

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 40 (1965-1966)

**Artikel:** Über die Eigenwerte der Summe zweier selbstadjungierter Operatoren.  
**Autor:** Zwahlen, Bruno Peter  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-30630>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über die Eigenwerte der Summe zweier selbstadjungierter Operatoren

VON BRUNO PETER ZWAHLEN

## Einleitung

Diese Arbeit befaßt sich

1. mit Extremalprinzipien für Summen von Eigenwerten eines selbstadjungierten linearen Operators in einem unitären Vektorraum  $L$ ,
2. mit linearen Ungleichungen zwischen gewissen Eigenwerten  $\alpha_{i_r}, \beta_{j_r}, \gamma_{k_r}$  zweier selbstadjungierter linearer Operatoren  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  und ihrer Summe  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ .

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{i_r} + \sum_{r=1}^n \beta_{j_r} \geq \sum_{r=1}^n \gamma_{k_r}.$$

Das Problem, Eigenwerte einer Differentialgleichung abzuschätzen, hat schon DUNKERLEY [3] auf dieses Thema geführt; entscheidende Fortschritte wurden dann durch die Ideen von WEYL [16] und COURANT erzielt. Über die weitere Entwicklung (bis 1960) gibt [2] eine Übersicht. Im folgenden werden einige neue Resultate für Summen von Eigenwerten abgeleitet.

Ausgangspunkt unserer Betrachtungen ist die Spurfunktion eines Operators. Diese Funktion ist für alle linearen Teilräume von  $L$  definiert und verallgemeinert in natürlicher Weise den RAYLEIGHschen Quotienten. Mit ihrer Hilfe werden die wichtigsten Extremalprinzipien für Summen von Eigenwerten neu formuliert und bewiesen.

Damit sind die Mittel bereitgestellt, die es uns erlauben, Aussagen über lineare Ungleichungen zu machen. Nach einigen allgemeinen Bemerkungen werden Resultate von HORN [11] diskutiert und zum Teil ergänzt. Dann wird eine Methode zur Herleitung weiterer Ungleichungen beschrieben. Die meisten Beweise sind algebraisch-konstruktiver Natur. Sie bestehen darin, Teilräume von  $L$  zu konstruieren, die gewissen Orthogonalitätsbedingungen genügen, und auf diese Räume die Spurfunktion anzuwenden.

Während sich die beiden ersten Kapitel mit Operatoren in einem endlich-dimensionalen Vektorraum befassen, wird im dritten Kapitel gezeigt, wie die gefundenen Resultate auf bestimmte Operatoren in HILBERT-Räumen zu übertragen sind.

Die Anregung zu dieser Arbeit stammt von Herrn Professor Dr. J. HERSCH. Ihm möchte ich an dieser Stelle für sein stetes Interesse und für viele wertvolle Hinweise und Anregungen herzlich danken. Ferner bin ich Herrn Professor A. HORN, University of California, Los Angeles, sehr zu Dank verpflichtet. Er



hat Herrn Professor J. Hersch und mir wichtige, noch unveröffentlichte Resultate mitgeteilt<sup>1)</sup>. Seine Überlegungen haben meine Arbeit, insbesondere die Abschnitte 2.2. und 2.3., stark beeinflußt.

Schließlich möchte ich dem INSTITUT BATTELLE in Genf dafür danken, daß es die Fertigstellung dieser Arbeit unterstützt hat.

## Inhaltsverzeichnis

1. Extremalprinzipien
  - 1.1. Bezeichnungen; 1.2. Operatoren; 1.3. Spurfunktion eines Operators; 1.4. Extremalprinzipien
2. Ungleichungen
  - 2.1. Problemstellung; 2.2. Allgemeine Bemerkungen; 2.3.  $n = 1, 2, 3$ ; 2.4.  $n \geq 4$
3. Operatoren in HILBERT-Räumen
  - 3.1. Vollstetige Operatoren; 3.2. Differentialoperatoren

### Literaturverzeichnis

## 1. Extremalprinzipien

### 1.1. Bezeichnungen

In einem  $N$ -dimensionalen unitären Vektorraum  $L$  seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$\alpha, \beta, \xi$  komplexe Zahlen,  $\bar{\xi}$  konjugiert komplex zu  $\xi$ ;  $a, b, x$  Elemente aus  $L$ ,  $o$  Nullvektor;  $(x, y)$  Skalarprodukt;  $x \perp y$  Orthogonalität;  $\{u_r\}_{r=1, \dots, N}$  Basis von  $L$ ,  $o$ . orthogonale,  $on$ . orthonormierte Basis;  $A_m, L_n, X_r$  lineare Teilräume,  $\dim L_n = n$ ,  $[o]$  trivialer Teilraum;  $X_r + Y_s$  Summenraum,  $\oplus$  direkte Summe;  $[a, b, \dots, x]$  lineare Hülle von  $a, b, \dots, x$ , auch  $[x, L_n]$  an Stelle von  $[x] + L_n$ ;  ${}^\perp L_n$  orthogonaler Komplementärraum von  $L_n$ ;  $X_r \perp Y_s$  Orthogonalität von Teilräumen, auch  $x \perp L_n$  an Stelle von  $[x] \perp L_n$ ;  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  lineare selbstadjungierte Operatoren.

### 1.2. Operatoren

$\mathfrak{A}: L \rightarrow L$  linearer selbstadjungierter Operator

$x \rightarrow \mathfrak{A}x, (x, \mathfrak{A}y) = (\mathfrak{A}x, y)$  für alle  $x, y$ .

Es wird stets vorausgesetzt, daß die  $N$  reellen Eigenwerte eines Operators der Größe nach durchnummeriert und die entsprechenden Eigenvektoren orthonormiert seien.

---

<sup>1)</sup> Inzwischen im Pac. J. of Math. erschienen [11].

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N,$$

$$\mathfrak{A} a_r = \alpha_r a_r, (a_r, a_s) = \delta_{rs} \quad (r, s = 1, 2, \dots, N).$$

Die Eigenräume  $[a_1, a_2, \dots, a_r]$  werden mit  $A_r$  bezeichnet. Bezüglich einer *on.* Basis  $\{u_r\}$  wird  $\mathfrak{A}$  durch eine hermitesche Matrix  $A_{(u)} = \{\alpha_{rs}\}_{(u)}$  dargestellt.

$$\mathfrak{A} u_r = \sum_{s=1}^N \alpha_{rs} u_s, \quad \alpha_{rs} = (\mathfrak{A} u_r, u_s) = (u_r, \mathfrak{A} u_s) = \overline{(\mathfrak{A} u_s, u_r)} = \overline{\alpha_{sr}}.$$

Beschreibt die unitäre Matrix  $T = \{\tau_{rs}\}$ ,  $T^* = \overline{T}^{-1}$ , die Basistransformation  $\{u_r\} \rightarrow \{v_s\}$ ,

$$v_s = \sum_{t=1}^N \tau_{st} u_t, \text{ so ist } A_{(v)} = T A_{(u)} T^*.$$

Insbesondere ist  $A_{(a)} = \{\alpha_r \delta_{rs}\}$ . Daneben werden natürlich auch Diagonaldarstellungen vorkommen, in denen die Diagonalelemente (Eigenwerte) nicht mehr der Größe nach geordnet sind.

### 1.3. Die Spurfunktion eines Operators

Unter dem *RAYLEIGHschen Quotienten*  $R^A$  von  $\mathfrak{A}$  versteht man die Funktion

$$R^A : L \rightarrow \mathcal{R}$$

$$x \rightarrow R^A(x) = \frac{(x, \mathfrak{A}x)}{(x, x)}.$$

Ihr Definitionsbereich erstreckt sich über alle  $x \neq o$ . Da  $R^A(\lambda x) = R^A(x)$  für  $\lambda \neq 0$  ist, läßt sich  $R^A$  als Funktion auf der Menge der 1-dimensionalen Teilräume von  $L$  interpretieren. Es ist deshalb naheliegend, den Definitionsbereich auf beliebige Teilräume  $L_n \subset L$  zu erweitern.

Definition der *Spurfunktion*

$$R^A(L_n) = \sum_{r=1}^n R^A(u_r)$$

$$L_n \subset L, 1 \leq n \leq N, \{u_r\}_{r=1, \dots, n} \text{ o. Basis von } L_n.$$

#### Bemerkungen

1. Der Funktionswert  $R^A(L_n)$  hängt nicht von der in der Definition auftretenden Basis ab. Eine kurze Rechnung zeigt nämlich, daß für 2 beliebige *o.* Basen  $\{u_r\}, \{v_s\}$  von  $L_n$

$$\sum_{r=1}^n R^A(u_r) = \sum_{s=1}^n R^A(v_s)$$

gilt.

## 2. Spezialfälle

$$n = 1 \quad R^A(L_1) = R^A(x), [x] = L_1$$

$$n = N \quad R^A(L) = \sum_{r=1}^N \alpha_r = \text{Spur } (\mathfrak{A}).$$

Allgemein

$$R^A(L_n) = \text{Spur } (\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P})$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{A}\mathfrak{P} : L_n \rightarrow L_n \text{ Teil von } \mathfrak{A} \text{ in } L_n$$

$$\mathfrak{P} : L \rightarrow L_n \text{ o. Projektion.}$$

3. Ist  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ , so gilt für alle  $L_n \subset L$ 

$$R^C(L_n) = R^A(L_n) + R^B(L_n).$$

Die Spurfunktion ist schon in verschiedenen Arbeiten (zunächst implizit) verwendet worden. Sie gestattet einfache Formulierungen und Beweise der Extremalprinzipien für Summen von Eigenwerten. Siehe [1], [2], [4], [5], [7], [8], [10], [13], [17].

## 1.4. Extremalprinzipien

In diesem Abschnitt werden zunächst in der üblichen Weise die Eigenwerte  $\alpha_r$  von  $\mathfrak{A}$  als Extremalwerte des RAYLEIGHschen Quotienten eingeführt. Anschließend wird ein Extremalprinzip von WIELANDT, das eine beliebige Summe von Eigenwerten charakterisiert, mit Hilfe der Spurfunktion formuliert.

## 1.4.1. Es ist

$$\alpha_i = \text{minimum } R^A(x) = \text{maximum } R^A(y) = R^A(a_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (1)(2)$$

$$x \in A_i \quad y \perp A_{i-1}$$

$$x \neq o \quad y \neq o \quad A_o = [o].$$

Nach POINCARÉ bzw. FISCHER/WEYL/COURANT kann  $\alpha_i$  auch «direkt», das heißt ohne explizite Verwendung der Eigenräume  $A_r$ , charakterisiert werden.

$$\alpha_i = \text{maximum minimum } R^A(x) = \text{minimum maximum } R^A(y) \quad (3)(4)$$

$$X_i \subset L \quad x \in X_i \quad Y_{i-1} \subset L \quad y \perp Y_{i-1}$$

$$(i = 1, 2, \dots, N)$$

$$Y_o = [o].$$

Dabei ist  $X_i = A_i$  optimal (bzw.  $Y_{i-1} = A_{i-1}$ ), ohne im allgemeinen einziger optimaler Teilraum zu sein. Siehe [15].

## 1.4.2. Summen von Eigenwerten

Aus der Definition der Spurfunktion und aus (1)–(4) folgt unmittelbar, daß

$$\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \dots + \alpha_{i+n} = \text{minimum } R^A(X_n) \quad (5)$$

$$X_n \subset A_{i+n}$$

$$= \text{maximum } R^A(Y_n) \quad (6)$$

$$Y_n \perp A_i$$

$$= R^A([a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_{i+n}]) \quad (i \geq 0, n \geq 1, N \geq n + i)$$

und

$$\alpha_{i+1} + \alpha_{i+2} + \dots + \alpha_{i+n} = \text{maximum } \text{minimum } R^A(X_n) \quad (7)$$

$$X_{i+n} \subset L \quad X_n \subset X_{i+n}$$

$$= \text{minimum } \text{maximum } R^A(Y_n) \quad (8)$$

$$Y_i \subset L \quad Y_n \perp Y_i.$$

Siehe [1], [2], [4], [5], [7], [8], [10], [13], [17].

Es sei nun  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ ,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N$ , ein geordnetes  $n$ -Tupel von Indizes. Dann gilt:

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{i_r} = \text{minimum}_{\substack{X_n \\ \dim(X_n \cap A_{i_r}) \geq r \\ (r=1, 2, \dots, n)}} R^A(X_n) = \text{maximum}_{\substack{Y_n \\ \dim(Y_n \cap {}^\perp A_{i_{r-1}}) \geq n+1-r \\ (r=1, 2, \dots, n)}} R^A(Y_n) \quad (9) \quad (10)$$

$$= R^A([a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_n}]).$$

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{i_r} = \text{maximum}_{\substack{X_{i_1} \subset \dots \subset X_{i_n} \subset L \\ \dim(X_n \cap X_{i_r}) \geq r \\ (r=1, 2, \dots, n)}} \text{minimum } R^A(X_n) \quad (11)$$

$$= \text{minimum}_{\substack{Y_{i_1-1} \subset Y_{i_2-1} \subset \dots \subset Y_{i_n-1} \subset L \\ \dim(Y_n \cap {}^\perp Y_{i_{r-1}}) \geq n+1-r \\ (r=1, 2, \dots, n)}} \text{maximum } R^A(Y_n) \quad (12)$$

$$Y_{i_1-1} \subset Y_{i_2-1} \subset \dots \subset Y_{i_n-1} \subset L \quad Y_n$$

$$\dim(Y_n \cap {}^\perp Y_{i_{r-1}}) \geq n+1-r$$

$$(r=1, 2, \dots, n).$$

Siehe [1], [17].

*Beweis*

(9):  $L_n$  erfülle die Bedingungen  $\dim (L_n \cap A_{i_r}) \geq r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ). Dann existiert in  $L_n$  eine o. Basis  $\{x_r\}_{r=1, 2, \dots, n}$ , so daß

$$[x_1, x_2, \dots, x_r] = L_r \subset A_{i_r} (r = 1, 2, \dots, n), L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n.$$

Damit ist nach (1)

$$\alpha_{i_r} \leq R^A(x_r), \sum_{s=1}^r \alpha_{i_s} \leq R^A(L_r) (r = 1, 2, \dots, n), \text{ also gilt (9).}$$

(10): Erfüllt  $L_n$  hingegen die Bedingungen  $\dim (L_n \cap {}^\perp A_{i_{r-1}}) \geq n + 1 - r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ), so existiert eine o. Basis  $\{y_r\}_{r=1, 2, \dots, n}$ , so daß

$$[y_1, y_2, \dots, y_r] = L_r \perp A_{i_{n+1-r-1}} (r = 1, 2, \dots, n), L_1 \subset L_2 \subset \dots \subset L_n.$$

Damit ist nach (2)

$$\alpha_{i_r} \geq R^A(y_{n+1-r}), \sum_{r=1}^n \alpha_{i_r} \geq R^A(L_n), \text{ also gilt (10).}$$

(11): Es ist zu zeigen, daß sich zu jeder geschachtelten Folge von Teilräumen  $X_{i_1} \subset X_{i_2} \subset \dots \subset X_{i_n} \subset L$  ein  $L_n$  so konstruieren läßt, daß

$$\dim (L_n \cap X_{i_r}) \geq r \text{ und } \dim (L_n \cap {}^\perp A_{i_{r-1}}) \geq n + 1 - r (r = 1, 2, \dots, n)$$

ist.

Diese Konstruktion wird durch folgenden Hilfssatz gesichert:

Es seien

$$M_{j_1} \subset M_{j_2} \subset \dots \subset M_{j_n}, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq N,$$

$$N_{k_1} \subset N_{k_2} \subset \dots \subset N_{k_n}, 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq N,$$

2 geschachtelte Folgen von Teilräumen aus  $L$  mit

$$\dim M_{j_r} + \dim N_{k_{n+1-r}} = j_r + k_{n+1-r} \geq N + 1 (r = 1, 2, \dots, n).$$

Dann folgt:

Es existieren zwei o. Vektorsysteme

$$\{x_r\}_{r=1, 2, \dots, n}, (x_r, x_s) = \delta_{rs}, \quad \{y_s\}_{s=1, \dots, n}, (y_r, y_s) = \delta_{rs},$$

so daß:

- a)  $x_r \in M_{j_r} \quad (r = 1, 2, \dots, n)$
- b)  $y_s \in N_{k_s} \quad (s = 1, 2, \dots, n)$
- c)  $[x_1, x_2, \dots, x_n] = [y_1, y_2, \dots, y_n] = L_n.$

Der Fall  $n = 1$  besagt einfach, daß  $M_{j_1} \cap N_{k_1} \neq [0]$ . Davon ausgehend folgt der Beweis durch Induktion nach  $n$ . Siehe [1].

Setzt man nun  $M_{j_r} = X_{i_r}$ ,  $N_{k_s} = {}^\perp A_{i_{n+1-s}-1}$ , so ist

$$j_r = i_r, k_s = N + 1 - i_{n+1-s} \quad \text{und} \quad j_r + k_{n+1-r} = i_r + N + 1 - i_r = N + 1.$$

Demnach gibt es zu jeder Folge  $X_{i_1} \subset X_{i_2} \subset \dots \subset X_{i_n} \subset L$  einen Teilraum  $L_n = [x_1, x_2, \dots, x_n] = [y_1, y_2, \dots, y_n]$ , so daß

$$x_r \in X_{i_r}, y_r \perp A_{i_{r-1}} \quad (r = 1, 2, \dots, n).$$

Damit ist  $\dim (L_n \cap X_{i_r}) \geq r$  und nach (10)

$$\alpha_{i_r} \geq R^A(y_r), \sum_{r=1}^n \alpha_{i_r} \geq R^A(L_n) \geq \underset{X_n}{\text{minimum}} R^A(X_n) \\ \dim (X_n \cap X_{i_r}) \geq r.$$

Folglich gilt (11).

(12): Nach dem Hilfssatz existieren in diesem Falle zu jeder Folge

$$Y_{i_1-1} \subset \dots \subset Y_{i_n-1} \subset L$$

ein  $L_n$  und darin zwei *on.* Basen  $\{u_r\}, \{v_s\}$ , so daß

$$u_r \perp Y_{i_{r-1}}, v_s \in A_{i_s}.$$

Also

$$\sum_{s=1}^n \alpha_{i_s} \leq R^A(L_n) \leq \underset{Y_n}{\text{maximum}} R^A(Y_n) \\ \dim (Y_n \cap {}^\perp Y_{i_{r-1}}) \geq n + 1 - r.$$

*Bemerkung*

(1)–(10) sind natürlich als Spezialfälle in (11) bzw. (12) enthalten. Die Basen  $\{x_r\}$ ,  $\{y_s\}$  bzw.  $\{u_r\}$ ,  $\{v_s\}$  sind die im Extremalprinzip von WIELANDT auftretenden Vektorsysteme. Die Spurfunktion ermöglicht es, zur Berechnung von  $R^A(L_n)$  eine beliebige o. Basis heranzuziehen. Siehe [1], [2], [7], [8], [10], [17].

**2. Ungleichungen****2.1. Problemstellung**

Im folgenden seien  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  immer zwei beliebige selbstadjungierte Operatoren und  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ .

Eigenwerte:

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_N, \beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_N$$

und

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_N.$$

Bezüglich der *on.* Basis  $\{a_r\}$  ist dann

$$C_{(a)} = A_{(a)} + T^* B_{(b)} T,$$

wobei die unitäre Matrix  $T$  den Übergang  $\{a_r\} \rightarrow \{b_s\}$  beschreibt, und  $A_{(a)}$ ,  $B_{(b)}$  Diagonaldarstellungen sind (vergleiche 1.2.).

Ferner seien  $i, j, k$  drei feste, geordnete  $n$ -Tupel von Indizes.

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_n), \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N,$$

$$j = (j_1, j_2, \dots, j_n), \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq N,$$

$$k = (k_1, k_2, \dots, k_n), \quad 1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq N.$$

In diesem Kapitel soll nun untersucht werden, welchen Bedingungen die Indizes  $i, j, k$  unterworfen werden müssen, damit

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{i_r} + \sum_{r=1}^n \beta_{j_r} \geq \sum_{r=1}^n \gamma_{k_r}$$

(oder  $\leq$ )

allgemein gilt, das heißt für jedes Paar  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ .

Umgekehrt stellt sich die Frage, welche notwendigen Bedingungen aus der allgemeinen Gültigkeit solcher Ungleichungen folgen. Wir beschränken uns also von vornherein auf lineare Ungleichungen und verweisen im übrigen auf die zusammenfassende Darstellung [2].

## 2.2. Allgemeine Bemerkungen

1. Vergleiche [11]. Es gelte allgemein

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{i_r} + \sum_{r=1}^n \beta_{j_r} \geq \sum_{r=1}^n \gamma_{k_r}. \quad (13)$$

Aus  $Sp(\mathfrak{A}) + Sp(\mathfrak{B}) = Sp(\mathfrak{C}) = \sum_{r=1}^N \gamma_r$  folgt dann sofort die zu (13) komplementäre Ungleichung

$$\sum_{r=1}^{N-n} \alpha_{i'_r} + \sum_{r=1}^{N-n} \beta_{j'_r} \leq \sum_{r=1}^{N-n} \gamma_{k'_r}, \quad (14)$$

wobei  $i', j', k'$  für die (bezüglich  $\{1, 2, \dots, N\}$ ) zu  $i, j, k$  komplementären Indizesfolgen stehen.

Durch Einsetzen der Eigenwerte von  $(-\mathfrak{A})$  und  $(-\mathfrak{B})$ ,

$$-\alpha_N \geq -\alpha_{N-1} \geq \dots \geq -\alpha_1, \quad -\beta_N \geq \dots \geq -\beta_1,$$

in (13) resultiert die *symmetrische Ungleichung*

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{N+1-i_r} + \sum_{r=1}^n \beta_{N+1-j_r} \leq \sum_{r=1}^n \gamma_{N+1-k_r}. \quad (15)$$

(Daraus erhält man nochmals eine neue Ungleichung durch Übergang zum Komplement.)

Die Dimension  $N$  des Grundraumes  $L$  spielt bei den meisten der nun folgenden Überlegungen nur eine geringe Rolle. Insbesondere bleibt eine in  $L_N$  bewiesene Ungleichung vom Typ (13) in allen höherdimensionalen Räumen  $L'_N$ ,  $N' > N$ , gültig.

2. Die ersten solchen Ungleichungen wurden von DUNKERLEY [3] und WEYL [16] für Eigenwerte von Differentialgleichungen bewiesen. In unserer Schreibweise lauten diese Resultate:

$$\alpha_1 + \beta_1 \geq \gamma_1 \quad (\text{bzw. } \alpha_N + \beta_N \leq \gamma_N) \quad \text{DUNKERLEY}$$

und

$$\alpha_i + \beta_j \geq \gamma_k, \quad \text{falls } i + j \leq k + 1 \quad \text{WEYL} \quad (16)$$

bzw.

$$\alpha_i + \beta_j \leq \gamma_k, \quad \text{falls } i + j \geq N + k \quad \text{WEYL} \quad (17)$$

[Für  $n = 1$  wird nicht unterschieden zwischen  $i_1$  und  $i = (i_1)$ ].



Bekannte Verallgemeinerungen davon sind

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{i_0+r} + \sum_{r=1}^n \beta_{j_0+r} \geq \sum_{r=1}^n \gamma_{k_0+r}, \text{ falls } i_0, j_0 \geq 0, N \geq k_0 + n, \quad (18)$$

$$i_0 + j_0 \leq k_0,$$

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{i_r} + \sum_{r=1}^n \beta_{j_r} \geq \sum_{r=1}^n \gamma_{k_r}, \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N. \quad (19)$$

Siehe [1], [4], [5], [7], [8], [10], [13], [16], [17].

Schließlich sind die Arbeiten [11], [12] zu erwähnen, die für eine ähnliche Fragestellung ebenfalls wichtige Resultate enthalten. Insbesondere werden in 2.3. die Ungleichungen von HORN näher diskutiert.

3. Für alle angeführten Ungleichungen ist es leicht, einen Teilraum  $L_n \subset L$  so zu konstruieren, daß nach (11), (12)

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{i_r} \geq R^A(L_n), \quad \sum_{r=1}^n \beta_{j_r} \geq R^B(L_n)$$

und

$$R^A(L_n) + R^B(L_n) = R^C(L_n) \geq \sum_{r=1}^n \gamma_{k_r}.$$

Die folgenden Ungleichungen werden ebenfalls nach dieser Methode bewiesen.

4. Notwendige Bedingungen werden durch die Konstruktion von *Gegenbeispielen* bewiesen. Zum Beispiel kann durch eine geeignete Wahl 2 reeller Diagonalmatrizen sofort gezeigt werden, daß  $\alpha_i + \beta_j \geq \gamma_k$  nur dann allgemein gilt, wenn  $i + j \leq k + 1$  ist.

5. Die Ungleichung

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_3 + \beta_{j_1} + \beta_{j_2} + \beta_{j_3} \geq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \gamma_{k_3}$$

kann unter den gemachten Voraussetzungen nur dann allgemein gelten, wenn auch

$$\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + \beta_{j_1} + \beta_{j_2} + \beta_{j_3} \geq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \gamma_{k_3}$$

ist. Deshalb werden nur Summen von Eigenwerten betrachtet, in denen sich kein Index (von  $i$  oder  $j$  oder  $k$ ) wiederholt. Hingegen werden entartete Eigenwerte (zum Beispiel  $\alpha_3 = \alpha_4$ ) weiterhin zugelassen.

### 2.3. $n = 1, 2, 3$

In diesem Abschnitt werden gewisse Resultate von HORN [11] diskutiert und zum Teil ergänzt.

**2.3.1.  $n = 1$** 

Zum besseren Verständnis der Beweismethoden wiederholen wir zunächst kurz die ursprünglichen Resultate von WEYL.

*Satz 1*

Unter den in 2.1. gemachten Voraussetzungen sind folgende drei Aussagen äquivalent:

a) 
$$i + j \leq k + 1.$$

b) Für alle  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  mit  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  gilt:

$$\dim (\perp A_{i-1} \cap \perp B_{j-1} \cap C_k) \geq 1,$$

das heißt in  $L$  existiert ein

$$x \neq o : x \perp A_{i-1}, x \perp B_{j-1}, x \in C_k.$$

c) Für alle  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$  mit  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  gilt:

$$\alpha_i + \beta_j \geq \gamma_k. \quad (16)$$

*Beweis*

a)  $\Rightarrow$  b) In  $C_k$  ist ein Vektor  $x \neq o$  zu finden, der  $(i + j - 2)$  Orthogonalitätsbedingungen (das heißt  $(i + j - 2)$  linearen Gleichungen) genügt. Nach a) existiert dafür immer eine nicht-triviale Lösung.

b)  $\Rightarrow$  c) Nach (1), (2) folgt aus

$$x \perp A_{i-1} : \alpha_i \geq R^A(x)$$

aus

$$x \perp B_{j-1} : \beta_j \geq R^B(x)$$

und aus

$$x \in C_k : R^A(x) + R^B(x) = R^C(x) \geq \gamma_k.$$

c)  $\Rightarrow$  a) Wie in Bemerkung 4 angedeutet, setzen wir nun  $i + j \geq k + 2$  ( $N \geq \max(i, j, k)$ ) voraus und konstruieren ein Gegenbeispiel.

Matrix  $A = \{\alpha_{rs}\} : \text{diagonal},$

$$\alpha_{rr} = \alpha_r (r = 1, 2, \dots, N),$$

Eigenwerte

$$\alpha_r = 1 (r = 1, 2, \dots, i - 1),$$

$$\alpha_r = 0 (r = i, i + 1, \dots, N).$$

Matrix  $B = \{\beta_{rs}\} : \text{diagonal},$

$$\beta_{ss} = \beta_{N+1-s} (s = 1, 2, \dots, N),$$

Eigenwerte  $\beta_s = 1 \ (s = 1, 2, \dots, j-1),$   
 $\beta_s = 0 \ (s = j, j+1, \dots, N).$

Matrix  $C = A + B$ : Eigenwerte

$$\gamma_t \geq 1 \ (t = 1, 2, \dots, k \leq i + j - 2).$$

Damit ist

$$\alpha_i + \beta_j = 0 < 1 \leq \gamma_k.$$

Dieses Gegenbeispiel wird im folgenden als G1 zitiert.

Nach Bemerkung 1 (2.2.) gilt damit auch

### Satz 1'

Unter den in 2.1. gemachten Voraussetzungen sind folgende drei Aussagen äquivalent:

a)  $i + j \geq k + N.$

b) Für alle  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  gilt:

$$\dim (A_i \cap B_j \cap {}^\perp C_{k-1}) \geq 1.$$

c) Für alle  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  gilt:

$$\alpha_i + \beta_j \leq \gamma_k. \quad (17)$$

### 2.3.2. $n = 2$

#### Satz 2

Unter den in 2.1. gemachten Voraussetzungen sind folgende drei Aussagen äquivalent:

a)  $i_1 + j_1 \leq k_1 + 1$   
 $i_2 + j_1 \leq k_2 + 1$   
 $i_1 + j_2 \leq k_2 + 1$  (Bedingungen von HORN)  
 $i_1 + i_2 + j_1 + j_2 \leq k_1 + k_2 + 3.$

b) Es existiert ein  $L_2 \subset ({}^\perp A_{i_1-1} \cap {}^\perp B_{j_1-1} \cap C_{k_1})$ , so daß

$$L_2 \cap {}^\perp A_{i_2-1} \neq [0], \ L_2 \cap {}^\perp B_{j_2-1} \neq [0], \ L_2 \cap C_{k_1} \neq [0].$$

c)  $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \beta_{j_1} + \beta_{j_2} \geq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2}. \quad (20)$

*Beweis*

$$\begin{aligned}
\text{a) } \Rightarrow \text{b) } \quad \text{Es seien} \quad & X_p = {}^\perp A_{i_1-1} \cap {}^\perp B_{j_1-1} \cap C_{k_1} \\
& Y_q = {}^\perp A_{i_2-1} \cap {}^\perp B_{j_1-1} \cap C_{k_2} \\
& Z_r = {}^\perp A_{i_1-1} \cap {}^\perp B_{j_2-1} \cap C_{k_2} \\
& U_s = {}^\perp A_{i_1-1} \cap {}^\perp B_{j_1-1} \cap C_{k_2}; \quad X, Y, Z \subset U.
\end{aligned}$$

$X_p$  ist also der Raum aller Vektoren  $x$  aus  $C_{k_1}$ , die den Orthogonalitätsbedingungen  $x \perp A_{i_1-1}$ ,  $x \perp B_{j_1-1}$  genügen, das heißt  $X_p$  ist (bzw. eines Koordinatensystems) Lösungsraum von höchstens  $(i_1 + j_1 - 2)$  linearen Gleichungen in  $C_{k_1}$ . Für die Dimensionen  $p, q, r, s$  von  $X, Y, Z, U$  gilt:

$$\begin{aligned}
p &\geq k_1 + 2 - i_1 - j_1 \geq 1 \quad \text{wegen } i_1 + j_1 \leq k_1 + 1, \\
q &\geq k_2 + 2 - i_2 - j_1 \geq 1 \quad \text{wegen } i_2 + j_1 \leq k_2 + 1, \\
r &\geq k_2 + 2 - i_1 - j_2 \geq 1 \quad \text{wegen } i_1 + j_2 \leq k_2 + 1, \\
s &\geq k_2 + 2 - i_1 - j_1 \geq 2 \quad \text{wegen } i_1 + j_1 \leq k_1 + 1 \leq k_2.
\end{aligned}$$

1. Fall:  $Y \cap Z = D \neq [o]$ .

$D \neq X$ . Dann existiert ein  $L_2 = [x, d]$ ,  $x \in X$ ,  $x \neq o$ ,  $d \in D$ ,  $d \neq o$ , das die in b) geforderten Bedingungen erfüllt.

$D = X$ . Falls  $\dim X = p \geq 2$ , wird b) von jedem  $L_2 \subset X = D$  erfüllt. Für  $\dim X = p = 1$  kann  $X$  durch einen Vektor  $u \neq o$  aus  $U_s$  ( $s \geq 2$ ) zu einem  $L_2 = [x, u]$  ergänzt werden.

2. Fall:  $Y \cap Z = [o]$ .

Nach  $i_1 + i_2 + j_1 + j_2 \leq k_1 + k_2 + 3$  ist  $\dim(Y \oplus Z)$

$$\geq k_2 + 2 - i_2 - j_1 + k_2 + 2 - i_1 - j_2 \geq k_2 - k_1 + 1.$$

$$\Rightarrow C_{k_1} \cap (Y \oplus Z) = D' \neq [o].$$

Nach Konstruktion muß  $D' \subset X$  sein. In  $D'$  existiert also ein Vektor  $d' = x \neq o$ , der sich darstellen läßt als

$$d' = y + z, \quad y \in Y, \quad z \in Z.$$

Für  $y \neq o, z \neq o$  setzen wir  $L_2 = [y, z]$ .

Für  $y \neq o, z = o$  setzen wir  $L_2 = [y, z']$ ,  $z' \in Z$ ,  $z' \neq o$ .

Für  $y = o, z \neq o$  setzen wir  $L_2 = [y', z]$ ,  $y' \in Y$ ,  $y' \neq o$ .

In allen drei Fällen erfüllt  $L_2$  die in b) geforderten Bedingungen.

b)  $\Rightarrow$  c) Nach (9), (10) gilt

$$\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} \geq R^A(L_2),$$

$$\beta_{j_1} + \beta_{j_2} \geq R^B(L_2),$$

$$R^A(L_2) + R^B(L_2) = R^C(L_2) \geq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2}.$$

c)  $\Rightarrow$  a) Dieser Schritt erfolgt wieder durch Konstruktion von Gegenbeispielen.

Es sei  $i_1 + j_1 \geq k_1 + 2$ ,  $N \geq \max(i_2, j_2, k_2)$ . Setzt man in  $G1$   $i = i_1$ ,  $j = j_1$  und  $k = k_1$ , so wird

$$\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \beta_{j_1} + \beta_{j_2} = 0 < 1 \leq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2}.$$

Wird hingegen  $i_2 + j_1 \geq k_2 + 2$  vorausgesetzt, so liefert  $G1$  mit  $i = i_2$ ,  $j = j_1$ ,  $k = k_2$

$$\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \beta_{j_1} + \beta_{j_2} = 1 < 2 \leq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2}.$$

Desgleichen für  $i_1 + j_2 \geq k_2 + 2$  durch Vertauschen von  $A$  und  $B$ . Es sei schließlich

$$i_1 + j_1 \leq k_1 + 1, i_2 + j_1 \leq k_2 + 1, i_1 + j_2 \leq k_2 + 1,$$

aber

$$i_1 + i_2 + j_1 + j_2 \geq k_1 + k_2 + 4, N \geq k_2.$$

$A = \{\alpha_{rs}\}$  : diagonal,

$$\alpha_{rr} = \alpha_r (r = 1, 2, \dots, N),$$

Eigenwerte

$$\alpha_r = 2 (r = 1, 2, \dots, i_1 - 1), \alpha_r = 1 (r = i_1, \dots, i_2 - 1)$$

$$\alpha_r = 0 (r = i_2, \dots, N).$$

$B = \{\beta_{rs}\}$  : diagonal,

$$\beta_{ss} = \beta_{k_2+1-s} (s = 1, 2, \dots, k_2),$$

$$\beta_{ss} = \beta_s (s = k_2 + 1, \dots, N),$$

Eigenwerte

$$\beta_s = 2 (s = 1, 2, \dots, j_1 - 1),$$

$$\beta_s = 1 (s = j_1, \dots, j_2 - 1) \beta_s = 0 (s = j_2, \dots, N).$$

$C = A + B$  hat dann die Eigenwerte:

$$\gamma_t = 2 (t = 1, 2, \dots, \bar{k}_1 \geq k_1)$$

$$\gamma_t \geq 1 (t \leq k_2).$$

Damit ist

$$\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \beta_{j_1} + \beta_{j_2} = 2 < 3 \leq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2}.$$

Dieses Gegenbeispiel wird im folgenden mit  $G2$  bezeichnet.

**Satz 2'**

Unter den in 2.1. gemachten Voraussetzungen sind folgende drei Aussagen äquivalent:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & i_2 + j_1 \geq k_1 + N \\ & i_1 + j_2 \geq k_1 + N \\ & i_2 + j_2 \geq k_2 + N \\ & i_1 + i_2 + j_1 + j_2 \geq k_1 + k_2 + 2N - 1. \end{aligned}$$

b) Es existiert ein  $L_2 \subset (A_{i_2} \cap B_{j_2} \cap {}^\perp C_{k_1-1})$ , so daß

$$L_2 \cap A_{i_1} \neq [0], L_2 \cap B_{j_1} \neq [0], L_2 \cap {}^\perp C_{k_2} \neq [0].$$

$$\text{c)} \quad \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \beta_{j_1} + \beta_{j_2} \leq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2}. \quad (21)$$

Der Beweis erfolgt wieder durch Einsetzen von  $-\mathfrak{A}$ ,  $-\mathfrak{B}$  in Satz 2 oder auch konstruktiv.

$$\text{Beispiel:} \quad \alpha_1 + \alpha_{N-1} + \beta_1 + \beta_{N-1} \geq \gamma_{N-2} + \gamma_{N-1} \quad (\text{Satz 2})$$

und symmetrisch

$$\alpha_2 + \alpha_N + \beta_2 + \beta_N \leq \gamma_2 + \gamma_3. \quad (\text{Satz 2'})$$

Die Äquivalenz von a) und c) steht schon in [11]. Punkt b) vervollständigt den Satz. Ferner wird eine durchsichtigere Darstellung des Beweises angestrebt. Damit ist der Fall  $n = 2$  erledigt.

**2.3.3.  $n = 3$** 

Dieser Fall hat sich leider nicht vollständig erledigen lassen. Immerhin gilt:

**Satz 3**

Unter den in 2.1. gemachten Voraussetzungen gilt:

a') und a'')  $\rightarrow$  b), b)  $\rightarrow$  c) und c)  $\rightarrow$  a')

$$\begin{aligned} \text{a')} \quad & 1. \quad k_1 + 1 - i_1 - j_1 = q_1 \geq 0 \\ & 2. \quad k_2 + 1 - i_2 - j_1 = q_2 \geq 0 \\ & 3. \quad k_2 + 1 - i_1 - j_2 = q_3 \geq 0 \\ & 4. \quad k_3 + 1 - i_3 - j_1 = q_4 \geq 0 \\ & 5. \quad k_3 + 1 - i_2 - j_2 = q_5 \geq 0 \\ & 6. \quad k_3 + 1 - i_1 - j_3 = q_6 \geq 0 \end{aligned}$$

7.  $k_1 + k_2 + 3 - i_1 - i_2 - j_1 - j_2 = q_7 \geq 0$
8.  $k_1 + k_3 + 3 - i_1 - i_3 - j_1 - j_2 = q_8 \geq 0$
9.  $k_1 + k_3 + 3 - i_1 - i_2 - j_1 - j_3 = q_9 \geq 0$
10.  $k_2 + k_3 + 3 - i_2 - i_3 - j_1 - j_2 = q_{10} \geq 0$
11.  $k_2 + k_3 + 3 - i_1 - i_2 - j_2 - j_3 = q_{11} \geq 0$
12.  $k_2 + k_3 + 3 - i_1 - i_3 - j_1 - j_3 = q_{12} \geq 0$

a'') 13.  $k_1 + k_2 + k_3 + 6 - i_1 - i_2 - i_3 - j_1 - j_2 - j_3 = q_{13} \geq 0.$

b) Für alle  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  gilt:

In  $({}^\perp A_{i_1-1} \cap {}^\perp B_{j_1-1} \cap C_{k_3})$  existiert ein  $L_{3q}$ , so daß

$$\dim(L_{3q} \cap {}^\perp A_{i_2-1}) \geq 2q, \dim(L_{3q} \cap {}^\perp A_{i_3-1}) \geq q$$

$$\dim(L_{3q} \cap {}^\perp B_{j_2-1}) \geq 2q, \dim(L_{3q} \cap {}^\perp B_{j_3-1}) \geq q$$

$$\dim(L_{3q} \cap C_{k_2}) \geq 2q, \dim(L_{3q} \cap C_{k_1}) \geq q.$$

c) Für alle  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  gilt:

$$\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} + \beta_{j_1} + \beta_{j_2} + \beta_{j_3} \geq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \gamma_{k_3} \quad (22)$$

(Ungleichungen von HORN).

Wie  $q$  zu wählen ist, wird aus dem Beweis hervorgehen (meistens darf  $q = 1$  gesetzt werden). Die Bedingungen 1–13 sind nicht unabhängig voneinander. Wenn 1–6 und 13 gelten, kann höchstens noch eine der Bedingungen 7–12 nicht erfüllt sein.

### *Beweis*

a') und a'')  $\Rightarrow$  b) Konstruktion von  $L_{3q}$ .

$$R = {}^\perp A_{i_1-1} \cap {}^\perp B_{j_1-1} \cap C_{k_3}$$

$$U = {}^\perp A_{i_2-1} \cap {}^\perp B_{j_1-1} \cap C_{k_2} \quad X = {}^\perp A_{i_3-1} \cap R$$

$$V = {}^\perp A_{i_1-1} \cap {}^\perp B_{j_2-1} \cap C_{k_2} \quad Y = {}^\perp B_{j_3-1} \cap R$$

$$W = {}^\perp A_{i_1-1} \cap {}^\perp B_{j_1-1} \cap C_{k_1} \quad Z = {}^\perp A_{i_2-1} \cap {}^\perp B_{j_2-1} \cap C_{k_3}.$$

Der Fall  $q_{13} \geq 1$  läßt sich einfacher behandeln als  $q_{13} = 0$ .

$q_{13} \geq 1$ : Es sind nach folgendem Schema mehrere Fälle zu unterscheiden.

$$\dim R = k_3 + 2 - i_1 - j_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} U \cap V = [o] \quad \left\{ \begin{array}{l} X \cap Y = [o] \text{ (I)} \\ X \cap Y \neq [o] \text{ (II)} \end{array} \right. \\ U \cap V \neq [o] \quad \left\{ \begin{array}{l} X \cap Y = [o] \text{ (III)} \\ X \cap Y \neq [o] \text{ (IV)} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$\dim R > k_3 + 2 - i_1 - j_1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \text{(V)} \\ \text{(VI)} \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{(VII)} \\ \text{(VIII)} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \text{wie (I)–(IV)}$$

In allen 8 Fällen kann  $q = 1$  gesetzt werden.

$$\text{I. } [(U \oplus V) \cap W] \cap (X \oplus Y) \neq [o]$$

$$\dim U \geq q_2 + 1, \dim X \geq q_4 + 1, \text{ usw.}$$

$$\dim [(U \oplus V) \cap W] \geq q_2 + 1 + q_3 + 1 - (k_2 - k_1) = q_7 + 1,$$

$$q_7 + 1 + \dim(X \oplus Y) - \dim R \geq q_7 + 1 + q_4 + 1 + q_6 + 1 - (k_3 + 2 - i_1 - j_1) = q_{13} \geq 1.$$

In diesem Durchschnitt gibt es also einen Vektor  $w \neq o$ , der dargestellt werden kann als

$$w = u + v = x + y \neq o, u \in U, v \in V, \dots$$

$L = [w, u, x]$ . Falls  $\dim L = 3$ , so hat man den gesuchten Raum gefunden. Andernfalls ist  $L$  leicht zu ergänzen.

$$\text{II. } L = [u, v, d], u \in U, \neq o, v \in V, \neq o, (u + v) \in W, d \in X \cap Y, \neq o.$$

Entweder ist  $\dim L = 3$ , oder  $L$  kann entsprechend ergänzt werden.

$$\text{III. } U \cap V = D \neq [o]$$

Falls  $D \cap W \neq [o]$ , setze man  $L = [d, x, y]$ ,  $d \in D \cap W, \neq o, x \in X, \neq o, y \in Y, \neq o, (x + y) \in C_{k_2}$ , und diskutiere  $\dim L$ .  $D \cap W = [o]$ . Wegen der Bedingungen 1, 2, 3, 4, 6, 7, 12, 13 ist

$$(W \oplus D) \cap (X \oplus Y) \neq [o].$$



Darin

$$w + d = x + y \neq o.$$

Man setze  $L = [w, d, x]$  und diskutiere wieder  $\dim L$ .

IV.  $L = [w, d', d'']$ ,  $w \in W$ ,  $\neq o$ ,  $d' \in U \cap V$ ,  $\neq o$ ,  $d'' \in X \cap Y$ ,  $\neq o$ .

Diskussion und eventuelle Ergänzung von  $L$  wie in den vorangehenden Fällen.

V.–VIII. Aus  $R$  kann ein  $R'$  mit  $\dim R' = k_3 + 2 - i_1 - j_1$  herausgegriffen und darin die gleiche Fallunterscheidung wiederholt werden.

Zur Konstruktion von  $L_3$  können anstatt  $U, V, W, X, Y$ , ebensogut die Räume  $Z, U, X, Y, W$  (in dieser Reihenfolge) oder  $V, Z, Y, W, X$  herangezogen werden. Anstelle von 2, 3, 1, 4, 6, 7, 12, 13 werden dann die Bedingungen 5, 2, 4, 6, 1, 10, 8, 13 bzw. 3, 5, 6, 1, 4, 11, 9, 13 explizit verwendet. Diese «Symmetrie» wird im folgenden benützt.

$q_{13} = 0$ : Es sei

$$m = \min \{(i_3 - i_2), (i_2 - i_1), (j_3 - j_2), (j_2 - j_1), (k_3 - k_2), (k_2 - k_1), \\ (q_r + 1), r = 1, 2, \dots, 12\}.$$

Es wird nun gezeigt, daß entweder  $q = 1$  oder  $q = m$  gesetzt werden kann. Wegen der erwähnten Symmetrie genügt es, die Fälle

$$m = q_7 + 1, q_{12} + 1, q_2 + 1, q_6 + 1, (i_3 - i_2), (i_2 - i_1)$$

zu diskutieren.

Wir führen hier als Modellfall die Diskussion für  $m = q_{12} + 1$  durch.  $m = q_{12} + 1 = k_2 + k_3 + 4 - i_1 - i_3 - j_1 - j_3$ . Es darf angenommen werden, daß alle Teilräume gerade die durch 1–12 bedingten Minimaldimensionen aufweisen, zum Beispiel  $\dim U = q_2 + 1 = k_2 + 2 - i_2 - j_1$ . Andernfalls kann wie in « $q_{13} \geq 1$ » vorgegangen werden.

$$\left. \begin{array}{l} q_4 \geq q_{12} \Rightarrow k_2 + 2 - i_1 - j_3 \leq 0 \Leftrightarrow k_1 + k_3 + 4 - i_2 - i_3 - j_1 - j_2 \geq 0 \\ q_6 \geq q_{12} \Rightarrow k_2 + 2 - i_3 - j_1 \leq 0 \Leftrightarrow k_1 + k_3 + 4 - i_1 - i_2 - j_2 - j_3 \geq 0 \\ q_{13} - (q_{12} + 1) = k_1 + 2 - i_2 - j_2 = -m \\ (i_2 - i_1), (j_2 - j_1), (k_2 - k_1) \geq m \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} k_1 + 2 - i_1 - j_2 \geq 0 \\ k_1 + 2 - i_2 - j_1 \geq 0 \\ k_2 + 2 - i_2 - j_2 \geq 0 \end{array} \right\} *$$

*Diskussionsschema:*

$$\begin{array}{l}
X \cap Y \neq [o] \quad (\text{I}) \\
X \cap Y = [o] \quad \left\{ \begin{array}{l} (X \oplus Y) \cap W \neq [o] \quad (\text{II}) \\ (X \oplus Y) \cap W = [o] \quad \left\{ \begin{array}{l} W \cap Z \neq [o] \quad (\text{III}) \\ W \cap Z = [o] \quad (\text{IV}) \end{array} \right. \end{array} \right.
\end{array}$$

I. Wie in  $q_{13} \geq 1$ , (II) (oder IV):  $L = [u, v, d]$ .

II.  $L = [x, y, v']$ ,  $x \in X$ ,  $y \in Y$ ,  $(x + y) \in W$ ,  $v' \in [x, Z] \cap C_{k_2}$   
 $(k_2 + 2 - i_2 - j_2 \geq 0)$ .

III. Wie in  $q_{13} \geq 1$ , (III):  $L = [d, x, y]$ .

IV.  $\dim [(X \oplus Y) \cap C_{k_2}] = q_{12} + 1 = m$ .

Da  $X \cap Y = [o]$  und  $q_4 + 1, q_6 + 1 \geq m$ , existiert ein  $L_{2m}$ , so daß die Durchschnitte  $L_{2m} \cap X, L_{2m} \cap Y, L_{2m} \cap C_{k_2}$   $m$ -dim sind.

$\dim [L_{2m} \cap (Z \oplus W)] \geq 2m + q_5 + 1 + q_1 + 1 - (k_3 + 2 - i_1 - j_1) =$   
 $= q_{12} + 1 = m$ ,  $\dim [L_{2m} \cap (Z \oplus W)] > m$ . Vermöge der Bedingungen \* kann sofort ein  $L_3$  gefunden werden.

$\dim [L_{2m} \cap (Z \oplus W)] = m$ . Wegen  $Z \cap W = [o]$  und  $\dim Z, \dim W \geq m$  existiert ein  $\bar{L}_{2m}$ , so daß  $\bar{L}_{2m} \cap L_{2m}, \bar{L}_{2m} \cap W, \bar{L}_{2m} \cap Z$   $m$ -dim sind. Da  $W \cap (X \oplus Y) = [o]$ , ist  $(\bar{L}_{2m} \cap W) \oplus L_{2m}$  von der Dimension  $3m$ .

$(\bar{L}_{2m} \cap Z) \cap L_{2m} \neq [o]$ : Vermöge \* gibt es einen  $L_3$ .

$(\bar{L}_{2m} \cap Z) \cap L_{2m} = [o]$ :

$$L_{3m} = L_{2m} + \bar{L}_{2m} = L_{2m} \oplus (\bar{L}_{2m} \cap W) = L_{2m} \oplus (\bar{L}_{2m} \cap Z)$$

ist der gesuchte Raum ( $q = m$ ).

b)  $\Rightarrow$  c)

Nach (9), (10) ist

$$\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} \geq \frac{1}{q} R^A(L_{3q})$$

$$\beta_{j_1} + \beta_{j_2} + \beta_{j_3} \geq \frac{1}{q} R^B(L_{3q})$$

$$\frac{1}{q} (R^A(L_{3q}) + R^B(L_{3q})) = \frac{1}{q} R^C(L_{3q}) \geq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \gamma_{k_3}.$$

Man vergleiche damit den Beweis a)  $\Rightarrow$  c) in [11].

c)  $\Rightarrow$  a') besagt, daß die Bedingungen 1–12 für die allgemeine Gültigkeit von (22) notwendig sind. Der Beweis erfolgt durch Anwendung von G1 in den Fällen 1–6 und G2 in 7–12.

1–6: Als Beispiel wählen wir 5. Es sei also  $i_2 + j_2 \geq k_3 + 2$ ,  $N \geq k_3$ . Ersetzt man in G1 (2.3.1.)  $i, j, k$  durch  $i_2, j_2, k_3$ , so wird

$$\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} + \beta_{j_1} + \beta_{j_2} + \beta_{j_3} = 2 < 3 \leq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \gamma_{k_3}.$$

Entsprechend mit 1, 2, 3, 4, 6.

#### 7–12: Beispiel 8

Voraussetzung: 1–6 und  $i_1 + i_3 + j_1 + j_2 \geq k_1 + k_3 + 4$ ,  $N \geq k_3$ . Für die Indizes  $i_1, i_3, j_1, j_2, k_1, k_3$  ergibt G2:

$$\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} + \beta_{j_1} + \beta_{j_2} + \beta_{j_3} = 3 < 4 \leq \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \gamma_{k_3}.$$

Entsprechend mit 7, 9–12.

Damit ist gezeigt, daß a') notwendig ist.

#### Bemerkungen

1. In [11] wird die Notwendigkeit von a'') für  $k_3 \leq 16$  bewiesen. Durch Konstruktion weiterer Gegenbeispiele kann dieses Resultat auf viele weitere Fälle (mit beliebigem  $k_3$ ) ausgedehnt werden. Zum Beispiel ist a'') notwendig, wenn zwei der Indizes  $i$  oder  $j$  oder  $k$  aufeinander folgen oder wenn  $k_1 \leq i_1 + j_1 + 1$ .

Das folgende Beispiel soll zeigen, auf welche Schwierigkeiten die Behandlung des allgemeinen Falles stößt.

Es sei  $i = j = (1, 6, 11)$ ,  $k = (2, 9, 18)$ .

Obschon 13 nicht erfüllt ist, gibt es mit Diagonalmatrizen  $A, B$  kein Gegenbeispiel. Es ist nämlich leicht einzusehen, daß zu einem Gegenbeispiel,  $\alpha_1 + \alpha_6 + \alpha_{11} + \beta_1 + \beta_6 + \beta_{11} < \gamma_2 + \gamma_9 + \gamma_{18}$ , ein zweites mit den Eigenwerten  $\bar{\alpha}_1 = \dots = \bar{\alpha}_5 = \alpha_1 \geq \bar{\alpha}_6 = \dots = \bar{\alpha}_{10} = \alpha_6 \geq \bar{\alpha}_{11} = \dots = \bar{\alpha}_{18} = \alpha_{11}$ ,  $\bar{\beta}_1 = \dots = \bar{\beta}_5 = \beta_1 \geq \bar{\beta}_6 = \dots = \bar{\beta}_{10} = \beta_6 \geq \bar{\beta}_{11} = \dots = \bar{\beta}_{18} = \beta_{11}$  existieren müßte, und daß zwei Diagonalmatrizen mit diesen Eigenwerten kein Gegenbeispiel liefern können.

Gegenbeispiel mit nicht-diagonalen Matrizen:

$$A = \left( \begin{array}{c|c} A' & O \\ \hline O & A'' \end{array} \right) \text{ Eigenwerte } \alpha_1 = \dots = \alpha_5 = 10, \alpha_6 = \dots = \alpha_{10} = 1,$$

$O$  bedeutet eine Nullmatrix

$$\alpha_{11} = \dots = \alpha_{18} = 0.$$

$$A' = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos^2 \varphi & \cos \varphi \sin \varphi \\ 0 & 0 & \cos \varphi \sin \varphi & \sin^2 \varphi \end{bmatrix}, \text{ Eigenwerte: } 10, 10, 1, 0.$$

$$A'': \text{diagonal, } \alpha''_{11} = \alpha''_{22} = \alpha''_{33} = 10, \alpha''_{44} = \dots = \alpha''_{77} = 1, \\ \alpha''_{88} = \dots = \alpha''_{14,14} = 0.$$

$$B = \left( \frac{B'}{O} \middle| \frac{O}{B''} \right), \text{ Eigenwerte } \beta_r = \alpha_r.$$

$$B' = \begin{bmatrix} 10 \cos^2 \vartheta & 0 & 0 & 10 \cos \vartheta \sin \vartheta \\ 0 & 1 + 9 \cos^2 \psi & 9 \cos \psi \sin \psi & 0 \\ 0 & 9 \cos \psi \sin \psi & 1 + 9 \sin^2 \psi & 0 \\ 10 \cos \vartheta \sin \vartheta & 0 & 0 & 10 \sin^2 \vartheta \end{bmatrix},$$

Eigenwerte: 10, 10, 1, 0.

$$B'': \text{diagonal, } \beta''_{rr} \leq \beta''_{r+1, r+1} (r = 1, 2, \dots, 13).$$

$$C = A + B = \left( \frac{C'}{O} \middle| \frac{O}{C''} \right)$$

$$C'' = A'' + B'' \text{ hat die Eigenwerte } \gamma''_1 = \dots = \gamma''_6 = 10, \\ \gamma''_7 = \dots = \gamma''_{14} = 1.$$

$C' = A' + B'$ : Für die Nullstellen des charakteristischen Polynoms  $\det(C' - \gamma' E) = P(\gamma')$  gilt zunächst:

$$20 \geq \gamma'_1 \geq 10,5 \geq \gamma'_4 \geq 0, \gamma'_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3 + \gamma'_4 = 42.$$

Setzt man  $\cos^2 \varphi = \cos^2 \vartheta = \cos^2 \psi = 0,9$ , so wird

$$P(20), P(10), P(0) > 0, P(1) < 0.$$

$$\Rightarrow 20 > \gamma'_1 \geq \gamma'_2 > 10 > \gamma'_3 > 1 > \gamma'_4 > 0, \gamma'_2 + \gamma'_3 + \gamma'_4 > 22.$$

$C$  hat also die Eigenwerte

$$20 > \gamma_1 = \gamma'_1 \geq \gamma_2 = \gamma'_2 > 10 = \gamma_3 = \dots = \gamma_8 > \gamma_9 = \gamma'_3 > 1 = \gamma_{10} = \dots = \\ = \gamma_{17} > \gamma_{18} = \gamma'_4 > 0.$$

$$\alpha_1 + \alpha_6 + \alpha_{11} + \beta_1 + \beta_6 + \beta_{11} = 22 < \gamma_2 + \gamma_9 + \gamma_{18} = \gamma'_2 + \gamma'_3 + \gamma'_4.$$

2. Im Falle  $n = 3$  bleiben zwei Fragen offen: Sind die Bedingungen 1–13 für die Existenz eines  $L_3(q = 1)$  hinreichend? Folgt 13 als notwendige Bedingung aus der allgemeinen Gültigkeit von (22)?

3. Entsprechendes gilt für die symmetrische Ungleichung

$$\gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \gamma_{k_3} \geq \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3} + \beta_{j_1} + \beta_{j_2} + \beta_{j_3}. \quad (23)$$

Wir verzichten darauf, dazu Satz 3' explizit zu formulieren.

## 2.4. $n \geq 4$

In diesem Abschnitt werden neue Ungleichungen vom Typ (15) hergeleitet. Dabei dient ein Spezialfall von (23) als Ausgangspunkt. Für ein beliebiges Indizestripel  $k = (k_1, k_2, k_3)$ ,  $1 \leq k_1 < k_2 < k_3 \leq N$ , seien  $i = (i_1, i_2, i_3) = (k_1, k_3 - 1, N)$ ,  $j = (j_1, j_2, j_3) = (k_2 - 1, N - 1, N)$ . Dann existiert ein  $L_3 \subset L$ , so daß nach (9), (10)

$$\begin{aligned} \gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \gamma_{k_3} &\geq R^C(L_3) = R^A(L_3) + R^B(L_3), \\ R^A(L_3) &\geq \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \alpha_{i_3}, \quad R^B(L_3) \geq \beta_{j_1} + \beta_{j_2} + \beta_{j_3}. \end{aligned}$$

Im Hinblick auf die Verallgemeinerung dieser Ungleichung wollen wir zunächst die Konstruktion von  $L_3$  skizzieren.

$A_{i_1} \cap {}^\perp C_{k_1-1} = D \neq [o]$ .  $x \in D$ ,  $\neq o$ . Falls  $x \notin B_{j_1}$ , so ist  $[x, B_{j_1}] \cap {}^\perp C_{k_2-1} = D' \neq [o]$ ,  $y \in D'$ ,  $\neq o$ . Falls ferner  $y \notin A_{i_2}$ , so ist  $[y, A_{i_2}] \cap {}^\perp C_{k_3-1} = D'' \neq [o]$ ,  $z \in D''$ ,  $\neq o$ . Sind  $x, y, z$  linear unabhängig, so erfüllt  $L_3 = [x, y, z]$  die gewünschten Bedingungen. Der Beweis wird vervollständigt durch die Diskussion der Fälle  $x \in B_{j_2}$ ,  $y \in A_{i_2}$  und  $\dim [x, y, z] < 3$ .

Entsprechend beweist man die Ungleichung für  $i = (k_1, N - 1, N)$ ,  $j = (k_2 - 1, k_3 - 1, N)$ .

**2.4.1.** Diese Beispiele geben Anlaß zu folgender Verallgemeinerung. Es liege vor: ein geordnetes  $n$ -Tupel von Indizes  $k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ ,  $1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_n \leq N$ , zwei Folgen  $p_r, q_s$

$$0 < p_1 < p_2 < \dots < p_m = p,$$

$$0 \leq q_1 < q_2 < \dots < q_t = q, \quad t = (m - 1) \text{ oder } m,$$

mit

$$p + q = n$$

$q_1 = 0$  nur falls  $m = 1$ ,  $p_1 = p = n$  und damit  $q_1 = q = 0$ .

Wir setzen nun

$$i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$$

$$i_s = k_s \quad (s = 1, 2, \dots, p_1),$$

$$i_{p_r+s} = k_{p_r+q_r+s} - q_r \quad (r = 1, 2, \dots, m-1), (s = 1, 2, \dots, p_{r+1} - p_r),$$

$$i_{p+s} = N - q + s \quad (s = 1, 2, \dots, q),$$

$$j = (j_1, j_2, \dots, j_n)$$

$$j_s = k_{p_1+s} - p_1 \quad (s = 1, 2, \dots, q_1)$$

$$j_{q_r+s} = k_{p_{r+1}+q_r+s} - p_{r+1} \quad (r = 1, 2, \dots, m-2), (s = 1, 2, \dots, q_{r+1} - q_r),$$

$$\left. \begin{aligned} j_{q_{m-1}+s} &= k_{p+q_{m-1}+s} - p \quad (s = 1, 2, \dots, q_m - q_{m-1}) \\ j_{q+s} &= N - p + s \quad (s = 1, 2, \dots, p) \end{aligned} \right\} \text{ falls } t = m, \text{ bzw.}$$

$$j_{q_{m-1}+s} = j_{q+s} = N - p + s \quad (s = 1, 2, \dots, p) \quad \text{falls } t = m - 1.$$

Nach diesen Definitionen ist stets

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq N,$$

$$1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq N.$$

Dann existieren für alle  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  und  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  Teilräume  $L_p, L_q, L_n \subset L$ , so daß

$$L_p + L_q \subset L_n,$$

und nach (9), (10)

$$R^A(L_p) \geq \sum_{r=1}^p \alpha_{i_r}, \quad R^A(L_n) \geq \sum_{r=1}^n \alpha_{i_r},$$

$$R^B(L_q) \geq \sum_{r=1}^q \beta_{j_r}, \quad R^B(L_n) \geq \sum_{r=1}^n \beta_{j_r}, \quad \sum_{r=1}^n \gamma_{k_r} \geq R^C(L_n) = R^A(L_n) + R^B(L_n).$$

Ausführlicher:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^n \gamma_{k_s} &\geq \sum_{s=1}^{p_1} \alpha_{k_s} + \sum_{s=p_1+1}^{p_1+q_1} \beta_{k_s-p_1} + \sum_{s=p_1+q_1+1}^{p_1+q_1+q_1} \alpha_{k_s-q_1} + \sum_{s=p_1+q_1+1}^{p_1+q_1+q_1+q_2} \beta_{k_s-p_2} + \dots + \\ &+ \sum_{s=p_{m-1}+q_{m-2}+1}^{p_{m-1}+q_{m-1}} \beta_{k_s-p_{m-1}} + \sum_{s=p_{m-1}+q_{m-1}+1}^{p+q_{m-1}} \alpha_{k_s-q_{m-1}} + \sum_{s=p+q_{m-1}+1}^{(*)} \beta_{k_s-p} + \sum_{s=1}^q \alpha_{N-q+s} + \sum_{s=1}^p \beta_{N-p+s}. \end{aligned} \quad (24)$$

Die Summe  $(*)$  fällt weg, falls  $t = m - 1$  ist.

*Beweis*

Der Beweis besteht darin, Teilräume  $L_p, L_q, L_n$  so zu konstruieren, daß  $\dim(L_p \cap A_{i_r}) \geq r$  ( $r = 1, 2, \dots, p$ ),  $\dim(L_q \cap B_{j_r}) \geq r$  ( $r = 1, 2, \dots, q$ ),  $L_p + L_q \subset L_n$ ,  $\dim(L_n \cap {}^\perp C_{k_{r-1}}) \geq n + 1 - r$  ( $r = 1, 2, \dots, n$ ).

Nach (9), (10) gilt dann (24).

Die Definitionen von  $i$  und  $j$  ermöglichen es, diese Konstruktion wie im vorangehenden Spezialfall schrittweise durchzuführen (das heißt durch Induktion nach  $n$ ).

Der Fall  $n = 1$  ist in 2.3.1. (Satz 1') enthalten.

$$\gamma_k \geq \alpha_k + \beta_N \quad (m = 1, p_1 = p = 1, q_1 = q = 0).$$

Wir setzen jetzt voraus, die Behauptung sei bewiesen für  $n - 1$  ( $k_1, k_2, \dots, k_{n-1}$ ). Dann sind zwei Fälle zu unterscheiden:

$$1) \quad t = m - 1, i_p = k_n - q,$$

$$2) \quad t = m, j_q = k_n - p.$$

1. Fall: Nach Induktionsvoraussetzung existieren  $L_{p-1}, L_q, L_{n-1}$ , so daß

$$\dim(L_{p-1} \cap A_{i_r}) \geq r \quad (r = 1, 2, \dots, p - 1)$$

$$\dim(L_q \cap B_{j_r}) \geq r \quad (r = 1, 2, \dots, q),$$

und

$$L_{p-1} + L_q \subset L_{n-1}, \dim(L_{n-1} \cap {}^\perp C_{k_{r-1}}) \geq n - r \quad (r = 1, 2, \dots, n - 1).$$

$L_{p-1}$  und  $L_{n-1}$  werden nun durch Vektoren  $u, v \neq o$  (eventuell  $u = v$ ) zu den gesuchten Räumen ergänzt:  $L_p = [u, L_{p-1}] \subset L_n = [v, L_{n-1}]$ .  $u$  und  $v$  werden durch ein Alternativverfahren gefunden, das nach höchstens  $n$  Schritten zum Ziele führt.

Nach Voraussetzung ist  $L_{p-1} \subset A_{i_{p-1}} \subset A_{i_p}$  und  $L_q \subset B_{j_q}$ .

a) Ist  $\dim(L_{n-1} \cap A_{i_p}) \geq p$ , so enthält  $L_{n-1}$  bereits ein  $L_p$ , das allen Bedingungen genügt.

$$R^A(L_{n-1}) \geq \alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_{p-1}} + \alpha_{i_p} + \alpha_{N+2-q} + \dots + \alpha_N,$$

$$R^B(L_{n-1}) \geq \beta_{j_1} + \dots + \beta_{j_q} + \beta_{N+2-p} + \dots + \beta_N,$$

$$\gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \dots + \gamma_{k_{n-1}} \geq R^C(L_{n-1}).$$

1. Schritt: Falls  ${}^{\perp}C_{k_{n-1}} \not\subset L_{n-1}$ , existiert in  ${}^{\perp}C_{k_{n-1}}$  ein  $v \notin L_{n-1}$ . Wir setzen  $L_n = [v, L_{n-1}]$ , und der Beweis ist vollständig. Andernfalls ( ${}^{\perp}C_{k_{n-1}} \subset L_{n-1}$ ) gilt

$$\gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \dots + \gamma_{k_{n-2}} + \gamma_{k_n} \geq R^C(L_{n-1}).$$

2. Schritt: Falls  ${}^{\perp}C_{k_{n-1}-1} \not\subset L_{n-1}$ , existiert in  ${}^{\perp}C_{k_{n-1}-1}$  ein  $v' \notin L_{n-1}$ , und wir setzen  $L_n = [v', L_{n-1}]$ . Andernfalls ( ${}^{\perp}C_{k_{n-1}-1} \subset L_{n-1}$ ) gilt

$$\gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \dots + \gamma_{k_{n-2}} + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_{k_n} \geq R^C(L_{n-1}),$$

und es folgt der dritte Schritt mit der Diskussion von  ${}^{\perp}C_{k_{n-2}-1} \cap L_{n-1}$ , usw.

Entweder gelingt es, nach weniger als  $(n-1)$  Schritten  $L_{n-1}$  zu  $L_n$  zu ergänzen, oder es ist schließlich  ${}^{\perp}C_{k_1-1} \subset L_{n-1}$  und damit

$$\gamma_{k_2} + \gamma_{k_3} + \dots + \gamma_{k_n} \geq R^C(L_{n-1}).$$

In diesem Falle braucht  $L_{n-1}$  nur noch durch ein  $w \in {}^{\perp}C_{k_1-1}$  erweitert zu werden. Dies ist aber immer möglich, weil

$$\dim({}^{\perp}C_{k_1-1}) = N + 1 - k_1 \geq k_n + 1 - k_1 \geq n.$$

b) Es sei jetzt  $\dim(L_{n-1} \cap A_{i_p}) = p-1$ . Daraus folgt:

$$\dim(L_{n-1} + A_{i_p}) = (n-1) + i_p - (p-1) = (n-1) + k_n - q - (p-1) = k_n.$$

1. Schritt:  $(L_{n-1} + A_{i_p}) \cap {}^{\perp}C_{k_{n-1}} = D \neq [o]$ .

Wenn in  $D$  ein  $d \notin L_{n-1}$  existiert, wird  $L_p = [d, L_{p-1}]$  und  $L_n = [d, L_{n-1}]$  gesetzt, und der Beweis ist fertig. Andernfalls ( $D \subset L_{n-1}$ ) gilt:

$$\gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \dots + \gamma_{k_{n-2}} + \gamma_{k_n} \geq R^C(L_{n-1}).$$

2. Schritt:  $(L_{n-1} + A_{i_p}) \cap {}^{\perp}C_{k_{n-1}-1} = D'$ ,  $D \subset D'$ ,  $\dim D' \geq 2$ .

Existiert in  $D'$  ein  $d' \notin L_{n-1}$ , so ist  $L_p = [d', L_{p-1}]$  und  $L_n = [d', L_{n-1}]$  zu setzen.

Andernfalls gilt bereits:

$$\gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \dots + \gamma_{k_{n-2}} + \gamma_{k_{n-1}} + \gamma_{k_n} \geq R^C(L_{n-1}),$$

und es ist der dritte Schritt mit der Diskussion von  $D'' = (L_{n-1} + A_{i_p}) \cap {}^{\perp}C_{k_{n-2}-1}$  einzuleiten.



Entweder gelingt es auch in diesem Falle  $L_{p-1}$  und  $L_{n-1}$  nach weniger als  $(n-1)$  Schritten zu ergänzen, oder es ist schließlich

$$(L_{n-1} + A_{i_p}) \cap {}^\perp C_{k_{n-r-1}} = D^{(r)} \subset L_{n-1} \quad (r = 0, 1, 2, \dots, n-2),$$

$$D = D^{(0)}, \dim D^{(r)} \geq r + 1.$$

Dann gilt aber

$$\gamma_{k_1} + \gamma_{k_2} + \dots + \gamma_{k_n} \geq R^C(L_{n-1}),$$

und da  $(L_{n-1} + A_{i_p}) \cap {}^\perp C_{k_{n-1}} = D^{(n-1)}$  mindestens  $n$ -dim ist, existiert sicher ein  $d^{(n-1)} \notin L_{n-1}$ , das  $L_{p-1}$  und  $L_{n-1}$  zu den gesuchten  $L_p, L_n$  erweitert.

2. Fall

$$t = m, j_q = k_n - p.$$

Hier führt eine analoge Diskussion für  $(L_{n-1} \cap B_{j_q})$  zum Ziele.

### Beispiele

1.  $k$  beliebig,  $m = 1, t = 0, p_1 = p = n, q_1 = q = 0$ .

$$\sum_{r=1}^n \gamma_{k_r} \geq \sum_{r=1}^n \alpha_{k_r} + \sum_{r=1}^n \beta_{N-n+r}.$$

Symmetrisch zur Ungleichung von WIELANDT (19).

2.  $k$  beliebig,  $m = t = 1, p_1 = p, q_1 = q > 0, p + q = n \geq 2$ .

$$\sum_{r=1}^n \gamma_{k_r} \geq \sum_{r=1}^p \alpha_{k_r} + \sum_{r=1}^q \alpha_{N-q+r} + \sum_{r=p+1}^n \beta_{k_r-p} + \sum_{r=1}^p \beta_{N-p+r}.$$

Die dazu symmetrische Ungleichung lautet:

$$\sum_{r=1}^q \alpha_r + \sum_{r=q+1}^n \alpha_{k_r} + \sum_{r=1}^p \beta_r + \sum_{r=1}^q \beta_{k_r+p} \geq \sum_{r=1}^n \gamma_{k_r}.$$

#### 2.4.2. Verschieben von Indizes

Durch die beschriebene Beweismethode können zahlreiche weitere Ungleichungen hergeleitet werden.

Zu einem  $k$  seien  $p, q, i, j$  wie in 2.4.1. definiert,  $q > 0$  ( $q_1 = q = 0$  siehe Beispiel). Dann gilt für alle

$$h, l \geq 0 \text{ mit } N + 1 - q \geq i_p + h + l, N + 1 - p \geq j_q + h + l$$

$$\sum_{r=1}^n \gamma_{k_r} \geq \sum_{r=1}^p \alpha_{i_r+h} + \sum_{r=1}^q \alpha_{N-q-l+r} + \sum_{r=1}^q \beta_{j_r+l} + \sum_{r=1}^p \beta_{N-p-h+r}. \quad (25)$$

*Beweis*

$$D = A_{N-l} \cap B_{N-h}, \dim D \geq N - (h + l).$$

$$A_{i_r+h} \cap D = A_{i_r+h} \cap (A_{N-l} \cap B_{N-h}) = A_{i_r+h} \cap B_{N-h} = \bar{A}_{i_r},$$

$$\dim \bar{A}_{i_r} \geq i_r \quad (r = 1, 2, \dots, p).$$

$$B_{j_r+l} \cap D = B_{j_r+l} \cap A_{N-l} = \bar{B}_{j_r}, \dim \bar{B}_{j_r} \geq j_r \quad (r = 1, 2, \dots, q).$$

Damit kann der Beweis von (24) wörtlich auf die Folgen  $\bar{A}_{i_1} \subset \dots \subset \bar{A}_{i_p}$ ,  $\bar{B}_{j_1} \subset \dots \subset \bar{B}_{j_q}$  übertragen werden.

*Beispiel*

Falls  $q_1 = q = 0$ , ist  $l = 0$  zu setzen. Ist in Beispiel 1  $k_n + h \leq N$ , so hat man auch

$$\sum_{r=1}^n \gamma_{k_r} \geq \sum_{r=1}^n \alpha_{k_r+h} + \sum_{r=1}^n \beta_{N-n-h+r}.$$

Setzt man zu einem  $k$  mit  $n = 2m$   $p_r = q_r = r$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ), so lautet (24)

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^n \gamma_{k_r} &\geq \alpha_{k_1} + \beta_{k_2-1} + \alpha_{k_3-1} + \beta_{k_4-2} + \dots + \alpha_{k_{n-1}-(m-1)} + \\ &\quad + \beta_{k_n-m} + \sum_{r=1}^m (\alpha_{N-m+r} + \beta_{N-m+r}). \end{aligned}$$

Diese Ungleichung läßt sich folgendermaßen modifizieren: Für jede Folge  $s_1, s_2, \dots, s_m$  mit  $0 \leq s_r \leq k_{2r} - k_{2r-1} - 1$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) gilt:

$$\sum_{r=1}^n \gamma_{k_r} \geq \sum_{r=1}^m \alpha_{i_r+s_r} + \sum_{r=1}^m \beta_{j_r-s_r} + \sum_{r=1}^m (\alpha_{N-m+r} + \beta_{N-m+r}) \quad (26)$$

$i_1 = k_1, i_2 = k_3 - 1, i_3 = k_5 - 2, \dots, j_1 = k_2 - 1, j_2 = k_4 - 2, \dots$  wie oben. Offensichtlich ist  $i_1 + s_1 < i_2 + s_2 < \dots < i_m + s_m < i_{m+1} = N + 1 - m$  und  $1 \leq j_1 - s_1 < j_2 - s_2 < \dots < j_m - s_m$ . Mit  $s_r = k_{2r} - k_{2r-1} - 1$  ( $r = 1, 2, \dots, m$ ) werden  $i$  und  $j$  vertauscht. Der Beweis erfolgt wieder durch das beschriebene Verfahren und soll hier nur an einem Beispiel durchgeführt werden.

*Beispiel*

$$k = (1, 4, 7, 11), N \geq 11, i = (k_1, k_3 - 1, N - 1, N),$$

$$j = (k_2 - 1, k_4 - 2, N - 1, N).$$

$$\gamma_1 + \gamma_4 + \gamma_7 + \gamma_{11} \geq \alpha_1 + \beta_3 + \alpha_6 + \beta_9 + \alpha_{N-1} + \alpha_N + \beta_{N-1} + \beta_N.$$

Für  $s_1 = s_2 = 1$  bzw.  $s_1 = s_2 = 2$  lautet (26)

$$\gamma_1 + \gamma_4 + \gamma_7 + \gamma_{11} \geq \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_7 + \alpha_{N-1} + \alpha_N + \beta_2 + \beta_8 + \beta_{N-1} + \beta_N \\ \alpha_3 + \alpha_8 + \alpha_{N-1} + \alpha_N + \beta_1 + \beta_7 + \beta_{N-1} + \beta_N \end{cases}$$

während für  $s_1 = 2, s_2 = 3$   $i$  und  $j$  vertauscht werden.

Wir beweisen etwa den Fall  $s_1 = s_2 = 2$ .

$B_1 \not\subset A_3$ . Dann existiert in  $A_3 \oplus B_1$  ein Vektor  $x = a + b \neq 0$ ,  $a \in A_3$ ,  $b \in B_1$ :  $x \perp C_3$ . Ist  $b \notin A_8$ , so gibt es in  $[A_8, b]$  ein  $L_3 \perp C_6$ .  $L_3$  werde von  $a', a'', a''' + b$  aufgespannt. Ist schließlich  $L_4 \cap B_7 = [0]$ ,  $L_4 = [a, a', a'', a''']$ , so existiert in  $L_4 \oplus B_7$  ein  $y = b' + a'''' \neq 0$ :  $y \perp C_{10}$ ,  $b' \in B_7$ ,  $a'''' \in L_4$ .  $L = [a, a'''', b, b']$  beweist nach (9), (10) die behauptete Ungleichung. Noch einfacher erledigen sich die möglichen Ausnahmefälle, etwa  $B_1 \subset A_3$  oder  $a \in [a', a'', a''']$ .

### Bemerkungen

1. (24), (25), (26) enthalten für  $n = 1$  und  $n = 2$  bereits die allgemeinste Ungleichung (vergleiche Sätze 1', 2'), erfassen hingegen für  $n = 3$  nur Spezialfälle von (23), da stets entweder  $i_2 + 1 = i_3$  oder  $j_2 + 1 = j_3$  ist.

Die Methode des «Verschiebens von Indizes» beschränkt sich nicht auf die Herleitung von (25) und (26); aus (24) können dadurch weitere Ungleichungen gefunden werden.

2. In [11] werden alle  $n$ -Tupel  $i, j, k$  die den Bedingungen a) bzw. a') und a'') der Sätze 1, 2, 3 (respektive 1', 2', 3') genügen, in Indizesmengen  $T_1^N - T_3^N$  ( $\bar{T}_1^N - \bar{T}_3^N$ ) zusammengefaßt. Dann folgt eine induktive Definition von  $T_n^N$  ( $\bar{T}_n^N$ ),  $n \leq N$ . Schließlich wird die Vermutung ausgesprochen,  $(i, j, k) \in T_n^N$  ( $\bar{T}_n^N$ ) habe die allgemeine Gültigkeit der Ungleichung (13) (respektive (15)) zur Folge. Für alle vorangehenden Ungleichungen ist tatsächlich  $(i, j, k) \in T_n^N$  ( $\bar{T}_n^N$ ); der Beweis dieser Vermutung steht aber vorläufig noch aus. Ferner enthält [11] ein Beispiel ( $n = 4$ ), das zeigt, daß  $T_n^N$  ( $\bar{T}_n^N$ ) im allgemeinen zu eng ist, um alle gültigen Ungleichungen zu erfassen. Es ist leicht, weitere Ungleichungen zu beweisen, für die  $(i, j, k) \notin T_n^N$  ist. Nach (19) ist

$$\sum_{r=0}^{q-1} \sum_{s=1}^m \alpha_{r(m+p)+s} + \sum_{r=1}^{qm} \beta_r \geq \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{s=1}^m \gamma_{r(m+p)+s}, \quad m \geq 1, q \geq 1, p \geq 0.$$

Weil die Eigenwerte immer geordnet angenommen werden, folgt daraus

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{q-1} \alpha_{r(m+p)+1} + \sum_{r=0}^{q-1} \beta_{rm+1} &\geq \frac{1}{m} \left[ \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{s=1}^m \alpha_{r(m+p)+s} + \sum_{r=1}^{qm} \beta_r \right] \geq \\ &\geq \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{q-1} \sum_{s=1}^m \gamma_{r(m+p)+s} \geq \sum_{r=0}^{q-1} \gamma_{r(m+p)+m}. \end{aligned}$$

Das heißt

$$\sum_{r=1}^q \alpha_{i_r} + \sum_{r=1}^q \beta_{j_r} \geq \sum_{r=1}^q \gamma_{k_r} \quad (27)$$

mit

$$\begin{aligned} i &= (1, m+p+1, 2m+2p+1, \dots, (q-1)(m+p)+1), \\ j &= (1, m+1, 2m+1, \dots, (q-1)m+1), \\ k &= (m, 2m+p, \dots, qm+(q-1)p). \end{aligned}$$

Für  $m \geq 2$ ,  $p \geq 0$ ,  $q > 3$  ist  $(i, j, k) \notin T_q^N$ ,  $N \geq q(m+p)$ , denn die in  $T_q^N$  enthaltene Bedingung

$$\sum_{r=1}^q (i_r + j_r - k_r) \leq \frac{q(q+1)}{2}$$

wird nicht erfüllt. Man vergleiche damit auch den Beweis von Satz 3.

Auch durch dieses Verfahren können außer (27) weitere Ungleichungen hergeleitet werden.

3. Es seien  $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} > 0$ .

Dann besitzt die Gleichung  $\mathfrak{A}x - \lambda \mathfrak{B}x = 0$   $N$  reelle Eigenwerte  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N > 0$ . Die Eigenvektoren  $u_1, u_2, \dots, u_N$  können gleichzeitig bezüglich der zwei Skalarprodukte  $(x, \mathfrak{A}y) = (x, y)_A$ ,  $(x, \mathfrak{B}y) = (x, y)_B$  orthogonalisiert und ferner bezüglich eines der beiden normiert werden, etwa:

$$(v_r, v_s)_A = \lambda_r \delta_{rs}, (v_r, v_s)_B = \delta_{rs}, \mathfrak{A}v_r - \lambda_r \mathfrak{B}v_r = 0 \quad (r, s = 1, 2, \dots, N).$$

Mit den Spurfunktionen

$$\begin{aligned} R^{A/B}(L_n) &= \sum_{r=1}^n R^{A/B}(x_r) = \sum_{r=1}^n \frac{(x_r, x_r)_A}{(x_r, x_r)_B} \\ R^{B/A}(L_n) &= \sum_{r=1}^n R^{B/A}(y_r) = \sum_{r=1}^n \frac{(y_r, y_r)_B}{(y_r, y_r)_A}, \end{aligned}$$

$L_n \subset L$ ,  $\{x_r\}$  o. Basis bzw.  $(\cdot)_B$ ,  $\{y_r\}$  o. Basis bzw.  $(\cdot)_A$ , lassen sich die Extremalprinzipien (1)–(12) auf die Eigenwerte  $\lambda_r$  von  $\mathfrak{A}x - \lambda \mathfrak{B}x = 0$  und  $v_r$  von  $\mathfrak{B}x - \nu \mathfrak{A}x = 0$ ,  $\lambda_r = \frac{1}{\nu_r}$ , übertragen.

Zum Beispiel

$$\begin{aligned}\lambda_2 + \lambda_3 &= \text{maximum}_{X_3 \subset L} \text{minimum}_{X_2 \subset X_3} R^{A/B}(X_2) \\ &= \text{minimum}_{Y_1 \subset L} \text{maximum}_{Y_2 \perp_B Y_1} R^{A/B}(Y_2)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\nu_2 + \nu_3 &= \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = \text{minimum}_{X_3 \subset L} \text{maximum}_{X_2 \subset X_3} R^{B/A}(X_2) \\ &= \text{maximum}_{Y_1 \subset L} \text{minimum}_{Y_2 \perp_A Y_1} R^{B/A}(Y_2)\end{aligned}$$

$\perp_A, \perp_B$  Orthogonalität bezüglich  $(\cdot, \cdot)_A$  bzw.  $(\cdot, \cdot)_B$ .

Damit sind die Ungleichungen (16)–(26) bei jeder Zerlegung von  $\mathfrak{A}$  gültig für die Eigenwerte  $\lambda_{1r}, \lambda_{2r}, \lambda_r$  von

$$\mathfrak{A}_1 x - \lambda_1 \mathfrak{B} x = 0, \mathfrak{A}_2 x - \lambda_2 \mathfrak{B} x = 0, \mathfrak{A} x - \lambda \mathfrak{B} x = 0, \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 + \mathfrak{A}_2.$$

In «umgekehrter Richtung» gelten sie bei jeder Zerlegung von  $\mathfrak{B}$  für die Eigenwerte  $\nu_{1r}, \nu_{2r}, \nu_r$  von

$$\mathfrak{B}_1 x - \nu_1 \mathfrak{A} x = 0, \mathfrak{B}_2 x - \nu_2 \mathfrak{A} x = 0, \mathfrak{B} x - \nu \mathfrak{A} x = 0, \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2.$$

Zum Beispiel

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{1i} + \lambda_{2j} &\geq \lambda_k \\ \nu_{1i} + \nu_{2j} &\leq \nu_k \end{aligned} \right\} \text{ falls } i + j \leq k + 1.$$

4. Die Ungleichungen dieses Abschnittes wurden (ohne Beweise) zum Teil schon in [10] veröffentlicht. Die inzwischen erschienene Arbeit [11] gestattet, sie auch indirekt zu beweisen.

Ein Vorteil der hier beschriebenen Methode liegt darin, daß sie für eine rasche Abschätzung von Eigenwerten *explizite Vorschriften* angibt.

### 3. Operatoren in HILBERT-Räumen

In diesem Kapitel wird kurz angedeutet, wie die gefundenen Resultate auf 2 wichtige Klassen von selbstadjungierten Operatoren in HILBERT-Räumen übertragen werden können. Im allgemeinen ist der Übergang zum unendlichdim. Falle ohne weiteres möglich, wenn die in Frage stehenden Operatoren einseitig beschränkte, rein diskrete Spektren aufweisen.

### 3.1. Vollstetige Operatoren

Es sei  $\mathfrak{A}$  ein *vollstetiger selbstadjungierter Operator* in einem HILBERT-Raum  $H$ .

$$\mathfrak{A} : H \rightarrow H$$

$$x \rightarrow \mathfrak{A}x, (\mathfrak{A}x, y) = (x, \mathfrak{A}y) \text{ für alle } x, y \in H.$$

Dann bilden seine Eigenwerte zwei monotone, reelle Zahlenfolgen  $\{\alpha_n^+\}, \{\alpha_n^-\}$ . Jede der beiden Folgen kann leer, endlich oder abzählbar unendlich sein. Trifft die letzte Möglichkeit zu, so konvergiert die Folge gegen 0.

$$\alpha_1^+ \geq \alpha_2^+ \geq \dots \geq \alpha_n^+ \geq \dots \rightarrow 0$$

$$\alpha_1^- \leq \alpha_2^- \leq \dots \leq \alpha_n^- \leq \dots \rightarrow 0.$$

Die entsprechenden Eigenvektoren  $a_n^+, a_n^-$  können orthonormiert werden.

$$\mathfrak{A}a_n^+ = \alpha_n^+ a_n^+, \mathfrak{A}a_n^- = \alpha_n^- a_n^-.$$

Wir wollen im folgenden einfachheitshalber annehmen, die Folgen  $\{\alpha_n^+\}, \{\alpha_n^-\}$  (weiter unten auch  $\{\beta_n^\pm\}, \{\gamma_n^\pm\}$ ) seien unendlich.

Die Funktion  $R^A$  ist für alle endlichdim. Teilräume  $L_n \subset H$  (wie in Kapitel 1) definiert und endlich.

Aus den bekannten Extremalprinzipien

$$\alpha_n^+ = \underset{X_n \subset H}{\text{maximum}} \underset{x \in X_n}{\text{minimum}} R^A(x) \quad (3^+)$$

$$= \underset{Y_{n-1} \subset H}{\text{minimum}} \underset{y \perp Y_{n-1}}{\text{maximum}} R^A(y) \quad (4^+)$$

folgen deshalb auch hier

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{i_r}^+ = \underset{X_{i_1} \subset \dots \subset X_{i_n} \subset H}{\text{maximum}} \underset{\substack{X_n \\ \dim(X_n \cap X_{i_r}) \geq r \\ (r = 1, 2, \dots, n)}}{\text{minimum}} R^A(X_n) \quad (11^+)$$

$$= \underset{Y_{i_1-1} \subset \dots \subset Y_{i_n-1} \subset H}{\text{minimum}} \underset{\substack{Y_n \\ \dim(Y_n \cap {}^\perp Y_{i_r-1}) \geq n+1-r \\ (r = 1, 2, \dots, n)}}{\text{maximum}} R^A(Y_n) \quad (12^+)$$

$$1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n.$$

Im endlichdim. Falle entspricht jedem Maximumprinzip für  $\alpha_i$  ein Minimumprinzip für  $\alpha_{N+1-i}$  und umgekehrt. Diese Dualität gilt hier zwischen  $\alpha_n^+$  und  $\alpha_n^-$ . Zum Beispiel entspricht (11<sup>+</sup>)

$$\sum_{r=1}^n \alpha_{i_r}^- = \text{minimum} \quad \text{maximum } R^A(X_n), \quad (11^-)$$

$$X_{i_1} \subset \dots \subset X_{i_n} \subset H \quad X_n$$

$$\dim(X_n \cap X_{i_r}) \geq r$$

$$(r = 1, 2, \dots, n)$$

entsprechend (12<sup>-</sup>).

Mit zwei vollstetigen selbstadjungierten Operatoren  $\mathfrak{A}$ ,  $\mathfrak{B}$  ist auch ihre Summe  $\mathfrak{C} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$  vollstetig und selbstadjungiert. Vermöge (11<sup>±</sup>), (12<sup>±</sup>) können deshalb die Ungleichungen (16)–(26) für die Eigenwerte  $\alpha_n^\pm$  von  $\mathfrak{A}$ ,  $\beta_n^\pm$  von  $\mathfrak{B}$  und  $\gamma_n^\pm$  von  $\mathfrak{C}$  übernommen werden.

Zum Beispiel

$$\alpha_{i_1}^+ + \alpha_{i_2}^+ + \beta_{j_1}^+ + \beta_{j_2}^+ \geq \gamma_{k_1}^+ + \gamma_{k_2}^+ \quad (i, j, k \text{ wie in Satz 2}) \quad (20^+)$$

$$\sum_{r=1}^n \gamma_{k_r}^+ \geq \sum_{r=1}^p \alpha_{i_r}^+ + \sum_{r=1}^q \beta_{j_r}^+ + \sum_{r=1}^q \alpha_r^- + \sum_{r=1}^p \beta_r^- \quad (24^+)$$

$k = (k_1, k_2, \dots, k_n)$  beliebig,  $i_r (r = 1, 2, \dots, p)$ ,  $j_r (r = 1, 2, \dots, q)$  wie in (24), und symmetrisch dazu

$$\alpha_{i_1}^- + \alpha_{i_2}^- + \beta_{j_1}^- + \beta_{j_2}^- \leq \gamma_{k_1}^- + \gamma_{k_2}^- \quad (i, j, k \text{ wie in (20}^+)). \quad (20^-)$$

$$\sum_{r=1}^n \gamma_{k_r}^- \leq \sum_{r=1}^p \alpha_{i_r}^- + \sum_{r=1}^q \beta_{j_r}^- + \sum_{r=1}^q \alpha_r^+ + \sum_{r=1}^p \beta_r^+ \quad (24^-)$$

$i, j, k$  wie in (24<sup>+</sup>).

Der Übergang zu den komplementären Ungleichungen ist im allgemeinen (das heißt ohne zusätzliche Erörterungen über die Konvergenz der Reihen  $\sum_{r=1}^n \alpha_r^+, \dots$ ) nicht gestattet.

Daß die Funktion  $R^A$  ihre Extremalwerte tatsächlich annimmt, beruht einzig auf der Vollstetigkeit von  $\mathfrak{A}$ . Separabilität und Vollständigkeit von  $H$  gehen in den Beweis nicht ein.

Unter dem gemachten Vorbehalt können die Beweise im wesentlichen aus dem endlichdim. Falle übernommen werden. Im übrigen ist es leicht, die Resultate endlichen (leeren) Folgen  $\{\alpha_n^+\}, \dots, \{\gamma_n^-\}$  anzupassen. Bricht zum Beispiel  $\{\alpha_n^-\}$  nach  $n_0 (\geq 0)$  Gliedern ab, so sind in (24<sup>+</sup>) alle  $\alpha_n^-$  mit  $n > n_0$  null zu setzen. Siehe [5], [6], [14], [17].

*Beispiel: Integraloperatoren*

Es sei  $I = [a, b]$  ein kompaktes Intervall in  $\mathbb{R}$ ,  $H = L_I^2$  und  $K(s, t)$  ein HERMITESCHER Kern aus  $L_{I \times I}^2$ .

Dann ist der Integraloperator

$$\mathfrak{K}: L_I^2 \rightarrow L_I^2$$

$$x(t) \rightarrow y(s) = \int_a^b K(s, t) x(t) dt$$

selbstadjungiert und vollstetig.

Folglich gelten (11<sup>±</sup>), (12<sup>±</sup>) für seine Eigenwerte  $\kappa_n^\pm$ . Ferner lassen sich die Ungleichungen (20<sup>±</sup>), (24<sup>±</sup>) usw., auf die Eigenwerte  $\kappa_n^\pm, \kappa_{1n}^\pm, \kappa_{2n}^\pm$  der Operatoren  $\mathfrak{K}, \mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$  jeder Zerlegung

$$K(s, t) = K_1(s, t) + K_2(s, t), \quad K_1, K_2 \text{ HERMITESCH, } \in L_{I \times I}^2,$$

anwenden.

**3.2. Differentialoperatoren**

Zahlreiche Differentialoperatoren der mathematischen Physik weisen einseitig beschränkte diskrete Spektren auf. Die Anwendung der bewiesenen Sätze begegnet deshalb keinen Schwierigkeiten.

Im folgenden wird das Vorgehen an Hand des STURM-LIOUVILLESchen *Eigenwertproblems* aufgezeigt.

Differentialgleichung:

$$(p(t)x'(t))' - q(t)x(t) + \lambda \varrho(t)x(t) = 0$$

$$' = \frac{d}{dt}, \quad a < t < b,$$

$$p', q, \varrho \text{ stetig in } [a, b], \quad p(t), q(t), \varrho(t) > 0 \text{ in } [a, b].$$

Randbedingungen:

$$x'(a) - \delta x(a) = 0$$

$$x'(b) + \varepsilon x(b) = 0, \quad \delta, \varepsilon > 0.$$

Die Eigenwerte dieser Differentialgleichung bilden eine monoton zunehmende Folge, die sich (im Endlichen) nirgends häuft.



$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots \rightarrow \infty,$$

die entsprechenden Eigenfunktionen  $u_1(t), \dots, u_n(t), \dots$  sind paarweise orthogonal bez.  $(x, y)_q = \int_a^b \varrho(t) x(t) y(t) dt$ .

Der *Differentialoperator*

$$\mathfrak{D}x(t) = \frac{1}{\varrho(t)} \{ - (p(t) x'(t))' + q(t) x(t) \}$$

ist zunächst definiert für alle Funktionen aus  $C_{[a,b]}^2$ , die den Randbedingungen genügen. In diesem Definitionsbereich ist  $\mathfrak{D}$  wesentlich-selbstadjungiert und positiv.

$$\begin{aligned} (\mathfrak{D}x, y) = (x, \mathfrak{D}y) &= \int_a^b (p(t) x'(t) y'(t) + q(t) x(t) y(t)) dt + \\ &+ \varepsilon p(b) x(b) y(b) + \delta p(a) x(a) y(a), \end{aligned}$$

$$(x, \mathfrak{D}x) > 0, \quad x(t) \not\equiv 0.$$

$\mathfrak{D}$  wird zu einem selbstadjungierten Operator (mit vollstetigem Inversen) durch Abschließen des angegebenen Definitionsbereiches bez. der Metrik  $(x, \mathfrak{D}x)$ . Durch diese Erweiterung wird das Spektrum  $\{\lambda_n\}$  nicht geändert.

Entsprechendes gilt für die Definitionsbereiche von  $R^{D,q}$ ,  $\mathfrak{D}_1$ ,  $\mathfrak{D}_2$  (siehe weiter unten).

Hingegen ist der RAYLEIGHsche Quotient

$$R^{D,q}(x) = \frac{\int_a^b (p(t) x'^2(t) + q(t) x^2(t)) dt + \varepsilon p(b) x^2(b) + \delta p(a) x^2(a)}{\int_a^b \varrho(t) x^2(t) dt}$$

für alle  $x(t) \not\equiv 0$  aus  $C^2$  definiert und positiv.

Für die Eigenwerte  $\lambda_n$  gilt:

$$\lambda_n = \underset{X_n \subset C_2}{\text{minimum}} \quad \underset{x \in X_n}{\text{maximum}} R^{D,q}(x) = R^{D,q}(u_n). \quad (3')$$

Die Randbedingungen sind natürlich; sie brauchen bei dieser Definition von  $R^{D,q}$  von den in (3') zugelassenen Funktionen nicht gefordert zu werden.

Mit (3') gelten auch die Extremalprinzipien für endliche Summen von Eigenwerten, und die bewiesenen Ungleichungen sind auf die Eigenwerte der Operatoren  $\mathfrak{D}$ ,  $\mathfrak{D}_1$ ,  $\mathfrak{D}_2$  anwendbar.

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} &= \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2, \\ \mathfrak{D}_1 x(t) &= \frac{1}{\varrho(t)} \{ - (p_1(t) x'(t))' + q_1(t) x(t) \}, \\ \mathfrak{D}_2 X(t) &= \frac{1}{\varrho(t)} \{ - (p_2(t) x'(t))' + q_2(t) x(t) \}, \\ p(t) &= p_1(t) + p_2(t), \quad q(t) = q_1(t) + q_2(t), \\ \delta &= \delta_1 + \delta_2, \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2,\end{aligned}$$

mit  $p_1(t), p_2(t) > 0, \dots$  (wie für  $\mathfrak{D}$ ).

Ferner ist

$$\frac{1}{\lambda_n} = \underset{X_n \subset C^2}{\text{maximum}} \underset{x \in X_n}{\text{minimum}} \frac{1}{R^{D,e}(x)}, \text{ usw.}$$

Damit gelten dieselben Ungleichungen in «umgekehrter Richtung» für die Inversen der Eigenwerte  $\lambda_n, \mu_n, \nu_n$  von

$$\mathfrak{D}x(t) = \mu \varrho_1(t) x(t),$$

$$\mathfrak{D}x(t) = \nu \varrho_2(t) x(t)$$

und

$$\mathfrak{D}x(t) = \lambda \varrho(t) x(t),$$

bei jeder Aufspaltung der Masse in  $\varrho(t) = \varrho_1(t) + \varrho_2(t)$ .

Zum Beispiel

$$\frac{1}{\mu_{i_1}} + \frac{1}{\mu_{i_2}} + \frac{1}{\nu_{j_1}} + \frac{1}{\nu_{j_2}} \geq \frac{1}{\lambda_{k_1}} + \frac{1}{\lambda_{k_2}} \quad (i, j, k \text{ wie in Satz 2}).$$

Entsprechendes gilt für die Eigenwertprobleme der Elastizitätstheorie, die Energie-Niveaus der SCHRÖDINGERgleichung, usw. Siehe [3], [6–10], [16].

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] AMIR-MOEZ A.R.: *Extreme properties of eigenvalues of a hermitian transformation and singular values of the sum and product of a linear transformation*. Duke Math. J. 23, p. 463 (1956).
- [2] BECKENBACH-BELLMAN: *Inequalities*. Ergebnisse der Math. 30 (1961), Springer-Verlag, Berlin.
- [3] DUNKERLEY: *On the whirling and vibration of shafts*. Phil. Trans. Roy. Soc., A, CXXXXV p. 279 (1894).
- [4] FAN KY: *On a theorem of WEYL concerning eigenvalues of a linear transformation*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 35, p. 652 (1949) bzw. 36, p. 31 (1950).
- [5] FAN KY: *Maximum properties and inequalities for the eigenvalues of completely continuous operators*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37, p. 760 (1951).

- [6] GOULD S.H.: *Variational methods for eigenvalue problems*. University of Toronto Press, Toronto (1957).
- [7] HERSCH J.: *Caractérisation variationnelle d'une somme de valeurs propres consécutives, généralisation d'inégalités de PÓLYA-SCHIFFER et de WEYL*. C.R. Acad. Sci. Paris 252, p. 1714 (1961).
- [8] HERSCH J.: *Inégalités pour des valeurs propres consécutives de systèmes vibrants inhomogènes, allant « en sens inverse » de celles de PÓLYA-SCHIFFER et de WEYL*. C. R. Acad. Sci. Paris 252, 2496 (1961).
- [9] HERSCH J.: *Propriétés de convexité du type de WEYL pour des problèmes de vibration ou d'équilibre*. ZAMP XII/4, p. 298 (1961).
- [10] HERSCH-ZWAHLEN: *Evaluations par défaut pour une somme quelconque de valeurs propres  $\gamma_k$  d'un opérateur  $C = A + B$  à l'aide de valeurs  $\alpha_i$  de  $A$  et  $\beta_j$  de  $B$* . C. R. Acad. Sci. Paris 254, p. 1559 (1962).
- [11] HORN A.: *Eigenvalues of sums of hermitian matrices*. Pac. J. of Math. 12/1, p. 225 (1962).
- [12] LIDSKII V.: *The proper values of the sum and product of symmetric matrices*. Doklady Akad. Nauk. USSR 75, p. 769 (1950).
- [13] PÓLYA-SCHIFFER: *Convexity of functionals by transplantation*. J. d'Anal. Math. 3, 2e partie, p. 245 (1953/54).
- [14] RIESZ-SZ.-NAGY: *Vorlesungen über Funktionalanalysis*. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin (1956).
- [15] WEINSTEIN A.: *The intermediate problems and the maximum-minimum theory of eigenvalues*. J. of Math. and Mech. 12, p. 235 (1963).
- [16] WEYL H.: *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen*. Math. Ann. 71, p. 441 (1912).
- [17] WIELANDT H.: *An extremum property of sums of eigenvalues*. Proc. Am. Math. Soc. 6, p. 106 (1955).

(Eingegangen den 3. Februar 1965)