varepsilon^{kl} x_k y_l \leq 0.$$

Wenn nun die Menge der Nullstellen von  $\det(\bar{A}_i^j)$  kompakt ist, liefert der Satz 4.2  $j(df, F) \leq 0$ . Wegen (5.1) läßt sich der gemäß Abschnitt 3 verallgemeinerte Satz 2.1

anwenden, und man erhält, wenn man noch beachtet, daß die Form  $dx$  singularitätenfrei ist,

$$j(\alpha, F) = j(\tilde{\alpha}, F) = j(\tilde{\alpha}, F) - j(dx, F) = j(df, F) \leq 0.$$

Wir beweisen Satz 1.2. Dazu nehmen wir an, es gäbe auf der Rotationsfläche  $F$  einen Punkt mit  $\det(\tilde{A}_i^j) < 0$ . Dann ist diese Ungleichung auf einem ganzen Breitenkreise erfüllt, der unter den Voraussetzungen von Satz 1.2 ein einfach zusammenhängendes Flächenstück  $F'$  mit regulärer Projektion abschneidet, auf dem die Menge der Nullstellen von  $\det(\tilde{A}_i^j)$  kompakt ist. Da jeder Breitenkreis Krümmungslinie ist, folgt  $j(\alpha, F') = 2$ , und dies widerspricht Satz 1.1. Also gilt auf  $F$  in (1.1) das Gleichheitszeichen. Eine reguläre Rotationsfläche, die von der Rotationsachse durchstoßen wird und auf der eine der Hauptkrümmungen konstant ist, ist aber ein Kugelstück, wie sich in Nr. 7 beiläufig ergibt.

## 6. Die Beweise der Sätze 1.3 und 1.4

Wir betrachten eine Fläche  $F$  der Klasse  $C^4$  im dreidimensionalen Vektorraum (zentroaffinen Raum), deren Punkte wir jetzt zweckmäßig durch ihre Koordinaten  $x^\lambda(u^i)$  ( $\lambda = 1, 2, 3$ ) bezüglich einer festen Basis darstellen. Bezüglich der dualen Basis habe der Normalenkovektor die Koordinaten  $\xi_\mu(u^i)$  ( $\mu = 1, 2, 3$ ). Das lineare Gleichungssystem

$$a) \quad x^\lambda = T^{\lambda\mu} \xi_\mu, \quad b) \quad x^\lambda_{|i} = T^{\lambda\mu} \xi_{\mu|i} \quad (6.1)$$

liefert Funktionen  $T^{\lambda\mu}$  der Klasse  $C^2$  auf  $F$ . Die Reziprocität der Flächen  $x^\lambda$  und  $\xi_\mu$  impliziert die Symmetrie des Schemas  $T^{\lambda\mu}$ . Differenziert man (6.1a), so erhält man bei Beachtung von (6.1b)

$$T^{\lambda\mu}_{|i} \xi_\mu = 0. \quad (6.2)$$

Durch kovariante Differentiation von (6.1b) gewinnt man bei Beachtung der Ableitungsgleichungen (1.2) und (1.3)

$$2 A_{ik}^j x^\lambda_{|j} = T^{\lambda\mu}_{|k} \xi_{\mu|i}. \quad (6.3)$$

Jetzt gestatte  $F$  eine reguläre Parallelprojektion; dann gibt es feste Kovektoren  $a_\lambda$  und  $b_\lambda$  so, daß die Funktionen  $y = x^\lambda a_\lambda$  und  $z = x^\lambda b_\lambda$  überall auf  $F$  der Bedingung  $\varepsilon^{ik} y_i z_k > 0$  genügen. Wegen (6.2) kann man ansetzen:

$$T^{\lambda\mu}_{|k} a_\lambda = C_k^j x^\mu_{|j}, \quad T^{\lambda\mu}_{|k} b_\lambda = D_k^j x^\mu_{|j}. \quad (6.4)$$

Die Tensoren  $C_k^j$  und  $D_k^j$  lassen sich berechnen, indem man (6.4) mit  $\xi_{\mu|i}$  überschiebt, (6.3) heranzieht und  $x^\mu_{|j} \xi_{\mu|i} = -G_{ji}$  beachtet:

$$2 A_{ik}^j y_j = -C_{ki}, \quad 2 A_{ik}^j z_j = -D_{ki}. \quad (6.5)$$

---

<sup>8)</sup> Wir verwenden auch für die griechischen Indizes die Einsteinsche Summenkonvention.

Wir führen die Funktionen

$$f = -\frac{1}{2} T^{\lambda\mu} a_\lambda a_\mu, \quad g = -\frac{1}{2} T^{\lambda\mu} a_\lambda b_\mu, \quad h = -\frac{1}{2} T^{\lambda\mu} b_\lambda b_\mu \quad (6.6)$$

ein. Dann folgt aus (6.4) und (6.5)

$$\begin{aligned} g_i &= -\frac{1}{2} C_{ik} z^k = -\frac{1}{2} D_{ik} y^k = A_{ikj} z^k y^j, \\ f_i &= A_{ikj} y^k y^j, \quad h_i = A_{ikj} z^k z^j. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Nun zerfalle die Form  $\alpha = A_{ikl} du^i du^k du^l$  punktal in reelle Linearfaktoren. Dann gilt dies wegen (6.5) auch für die Formen  $C_{ik} du^i du^k$  und  $D_{ik} du^i du^k$ , und es folgt

$$\begin{aligned} \sigma \varepsilon^{ik} f_i g_k &= \frac{1}{4} \det(C_{ik}) \varepsilon^{lj} y_l z_j \leq 0, \\ \sigma \varepsilon^{ik} g_i h_k &= \frac{1}{4} \det(D_{ik}) \varepsilon^{lj} y_l z_j \leq 0 \quad (\sigma = \text{sign det}(G_{ik})). \end{aligned} \quad (6.8)$$

In den Nullstellen von  $g_i$  hat man wegen (6.5), (6.7) und (1.4)

$$2 P_{ik} y^i y^k = \det(C_i^k) = 0 = \det(D_i^k) = 2 P_{ik} z^i z^k \quad (6.9)$$

und damit  $P_{ik}=0$ , da  $P_{ik}$  semidefinit ist. Ist also die Menge der Nullstellen von  $P_{ik}$  kompakt, so folgt aus (6.7) und dem gemäß Nr. 3 verallgemeinerten Satz 2.1

$$j(\alpha, F) = j(dg, F).$$

Der Schluß beruht auf der Nullstellenfreiheit von  $y^i$  und  $z^i$  und ist auch für hyperbolisch gekrümmte Flächen gültig.

Wir nehmen jetzt  $j(dg, F) > 0$  an. Dann existiert nach der Folgerung von Satz 4.1 ein kompakter Bereich  $B$ , der Punkte mit  $P_{ik} \neq 0$  enthält und von einer glatten Niveaulinie von  $g$  berandet wird. Aus Satz 4.2 und (6.8) folgt aber, daß  $f_i$ ,  $g_i$  und  $h_i$  überall in  $B$  paarweise linear abhängig sind und damit dort (6.9) erfüllt ist. Der Widerspruch beweist  $j(dg, F) \leq 0$  und damit Satz 1.3.

Wir beweisen Satz 1.4. Dazu zeigen wir zunächst, daß auf einer Fläche, die den Voraussetzungen des Satzes genügt,  $P_{ik}=0$  gilt. Wir nehmen an, es gäbe einen Punkt mit  $P_{ik} \neq 0$ . Dann gilt diese Ungleichheit längs einer ganzen Parallelen<sup>9)</sup>, die ein einfach zusammenhängendes Flächenstück  $F'$  abschneidet. Da die Fläche von ihrer Achse durchsetzt wird, ist sie elliptisch gekrümmt. Da die Achse das Raumzentrum trifft, zerfallen längs jeder Parallelen die Nullrichtungen von  $\alpha$  in stetige Felder, die mit der Tangente an die jeweilige Parallele einen konstanten Winkel bezüglich  $G_{ik}$  einschließen. Es folgt  $j(\alpha, F') = 3$ , im Widerspruch zu Satz 1.3.

Der Satz 1.4 ergibt sich nun aus folgendem lokalen Resultat.

<sup>9)</sup> Die Parallelen entsprechen den Breitenkreisen bei den üblichen Rotationsflächen. Vgl. [8], S. 190.

**SATZ 6.1.** *Jede Affinrotationsfläche elliptischen Typs, deren Achse durch das Raumzentrum geht und auf der überall  $P_{ik}=0$  gilt, ist eine Zentralquadrik.*

**Beweis:** Zu zeigen ist  $A_{ikl} \equiv 0$ . Da die Achse durch das Raumzentrum geht, ist die Affinentfernung vom Zentrum,  $\varrho$ , auf jeder Parallelen konstant. Es sei  $U$  die Menge der Punkte, in denen  $V_l = (\ln \varrho)_l \neq 0$  gilt. Wegen  $P_{ik}=0$  hat  $\alpha$  die Gestalt  $\alpha = (A_i du^i)^3$ , und es gilt  $2V_l = A^i A_i A_l$ . Da der Übergang von (6.6) zu (6.7) für beliebige Kovektoren  $a_\lambda$  und  $b_\lambda$  möglich ist, sind die Gradienten  $\varrho_l$  und  $T^{\lambda\mu}_{|l}$  für alle  $\lambda, \mu$  linear abhängig. Also ist in  $U$  auch  $T^{\lambda\mu}$  auf jeder Parallelen konstant, d.h. bei der Darstellung

$$\begin{aligned} x^1 &= f(u) \cos v, & x^2 &= f(u) \sin v, & x^3 &= g(u), \\ \xi_1 &= F(u) \cos v, & \xi_2 &= F(u) \sin v, & \xi_3 &= G(u) \end{aligned} \quad (6.10)$$

der Fläche und ihres Konormalenbildes hängt  $T^{\lambda\mu}$  nicht von  $v$  ab. Aus (6.1a) folgt dann  $T^{12} = T^{13} = T^{21} = T^{23} = 0$  und, bei Beachtung der Symmetrie von  $T^{\lambda\mu}$ ,  $T^{31} = T^{32} = 0$  in  $U$ . Setzt man die so bestimmten  $T^{\lambda\mu}$  in (6.2) ein, so erhält man  $T^{\lambda\mu}_{|l} = 0$  und damit wegen (6.3)  $A_{ikl} = 0$  und  $V_l = 0$  in  $U$ ;  $U$  ist also leer.

Auf elliptisch gekrümmten Flächen mit  $\alpha = (A_i du^i)^3$  impliziert  $V_l = 0$  sofort  $A_{ikl} = 0$ ; auf hyperbolisch gekrümmten Flächen ist auch möglich, daß  $A^i$  Asymptotenrichtung ist. Aber die durch (6.10) gegebene Fläche geht bei einer Spiegelung  $\sigma$  an einer Ebene  $E$ , die die Achse enthält, in sich über. Längs eines Schnittmeridians von  $F$  mit  $E$  gilt für die induzierte Abbildung  $\sigma^*$  der Tangentialebenen  $\sigma^* A^i = \pm A^i$ . Hieraus folgt, daß  $A^i$  entweder an den Meridian oder an den Breitenkreis tangential ist, und das kann bei Asymptotenrichtungen nur in parabolischen Punkten eintreten.

## 7. Die Bedeutung der regulären Parallelprojektion

Wir geben eine einfach zusammenhängende Rotationsfläche  $F$  im euklidischen Raum an, die kein Kugelstück ist und auf der alle Voraussetzungen von Satz 1.1 erfüllt sind außer der Forderung der regulären Projektion; offenbar gilt  $j(F) = 2$ .

Es seien  $x, y, z$  die rechtwinkligen Koordinaten eines Punktes im dreidimensionalen euklidischen Raum. Eine Fläche  $F'$  entstehe durch Rotation der Kurve  $x = x(s)$ ,  $y = 0$ ,  $z = z(s)$  um die Achse  $x = y = 0$ ;  $s$  sei der Bogenmaßparameter. Bekanntlich sind Breitenkreise und Meridiane Krümmungslinien; die zugehörigen Hauptkrümmungen seien mit  $k_b$  und  $k_m$  bezeichnet. Auf dem erzeugenden Meridian gilt

$$\ddot{x} = -k_m \dot{z}, \quad \ddot{z} = k_m \dot{x}, \quad (7.1)$$

$$\dot{z} = k_b x. \quad (7.2)$$

Die Funktion  $k_m(s)$  sei definiert für  $-\pi/2 \leq s$  und von der Klasse  $C^\infty$ ; sie besitze folgende Eigenschaften:

$$k_m(s) = 1 \quad \text{für} \quad -\frac{\pi}{2} \leq s \leq a, \quad k_m(s) > 1 \quad \text{für} \quad s > a \quad \left(0 \leq a < \frac{\pi}{2}\right). \quad (7.3)$$

Wir lösen (7.1) mit den Anfangsbedingungen  $x(-\pi/2) = z(-\pi/2) = 0$ ,  $z(-\pi/2) = -\dot{x}(-\pi/2) = -1$ . Die entstehende Fläche enthält für  $s < a$  eine Kugelkalotte, die eine Halbkugel umfaßt. Es sei  $b$  die kleinste von  $-\pi/2$  verschiedene Nullstelle von  $\dot{z}(s)$ . Wir zeigen, daß auf der durch  $-\pi/2 \leq s < b$  gegebenen Fläche  $F$  die Bedingung  $(k_m - 1)(k_b - 1) \leq 0$  erfüllt ist; für  $a < s < b$  tritt hier das Gleichheitszeichen nie auf.

Da der Meridian für  $s \leq a$  ein Bogen des Einheitskreises ist, gilt  $x(a) = z(a) = \cos a > 0$  und  $\dot{x}(a) = -\sin a \leq 0$ . Im folgenden sei  $a < s < b$ . Man hat  $\dot{z}(s) > 0$ , also wegen (7.1)  $\ddot{x}(s) < 0$  und damit  $\dot{x}(s) < 0$ . Hieraus und aus (7.3) schließt man

$$\dot{z}(s) = \cos a + \int_a^s k_m \dot{x} d\sigma < \cos a + \int_a^s \dot{x} d\sigma = x(s).$$

Aus (7.2) folgt dann  $k_b(s) < 1$  und damit  $(k_m(s) - 1)(k_b(s) - 1) < 0$ .

Man erreicht mit ähnlichen Überlegungen dasselbe Ziel, wenn man in (7.3)  $k_m(s) < 1$  für  $s > a$  fordert. Ferner kann man auf diese Weise geschlossene Rotationsflächen vom Geschlecht Null konstruieren, die von der Kugel verschieden sind und der Bedingung (1.1) genügen; diese enthalten hyperbolische Punkte.

Für Flächen mit  $K \leq 0$  gilt Satz 1.1 auch dann, wenn man die Voraussetzung der regulären Projizierbarkeit streicht. Der Beweis hierfür stützt sich auf die Integralformel (3.2) und soll zusammen mit anderen Anwendungen dieser Formel veröffentlicht werden.

Um den Beweis von Satz 1.2 abzuschließen, zeigen wir noch, daß eine einfach zusammenhängende Rotationsfläche  $F$ , auf der (1.1) mit dem Gleichheitszeichen gilt, ein Kugelstück ist (vgl. Nr. 5). Ist  $k_m$  konstant, so ist die Meridiankurve ein Kreisbogen, der senkrecht auf die Achse stößt, und damit  $F$  eine Kugel. Ist andererseits  $k_b$  konstant, so folgt durch Differentiation von (7.2) und Vergleich mit (7.1)  $k_m = k_b$ .

## 8. Isolierte Nullstellen von $A_{ikl}$ mit vorgeschriebenem negativem Index

Wir wenden uns wieder der zentroaffinen Flächentheorie zu und zeigen, daß es außer Quadriken noch andere elliptisch oder hyperbolisch gekrümmte Flächen gibt, auf denen die kubische Grundform  $\alpha$  außerhalb der Singularitäten reell zerfällt; hierbei kann jede negative ganze Zahl als Index einer isolierten Singularität von  $\alpha$  auftreten.

Es seien  $x(u^i)$ ,  $y(u^i)$ ,  $z(u^i)$  die Koordinaten des Flächenstückes  $F$ ; wir wählen speziell  $u^1 = x$ ,  $u^2 = y$  in einer Umgebung des Punktes  $P(u^i = 0)$ . Ferner gelte  $z(0, 0) = 1$ . Dann ergeben sich für die Fundamentaltensoren der zentroaffinen Theorie die folgenden Ausdrücke in den partiellen Ableitungen von  $z$  nach den  $u^i$ :

$$G_{ik} = p^{-1} z_{ik}, \quad A_{ikl} = \frac{1}{2} (-p^{-1} z_{ikl} + 3 p^{-2} z_{(ik} p_{l)}),$$

wobei  $p = z - xz_1 - yz_2$  gesetzt ist und die runde Klammer um die Indizes Symmetrierung bedeutet.

In der beschriebenen Weise sei durch  $\bar{z}(x, y)$  ein Stück einer Zentralquadrik  $\bar{F}$  gegeben;  $\bar{z}(x, y)$  ist analytisch, und es gilt  $\bar{A}_{ikl} \equiv 0$ . Wir betrachten die Fläche  $F: z = \bar{z} + q$ , wobei  $q$  ein homogenes Polynom  $m$ -ten Grades in  $x$  und  $y$  sei ( $m \geq 4$ ). Die Potenzreihenentwicklungen der Grundtensoren in  $P$  beginnen offenbar so:

$$G_{ik} = \bar{G}_{ik}(0, 0) + \dots, \quad A_{ikl} = -\frac{1}{2} q_{ikl} + \dots \quad (8.1)$$

Wir wählen für  $q$  das harmonische Polynom  $q = 2 \operatorname{Re}(x + iy)^m$ . Dann gilt

$$\delta^{ik} q_{ikl} = (\Delta q)_l = 0 \quad (\delta^{ik} \text{ sei das Kroneckersymbol}).$$

Also ist mit  $\alpha' = -q_{ikl} du^i du^k du^l$  auch  $\alpha$  in den von  $P$  verschiedenen Punkten einer hinreichend kleinen offenen Umgebung  $U$  von  $P$  das Produkt von drei paarweise linear unabhängigen reellen Linearformen, und es gilt  $j(\alpha, U) = j(\alpha', U)$ . Als Polynom in den Variablen  $w = x + iy$ ,  $\bar{w}$ ,  $dw = \zeta$  und  $\bar{\zeta}$  besitzt  $\alpha'$  die Gestalt

$$\alpha' = -\frac{1}{2} m(m-1)(m-2) (\bar{w}^{m-3} \bar{\zeta}^3 + w^{m-3} \zeta^3).$$

Aus (2.5) und (2.6) folgt daher

$$j(\alpha, U) = j(\alpha', U) = 3 - m. \quad (8.2)$$

Wegen (8.1) kann  $U$  so klein gewählt werden, daß sie nur elliptische oder nur hyperbolische Punkte enthält, je nachdem, wie die Quadrik  $\bar{F}$  beschaffen ist.

Die Zahl  $2m$  läßt sich auffassen als die Anzahl der vom Punkt  $P$  ausgehenden Kurven, in denen  $F$  von  $\bar{F}$ , d.h. von der in  $P$  oskulierenden Zentralquadrik geschnitten wird. Die Vermutung liegt nahe, daß die Formel (8.2) mit dieser Interpretation von  $m$  im Hinblick auf isolierte Singularitäten von  $\alpha$  allgemein gilt. Man gewönne dann ein plausibles Analogon zum Resultat von ST. COHN-VOSSEN und H. SCHILT [7], das den Index  $j$  eines isolierten Flachpunktes in einem reellen Asymptotenliniennetz mit der Sattelordnung  $s^{10}$  in der Formel  $j = 1 - s$  verbindet. In der Tat läßt sich ein ähnliches Resultat beweisen; hierauf soll in einer weiteren Arbeit eingegangen werden.

#### LITERATUR

- [1] COHN-VOSSEN, St.: Zwei Sätze über die Starrheit der Eiflächen, Nachr. Ges. Wiss., Göttingen 1927, 125–134
- [2] HAMBURGER, H.: Über Kurvennetze mit isolierten Singularitäten auf geschlossenen Flächen, Math. Z. 19, (1924) 50–66

---

<sup>10)</sup> Es gilt  $s = \mu - 1$ , wenn  $2\mu$  die Anzahl der von dem Flachpunkt  $P$  ausgehenden Kurven ist, in denen die Fläche von ihrer Tangentialebene an  $P$  geschnitten wird.

- [3] HOPF, H.: Über Flächen mit einer Relation zwischen den Hauptkrümmungen, Math. Nachr. 4, (1952) 232–249
- [4] HOPF, H. und SAMELSON, H.: Zum Beweis des Kongruenzsatzes für Eiflächen, Math. Z. 43, (1938) 749–766
- [5] MORSE, A. P.: The Behaviour of a Function on its Critical Set, Annals of Math. (2) 40, (1939) 62–70
- [6] MÜNZNER, H. F.: Die Poincarésche Indexmethode und ihre Anwendungen in der affinen Flächentheorie im Großen, Berlin 1963 (Diss.)
- [7] SCHILT, H.: Über die isolierten Nullstellen der Flächenkrümmung und einige Verbiegbarkeitsätze, Compos. Math. 5, (1938) 239–283
- [8] SCHIROKOW, P. A. und A. P.: Affine Differentialgeometrie, Leipzig 1962 (Übersetzung a.d. Russischen)
- [9] VOSS, K.: Über eine spezielle Klasse von Nabelpunkten, Comment. Math. Helv. 33, (1959) 81–88

EINGEGANGEN DEN 17. NOV. 1965