

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 41 (1966-1967)

**Artikel:** Enlacements de sphères en codimension supérieure à 2.  
**Autor:** Haefliger, André  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-31371>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Enlacements de sphères en codimension supérieure à 2

par ANDRÉ HAEFLIGER

## 1. Enoncé du résultat principal

1.1. Un enlacement des  $r$  sphères  $S^{p_1}, \dots, S^{p_r}$  dans  $S^m$  est une suite  $K^{(p)}$  de  $r$  sous-variétés disjointes orientées  $K_1, \dots, K_r$  dans la sphère  $S^m$ , la  $i$ -ème composante  $K_i$  étant difféomorphe à  $S^{p_i}$ . On dira aussi que  $K^{(p)}$  est un enlacement de type  $(p)$  dans  $S^m$ , en désignant par  $(p)$  la suite  $(p_1, \dots, p_r)$ . Deux tels enlacements  $K^{(p)} = (K_1, \dots, K_r)$  et  $K'^{(p)} = (K'_1, \dots, K'_r)$  dans  $S^m$  sont isotopes s'il existe un difféomorphisme  $h$  de degré 1 de  $S^m$  appliquant  $K_i$  sur  $K'_i$  avec concordance des orientations données.

Nous supposons dorénavant que toutes les codimensions  $m - p_i$  sont supérieures à deux. Dans ce cas, en utilisant un résultat de Smale, nous verrons (§ 2) que les classes d'isotopie d'enlacements de type  $(p)$  dans  $S^m$  forment un groupe abélien. Dans ce travail, nous nous intéresserons au sous-groupe  $L_{(p)}^m$  formé des classes d'isotopie d'enlacements de type  $(p)$  dont chaque composante  $K_i$  est une sphère non nouée différenciablement (c'est-à-dire isotope à la sphère standard  $S^{p_i} \subset S^m$ ). Les divers groupes d'enlacements de sphères de type  $(p)$  dans  $S^m$  que l'on peut définir (en prenant par exemple comme composantes des sphères d'homotopie, des sphères linéaires par morceaux, des plongements de sphères avec ou sans champ de repères normaux, etc.) sont somme directe du groupe  $L_{(p)}^m$  et de  $r$  sous-groupes correspondant aux classes d'isotopie des composantes (cf. 2.6).

1.2. Soit  $(q)$  la suite  $(q_1, \dots, q_r)$ , où  $q_i = m - p_i - 1$ . Nous désignerons aussi  $L_{(p)}^m$  par  $L_{(p)}^{(q)}$ .

Soit  $\vee S^{(q)}$  le bouquet de sphères  $S^{q_1} \vee \dots \vee S^{q_r}$ , identifié à un sous-espace du produit  $S^{q_1} \times \dots \times S^{q_r}$ .

Posons

$$\begin{aligned} \Lambda_{p_i}^{(q)} &= \text{noyau de l'homomorphisme naturel: } \pi_{p_i}(\vee S^{(q)}) \rightarrow \pi_{p_i}(S^{q_i}) \\ &= \pi_{p_i}(\vee S^{(q)}; S^{q_i}) \end{aligned}$$

$$\Lambda_{(p)}^{(q)} = \text{Somme directe des } \Lambda_{(p_i)}^{(q)}, i=1, 2, \dots, r$$

$$\begin{aligned} \Pi_{m-1}^{(q)} &= \text{noyau de l'homomorphisme } \pi_{m-1}(\vee S^{(q)}) \rightarrow \sum \pi_{m-1}(S^{q_i}) \\ &= \pi_m(S^{q_1} \times \dots \times S^{q_r}; S^{q_1} \vee \dots \vee S^{q_r}) \end{aligned}$$

Définissons un homomorphisme  $w: \Lambda_{(p)}^{(q)} \rightarrow \Pi_{m-1}^{(q)}$  comme suit. Soit  $\iota_i$  l'élément de  $\pi_{p_i}(\vee S^{(q)})$  représenté par l'inclusion de  $S^{q_i}$  dans  $\vee S^{(q)}$ . Soit  $w_i$  l'homomorphisme  $\Lambda_{p_i}^{(q)} \rightarrow \Pi_{m-1}^{(q)}$  défini par le produit de Whitehead  $w_i(\alpha) = [\alpha, \iota_i]$ . Alors  $w = \Sigma w_i$ .

Le théorème suivant ramène essentiellement le calcul de  $L_{(p)}^{(q)}$  à celui de  $w$



1.3. THÉORÈME. Soit  $L_{(p)}^{(q)}$  le groupe des classes d'isotopie des enlacements de type  $(p)$  dans  $S^m$  dont chaque composante est non nouée et de codimension  $> 2$ . On a une suite exacte

$$\rightarrow \Pi_{m-1}^{(q)} \xrightarrow{\mu} L_{(p)}^{(q)} \xrightarrow{\lambda} \Lambda_{(p)}^{(q)} \xrightarrow{w} \Pi_{m-2}^{(q)} \xrightarrow{\mu} L_{(p-1)}^{(q)} \rightarrow$$

$(p-1)$  désigne la suite  $p_1-1, \dots, p_r-1$ .

1.4. L'homomorphisme  $\lambda$  est défini comme suit. Soit  $K^{(p)} = K_1 \cup \dots \cup K_r$  un enlacement de type  $(p)$  dans  $S^m$  représentant un élément de  $L_{(p)}^{(q)} = L_{(p)}^{(q)}$ . Il existe une application  $h$  de  $\vee S^{(q)}$  dans le complémentaire  $C$  de  $K^{(p)}$  induisant un isomorphisme des groupes d'homotopie jusqu'en dimension  $m-2$  et dont la classe d'homotopie est caractérisée par la propriété suivante: la restriction de  $h$  à  $S^{q_i}$  a un nombre d'enlacement  $+1$  avec  $K_i$  et est homotope à zéro dans  $C \cup K_i$ .

Soit  $v_i$  un champ de vecteurs normaux à  $K_i$  qui peut s'étendre suivant un champ de vecteurs normaux à un disque bordé par  $K_i$ . En poussant  $K_i$ , qui est homéomorphe à  $S^{p_i}$ , le long de  $v_i$ , on obtient un élément de  $\pi_{p_i}(C) = \pi_{p_i}(\vee S^{(q)})$  qui appartient au noyau de l'homomorphisme de  $\pi_{p_i}(\vee S^{(q)})$  sur  $\pi_{p_i}(S^{q_i})$ , car  $K_i$  est non noué. Cet élément est appelé le  $i$ -ème élément d'enlacement de  $K^{(p)}$ . Il est indépendant de la classe d'isotopie de  $K^{(p)}$ . On obtient ainsi un homomorphisme  $\lambda_i: L_{(p)}^{(q)} \rightarrow \Lambda_{(p)}^{(q)}$  et on définit  $\lambda$  comme la somme des  $\lambda_i$ .

En résumé,  $\lambda$  fait correspondre à un enlacement ses divers éléments d'enlacements qui appartiennent à  $\pi_{p_i}(\vee S^{(q)})$ . Le noyau de  $w$  décrit toutes les relations de symétrie que vérifient ces éléments.

1.5. L'homomorphisme  $\mu$  de  $\Pi_{m-1}^{(q)}$  dans  $L_{(p)}^{(q)}$  peut être décrit comme suit. Soit  $f: S^{m-1} \rightarrow \vee S^{(q)}$  une application différentiable représentant un élément de  $\Pi_{m-1}^{(q)}$ . Soit  $N_i \subset S^{q_i} \subset \vee S^{(q)}$  une valeur régulière de  $f$  (distincte du point base). Soient  $V_1 = f^{-1}(N_1)$ , ...,  $V_r = f^{-1}(N_r)$  considérées comme des sous-variétés avec champs de repères normaux dans  $S^{m-1}$ . On montrera qu'il existe des sous-variétés disjointes  $W_1, \dots, W_r$  dans le disque  $D^m$ , avec champs de repères normaux, telles que  $\partial W_i$  soit l'union de  $V_i$  et d'une sous-variété  $K_i$  qui est difféomorphe à une sphère  $S^{p_i}$  non nouée. La classe d'isotopie de l'enlacement  $K^{(p)} = (K_1, \dots, K_m) \subset D^m \subset S^m$  est l'image par  $\mu$  de la classe d'homotopie de  $f$ .

1.6. *Plan du travail.* Dans le § 2, nous définissons les divers groupes d'enlacements. Au § 3, nous définissons un groupe  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$  dont les éléments sont des classes d'homotopie et nous construisons un homomorphisme de  $L_{(p)}^{(q)}$  dans  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$ . Dans le § 4, nous montrons que c'est un isomorphisme. Ainsi le problème est ramené à un problème d'homotopie qui est étudié au § 5, où la suite exacte est établie.

Enfin, dans le § 6, nous montrons comment la classification des variétés ayant le type d'homotopie d'un bouquet de sphères peut se ramener à celle des enlacements de sphères, sous certaines restrictions de dimensions.

Dans l'appendice (§ 8–10), nous appliquons les résultats des § 4 et 5 au calcul de  $L_{p_1, p_2}^m$  pour  $p_1 \leq p_2$  et  $p_1 + 3p_2 < 3m - 6$  (domaine 2-métastable). Nous montrons que ce groupe est isomorphe à la somme directe de  $\pi_{p_1}(S^{q_2})$  et de  $\pi_{m-q_1-q_2}(S^0, S^0_{q_1})$ .

## 2. Les groupes d'enlacements de sphères

2.1. *Un enlacement des sphères  $S^{p_1}, \dots, S^{p_r}$  dans  $S^m$*  (on dira aussi un enlacement de type  $(p)$ , où  $(p)$  désigne la suite  $(p_1, \dots, p_r)$ ) est une suite  $K^{(p)} = (K_1, \dots, K_r)$  de  $r$  sous-variétés différentiables orientées disjointes de  $S^m$  telles que  $K_i$  soit difféomorphe à  $S^{p_i}$ . On dit que  $K_i$  est la  $i$ -ème composante de  $K^{(p)}$ .

Deux tels enlacements  $K^{(p)} = (K_1, \dots, K_r)$  et  $K'^{(p)} = (K'_1, \dots, K'_r)$  sont *isotopes* s'il existe un difféomorphisme  $h$  de degré 1 de  $S^m$  tel que  $K_i = h(K'_i)$  pour tout  $i$ , en préservant les orientations (si c'est le cas, on pourra toujours trouver un  $h$  isotope à l'identité). Ces deux enlacements sont *concordants* s'il existe dans  $S^m \times I$  une suite de sous-variétés différentiables disjointes orientées  $W_1, \dots, W_r$  telles que  $W_i$  soit difféomorphe à  $S^{p_i} \times I$  et que  $W_i = K'_i \times 1 - K_i \times 0$ .

2.2. THÉORÈME (Smale). *Si les codimensions  $m - p_i$  sont toutes supérieures à 2, les relations de concordance et d'isotopie sont équivalentes.*

Ce théorème se déduit de [7] comme le th. 1.2 de [4].

2.3. *Définition du groupe  $L_{(p)}^m$  (ou  $L_{(p)}^{(q)}$ )*. Soit  $\Sigma_{(p)}^m$  l'ensemble des classes de concordance des enlacements de type  $(p)$  dans  $S^m$ , et soit  $L_{(p)}^m$  le sous-ensemble du précédent formé des classes d'enlacements dont chaque composante est individuellement concordante à l'inclusion naturelle de  $S^{p_i}$  dans  $S^m$ . Ainsi  $\Sigma_{p_i}^m$  est l'ensemble des classes de concordance des sous-variétés orientées de  $S^m$  difféomorphes à  $S^{p_i}$ .

Lorsqu'on voudra mettre l'accent sur les codimensions,  $L_{(p)}^m$  sera aussi désigné par  $L_{(p)}^{(q)}$ , où  $q$  est la suite  $(q_1, \dots, q_r)$  avec  $q_i = m - p_i - 1$ . Cette notation est justifiée par la forme de la suite exacte 1.3.

2.4. THÉORÈME.  $\Sigma_{(p)}^m$  est naturellement un groupe abélien qui est somme directe canonique des groupes  $L_{(p)}^m$  et des groupes  $\Sigma_{p_i}^m$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

2.5. *Démonstration*. Elle est tout à fait analogue à celle du théorème 1.7 de [4].

Définissons tout d'abord l'enlacement standard de type  $(p)$ :  $S^{(p)} = (S_1^{p_1}, \dots, S_r^{p_r})$  dans  $S^m$ . Soient  $a_1, \dots, a_r$  des nombres réels compris entre  $-1/2$  et  $1/2$  et formant une suite croissante. La composante  $S_i$  de  $S^{(p)}$  sera définie comme l'intersection de la sphère unité  $S^m$  dans  $R^{m+1}$  avec le  $(p_i + 1)$ -plan défini par  $x_{p_i+1} = 0, \dots, x_{m-1} = 0$ ,  $x_m = a_i$ , où  $(x_0, \dots, x_m)$  sont les coordonnées de  $x \in R^{m+1}$ . On désignera par  $D_+^m$  (resp.  $D_-^m$ ) l'hémisphère de  $S^m$  défini par  $x_0 \geq 0$  (resp.  $x_0 \leq 0$ ) et par  $D_+^{(p)}$  (resp.  $D_-^{(p)}$ ) l'intersection de  $S^{(p)}$  avec  $D_+^m$  (resp.  $D_-^m$ ).

Tout enlacement de type  $(p)$  dans  $S^m$  est isotope à un enlacement  $K^{(p)} = (K_1, \dots, K_r)$  tel que  $K^{(p)} \cap D_-^m = D_-^{(p)}$ . Si deux tels enlacements  $K^{(p)}$  et  $K'^{(p)}$  sont concordants, il existe une concordance  $W^{(p)}$  qui les relie et dont l'intersection avec  $D_-^m \times I$  est  $D_-^{(p)} \times I$ .

Etant donnés deux enlacements  $K^{(p)} = (K_1, \dots, K_r)$  et  $K'^{(p)} = (K'_1, \dots, K'_r)$  tels que  $K^{(p)} \cap D_-^m = D_-^{(p)}$  et  $K'^{(p)} \cap D_+^m = D_+^{(p)}$ , l'enlacement  $K^{(p)} + K'^{(p)}$  est celui dont la  $i$ -ème composante est  $(K_i \cap D_+^m) \cup (K'_i \cap D_-^m)$ .

Cette addition donne une loi de composition bien définie pour les classes de concordance des enlacements de type  $(p)$  dans  $S^m$ . Cette loi de composition est commutative et associative. L'élément neutre est la classe de  $S^{(p)}$ . L'inverse de la classe de  $K^{(p)}$  est celle de son symétrique par rapport au plan  $x_1 = 0$ , avec l'orientation inversée (cf. [4], 1.4–6).

Un enlacement  $K^{(p)}$  est concordant à 0 (c.-à-d. à  $S^{(p)}$ ) si et seulement si les composantes  $K_i$  bordent des disques plongés de manière disjointe dans le disque unité  $D^{m+1} \subset R^{m+1}$ .

La projection naturelle de  $\Sigma_{(p)}^m$  sur  $\Sigma_{p_i}^m$  s'obtient en faisant correspondre à la classe de concordance de  $K^{(p)}$  la classe de sa  $i$ -ème composante. Un relèvement de cette projection fait correspondre à la classe d'une  $p_i$ -sphère  $K_i \subset S^m$  la classe de l'enlacement dont la  $i$ -ème composante est  $K_i$  et dont les autres sont des sphères bordant des disques disjoints entre eux et de  $K_i$ .

**2.6. Autres genres d'enlacements.** D'une manière analogue, nous pourrions définir :

le groupe abélien  $C_{(p)}^m$  des classes de concordance (ou d'isotopie en codimension  $> 2$ ) des plongements différentiables de l'union disjointe de  $S^{p_1}, \dots, S^{p_r}$  dans  $S^m$ ,

le groupe  $FC_{(p)}^m$  des classes de concordance de tels plongements avec un champ de repères normaux,

le groupe  $\theta_{(p)}^m$  des classes de  $h$ -cobordisme des enlacements de type  $(p)$  dont les composantes sont des sphères d'homotopie,

le groupe  $F\theta_{(p)}^m$  des classes de tels enlacements avec champ de repères normaux.

Les sous-groupes de ces groupes formés des enlacements dont chaque composante est triviale sont tous isomorphes à  $L_{(p)}^m$ . De plus chacun de ces groupes est isomorphe à la somme directe de  $L_{(p)}^m$  et des  $r$  groupes des classes de chaque composante. Ces groupes  $C_{p_i}^m, FC_{p_i}^m, \theta_{p_i}^m, F\theta_{p_i}^m$  ont été étudiés dans [4] et [6] (avec une notation légèrement différente).

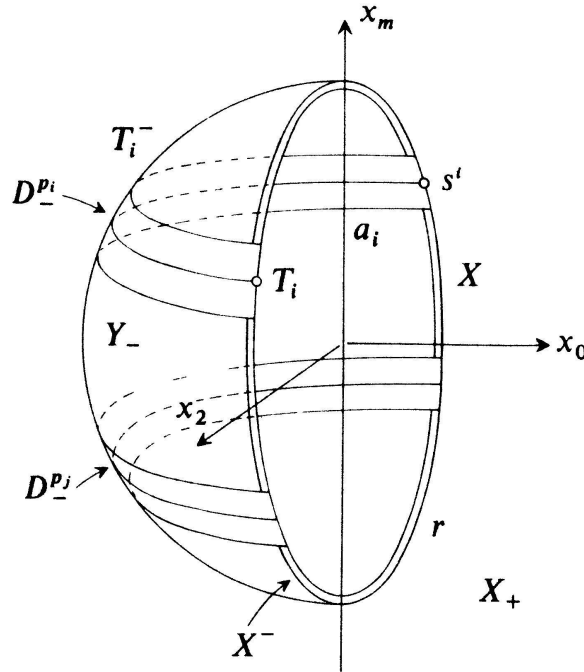
Le groupe  $L_{(p)}^m$  est également isomorphe au groupe des classes d'isotopie (en codimension  $> 2$ ) des enlacements linéaires par morceaux de type  $(p)$  dans  $S^m$ . Ceci résulte du «unknotting theorem» de ZEEMAN [9].

Enfin le groupe des classes d'isotopie (lorsque  $m - p_i > 2$ ) des plongements linéaires par morceaux de l'union disjointe des tubes  $S^{p_i} \times D^{m-p_i}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) dans  $S^m$  est isomorphe au groupe  $F\theta_{(p)}^m$ , si  $p_i \geq 5$ . Ceci résulte du théorème de CAIRNS-HIRSCH [5] et de SMALE [7].

### 3. Les groupes $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$ , $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$ et l'homomorphisme $\psi: L_{(p)}^{(q)} \rightarrow \mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$

3.1. On désignera par  $(q)$  la suite  $(q_1, \dots, q_r)$ , où  $q_i = m - p_i - 1$ . Le bouquet de spheres obtenu en attachant en leur pôle sud  $(0, \dots, 0, -1)$  les spheres  $S^{q_1}, \dots, S^{q_r}$  sera noté  $\vee S^{(q)}$ .

Reprenons les notations du paragraphe précédent. Soit  $S^{m-1}$  l'intersection de  $S^m$  avec l'hyperplan  $x_0 = 0$  et soit  $S^{(p-1)}$  l'enlacement dans  $S^{m-1}$  qui est l'intersection de  $S^{(p)}$  avec  $S^{m-1}$ . On considère le voisinage tubulaire  $T^-$  de  $S^{(p)} \cap D_-^m = D_-^{(p)}$  réunion des voisinages tubulaires disjoints  $T_i^-$  définis par  $(x_{p_i+1})^2 + \dots + (x_{m-1})^2 + (x_m - a_i)^2 \leq \varepsilon^2$ , où  $\varepsilon < \min(a_{i+1} - a_i)/2$ . Soit  $\varphi_i^-$  la projection naturelle du bord  $\partial T_i^-$  de  $T_i^-$  dans  $S^{m-p_i-1} = S^{q_i}$  définie par  $\varphi_i^-(x_0, \dots, x_m) = (x_{p_i+1}/\varepsilon, \dots, x_{m-1}/\varepsilon, (x_m - a_i)/\varepsilon)$ . La réunion des applications  $\varphi_i^-$ , composées avec les inclusions de  $S^{q_i}$  dans  $\vee S^{(q)}$  définit une application  $\varphi^-$  de  $\partial T^-$  dans  $\vee S^{(q)}$ .



L'intersection de  $T^-$  avec  $S^{m-1}$  est un voisinage tubulaire  $T$  de l'enlacement  $S^{(p-1)}$ ; soit  $\varphi$  la restriction de  $\varphi^-$  à  $\partial T$ ; de même posons  $\partial T_i = \partial T_i^- \cap S^{m-1}$  et  $\varphi_i = \varphi_i^-|_{\partial T_i}$ .

Soit  $X = S^{m-1} - \text{int } T$ ; c'est une variété dont le bord est réunion disjointe des  $\partial T_i = S^{p_i-1} \times S^{q_i}$  et  $\varphi$  est l'application naturelle de  $\partial T = \partial X$  sur  $\vee S^{(q)}$ .

3.2. *Définition.*  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  est l'ensemble des classes d'homotopie d'applications de  $X$  dans  $\vee S^{(q)}$  dont la restriction à  $\partial X$  est  $\varphi$  (dites applications modulo  $\varphi$ ).

3.3. *PROPOSITION.*  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  est muni d'une structure naturelle de groupe abélien pour  $q_i > 1$ .

*Démonstration.* Soit  $Y_- = \overline{D_-^m} - T_-$ . L'application  $\varphi^- : \partial T_- = \partial Y_- \rightarrow \vee S^{(q)}$  peut s'étendre d'une manière et d'une seule, à l'homotopie près, suivant une application de  $Y_-$  sur  $\vee S^{(q)}$ ; une telle extension est une équivalence d'homotopie. Il en résulte que les applications modulo  $\varphi$  de  $X$  dans  $\vee S^{(q)}$  qui s'étendent suivant des applications modulo  $\varphi_-$  de  $Y_-$  sont toutes homotopes. Leur classe d'homotopie sera l'élément neutre de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$ .

Pour la même raison, les restrictions à  $X_- = X \cap D_-^{m-1}$  ou à  $X_+ = X \cap D_+^{m-1}$  ( $D_-^{m-1}$  ou  $D_+^{m-1}$  sont définis par  $x_1 \leq 0$  ou  $x_1 \geq 0$ ) des applications mod  $\varphi$  de  $X$  dans  $\vee S^{(q)}$  sont toutes homotopes.

Si  $f_1$  et  $f_2$  sont deux applications mod  $\varphi$ , on peut donc toujours modifier l'une d'elles par une homotopie mod  $\varphi$  de sorte que  $f_2 = f_1 \sigma$  sur  $X_-$ , où  $\sigma$  est la symétrie relative au plan  $x_1 = 0$ . On définit la somme des classes d'homotopie de  $f_1$  et  $f_2$  comme étant la classe d'homotopie de

$$f_1 + f_2 = \begin{cases} f_1 & \text{sur } X_+ \\ f_2 & \text{sur } X_- \end{cases}$$

En suivant la même méthode que pour le groupe  $L_{(p)}^{(q)}$ , on montre que  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  est un groupe abélien avec cette addition.

**3.4. Définition du sous-groupe  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$ .** Si  $f : X \rightarrow \vee S^{(p)}$  est une application mod  $\varphi$ , soit  $f_i$  l'application de  $X_i = S^{m-1} - \text{int } T_i$  dont la restriction à  $X$  est le composé de  $f$  avec l'application de  $\vee S^{(q)} \rightarrow S^{q_i}$  qui contracte chaque sphère  $S^{q_j}$  sur le point base pour  $j \neq i$  et qui applique chaque voisinage tubulaire  $T_j$ ,  $j \neq i$ , sur le point base. Comme  $X_i$  est difféomorphe à  $D^{p_i} \times S^{q_i}$  et que  $f_i|_{\partial D^{p_i} \times S^{q_i}}$  est la projection naturelle sur  $S^{q_i}$ , il en résulte que  $f_i$  représente un élément de  $\pi_{p_i}(G_{q_i+1})$ , où  $G_{q_i+1}$  est l'espace des applications de degré 1 de  $S^{q_i}$ .

On définit ainsi un homomorphisme  $\gamma_i$  de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  dans  $\pi_{p_i}(G_{q_i+1})$ . On désignera par  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$  le noyau de l'homomorphisme  $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_r$  de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  dans la somme directe  $\bigoplus_i \pi_{p_i}(G_{q_i+1})$ .

**3.5. Construction de l'homomorphisme  $\psi : L_{(p)}^{(q)} \rightarrow \mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$ .** Soit  $K^{(p)} = (K_1, \dots, K_r)$  un enlacement de type  $(p)$  dans  $S^m$ . Supposons que  $K^{(p)} \cap D_-^m = D_-^{(p)}$ . Soit  $\mathcal{T}$  un voisinage tubulaire de  $K^{(p)}$  dont l'intersection avec  $D_-^m$  est  $T_-$ . Comme chaque  $K_i$  est une  $p_i$ -sphère qui borde un disque dans  $D^{m+1}$ , on peut trouver un difféomorphisme  $\tau_i$  de  $S^{p_i} \times D^{m-p_i}$  sur la  $i$ -ème composante  $\mathcal{T}_i$  de  $\mathcal{T}$  tel que  $\tau_i$  puisse s'étendre suivant un difféomorphisme de  $D^{p_i+1} \times D^{m-p_i}$  sur un voisinage tubulaire d'un  $(p_i+1)$ -disque  $\Delta_i$  plongé dans  $D^{m+1}$  et bordé par  $K_i$ . On peut supposer de plus que sur  $\partial T_i^-$ , l'application  $\tau_i(x, y) \rightarrow y$  coïncide avec  $\varphi_i^-$ .

Soit  $T^+ = \mathcal{T} \cap D_+^m$  et soit  $\varphi^+$  l'application du bord de  $T^+$  dans  $\vee S^{(q)}$  appliquant  $\tau_i(x, y)$  sur  $y$ . Le complémentaire  $Y_+$  dans  $D_+^m$  de l'intérieur de  $T^+$  a le type d'homotopie de  $\vee S^{(q)}$  et l'application  $\varphi^+$  s'étend, homotopiquement d'une manière unique,

suivant une application  $f_+$  de  $Y_+$  sur  $\vee S^{(q)}$ . La restriction de  $f_+$  à  $X = Y_+ \cap S^{m-1}$  donne une application  $f \bmod \varphi$  dont la classe d'homotopie est un élément du sous-groupe  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$  de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$ . Ceci résulte du choix particulier de la trivialisation  $\tau_i$ .

D'autre part, la classe d'homotopie de  $f$  ne dépend pas de l'arbitraire dans le choix de  $\tau_i$ , ni du choix de  $K$  dans sa classe de concordance. En effet, soit  $K'^{(p)}$  un enlacement concordant à  $K^{(p)}$ ; choisissons comme plus haut un difféomorphisme  $\tau'_i$  de  $S^{p_i} \times D^{m-p_i}$  sur un voisinage tubulaire de  $K'_i$  qui peut s'étendre suivant un difféomorphisme de  $D^{p_i+1} \times D^{m-p_i}$  sur un voisinage tubulaire d'un disque  $\Delta'_i$  dans  $D^{m+1}$  bordé par  $K'_i$ . On peut alors choisir une concordance  $W = W_1 \cup \dots \cup W_r$  reliant  $K^{(p)}$  à  $K'^{(p)}$  et telle que, pour chaque  $i$ ,  $(\Delta_i \times 0) \cup W_i \cup (\Delta'_i \times 1)$  borde un disque dans  $D^{m+1} \times I$ .

On obtient ainsi une application  $\psi: L_{(p)}^{(q)} \rightarrow \mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$  qui est un homomorphisme. Pour le vérifier, on choisit un représentant  $K^{(p)}$  qui coïncide avec l'enlacement trivial  $S^{(p)}$  sur le sous-espace  $x_0 \leq 0$  ou  $x_1 \leq 0$ .

#### 4. L'isomorphisme de $L_{(p)}^{(q)} (= L_{(p)}^m)$ sur $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$

4.1. *Interprétation de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  et  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$  comme groupes de cobordisme.* Nous allons voir que chaque élément de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  peut être représenté par une sous-variété  $V \subset S^{m-1}$ , avec un champ de repères normaux,  $V$  étant la réunion disjointe de  $r$  sous-variétés  $V_1, \dots, V_r$ , où  $\dim V_i = p_i$  et le bord  $\partial V_i$  de  $V_i$  étant la  $i$ -ème composante  $S_i$  de l'enlacement trivial  $S^{(p-1)}$  munie du champ de repères naturels  $\partial/\partial x_{p_i+1}, \dots, \partial/\partial x_{m-1}$  (cf. 3.1).

Deux telles sous-variétés  $V$  et  $V' = V'_1 \cup \dots \cup V'_r$  représentent le même élément de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  s'il existe dans  $S^{m-1} \times I$  une sous-variété  $M$  avec champ de repères normaux qui est réunion des sous-variétés disjointes  $M_1, \dots, M_r$ , telles que  $\partial M_i = V_i \cup V'_i \cup (S_i \times I)$  avec les champs donnés.

Enfin une sous-variété  $V = (V_1, \dots, V_r)$  représente un élément de  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$  si et seulement si chaque  $V_i$  borde individuellement dans l'hémisphère  $D_-^m$  (défini par  $x_0 \leq 0$ ) une sous-variété avec champ  $W_i$ , dont le bord est l'union de  $V_i$  et du disque  $D_-^{p_i}$  avec le champ normal standard (cf. 3.1).  $W_i$  a une arête le long de  $\partial D_-^{p_i}$ . En général  $W_i \cap W_j \neq \emptyset$  et  $V$  représente l'élément neutre de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  si et seulement s'il existe de tels  $W_i$  disjoints.

Pour le voir, considérons une application  $f: X \rightarrow \vee S^{(q)}$  modulo  $\varphi$  représentant un élément de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$ ; on peut supposer  $f$  différentiable et transversal sur le pôle nord  $N_i \in S^{q_i}$ . Munissons la sous-variété  $f^{-1}(N_i)$  d'un champ de repères normaux dont l'image par la différentielle de  $f$  est le repère tangent naturel en  $N_i$ . On peut étendre radialement cette sous-variété à l'intérieur du tube  $T_i$  pour obtenir une sous-variété  $V_i$  avec champ de repères normaux dont le bord est  $S_i$ . Alors  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  vérifie la condition précédente.

$f$  représente un élément de  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$  si et seulement si l'application  $f_i: X_i \rightarrow S^{q_i}$  définie dans 3.4 peut s'étendre suivant une application  $f_i^+$  de  $D_-^m - \text{int } T_i^-$  dans  $S^{q_i}$  qui étend  $\varphi_i^-$ ; on peut supposer  $f_i^+$  différentiable et régulière sur  $N_i$ ; ainsi  $(f_i^+)^{-1}(N_i)$ , prolongée



radialement à l'intérieur de  $T_i^-$ , donne une sous-variété  $W_i$  avec champ telle que  $\partial W_i = V_i \cup D_i^{p_i}$ .

Réciproquement, si  $V$  est une sous-variété avec champ normal comme ci-dessus, on peut supposer, après une isotopie fixe sur  $S^{(p-1)}$ , que  $V \cap T_i$  est l'intersection de  $T_i$  avec le demi-espace  $x_{p_i+1} = \dots = x_{m-1} = 0$ ,  $x_m \geq a_i$ . Par la construction de Thom-Pontrjagin, il existe une application différentiable  $f: X \rightarrow \vee S^{(q)} \bmod \varphi$  telle que  $f^{-1}(N_i) = V_i \cap X$ . On vérifie que deux sous-variétés  $V$  et  $V'$  cobordantes au sens ci-dessus donnent deux applications  $f$  et  $f'$  qui sont homotopes mod  $\varphi$ .

4.2. Avec cette interprétation de  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$ , l'homomorphisme  $\psi$  peut être décrit de la manière suivante. Soit  $K^{(p)}$  un enlacement représentant l'élément  $\alpha$  de  $L_{(p)}^{(q)}$ , tel que  $K^{(p)} \cap D_-^m = D_-^{(p)}$ . La sous-variété  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  avec champ normal représente  $\psi(\alpha)$  si et seulement s'il existe des sous-variétés disjointes  $M_1, \dots, M_r$  avec champs de repères normaux dans  $D_+^m$  telles que  $\partial M_i = V_i \cup (D_+^m \cap K_i)$  avec la condition supplémentaire suivante: considérons le champ de repères normaux de  $M_i$  restreint à  $D_+^m \cap K_i$  et complété par le champ des vecteurs normaux au bord de  $M_i$  et dirigés vers son intérieur; étendons-le sur  $D_-^m \cap K_i$  suivant le champ de repères normaux naturel; alors ce champ de repères ainsi obtenu le long de  $K_i$  peut s'étendre suivant un champ de repères normaux à un disque plongé dans  $D^{m+1}$  dont le bord est  $K_i$ .

On peut construire  $M_i$  en prenant l'image inverse de  $N_i$  par l'application  $f_+$  (cf. 3.5) et en l'étendant radialement dans  $T^+$ .

4.3. THÉORÈME PRINCIPAL. *L'homomorphisme  $\psi: L_{(p)}^{(q)} \rightarrow \mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$  est un isomorphisme en codimensions  $> 2$ .*

#### *Démonstration du théorème*

4.4. *Surjectivité de  $\psi$ .* Soit  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  une sous-variété avec champ normal représentant (cf. 4.1) un élément  $a$  de  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$ . Par hypothèse, chaque  $V_i$  borde individuellement une sous-variété avec champ  $W_i \subset D_-^m$  telle que  $\partial W_i = V_i \cup D_i^{p_i}$ . Soit  $W_i^+ \subset D_+^m$  la sous-variété avec champ qui est l'image de  $W_i$  par la symétrie relative au plan  $x_0 = 0$ ; nous pouvons la considérer comme une sous-variété avec champ de repères normaux dans  $D_+^N$ ,  $N$  grand, les  $N-m$  derniers vecteurs du champ étant la restriction à  $W_i^+$  du champ de repères normaux naturel à  $D_+^m$  dans  $D_+^N$ . En utilisant le lemme 3.3 de [4], on peut modifier  $W_i^+$  par des modifications sphériques pour obtenir une sous-variété avec champ  $W_i' \subset D_+^N$ , de même bord que  $W_i^+$ , et qui est union d'un voisinage tubulaire  $V_i \times I$  de  $V_i$  et d'anses d'indices  $\leq p_i/2 + 1$ .

Par des arguments de position générale (cf. 3.6 de [4], c'est ici que l'hypothèse  $q_i > 1$  est essentielle), nous pouvons compresser les sous-variétés  $W_i'$  sur des sous-variétés disjointes  $W_i'' \subset D_+^m$  munies de champs de repères normaux, telles que  $\partial W_i''$  soit l'union de  $V_i$  (avec son champ) et d'un  $p_i$ -disque  $K_i^+ \subset D_+^m$  qui est tangent à  $D_-^{p_i}$  le long de son bord.

Soit  $\bar{W}_i \subset S^m$  l'union de  $W_i$  et de  $W_i''$ ; c'est une sous-variété avec champ dont le bord  $\bar{K}_i$  est l'union de  $D_-^{p_i}$  et de  $K_i^+$ ; a priori,  $\bar{K}_i$  pourrait être une sphere nouée. On va modifier  $\bar{W}_i$  en faisant la somme connexe avec sa symétrique de la manière suivante. Pour chaque  $i=1, \dots, r$ , soit  $\Delta_i$  un petit disque de dimension  $m$  plongé dans  $D_+^m$  et coupant  $\bar{W}_i$  suivant un demi-disque standard; on suppose que les  $\Delta_i$  sont assez petits pour être disjoints et pour que  $\Delta_i \cap \bar{W}_j = \emptyset$  pour  $i \neq j$ . Soit  $\sigma_i$  un difféomorphisme de  $\overline{S^m - \Delta_i}$  sur  $\Delta_i$  qui est l'identité sur  $\partial \Delta_i$ . Soit  $M_i$  la sous-variété avec champ dans  $D_+^m$  égale à  $W_i''$  en dehors de  $\Delta_i$  et à  $\sigma_i(\bar{W}_i - \Delta_i)$  dans  $\Delta_i$  (si  $\sigma_i$  est choisi convenablement, ces deux morceaux se raccordent bien le long de  $\partial \Delta_i$ ).

Le bord de  $M_i$  est l'union de  $V_i$  et d'un  $p_i$ -disque  $K_i^+ \subset D_+^m$ . Soit  $K^{(p)}$  l'enlacement dont la  $i$ -ème composante est  $K_i = D_-^{p_i} \cup K_i^+$ . Les sous-variétés  $M_i$  avec champs de repères normaux vérifient toutes les conditions de 4.2. Ainsi l'image par  $\psi$  de la classe de concordance de  $K^{(p)}$  est  $\alpha$ .

**4.5. Injectivité de  $\psi$ .** Soit  $K^{(p)} = (K_1, \dots, K_r)$  un enlacement de type  $(p)$  dans  $S^m$  dont la classe a une image nulle par  $\psi$ . Il existe alors des sous-variétés disjointes  $M_i$  avec champs de repères normaux dans  $S^m$  telles que  $\partial M_i = K_i$ .

Supposons en effet que  $K^{(p)} \cap D_-^m = D_-^{(p)}$  et soit  $M_i^+$  des sous-variétés disjointes dans  $D_+^m$  avec champs normaux telles que dans 4.2. Par hypothèse, la sous-variété  $V = V_1 \cup \dots \cup V_r$  représente l'élément neutre de  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$ , où  $V_i = M_i^+ \cap S^{m-1}$ . D'après 4.1, il existe des sous-variétés avec champs de repères normaux  $W_i$  dans  $D_-^m$  telles que  $\partial W_i = V_i \cup D_i^{p_i}$ . Les sous-variétés  $M_i$  sont les réunions de  $W_i$  et  $M_i^+$ .

En remplaçant au besoin  $M_i$  par sa somme connexe avec son symétrique comme ci-dessus (cf. 4.4) et  $K^{(p)}$  par un enlacement concordant, on peut se ramener au cas où chaque  $M_i$  est stablement cobordant à un disque. Cela signifie que, si  $M_i$  est considérée comme une sous-variété avec champ normal de  $S^N$ ,  $N$  grand (par l'inclusion de  $S^m$  dans  $S^N$ ), il existe dans  $D^{N+1}$  une sous-variété  $Z_i$  avec champ de repères normaux (et une arête le long de  $K_i$ ) telle que  $\partial Z_i$  soit l'union de  $Z_i \cap S^N = M_i$  et d'un  $(p_i+1)$ -disque  $\Delta_i \subset D^{N+1}$  dont le bord est  $K_i$ . Après des modifications sphériques convenables (cf. 3.3 de [4]), on peut supposer que  $Z_i$  est l'union d'un voisinage  $M_i \times I$  de  $M_i$  et d'anses d'indices  $\leq p_i/2 + 3/2$ . Par position générale, on peut compresser les sous-variétés  $Z_i$  sur des sous-variétés disjointes  $Z_i'$  dans  $D^{m+1}$ ,  $Z_i$  étant égal à  $Z_i'$  sur  $M_i$ . Les images  $\Delta_i'$  des disques  $\Delta_i$  sont disjointes et sont bordées par les  $K_i$ . L'enlacement  $K^{(p)}$  est donc concordant à zéro.

## 5. La suite exacte fondamentale

**5.1. Rappelons que  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  est défini comme la groupe des classes d'homotopie d'applications mod  $\varphi$  de  $X$  dans  $\vee S^{(q)}$ , où  $X$  est le complémentaire dans  $S^{m-1}$  d'un voisinage tubulaire  $T = T_1 \cup \dots \cup T_r$  d'un enlacement trivial  $S^{(p-1)}$ , et  $\varphi$  la réunion des applications  $\varphi_i: \partial T_i = S^{p_i-1} \times S^{q_i} \rightarrow S^{q_i} \subset \vee S^{(q)}$  (cf. 3.1 et 3.2).**



Soit  $\bar{X}$  le quotient de  $X$  par la relation d'équivalence identifiant les points de  $\partial T_i$  ayant la même image par  $\varphi_i$ . Alors  $\bar{X}$  est homéomorphe à la somme connexe

$$\bar{X} = S^{m-1} \# (S^{p_1} \times S^{q_1}) \# \dots \# (S^{p_r} \times S^{q_r})$$

et les éléments de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  peuvent s'interpréter comme les classes d'homotopie modulo  $\bar{\varphi}$  de  $\bar{X}$  dans  $\vee S^{(q)}$ , où  $\bar{\varphi}$  est la réunion des applications  $\bar{\varphi}_i: z_i \times S^{q_i} \rightarrow S^{q_i} \subset \vee S^{(q)}$ , où  $z_i \in S^{p_i}$ . Dans ce modèle, on peut considérer que les tores  $S^{p_i} \times S^{q_i}$  sont tous attachés à  $S^{m-1}$  comme suit: on choisit  $r$   $(m-1)$ -disques  $\Delta'_i$  disjoints dans  $S^{m-1}$  et dans chaque tore un disque  $\Delta_i$ : on enlève l'intérieur de ces disques et on identifie  $\partial \Delta_i$  à  $\partial \Delta'_i$  par un difféomorphisme de degré  $-1$ .

Nous utiliserons ces deux descriptions de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$ .

**5.2. Définitions des homomorphismes  $\lambda$ ,  $\mu$  et  $w$ .** On définit un homomorphisme  $\lambda_i: \mathcal{H}_{(p)}^{(q)} \rightarrow \pi_{p_i}(\vee S^{(q)})$  en faisant correspondre à la classe d'homotopie d'une application mod  $\varphi$  de  $\bar{X}$  dans  $\vee S^{(q)}$  sa restriction à  $S^{p_i} \times y_i \subset \bar{X}$ , où  $y_i$  est le pôle sud de  $S^{q_i}$ . Soit  $\lambda: \mathcal{H}_{(p)}^{(q)} \rightarrow \sum \pi_{p_i}(\vee S^{(q)})$  la somme directe des  $\lambda_i$ .

L'homomorphisme  $\mu: \pi_{m-1}(\vee S^{(q)}) \rightarrow \mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  est défini comme suit. Soit  $g$  une application mod  $\varphi$  (ou mod  $\bar{\varphi}$ ) de  $X$  (ou  $\bar{X}$ ) dans  $\vee S^{(q)}$  représentant l'élément neutre de  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  et telle que  $g$  applique un disque plongé  $D^{m-1}$  dans  $X$  sur le point base. Soit  $h: D^{m-1} \rightarrow \vee S^{(q)}$  une application envoyant  $D^{m-1}$  au point base. L'homomorphisme  $\mu$  fait correspondre à la classe d'homotopie de  $h$  celle de l'application  $f: X \rightarrow S^{(q)}$  égale  $h$  sur  $D^{m-1}$  et à  $g$  en dehors de  $D^{m-1}$ .

Enfin soit  $\iota_i$  la classe d'homotopie de l'inclusion de  $S^{q_i}$  dans  $\vee S^{(q)}$ . L'homomorphisme  $w_i: \pi_{p_i}(\vee S^{(q)}) \rightarrow \pi_{m-2}(\vee S^{(q)})$  fait correspondre à  $\alpha$  le produit de Whitehead  $[\alpha, \iota_i]$  et  $w: \sum \pi_{p_i}(\vee S^{(q)}) \rightarrow \pi_{m-2}(\vee S^{(q)})$  est la somme des  $w_i$ .

**5.3. PROPOSITION.** *La suite des homomorphismes*

$$\rightarrow \sum_i \pi_{p_i+1}(\vee S^{(q)}) \xrightarrow{w} \pi_{m-1}(\vee S^{(q)}) \xrightarrow{\mu} \mathcal{H}_{(p)}^{(q)} \xrightarrow{\lambda} \sum_i \pi_{p_i}(\vee S^{(q)}) \rightarrow$$

*est exacte.*

**5.4. Démonstration.** Soient  $g_i: S^{p_i} \times y_i \rightarrow \vee S^{(q)}$  des applications représentant les éléments  $\alpha_i \in \pi_{p_i}(\vee S^{(q)})$ . Soit  $f_i$  une application de  $S^{p_i} \times S^{q_i} - \text{int } \Delta_i$  (cf. 5.1) dans  $\vee S^{(q)}$  égale à  $g_i$  sur  $S^{p_i} \times y_i$  et à l'inclusion sur  $z_i \times S^{p_i}$ ; alors la restriction de  $f_i$  à  $\partial \Delta_i$  représente le produit de Whitehead  $[\alpha_i, \iota_i]$ . Les applications  $f_i$  peuvent s'étendre suivant une application  $f$  de  $\bar{X} = S^{m-1} \# S^{p_i} \times S^{q_i}$  si et seulement si les restrictions des  $f_i$  aux  $\partial \Delta_i = \partial \Delta'_i$  peuvent s'étendre à  $S^{m-1} - \cup \text{int } \Delta'_i$ , c'est-à-dire si  $\sum [\alpha_i, \iota_i] = 0$ . Ceci prouve l'exactitude en  $\sum \pi_{p_i}(\vee S^{(q)})$ .

L'exactitude en  $\mathcal{H}_{(p)}^{(q)}$  découle des définitions de  $\lambda$  et  $\mu$ .

Il reste à montrer l'exactitude en  $\pi_{m-1}(\vee S^{(q)})$ . Soit  $Y$  le complémentaire dans  $S^m$  d'un voisinage tubulaire de l'enlacement standard  $S^{(p)}$ ; on peut le représenter comme

l'union de  $Y_-$  (cf. 3.3) et de son symétrique  $Y_+$  relativement au plan  $x_0=0$ ; on a  $Y_- \cap Y_+ = X$ . Soit  $\psi: \partial Y \rightarrow \vee S^{(q)}$  l'application qui est réunion de  $\varphi_-$  et de son symétrique  $\varphi_+$ . Soit  $\Delta^m$  un petit disque dans l'intérieur de  $Y$  et symétrique relativement au plan  $x_0=0$  qui partage son bord en deux hémisphères  $\Delta^{m-1} \subset Y_-$  et  $\Delta^{m-1} \subset Y_+$ . On posera  $\Delta_-^m = \Delta^m \cap D_-^m$ ,  $\Delta_+^m = \Delta^m \cap D_+^m$ .

Soit  $\alpha$  un élément de  $\pi_{m-1}(\vee S^{(q)})$ . Il est dans l'image de  $w$  si et seulement s'il existe une application continue  $F: Y - \text{int } \Delta^m \rightarrow \vee S^{(q)}$  modulo  $\psi$ , dont la restriction à  $\partial \Delta^m$  représente  $\alpha$ . On peut supposer que  $F(\Delta_-^{m-1}) = \text{point de base}$ . Soit  $F^+$  (resp.  $F^-$ ) une extension de  $F$  au demi-disque  $\Delta_+^m$  (resp.  $\Delta_-^m$ ). L'image de  $\alpha$  par  $\mu$  est la classe d'homotopie de  $F^+|X$ ; elle est nulle puisque  $F^+|X$  peut s'étendre à  $Y^+$ . Donc  $\mu \cdot w = 0$ .

Réciproquement, soit  $h: \partial \Delta^m \rightarrow \vee S^{(q)}$  représentant  $\alpha$  et tel que  $h(\Delta_-^{m-1}) = \text{point base}$ . Soit  $g_-$  une application mod  $\varphi_-$  de  $Y_- - \text{int } \Delta^m$  dans  $\vee S^{(q)}$  envoyant  $\Delta_-^{m-1}$  sur le point base. Si  $\mu(\alpha) = 0$ , il existe une application  $g_+$  mod  $\varphi_+$  de  $Y_+ - \text{int } \Delta^m \rightarrow \vee S^{(q)}$  qui étend  $h|_{\Delta_+^{m-1}}$  et  $g_-|X - \Delta^m$ . Alors la réunion de  $g_+$  et  $g_-$  est une application  $F: Y - \text{int } \Delta^m \rightarrow \vee S^{(q)}$ , mod  $\psi$ , qui étend  $h$ ; donc  $\alpha$  appartient à l'image de  $\mu$ .

5.5. Formons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & 0 & & 0 & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \rightarrow & \mathcal{L}_{(p)}^{(q)} & \xrightarrow{\lambda} & \Lambda_{(p)}^{(q)} & \xrightarrow{w} & \Pi_{m-2}^{(q)} & \rightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \rightarrow & \mathcal{H}_{(p)}^{(q)} & \xrightarrow{\lambda} & \sum_i \pi_{p_i}(\vee S^{(q)}) & \xrightarrow{w} & \pi_{m-2}(\vee S^{(q)}) & \rightarrow \\
 & \downarrow \Sigma \gamma_i & & \downarrow & & \downarrow & \\
 \rightarrow & \sum_i \pi_{p_i}(G_{q_i+1}) & \rightarrow & \sum_i \pi_{p_i}(S^{q_i}) & \rightarrow & \sum_i \pi_{m-2}(S^{q_i}) & \rightarrow \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 & 0 & & 0 & & 0 & 
 \end{array}$$

Les groupes  $\Lambda_{(p)}^{(q)}$  et  $\Pi_{m-2}^{(q)}$  sont par définition les noyaux des homomorphismes surjectifs, sommes des homomorphismes induits par les applications  $\vee S^{(q)} \rightarrow S^{q_i}$  qui contractent les sphères  $S^{q_j}$ ,  $j \neq i$ , au point base. Ainsi par définition les suites verticales sont exactes et le diagramme est commutatif.

La dernière ligne horizontale est exacte, car c'est une somme de suites qui sont exactes par la proposition précédents. La première ligne est donc aussi exacte.

En identifiant  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$  à  $L_{(p)}^{(q)}$  par l'isomorphisme  $\psi$ , on obtient le

5.6. THÉOREME. On a une suite exacte pour  $q_i > 1$

$$\Pi_{m-1}^{(q)} \xrightarrow{\mu} L_{(p)}^{(q)} \xrightarrow{\lambda} \Lambda_{(p)}^{(q)} \xrightarrow{w} \Pi_{m-2}^{(q)} \xrightarrow{\mu} L_{(p-1)}^{(q)} \rightarrow \dots$$

5.7. On vérifie aisément qu'après l'identification de  $\mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$  à  $L_{(p)}^{(q)}$ , les homomorphismes  $\lambda$  et  $\mu$  sont, au signe près, ceux qui sont décrits dans 1.4 et 1.5.

## 6. Classification des variétés ayant le type d'homotopie de $\vee S^{(p+1)}$

6.1. Nous allons généraliser la méthode utilisée dans [4], 5.1–4, pour classer les variétés de dimension  $m+1$  ayant le type d'homotopie du bouquet de sphères  $S^{(p+1)} = S^{p_1+1} \vee \dots \vee S^{p_r+1}$  ( $p_i \leq p_j$  si  $j > i$ ) avec certaines restrictions de dimensions.

Soit  $V^{m+1}(\vee S^{(p+1)})$  l'ensemble des classes  $(V, f)$  de variétés différentiables orientées compactes  $V$  de dimension  $m+1$  avec bord simplement connexe, munies d'une équivalence d'homotopie  $f: V \rightarrow \vee S^{(p+1)}$ ; deux tels couples  $(V, f)$  et  $(V', f')$  sont équivalents s'il existe un difféomorphisme  $H: V \rightarrow V'$  tel que  $f' \cdot H$  soit homotope à  $f$  (cf. [8]).

Soit d'autre part  $FC_{(p)}^m$  le groupe des classes de concordance (ou d'isotopie) des plongements différentiables de l'union disjointe des tubes  $S^{p_i} \times D^{m-p_i}$  dans  $S^m$  conservant l'orientation. Ce groupe est la somme directe du groupe  $L_{(p)}^m$  et des groupes  $FC_{p_i}^{m-p_i}$  étudiés dans [4], § 5.

A tout plongement  $\varphi$  de l'union des  $S^{p_i} \times D^{m-p_i}$  dans  $S^m$  correspond une variété différentiable  $V$  orientée obtenue en collant au disque  $D^{m+1}$   $r$  anses  $h_i = D^{p_i+1} \times D^{m-p_i}$  attachées simultanément par les plongements  $\varphi_i = \varphi|_{S^{p_i} \times D^{m-p_i}}$ . Il existe naturellement une équivalence d'homotopie  $f: V \rightarrow \vee S^{(p+1)}$  qui contracte  $D^{m+1}$  au point base et dont la restriction à l'anse  $h_i$  envoie  $D^{p_i+1} \times 0$  sur  $S^{p_i+1} \subset S^{(p+1)}$  avec le degré 1. Deux plongements isotopes donneront des variétés difféomorphes. On obtient ainsi, si  $q_i = m - p_i - 1 > 1$ , une application  $FC_{(p)}^m \rightarrow V^{m+1}(\vee S^{(p+1)})$ .

6.2. THÉORÈME. *L'application de  $FC_{(p)}^m \rightarrow V^{m+1}(\vee S^{(p+1)})$  est surjective si  $2p_i - p_j + 2 \leq m$  et  $2p_i - p_j \geq 1$  et injective si  $2p_i - p_j + 2 < m$  et  $2p_i - p_j > 1$  pour tout  $i, j = 1, \dots, r$ .*

6.3. *Démonstration. Surjectivité.* Soit  $(V, f)$  un couple représentant un élément de  $V^{m+1}(\vee S^{(p+1)})$ . D'après SMALE [7],  $V$  est difféomorphe à l'union de  $D^{m+1}$  et de  $r$  anses  $h_i = D^{p_i+1} \times D^{m-p_i}$  attachées successivement:  $V = D^{m+1} \cup h_1 \cup \dots \cup h_r$ . De plus,  $f$  est homotope à une application envoyant  $D^{p_i+1} \times 0$  sur  $S^{p_i+1}$  avec degré 1 et son bord sur le point base. Nous devons montrer que nous pouvons choisir cette décomposition en anses de sorte qu'elles soient attachées simultanément à  $\partial D^{m+1}$ .

Supposons que c'est le cas pour les  $k-1$  premières anses et posons  $V_{k-1} = D^{m+1} \cup h_1 \cup \dots \cup h_{k-1}$ . Soit  $f_{k-1}^{-1}: V_{k-1} \rightarrow S^{p_1+1} \vee \dots \vee S^{p_{k-1}+1}$  une équivalence d'homotopie qui est homotope à la restriction de  $f$  à  $V_{k-1}$ , qui est régulière sur le pôle nord  $N_i$  de chaque  $S^{p_i+1}$ , et telle que  $f_{k-1}(N_i)$  soit le disque  $0 \times D^{m-p_i} \subset h_i \subset V_{k-1}$ . Soit  $\varphi_k: \partial D^{p_k+1} \times D^{m-p_k} \rightarrow \partial V_{k-1}$  l'application d'attachement de l'anse  $h_k$ . Remarquons que  $\partial V_{k-1}$  est  $s$ -connexe, où  $s < p_i + 1$  et  $s < m - p_i + 1$ ,  $i < k$ .

L'élément d'intersection de  $\varphi_k^0 = \varphi_k|_{S^{p_k} \times 0}$  avec chaque  $0 \times \partial D^{m-p_i} \subset \partial V_{k-1}$  est nul (cf. [3] ou 6.5), car la classe d'homotopie de  $f_{k-1} \cdot \varphi_k^0$  est nulle, puisque  $\varphi_k^0$  est homotope à zéro dans  $V_{k-1}$ . D'après le lemme 6.5 ci-dessous,  $\varphi_k^0$  est homotope dans  $\partial V_{k-1}$  à une application ne rencontrant pas  $0 \times D^{m-p_i}$ . Ainsi le produit de  $\varphi_k^0$  par l'inclusion de  $0 \times \partial D^{m-p_i}$  dans  $\partial V_{k-1} \times \partial V_{k-1}$  homotope

à une application ne rencontrant pas la diagonale. En appliquant le théorème 4.11 de [2], on voit qu'il existe une isotopie dans  $\partial V_{k-1}$  qui déforme  $\varphi_k^0$  en un plongement ne rencontrant aucun des  $0 \times \partial D^{m-p_i}$ . On pourra donc s'arranger, après une isotopie convenable, pour que  $\varphi_k$  ne rencontre aucune anse  $h_i$ ,  $i < k$ .

**6.4. Injectivité.** Soient  $(V, f)$  et  $(V', f')$  des couples représentant des éléments de  $V^{m+1}(\vee S^{(p+1)})$ . On suppose que  $V$  (resp.  $V'$ ) est difféomorphe à l'union d'un  $(m+1)$ -disque  $D^{m+1}$  et de  $r$  anses  $h_i = D^{p_i+1} \times D^{m-p_i}$  (resp.  $h'_i = D'^{p_i+1} \times D'^{m-p_i}$ ) attachées simultanément à ce disque par des plongements  $\varphi_i$  (resp.  $\varphi'_i$ ).

Supposons qu'il existe un difféomorphisme de  $V$  sur  $V'$ , préservant l'orientation, et dont la composition avec  $f'$  est homotope à  $f$ . En utilisant la même méthode que dans [4], 5.3 et que ci-dessus, on peut supposer après une isotopie que ce difféomorphisme est l'identité sur le disque  $1/2 D^{m+1}$  concentrique à  $D^{m+1}$  et de rayon  $1/2$ , que  $H|_{D^{p_i+1} \times 1/2 D^{m-p_i}}$  est l'application naturelle sur  $D'^{p_i+1} \times 1/2 D'^{m-p_i}$ , et enfin que  $H$  envoie dans  $D^{m+1}$  l'ensemble des points  $x \in D^{m+1}$  tels que  $x/|x| \in \varphi_i(D^{p_i+1} \times 1/2 D^{m-p_i})$ . Il en résulte que les enlacements  $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_r)$  et  $\varphi' = (\varphi'_1, \dots, \varphi'_r)$  sont concordants.

**6.5. Rappel sur l'intersection.** Comme les démonstrations des propositions de [3] ne sont pas explicites (cf. en particulier p. 7), nous donnons ci-dessus ce qui est nécessaire pour la démonstration de 6.2.

Soit  $M$  une variété différentiable orientée de dimension  $m$  et soit  $V$  une sous-variété orientée compacte de codimension  $q$ . Supposons que  $V$  soit  $(n-q)$ -connexe. On définit un homomorphisme  $\iota: \pi_n(M; M-V) \rightarrow \pi_n(S^q)$  comme suit. Soit  $f: D^n \rightarrow M$  une application représentant un élément  $\alpha$  de  $(M; M-V)$ ; on peut supposer que  $f$  est transverse sur  $V$ ; ainsi  $J = f(D^n) \cap V$  est de dimension  $\leq n-q$ . Comme  $V$  est  $(n-q)$ -connexe, on peut construire au voisinage de  $J$  un champ de repères normaux à  $V$  donnant l'orientation normale; l'image inverse de ce champ par  $f$  donne un champ de repères normaux le long de la sous-variété  $f^{-1}(V) \subset \text{int } D^n$ , et par la construction de Thom-Pontrjagin un élément de  $\pi_n(S^q)$ . Cet élément  $\iota(\alpha)$  est bien défini et sera appelé l'intersection de  $f$  ou de  $\alpha$  avec  $V$ .

**6.6. LEMME.** *Supposons que  $M$  soit  $(n-q+1)$ -connexe, que  $V$  soit  $(n-q)$ -connexe et que  $n < 2q-2$ . Alors  $\iota: \pi_n(M, M-V) \rightarrow \pi_n(S^q)$  est un isomorphisme.*

*Démonstration.* Soit  $T$  un voisinage tubulaire fermé de  $V$  et soit  $M_0 = M - \text{int } T$ ; ainsi  $M_0 \cap T$  est le bord  $\partial T$  de  $T$ . La paire  $(T, \partial T)$  est  $(q-1)$ -connexe et la paire  $(M_0, \partial T)$  est  $(n-q+1)$ -connexe. D'après le th. de BLAKERS-MASSEY [1], on a  $\pi_n(M; M_0, T) = 0$ . Donc l'application  $\pi_n(T, \partial T) \rightarrow \pi_n(M, M_0)$  est surjective. Or  $\pi_n(T, \partial T)$  est isomorphe, par relèvement des homotopies, à  $\pi_n(D^q, \partial D^q)$ , où  $D^q$  représente une fibre de  $T$ . La composition des applications  $\pi_{n-1}(S^{q-1}) = \pi_n(D^q, \partial D^q) = \pi_n(T, \partial T) \rightarrow \pi_n(M, M_0) \xrightarrow{\iota} \pi_n(S^q)$  est l'homomorphisme de suspension. Comme  $\pi_{n-1}(S^{q-1})$  est un groupe stable,  $\iota$  est un isomorphisme.

6.7. *Remarque.* Rappelons qu'il résulte de ce lemme et du th. 4.11 de [2], que si  $f$  est un plongement de  $D^n$  dans  $M$  dont l'intersection avec  $V$  est nulle et si en plus des hypothèses ci-dessus on a  $n \leq m - q$ , alors  $f$  est isotope, modulo son bord, à un plongement ne rencontrant pas  $V$ .

6.8. *Cas des variétés semi-linéaires (ou linéaires par morceaux),* le théorème 6.2 et sa démonstration sont aussi valables dans ce cas. On doit naturellement remplacer le groupe  $FC_{(p)}^m$  par le groupe des classes d'isotopie des plongements semi-linéaires de l'union disjointes des tubes  $S^{p_i} \times D^{m-p_i}$  dans  $S^m$ . On a remarqué dans 2.6 que ce groupe est isomorphe à  $F\theta_{(p)}^m$ , lorsque  $p_i \geq 5$ .

## 7. Classification des plongements de $S^p$ dans $S^q \times R^{m-q}$

Il existe un difféomorphisme  $H$  de  $S^q \times R^{m-q}$  sur le complémentaire de la sous-sphère  $S^{m-q-1}$  dans  $S^m$ . Ainsi, à tout plongement différentiable  $f$  de  $S^p$  dans  $S^q \times R^{m-q}$  nous pouvons faire correspondre le plongement  $\varphi$  de l'union disjointe de  $S^p$  et  $S^{m-q-1}$  dans  $S^m$ ,  $\varphi$  étant égal à  $H_0 f$  sur  $S^p$  et à l'identité sur  $S^{m-q-1}$ . A deux plongements  $f$  isotopes correspondent des enlacements  $\varphi$  isotopes.

Nous obtenons ainsi une application de l'ensemble des classes d'isotopie de plongements de  $S^p$  dans  $S^q \times R^{m-q}$  dans le sous-groupe (pour  $m - p > 2$  et  $q > 1$ ) de  $C_{p, m-q-1}^m$  formé des classes d'isotopie d'enlacements dont la seconde composante est triviale (cf. 2.6). Ce sous-groupe est canoniquement isomorphe à la somme directe  $L_{p, m-q-1}^m \oplus C_p^m$ , où  $C_p^m$  désigne le groupe des classes d'isotopie de plongements différentiables de  $S^p$  dans  $S^m$ .

7.1. THÉORÈME. *Supposons  $m - p > 2$  et  $q > 1$ . L'application définie ci-dessus de l'ensemble des classes d'isotopie de plongements de  $S^p$  dans  $S^q \times R^{m-q}$  dans le groupe  $L_{p, m-q-1}^m \oplus C_p^m$  est bijective.*

Par exemple, dans le domaine 1-métastable, c'est-à-dire si  $2m > 3p + 3$ , les classes d'isotopie des plongements de  $S^p$  dans  $S^q \times R^{m-q}$  correspondent bijectivement aux éléments de  $\pi_p(S^q) \oplus \pi_{p-q+1}(S^0, S^0_{m-p-1})$  pour  $3q > p + 3$ , d'après le théorème 10.7 de l'appendice.

*Démonstration.* D'après le théorème d'extension des isotopies, tout plongement  $\varphi$  de  $S^p \cup S^{m-q-1}$  dans  $S^m$  dont la restriction à  $S^{m-q-1}$  est isotope à l'identité, est isotope à un plongement dont la restriction à  $S^{m-q-1}$  est l'identité. Donc l'application est surjective.

Soient  $f_0, f_1: S^p \rightarrow S^q \times R^{m-q}$  deux plongements tels que les plongements associés  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont isotopes. Pour montrer que l'application est injective, il faut montrer qu'il existe une isotopie  $h_t: S^m \rightarrow S^m$ , fixe sur  $S^{m-q-1}$ , et telle que  $h_0$  soit l'identité et  $h_1 \cdot f_0 = f_1$ , où  $f_i$  désigne le composé  $H \cdot f_i$ .

Comme  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  sont isotopes, nous savons qu'il existe un difféomorphisme  $h$  de degré 1 de  $S^m$ , fixe sur  $S^{m-q-1}$ , tel que  $hf_0 = f_1$ . Soit  $g$  un plongement du disque  $D^m$  dans  $S^m$ , de degré 1, tel que  $g(D^m) \supset f_0(S^p)$  et  $g(D^m) \cap S^{m-q-1} = g(D^{m-q-1})$ . Les deux plongements  $g$  et  $hg$  coïncident sur le sous-disque  $D^{m-q-1}$ ; il est bien connu qu'il existe une isotopie  $h_t$  de  $S^m$ , fixe sur la sous-variété  $S^{m-q-1}$ , telle que  $h_0 = \text{id.}$  et  $h_1 g = hg$ . Donc  $h_1 f_0 = f_1$ .

7.2. *Remarque.* Il est clair que le même résultat est valable dans le cas linéaire par morceaux si l'on remplace  $C_p^m$  par 0.

## Appendice

### La classification des enlacements dans le domaine 2-métastable

Le but de cet appendice est de donner une expression explicite du groupe  $L_{(p)}^m$  dans le domaine 2-métastable (cf. déf. 9.1) en termes de groupes d'homotopie de sphères et de variétés de Stiefel. Pour cette section, l'auteur a grandement profité de conversations avec B. Steer.

8. *Rappel de théorèmes de P. Hilton et B. Steer.* Nos calculs seront basés sur le théorème de HILTON [11] donnant une décomposition de  $\pi_k(\vee S^{(q)})$  comme somme directe de groupes d'homotopie de sphères et sur un théorème de B. STEER [14] donnant une expression de  $w$ .

8.1. Comme précédemment, soit  $\iota_i$  l'élément de  $\pi_{p_i}(\vee S^{(q)})$  représenté par l'inclusion de  $S^{q_i}$  dans le bouquet  $\vee S^{(q)} = S^{q_1} \vee \dots \vee S^{q_r}$ .

Les produits de Whitehead basiques sont définis comme suit.

Les produits basiques de poids 1 sont les éléments  $\iota_1, \dots, \iota_r$  et sont ordonnés de sorte que  $\iota_i < \iota_j$  si  $i < j$ .

Supposons ordonnés et définis les produits basiques de poids  $< k$ . Alors ceux de poids  $k$  sont de la forme  $[a, b]$ , où  $a$  et  $b$  sont des produits basiques tels que  $a > b$  et que la somme des poids de  $a$  et  $b$  soit  $k$ . De plus si  $a = [c, d]$ , alors  $d \leq b$ . Les produits basiques de poids  $k$  sont ordonnés arbitrairement et sont supérieurs à ceux de poids inférieur.

Ainsi les produits basiques de poids 1, 2 et 3 sont:

$$\begin{aligned} & \iota_1, \iota_2, \dots, \iota_r \\ & [\iota_i, \iota_j], i > j \\ & [[\iota_i, \iota_j], \iota_k], i > j \quad \text{et} \quad j \leq k \end{aligned}$$

Si l'élément  $\iota_i$  intervient  $\alpha_i$  fois dans le produit basique  $w$ , alors  $w \in \pi_{d(w)}(\vee S^{(q)})$ , où  $d(w) = \sum \alpha_i(q_i - 1) + 1$ .

8.2. THÉOREME (Hilton): Le groupe  $\pi_k(\vee S^{(q)})$  est isomorphe à la somme directe  $\sum_w \pi_k(S^{d(w)})$ , où  $w$  parcourt les produits basiques, l'inclusion de  $\pi_k(S^{d(w)})$  dans  $\pi_k(\vee S^{(q)})$  étant donnée par composition avec  $w$ .

On suppose comme toujours que les  $q_i$  sont supérieurs à 1. Suivant B. STEER [14, p. 37, 3.2], soit  $X$  une suspension, dans notre cas le bouquet  $\vee S^{(q)}$ . Soit  $w \in \pi_{k+1}(X)$ ,  $\iota \in \pi_{q+1}(X)$  et  $\alpha \in \pi_{p+1}(S^{k+1})$ .

8.3. THÉOREME (Steer): On a la formule

$$[w \circ \alpha, \iota] = \sum_{s \geq 1} \pm \theta_s(w, \iota) \cdot E^q h_{s-1} \alpha$$

où  $\theta_s(w, \iota) = [[[\iota, w]w] \cdots w]$  avec  $s$  facteurs  $w$

$$h_{s-1} : \pi_{p+1}(S^{k+1}) \rightarrow \pi_{p+1}(S^{ks+1})$$

est un invariant de Hopf généralisé et  $E^q$  la suspension itérée  $q$  fois.

Ainsi on a  $[w \circ \alpha, \iota] = \pm [\iota, w] E^q \alpha \pm [[\iota, w]w] E^q h \alpha \pm \dots$ . Les signes sont précisés dans [14].

## 9. Le domaine $k$ -métastable

9.1. Pour les enlacements de type  $(p)$  dans  $S^m$ , le domaine  $k$ -métastable est celui où, dans  $\pi_{m-1}(\vee S^{(q)})$ , tous les produits basiques de poids  $k+2$  s'annulent. Cette condition équivaut à

$$p_{i_1} + \dots + p_{i_{k+2}} < (k+1)(m-2)$$

pour tout  $1 \leq i_1, \dots, i_{k+2} \leq r$  et  $i_1 \neq i_2$ .

Elle équivaut également à l'annulation des produits basiques de poids  $k+1$  dans les groupes  $\pi_{p_i+1}(\vee S^{(q)})$ .

Voici un exemple d'un théorème général.

9.2. PROPOSITION. Dans le domaine  $k$ -métastable, un enlacement à  $r$  composantes est isotope à l'enlacement trivial si et seulement si chacun de ses sous-enlacements à  $k+1$  composantes est trivial.

*Démonstration.* Soit  $(p')$  une sous-suite de la suite  $(p)$ . L'opération faisant correspondre à un enlacement de type  $(p)$  dans  $S^m$  le sous-enlacement correspondant à la sous-suite  $(p')$  induit un homomorphisme de la suite exacte 1.3 dans la suite exacte 1.3 où  $(p)$  est remplacé par  $(p')$ . Sur  $\pi_{m-1}(\vee S^{(q)})$ , cet homomorphisme est induit par l'application rétractant  $\vee S^{(q)}$  sur  $\vee S^{(q')}$ .

Soit  $\varrho$  l'homomorphisme de la suite exacte 1.3 dans la somme directe des suites exactes relatives à toutes les sous-suites de  $(p)$  contenant  $k+1$  éléments, et qui est la somme des homomorphismes précédents. D'après la définition du domaine  $k$ -métastable,  $\varrho$  est injectif sur  $\pi_{p_i+1}(\vee S^{(q)})$  et  $\pi_{m-1}(\vee S^{(q)})$ , donc aussi sur  $L_{(p)}^m$ .



9.3. D'une manière générale, le groupe  $L_{(p)}^m$  est la somme directe des groupes  ${}^0L_{(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})}^m$ , où  $i_1, \dots, i_k$  parcourt les sous-suites  $k$  de  $(1, 2, \dots, r)$  et où  ${}^0L_{(p)}^m$  désigne le sous-groupe de  $L_{(p)}^m$  formé des enlacements dont tous les sous-enlacements à  $r-1$  composantes sont triviaux. La suite exacte 1.3 se scinde en somme directe correspondant à cette décomposition. Voici ce que donne le cas particulier du domaine 2-métastable.

9.4. THÉORÈME. Dans le domaine 2-métastable, on a

$$L_{(p)}^m = \sum_{i < j} L_{p_i, p_j}^m \oplus \sum_{i < j < k} \pi_m(S^{q_i + q_j + q_k}).$$

*Démonstration.* Soit  ${}^0L_{(p)}^m$  le sous-groupe de  $L_{(p)}^m$  formé des enlacements dont tous les sous-enlacements à deux composantes sont triviaux (cette notation concorde avec celle introduite ci-dessus dans le domaine 2-métastable vu la proposition 9.2). Définissons de manière analogue les sous-groupes  ${}^0\Lambda_{(p)}^{(q)}$  et  ${}^0\Pi_{m-1}^{(q)}$  de  $\Lambda_{(p)}^{(q)}$  et  $\Pi_{m-1}^{(q)}$ .

L'homomorphisme  $\varrho$  envoyant la suite exacte 1.3 dans la somme directe des suites exactes relatives aux sous-enlacements à deux composantes (cf. 9.2) est surjectif. On a le diagramme commutatif exact suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} & 0 & & 0 & & 0 & \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \rightarrow & {}^0L_{(p)}^m & \rightarrow & {}^0\Lambda_{(p)}^{(q)} & \rightarrow & {}^0\Pi_{m-2}^{(q)} & \rightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \rightarrow & L_{(p)}^m & \rightarrow & \Lambda_{(p)}^{(q)} & \rightarrow & \Pi_{m-2}^{(q)} & \rightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \rightarrow & \sum_{i < j} L_{p_i, p_j}^m & \rightarrow & \sum_{i < j} \Lambda_{p_i, p_j}^{q_i, q_j} & \rightarrow & \sum_{i < j} \Pi_{p_i, p_j}^{q_i, q_j} & \rightarrow \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ & 0 & & 0 & & 0 & \end{array}$$

En fait la deuxième suite exacte horizontale est somme directe des deux autres.

D'après 8.2,  ${}^0\Lambda_{(p)}^{(q)} = \sum \pi_{p_i}(S^{q_j + q_k - 1})$ ,  $i \neq j, k$  et  $k > j$ , chaque composante étant plongée dans  $\pi_{p_i}(\vee S^{(q)})$  par composition avec  $[l_k, l_j]$ .

On a aussi  ${}^0\Pi_{m-2}^{(q)} = \sum \pi_{m-2}(S^{q_i + q_j + \dots - q_k - 2})$ ,  $j < k$  et  $j < i$ , chaque composante étant plongée dans  $\pi_{m-2}(\vee S^{(q)})$  par composition avec  $[l_k, l_j], l_i]$ .

D'après 8.3,  $w_i$  (produit de Whitehead par  $l_i$ ) applique  $[l_k, l_j] \circ \alpha$ , où  $\alpha \in \pi_{p_i}(S^{q_j + q_k - 1})$ , sur  $[[l_k, l_j], l_i] \circ E^{q_i - 1} \alpha$ . Ainsi  $w$  restreint à  ${}^0\Lambda_{(p)}^{(q)}$  est surjectif et son noyau est isomorphe à  ${}^0L_{(p)}^m$ .

Supposons que  $i < j < k$ . Si  $\alpha \in \pi_{p_i}(S^{q_j + q_k - 1})$ ,  $\beta \in \pi_{p_j}(S^{q_i + q_k - 1})$  et  $\gamma \in \pi_{p_k}(S^{q_i + q_j - 1})$ , d'après 8.3 et l'identité de Jacobi,  $\alpha + \beta + \gamma$  est dans le noyau de  $w$  si et seulement si  $E^{q_i - 1} \alpha = \pm E^{q_j - 1} \beta = \pm E^{q_k - 1} \gamma$  avec des signes convenables (comparer avec le résultat principal de [10]). Ainsi  ${}^0L_{(p)}^m$  est isomorphe à la somme directe des groupes stables  $\pi_m(S^{q_i + q_j + q_k})$ ,  $i < j < k$ .



## 10. Enlacements à deux composantes dans le domaine 2-métastable

Nous commençons par une remarque générale. (Cf. [15]).

10.1. THÉORÈME (Zeeman). *Supposons que  $p_1 \leq p_2$ . Soit  $\lambda_1: L_{p_1, p_2}^m \rightarrow \pi_{p_1}(S^{q_2})$  l'homomorphisme faisant correspondre à un enlacement  $K_1 \cup K_2 \subset S^m$  le premier élément d'enlacement représenté par  $K_1$  dans  $S^m - K_2 \approx S^{q_2}$ . Il existe un homomorphisme  $L: \pi_{p_1}(S^{q_2}) \rightarrow L_{p_1, p_2}^m$  qui est un relèvement de  $\lambda_1$ .*

*Démonstration.* Dans  $S^m$ , soit  $S^{p_2}$  la sous-sphère définie par  $x_i = 0$  pour  $i > p_2$  et soit  $S^{p_1}$  la sous-sphère définie par  $x_i = 0$  pour  $p_1 < i < m-1$  et  $x_m = \sqrt{2}/2$ . Identifions le sous-espace de  $S^m$  défini par  $(x_{p_2+1})^2 + \dots + (x_m)^2 \geq 1/2$  au produit  $D^{p_2+1} \times S^{q_2}$ , de sorte que  $S^{p_1}$  est identifié à  $S^{p_1} \times e$ , où  $S^{p_1}$  est la sous-sphère de  $D^{p_2+1}$  définie par l'intersection de  $S^{p_2}$  et du plan  $x_i = 0$  pour  $i \geq p_1$ .

Soit  $\alpha$  un élément de  $\pi_{p_1}(S^{q_2})$  représenté par une application différentiable  $\varphi: S^{p_1} \rightarrow S^{q_2}$ . Soit  $f: S^{p_1} \rightarrow D^{p_2+1} \times S^{q_2} \subset S^m$  le plongement défini par  $f(x) = (x, \varphi(x))$ . Considéré comme un plongement de  $S^{p_1}$  dans  $S^m$ ,  $f$  est isotope à l'inclusion naturelle; il peut en effet s'étendre suivant un plongement du disque  $D^{p_1+1}$  en utilisant le graphe d'une application différentiable de  $D^{p_1+1}$  dans  $D^{q_2+1}$  qui étend  $\varphi$ .

La classe d'isotopie de l'enlacement formé de  $f$  et de l'inclusion de  $S^{p_2}$  dans  $S^m$  ne dépend que de la classe d'homotopie de  $\varphi$ . On a ainsi défini une application  $L$  qui est un relèvement de  $\lambda_1$ . On vérifie que  $L$  est un homomorphisme en représentant les éléments  $\alpha_0$  et  $\alpha_1$  de  $\pi_{p_1}(S^{q_2})$  par des applications  $\varphi_0$  et  $\varphi_1$  envoyant respectivement  $D_-^{p_1}$  et  $D_+^{p_1}$  sur le point base  $e$ , et en représentant  $\alpha_0 + \alpha_1$  par l'application  $\varphi$  égale à  $\varphi_0$  sur  $D_+^{p_1}$  et à  $\varphi_1$  sur  $D_-^{p_1}$ .

10.2. PROPOSITION. *Pour  $p_1 \leq p_2$  et  $p_1 + 3p_2 \leq 3m - 6$ , on a la suite exacte:  $\pi_{m-1}(S^{q_1+q_2-1}) \xrightarrow{\mu} L_{p_1, p_2}^m \xrightarrow{\lambda} \pi_{p_1}(S^{q_2}) + \pi_{p_2}(S^{q_1}) \xrightarrow{w} \pi_{m-2}(S^{q_1+q_2-1}) \rightarrow \dots$  où  $w$  restreint à chaque composante est la suspension itérée au signe près.*

*Démonstration.* Partons de la suite exacte 1.3. Dans la décomposition de Hilton (8.2), seuls figurent les termes qui sont la composition avec

$$\begin{array}{llll} \iota_2 & \text{et} & [\iota_2, \iota_1] & \text{dans} & A_{p_1}^{(q)} \\ \iota_1 & \text{et} & [\iota_2, \iota_1] & \text{dans} & A_{p_2}^{(q)} \\ . & & [\iota_2, \iota_1] \cdot [[\iota_2, \iota_1], \iota_1] & \text{et} & [[\iota_2, \iota_1], \iota_2] & \text{dans} & \Pi_{m-2}^{(q)} \end{array}$$

D'après 8.3,  $w$  envoie isomorphiquement par suspension les composantes  $[\iota_2, \iota_1]$  de  $A_{(p)}^{(q)}$  sur les composantes  $[[\iota_2, \iota_1], \iota_1]$  et  $[[\iota_2, \iota_1], \iota_2]$  de  $A_{m-2}^{(q)}$ .

On peut donc remplacer dans la suite exacte 1.3 les termes  $A_{(p)}^{(q)}$  et  $\Pi_{m-2}^{(q)}$  par les quotients obtenus en négligeant les composantes, d'où la proposition.

Il faut encore remarquer que si  $p_1 + 3p_2 = 3m - 6$ , on a des composantes dans  $\Pi_{m-1}^{(q)}$  correspondant à des produits basiques de poids 4, mais qu'elles sont l'image par  $w$  des composantes correspondant à des produits basiques de poids 3 dans  $A_{(p+1)}^{(q)}$ .

Soit  $N$  le noyau de l'homomorphisme  $\lambda_1: L_{p_1, p_2}^m \rightarrow \pi_{p_1}(S^{q_2})$ . D'après 10.1, on a

$$L_{p_1, p_2}^m = N \oplus \pi_{p_1}(S^{q_2}).$$

D'autre part, la proposition 10.2 donne le

10.3. COROLLAIRE. *Avec les hypothèses de 10.2, on a la suite exacte:*

$$\pi_{m-1}(S^{q_1+q_2-1}) \xrightarrow{\mu} N \xrightarrow{\lambda_2} \pi_{p_2}(S^{q_1}) \rightarrow \pi_{m-2}(S^{q_1+q_2-1})$$

où le dernier homomorphisme est la suspension itérée.

Soit  $F^q$  l'espace des applications de degré 1 de  $S^q$  laissant fixe le pôle nord de  $S^q$ . Par suspension itérée,  $F^q$  s'envoie dans  $F^{q+k}$  et  $F$  désigne la limite des  $F^q$ . Rappelons que  $\pi_i(F^q) = \pi_{i+q}(S^q)$ .

Nous allons montrer que  $N$  est isomorphe à  $\pi_{m-q_1-q_2}(F, F^{q_1})$ . Plus précisément, on a :

10.4. PROPOSITION. *Si  $p_1 \leq p_2$  et  $p_1 + 3p_2 < 3m - 6$  on a le diagramme commutatif (au signe près) exact:*

$$\begin{array}{ccccc} \pi_{m-1}(S^{q_1+q_2-1}) & \xrightarrow{\mu} N & \xrightarrow{\lambda_2} & \pi_{p_2}(S^{q_1}) & \rightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & \downarrow & \\ \rightarrow \pi_{m-q_1-q_2}(F) & \rightarrow \pi_{m-q_1-q_2}(F, F^{q_1}) & \rightarrow \pi_{m-q_1-q_2-1}(F^{q_1}) & \rightarrow \end{array}$$

où la deuxième ligne est la suite exacte de la paire  $(F, F^{q_1})$  et où les flèches verticales sont des isomorphismes.

La démonstration sera basée sur l'interprétation comme groupe de cobordisme des groupes du diagramme précédent, et sur une définition de l'invariant de Hopf qui généralise celle de [10].

Rappelons (cf. [13]) tout d'abord que les éléments de  $\pi_n(F^q) = \pi_{n+q}(S^q)$  peuvent être représentés par des sous-variétés compactes  $V$  avec champ de repères normaux dans  $R^{n+q}$ , la codimension de  $V$  étant  $q$ . Deux telles sous-variétés  $V_0$  et  $V_1$  représentent le même élément de  $\pi_n(F^q)$  s'il existe dans  $I \times R^{n+q}$  une sous-variété  $W$  avec champ de repères normaux telle que  $\partial W = (0 \times V_0) \cup (1 \times V_1)$ .

10.5. LEMME. *Tout élément de  $\pi_n(F, F^q)$  peut être représenté par une sous-variété compacte  $V$  de dimension  $n$  dans  $R^{n+q+N}$ ,  $N$  grand, avec un champ de repères normaux et un bord  $\partial V \subset R^{n+q}$ , les  $N-1$  derniers vecteurs du champ le long de  $\partial V$  étant les  $N-1$  derniers vecteurs de base de  $R^{n+q+N}$ . Deux telles sous-variétés  $V_0$  et  $V_1$  dans  $R^{n+q+N}$  représentent le même élément de  $\pi_n(F, F^q)$  s'il existe dans  $I \times R^{n+q+N}$  une sous-variété  $W$  avec un champ de repères normaux telle que  $\partial W = (0 \times V_0) \cup (1 \times V_1) \cup V$ , où  $V$  est une sous-variété dans  $I \times R^{n+q}$  le long de laquelle les  $N-1$  derniers vecteurs du champ sont les derniers vecteurs de base.*

*Démonstration.* Les éléments de  $\pi_n(F, F^q)$  peuvent être représentés par des applications différentiables  $f$  du disque  $D^{n+q+N+1}$  dans  $D^{q+N+1}$ ,  $N$  grand, dont la restriction

à  $S^{n+q+N}$  est la suspension itérée d'une application de  $S^{n+q-1}$  dans  $S^q$ . Soit  $R^{n+q+N+1}$  le demi-espace défini par  $x_{n+q+N+1} \geq 0$ ; la paire  $(R_+^{n+q+N+1}, R^{n+q-1})$  est identifiée au complémentaire d'un point dans la paire  $(D^{n+q+N+1}, S^{n+q-1})$ . L'image inverse par  $f$  d'une valeur régulière est une sous-variété  $V'$  avec un champ de repères normaux dans  $R_+^{n+q+N+1}$  dont le bord  $\partial V'$  est contenu dans  $R^{n+q-1}$ , les  $N+1$  derniers vecteurs du champ le long de  $\partial V'$  étant les derniers vecteurs de base. Inversement, par la construction de Thom-Pontrjagin, une telle sous-variété  $V'$  peut être induite par une application différentiable  $f$ .

Soit  $V \subset R^{n+q+N}$  une sous-variété telle que dans l'énoncé du lemme. Considérons  $R^{n+q+N}$  comme le bord de  $R_+^{n+q+N+1}$  et  $V$  comme une sous-variété avec un champ de repères normaux dans  $R^{n+q+N+1}$  en complétant le repère avec le dernier vecteur de base. Par une isotopie de  $R^{n+q+N+1}$ , fixe sur  $R^{n+q-1}$ , nous pouvons pousser  $V - \partial V$  dans l'intérieur de  $R^{n+q+N+1}$  pour obtenir une sous-variété  $V'$  comme ci-dessus.

**10.6. Démonstration de la proposition.** Nous avons vu (cf. 4.1) que les éléments de  $L_{(p)}^m = \mathcal{L}_{(p)}^{(q)}$  peuvent être représentés par les classes de cobordisme de paires de sous-variétés disjointes  $V_1$  et  $V_2$  dans  $S^{m-1}$ , avec un champ de repères normaux, et  $\partial V_1 = S_1$ ,  $\partial V_2 = S_2$  avec le champ naturel, où  $(S_1, S_2)$  est l'enlacement trivial de type  $(p_1 - 1, p_2 - 1)$  dans  $S^{m-1}$ . De plus  $V_1$  et  $V_2$  bordent dans  $D_-^m$  des sous-variétés avec champ  $W_1$  et  $W_2$  telles que  $\partial W_i = D_-^{p_i} \cup V_i$ . En général, ces deux sous-variétés se rencontrent. Cependant si  $(V_1, V_2)$  représente un élément du sous-groupe  $N$ , alors on peut construire  $W_1$  et  $W_2$  de sorte que  $W_2 \cap \partial W_1 = \emptyset$ .

En effet  $V_1$  et  $V_2$  sont les images inverses des pôles nord de  $S^{q_1}$  et  $S^{q_2}$  par une application différentiable  $f$  de  $S^{m-1} - (S_1 \cup S_2)$  dans  $S^{q_1} \vee S^{q_2}$  dont la restriction aux voisinages tubulaires de  $S_1$  et  $S_2$  est naturelle (cf. 4.1 et 3.2-4). Soit  $f_2: S^{m-1} - S_2 \rightarrow S^{q_2}$  l'application qui étend  $f$  composé avec la rétraction de  $S^{q_1} \vee S^{q_2}$  sur  $S^{q_2}$ . Désignons par  $D_1$  et  $D_2$  les disques  $D_-^{p_1}$  et  $D_-^{p_2}$ . Par hypothèse, l'application  $f_2$  peut s'étendre suivant une application  $\tilde{f}_2: D^m - D_2 \rightarrow S^{q_2}$  dont la restriction à un voisinage tubulaire de  $D_2$  est naturelle. Comme l'élément  $\alpha$  de  $L_{p_1, p_2}^m$  représenté par  $f$  est dans  $N$ , on peut construire l'extension  $\tilde{f}_2$  telle que  $\tilde{f}_2(D_1)$  soit le point base de  $S^{q_2}$ ; en effet, l'élément de  $\pi_{p_1}(S^{q_2})$  représenté par l'application égale à l'application constante sur  $D_1$  et à  $f_2$  sur un disque bordé par  $S_1$  dans  $S^{m-1}$  est justement l'élément  $\lambda_1(\alpha)$  qui est nul. Ainsi l'image inverse  $W_2$  du pôle nord de  $S^{q_2}$  par  $\tilde{f}_2$  ne rencontre pas le bord  $\partial W_1 = V_1 \cup D_1$ .

Remarquons en passant qu'il en résulte que si  $K_1 \cup K_2$  est un enlacement de type  $(p)$  dans  $S^m$  dont le premier coefficient d'enlacement est nul, il existe des sous-variétés avec champ de repères normaux  $M_1$  et  $M_2$  bordées par  $K_1$  et  $K_2$  et telles que  $\partial M_1 \cap M_2 = \emptyset$ .

Nous pouvons supposer que  $W_1$  et  $W_2$  se coupent transversalement. Ainsi  $V = W_1 \cap W_2$  est une sous-variété avec un champ de repères normaux dans l'intérieur de  $D_-^m$  et un bord dans  $D_2$ . Après identification de la paire  $(\text{int } D_-^m, \text{int } D_2)$  à la paire

$(R^m, R^{p_2})$ , en vertu du lemme 10.5, la sous-variété  $V$  représente un élément de  $\pi_{m-q_1-q_2}(F, F^{q_1})$ .

Cet élément est indépendant du choix particulier des sous-variétés  $V_i$  dans leur classe de cobordisme et des  $W_i$ . Si  $V'_i$  et  $W'_i$  est un autre choix et si  $M$  est un cobordisme reliant  $V$  à  $V'$  (cf. 4.1), en recollant  $W'_i$  à  $W_i$  à l'aide de  $M_i$ , on obtient dans  $S^m$  deux sous-variétés  $N_1$  et  $N_2$  avec un champ de repères normaux dont le bord est l'enlacement trivial de type  $(p)$ ; de plus  $\partial N_1 \cap N_2 = \emptyset$  et  $N_1 \cap N_2$  représente la différence des éléments de  $\pi_{m-q_1-q_2}(F, F^{q_1})$  obtenus à partir des  $W_i$  et  $W'_i$ . Mais  $N_1 \cap N_2$  est cobordant à 0, car on peut séparer  $N_1$  de  $N_2$  par des isotopies fixes sur  $\partial N_1$  et  $\partial N_2$  qui les poussent dans deux hémisphères complémentaires.

On a ainsi défini une application de  $N$  dans  $\pi_{m-q_1-q_2}(F, F^{q_1})$  qui sera la deuxième flèche verticale de 10.4. On vérifie aisément que c'est un homomorphisme. La troisième flèche verticale est l'isomorphisme naturel. Le deuxième carré du diagramme commute, car l'élément  $\lambda_2(\alpha)$  est représenté par  $D_2 \cap W_1$ .

La première flèche verticale est aussi l'isomorphisme naturel ( $\pi_{m-1}(S^{q_1+q_2-1})$  est stable). L'homomorphisme de  $\pi_{m-1}(S^{q_1+q_2-1})$  dans  $N$  est défini par  $\alpha \rightarrow \mu([I_2, I_1] \cdot \alpha)$  où  $\mu$  est défini en 5.2. La construction de l'invariant de HOPF donnée dans [10] et dont la construction précédente est une généralisation, montre que le premier carré du diagramme est commutatif. Le lemme des cinq montre donc que  $N$  est isomorphe à  $\pi_{m-q_1-q_2}(F, F^{q_1})$ .

Finalement, en utilisant l'isomorphisme

$$\pi_{m-q_1-q_2}(F, F^{q_1}) \approx \pi_{m-q_1-q_2}(SO, SO_{q_1}) \quad \text{pour} \quad 3p_1 + p_2 \leq 3m - 6$$

démontré par JAMES [12], on obtient le

10.7. THÉORÈME. *Dans le domaine 2-métastable:  $p_1 \leq p_2$  et  $p_1 + 3p_2 < 3m - 6$ ,*

$$L_{p_1, p_2}^m = \pi_{p_1}(S^{q_2}) \oplus \pi_{m-q_1-q_2}(SO, SO_{q_1})$$

avec  $q_i = m - p_i - 1$ .

Les enlacements du premier facteur sont construits explicitement dans 10.1 et ceux du second dans [4], 8.13.

*Université de Genève  
Institut de Mathématique  
Genève*

#### RÉFÉRENCES

- [1] A. L. BLAKERS and W. S. MASSEY, *On the homotopy groups of a triad*, II, Ann. of Math., 55 (1952), 192–201.
- [2] A. HAEFLIGER, *Plongements différentiables dans le domaine stable*, Comment. Math. Helv., 37 (1963), 155–176.
- [3] —, *Plongements de variétés dans le domaine stable*, Séminaire Bourbaki, 15e année, 1962–63, no. 245.

- [4] ———, *Differentiable embeddings of  $S^n$  in  $S^{n+q}$  for  $q > 2$* , à paraître aux Ann. of Math.
- [5] M. W. HIRSCH, *Obstruction theories for smoothing manifolds and maps*, Bull. Amer. Math. Soc.
- [6] J. LEVINE, *A classification of differentiable knots*, Ann. of Math.
- [7] S. SMALE, *On the structure of manifolds*, Amer. J. of Math., 84 (1962), 387–399.
- [8] C. T. C. WALL, *Classification problems in differential topology IV, Thickenings*, to appear.
- [9] E. C. ZEEMAN, *Unknotting combinatorial balls*, Ann. of Math., 78 (1963), 501–526.
- [10] A. HAEFLIGER and B. STEER, *Symmetry of linking coefficients*, Comment. Math. Helv., 39 (1965), 259–270.
- [11] P. J. HILTON, *On the homotopy groups of the union of spheres*, J. London Math. Soc., 30 (1955), 154–171.
- [12] I. M. JAMES, *On the iterated suspension*, Quart. J. Math. Oxford, 5 (1954), 1–10.
- [13] L. PONTRJAGIN, *Smooth manifolds and their applications in homotopy theory*, Trudy Mat. Inst. im. Steklov, 45 (1955) and AMS Translations Series 2, 11, 1–114.
- [14] B. STEER, *Generalized Whitehead products*, Quart. J. of Math. Oxford, 14 (1963), 29–40.
- [15] E. C. ZEEMAN, *Linking spheres*, Abh. Math. Sem. Hamburg, 24 (1960), 149–152.

Reçu le 10 novembre 1965