

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 40 (1965-1966)

**Artikel:** Le théorème de BARDEN-MAZUR-STALLINGS.  
**Autor:** Kervaire, Michel A.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-30628>

#### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

#### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

#### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 07.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Le théorème de BARDEN-MAZUR-STALLINGS

par MICHEL A. KERVAIRE \*)

Un problème important de Topologie Différentielle est d'établir des critères de difféomorphisme pour les variétés différentielles. Un exemple d'un tel critère est fourni par le théorème de SMALE qui (pour certaines variétés) ramène le difféomorphisme à la notion de *h*-cobordisme.

Soient  $M$  et  $M'$  deux variétés différentielles orientées, de même dimension. On suppose  $M$  et  $M'$  connexes, compactes et sans bord.

**Définition.** Une variété différentielle compacte  $W$  est un *h*-cobordisme<sup>1)</sup> entre  $M$  et  $M'$  si le bord  $bW$  de  $W$  est difféomorphe à la réunion disjointe  $M' + (-M)$ , et si chaque composante connexe de  $bW$  est un rétracte par déformation de  $W$ . ( $-M$  désigne la variété obtenue à partir de  $M$  en renversant l'orientation.)

SMALE a démontré que s'il existe un *h*-cobordisme  $W$  entre  $M$  et  $M'$ , si  $M$ ,  $M'$  sont simplement connexes et si  $\dim M = \dim M' \geq 5$ , alors  $W$  est difféomorphe au produit  $I \times M$ , où  $I$  est l'intervalle  $[0, 1]$ . En particulier,  $M$  et  $M'$  sont alors difféomorphes. (Cf. [10].)

Le théorème de BARDEN-MAZUR-STALLINGS (appelé également théorème du *s*-cobordisme) est une extension du théorème de SMALE aux variétés dont le groupe de POINCARÉ n'est pas nécessairement trivial. Comme les démonstrations de BARDEN et MAZUR (cf. [1] et [3]) sont incorporées dans des contextes plus généraux, et que celle de STALLINGS n'a, à ma connaissance, jamais été publiée, il n'est peut-être pas inutile de présenter ici une démonstration dégagée de considérations auxiliaires<sup>2)</sup>.

Il faut remarquer tout d'abord que deux variétés *h*-cobordantes dont le groupe de POINCARÉ n'est pas trivial ne sont pas nécessairement difféomorphes. En effet, MILNOR démontre que  $L(7, 1) \times S^4$  et  $L(7, 2) \times S^4$  sont *h*-cobordantes. ( $L(r, s)$  désigne la variété lenticulaire de dimension 3, de type  $(r, s)$ , dont le groupe de POINCARÉ est cyclique d'ordre  $r$ .) Ces variétés ne sont pas difféomorphes car leurs torsion de REIDEMEISTER-DE RHAM sont distinctes. (Cf. J. MILNOR [4].)

Soient  $W$  un *h*-cobordisme entre  $M$  et  $M'$ , et  $\pi$  le groupe de POINCARÉ commun de  $M$ ,  $W$  et  $M'$ . (On suppose donné un difféomorphisme de  $M' + (-M)$

\*) L'auteur est titulaire d'une ALFRED P. SLOAN FELLOWSHIP.

<sup>1)</sup> Cobordisme d'homotopie.

<sup>2)</sup> Le présent texte reproduit avec quelques améliorations un exposé tenu à l'Université de Lausanne, Juin 1964. (Cf. [7].)

sur  $bW$ , et on identifie  $M' + (-M)$  avec  $bW$  par ce difféomorphisme. Les groupes  $\pi_1 M$ ,  $\pi_1 W$  et  $\pi_1 M'$  sont alors identifiés par les isomorphismes  $\pi_1 M \rightarrow \pi_1 W$ ,  $\pi_1 M' \rightarrow \pi_1 W$  induits par les inclusions  $M \rightarrow W$ ,  $M' \rightarrow W$  qui sont des équivalences d'homotopie.) Soit  $Wh(\pi)$  le groupe de WHITEHEAD de  $\pi$ . Rappelons en brièvement la définition. Soit  $GL(n, \mathbb{Z}[\pi])$  le groupe des matrices inversibles d'ordre  $n$  sur l'anneau de groupe  $\mathbb{Z}[\pi]$ . On définit dans la réunion disjointe  $\bigcup_n GL(n, \mathbb{Z}[\pi])$  la relation d'équivalence engendrée par les opérations élémentaires suivantes :

- (1) Multiplication (à gauche) d'une ligne d'une matrice par un élément de la forme  $\pm \gamma$ , avec  $\gamma \in \pi$ .
- (2) Addition à une ligne d'une autre ligne de la même matrice.
- (3) Passage de  $A \in GL(n, \mathbb{Z}[\pi])$  à la matrice  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  de  $GL(n+1, \mathbb{Z}[\pi])$ .
- (4) Passage de  $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  à  $A$ .

On vérifie que les classes d'équivalence forment un groupe abélien dont l'élément neutre est représenté par la matrice vide. L'addition des classes est induite par la multiplication des matrices de même ordre. Ce groupe<sup>3)</sup> est le groupe de WHITEHEAD  $Wh(\pi)$  de  $\pi$ .

Revenons au  $h$ -cobordisme  $W$  entre  $M$  et  $M'$  et soit  $W$  le revêtement universel de  $W$ . Le sous-espace  $M$  de  $W$  au dessus de  $M$  s'identifie au revêtement universel de  $M$ . On désignera par  $(W_t, M_t)$  une  $C^1$ -triangulation de  $(W, M)$ , relèvement d'une  $C^1$ -triangulation de  $(W, M)$ . Le complexe  $C_*(W_t, M_t)$  est acyclique, et comme c'est un  $\mathbb{Z}[\pi]$ -module libre de type fini on peut lui associer une torsion de WHITEHEAD  $\tau(W, M) \in Wh(\pi)$ . D'après des théorèmes connus,  $\tau(W, M)$  ne dépend pas de la triangulation  $t$ . (Cf. [7] ou J. MILNOR [5], où il est également démontré que  $\tau(W, M)$  peut être calculé à partir d'une décomposition cellulaire de  $(W, M)$ . L'expression de  $\tau(W, M)$  sera rappelée en cours de démonstration.)

**Théorème.** *Soit  $W$  un  $h$ -cobordisme entre  $M$  et  $M'$ , et supposons  $\dim M = \dim M' \geq 5$ . La variété  $W$  est difféomorphe à  $I \times M$  si et seulement si  $\tau(W, M) = 0$ . De plus, si  $M$  et  $\tau_0 \in Wh(\pi_1 M)$  sont donnés arbitrairement, il existe un  $h$ -cobordisme  $W$  entre  $M$  et une variété  $M'$  tel que  $\tau(W, M) = \tau_0$ .*

Dans ce théorème,  $W$ ,  $M$  et  $M'$  sont des variétés différentielles connexes, compactes, orientées. Il est sous-entendu qu'un difféomorphisme préserve l'orientation, sauf mention expresse du contraire. La démonstration utilise

---

<sup>3)</sup> Cette définition de  $Wh(\pi)$  est relativement compliquée, mais ce sont ces opérations élémentaires qui se présentent dans la démonstration ci-dessous.

essentiellement les méthodes de SMALE dont nous rappellerons sans démonstration deux des principaux lemmes. (Cf. [10].)

Il est évident que si  $W$  est difféomorphe à  $I \times M$ , on a  $\tau(W, M) = 0$ . En effet, dans ce cas l'inclusion  $M \rightarrow W$  est une équivalence d'homotopie simple<sup>4)</sup>. (Cf. WHITEHEAD [11].)

Soit maintenant  $W$  un  $h$ -cobordisme quelconque entre  $M$  et  $M'$ . Rappelons que d'après MORSE il existe une fonction différentiable  $\mu: W \rightarrow I$  telle que  $M$  et  $M'$  soient les variétés de niveau  $\mu^{-1}(0)$  et  $\mu^{-1}(1)$  respectivement, et dont les points critiques (intérieurs à  $W$ ) sont tous non-dégénérés. Une telle fonction  $\mu$  détermine une décomposition en anses de  $(W, M)$  de la forme

$$W \approx I \times M + \Sigma_q \Sigma_i (\varphi_i^q),$$

où  $(\varphi_i^q)$  désigne une anse d'indice  $q$ , i.e. difféomorphe à  $D^q \times D^{n-q+1}$ ,  $n = \dim M = \dim M' = \dim W - 1$ . Si  $X$  est une variété à bord, on note  $X + (\varphi_i^q)$  la variété obtenue en attachant à  $X$  l'anse  $(\varphi_i^q)$  par le plongement  $\varphi_i^q: S^{q-1} \times D^{n-q+1} \rightarrow bX$ . On rappelle que si  $\varphi, \psi: S^{q-1} \times D^{n-q+1} \rightarrow bX$  sont difféotopes, les variétés  $X + (\varphi)$  et  $X + (\psi)$  sont difféomorphes. (Utiliser le théorème de relèvement des difféotopies. Cf. [6], Théorème 2.3.) On rappelle également que si  $X_1 = X + (\varphi^q) + (\psi^r)$  avec  $r \leq q$ , le plongement  $\psi^r: S^{r-1} \times D^{n-r+1} \rightarrow b(X + (\varphi^q))$  est difféotope à un plongement  $\psi_0^r$  dont l'image est contenue dans  $bX - \varphi^q(S^{q-1} \times D^{n-q+1})$ . Il suffit de séparer  $\psi^r(S^{r-1} \times (0))$  de la sphère  $(0) \times S^{n-q}$  de l'anse  $(\varphi^q)$  par une difféotopie dans  $b(X + (\varphi^q))$ , ce qui est possible par raison de dimension:  $(r - 1) + n - q < n$ . On applique ensuite le théorème de relèvement des difféotopies. On a alors  $X_1 \approx X + (\varphi^q) + (\psi_0^r) = X + (\psi_0^r) + (\varphi^q)$ , où  $\approx$  désigne un difféomorphisme. Par abus de notation, on écrira  $X + (\varphi^q) + (\psi^r) \approx X + (\psi^r) + (\varphi^q)$ . (On notera cependant que si c'est  $X + (\psi^r) + (\varphi^q)$  qui est donné avec  $r \leq q$ , le plongement  $\varphi^q: S^{q-1} \times D^{n-q+1} \rightarrow b(X + (\psi^r))$  n'est pas en général difféotope à un plongement dans  $bX$  et l'expression  $X + (\varphi^q) + (\psi^r)$  n'a alors pas de sens.)

**Lemme 1.** *Soit  $W$  un  $h$ -cobordisme entre  $M$  et  $M'$ . Supposons que  $\dim W = n + 1 \geq 6$ . Pour tout entier  $r$  tel que  $2 \leq r \leq n - 2$ , il existe une décomposition en anses de  $W$  de la forme*

$$(*) \quad W \approx I \times M + (\varphi_1^r) + \dots + (\varphi_\alpha^r) + (\psi_1^{r+1}) + \dots + (\psi_\alpha^{r+1}).$$

<sup>4)</sup> Le théorème ci-dessus affirme que, sous les hypothèses énoncées,  $W$  est difféomorphe à  $I \times M$  si et seulement si l'inclusion  $M \rightarrow W$  est une équivalence d'homotopie simple. D'où la dénomination de théorème du *s*-cobordisme.

En d'autres termes, on peut éliminer toutes les anses d'une décomposition en anses de  $W \bmod M$  en les remplaçant par des anses de deux indices consécutifs.

La première moitié du théorème résultera alors du lemme suivant.

**Lemme 2.** *Si  $W$  tel que  $\dim W \geq 6$  est de la forme (\*) et si  $\tau(W, M) = 0$ , on a  $W \approx I \times M$ .*

Pour démontrer le lemme 1, on part d'une décomposition en anses arbitraire de  $(W, M)$ . D'après les remarques ci-dessus, on peut supposer que cette décomposition en anses est *ordonnée*, i. e. de la forme

$$W \approx I \times M + \Sigma_i(\varphi_i^0) + \Sigma_j(\varphi_j^1) + \Sigma_k(\varphi_k^2) + \dots$$

On va éliminer successivement les anses d'indices  $q = 0, 1, \dots, r - 1$ . En éliminant les anses d'indice  $q$ , on ne rajoutera que des anses d'indice  $q + 2$ . Après avoir appliqué la même méthode à la décomposition en anses duale, on obtiendra ainsi la formule (\*).

**Notations.** Dans une décomposition en anses ordonnée de  $W \bmod M$ , on désignera par  $X_q$  la réunion de  $I \times M$  et des anses d'indices  $\leq q$ . On pose  $Y_q = bX_q - ((0) \times M)$ . Autrement dit,  $Y_q$  est la composante du bord de  $X_q$  à laquelle on attache les anses d'indice  $\geq q + 1$  (tout au moins pour  $q \geq 1$ ). Une anse d'indice  $q$ ,  $(\varphi_i^q)$  est difféomorphe à  $D^q \times D^{n-q+1}$ . On désignera par  $D_i^q$  et on appellera *âme* de  $(\varphi_i^q)$  l'image de  $D^q \times (0)$  dans l'anse  $(\varphi_i^q)$ . De même  $S_i^{n-q}$  et  $D_i^{n-q+1}$  désignent les images de  $(0) \times S^{n-q}$  et  $(0) \times D^{n-q+1}$  dans  $(\varphi_i^q)$  respectivement.  $S_i^{n-q}$  sera appelée la *sphère transverse* de l'anse  $(\varphi_i^q)$ . On notera  $Y_q^0$  la variété  $Y_q^0 = Y_q - \bigcup_i \varphi_i^{q+1}(S^q \times B^{n-q})$ , où  $B^{n-q} = \text{int } D^{n-q}$ . On a  $Y_q^0 \subset Y_q$  et  $Y_q^0 \subset Y_{q+1}$ .

Rappelons enfin un lemme de SMALE qui joue un rôle essentiel pour l'élimination des anses.

**Lemme 3.** *Soit  $X$  une variété à bord de dimension  $n + 1$  et  $X + (\varphi) + (\psi)$  la variété obtenue en attachant à  $X$  deux anses d'indices consécutifs  $s$  et  $s + 1$ , telles que  $\psi(S^s \times (0))$  coupe la sphère transverse  $S^{n-s}$  de l'anse  $(\varphi)$  en un seul point et transversalement. Alors  $X \approx X + (\varphi) + (\psi)$ .*

En particulier, si  $X + (\varphi)$  est donnée avec l'anse  $(\varphi)$  trivialement attachée, i.e. si le plongement  $\varphi: S^{s-1} \times D^{n-s+1} \rightarrow bX$  se factorise par le plongement canonique  $S^{s-1} \times D^{n-s+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  et un plongement  $\mathbb{R}^n \rightarrow bX$ , il existe alors un plongement  $\psi: S^s \times D^{n-s} \rightarrow b(X + (\varphi))$  tel que  $\psi(E_+^s \times (0))$  soit le disque

âme de l'anse  $(\varphi)$ , où  $E_+^s$  est un hémisphère de  $S^s$ . Il existe donc alors une anse  $(\psi)$  d'indice  $s+1$ , telle que  $X + (\varphi) + (\psi) \approx X$ .

Soit maintenant

$$W \approx I \times M + \Sigma_i (\varphi_i^0) + \Sigma_j (\varphi_j^1) + \Sigma_k (\varphi_k^2) + \dots$$

une décomposition en anses ordonnée de  $W$  mod  $M$ . On procède à l'élimination des anses d'indices  $\neq r, r+1$ .

### Elimination des anses d'indice 0.

Cette opération est facile. Une anse d'indice 0 est un  $(n+1)$ -disque disjoint de  $I \times M$ . Comme  $W$  est connexe, l'une au moins des anses d'indice 1 joint  $I \times M$  à une anse d'indice 0. Soient  $(\varphi_1^0)$  et  $(\varphi_1^1)$  ces deux anses que l'on peut supposer attachées avant toutes les autres. On a  $I \times M + (\varphi_1^0) + (\varphi_1^1) \approx M$ . On peut donc supprimer ces deux anses sans changer  $W$  à un difféomorphisme près. On a ainsi diminué d'une unité le nombre des anses d'indice 0 et le nombre des anses d'indice 1. Après un nombre fini d'opérations de ce genre il n'y a plus d'anses d'indice 0.

### Elimination des anses d'indice 1.

On considère  $X_1 = I \times M + (\varphi_1^1) + \dots + (\varphi_\alpha^1)$ . Comme  $I \times M$  est connexe, et  $X_1$  orientable,  $X_1$  est somme connexe le long du bord de  $I \times M$  avec  $\alpha$  tores pleins  $S^1 \times D^n$ . On a donc

$$\pi_1(X_1) = \pi_1 M * (x_1, \dots, x_\alpha),$$

où  $(x_1, \dots, x_\alpha)$  désigne le groupe libre sur les  $\alpha$  générateurs  $x_1, \dots, x_\alpha$  représentés par les âmes des anses  $(\varphi_1^1), \dots, (\varphi_\alpha^1)$ . Soit  $\pi_1 M = (a_1, \dots, a_s; R_1, \dots, R_t)$  une présentation de  $\pi_1 M$ , et soient  $S_1, \dots, S_\beta$  des représentants des classes de conjugaison dans  $\pi_1 X_1$  données par les plongements  $\varphi_j^2: S^1 \times D^{n-1} \rightarrow b X_1$ . Le groupe  $\pi_1(X_2)$  admet alors la présentation

$$\pi_1(X_2) = (a_1, \dots, a_s, x_1, \dots, x_\alpha; R_1, \dots, R_t, S_1, \dots, S_\beta).$$

Comme l'inclusion  $I \times M \rightarrow X_2$  induit un isomorphisme du groupe de POINCARÉ, on a  $x_i = w_i(a_1, \dots, a_s)$  dans  $\pi_1(X_2)$ ,  $i = 1, \dots, \alpha$ , où  $w_i$  est un mot ne contenant que les symboles  $a_1, \dots, a_s$ . On considérera dans un instant l'élément représenté par  $x_i w_i^{-1}$  dans  $\pi_1(X_1)$ . Soient  $\psi_i: S^1 \times D^{n-1} \rightarrow Y_1^0$

des plongements. On peut former  $X_1 + \Sigma_i(\psi_i^2) + \Sigma_j(\varphi_j^2) \approx X_2 + \Sigma_i(\psi_i^2)$ . On suppose les anses  $(\psi_i^2)$  trivialement attachées. On peut alors attacher à  $X_2 + \Sigma_i(\psi_i^2)$  des anses  $(\Psi_i^3)$ ,  $i = 1, \dots, \alpha$ , telles que  $X_2 \approx X_2 + \Sigma_i(\psi_i^2) + \Sigma_i(\Psi_i^3)$ . On notera le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(Y_2) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(X_2) \\ \pi_1(Y_1^0) & \begin{array}{c} \nearrow \cong \\ \searrow \cong \end{array} & \uparrow \\ \pi_1(Y_1) & \xrightarrow{\cong} & \pi_1(X_1) \end{array}$$

où les homomorphismes sont induits par les inclusions. Considérons l'élément  $\xi_i$  de  $\pi_1(Y_1^0)$  qui s'envoie sur  $x_i w_i^{-1}$  dans  $\pi_1(X_1)$ . Cet élément est envoyé sur 1 dans  $\pi_1(Y_2)$ . Il en résulte que  $\psi_i: S^1 \times D^{n-1} \rightarrow Y_1^0 \subset Y_2$  est homotope dans  $Y_2$  à un plongement  $\psi'_i: S^1 \times D^{n-1} \rightarrow Y_1^0$  représentant  $\xi_i$ , et tel que  $\psi'_i(S^1 \times (0))$  coupe la sphère transverse de  $(\varphi_i^1)$  en un seul point transversalement et ne rencontre pas les sphères transverses de  $(\varphi_j^1)$  pour  $j = 1, \dots, i-1$ ,  $i = 1, \dots, \alpha$ . Comme  $\dim Y_2 \geq 5$ , on peut supposer  $\psi_i$  et  $\psi'_i$  difféotopes. On a alors

$$X_1 + \Sigma_i(\psi_i) \approx I \times M + \Sigma_i((\varphi_i^1) + (\psi'_i)),$$

et en utilisant le lemme 3, il vient  $X_1 + \Sigma_i(\psi_i) \approx I \times M$ . On a donc

$$\begin{aligned} X_2 &\approx X_2 + \Sigma_i(\psi_i^2) + \Sigma_i(\Psi_i^3) \\ &\approx X_1 + \Sigma_i(\psi_i^2) + \Sigma_j(\varphi_j^2) + \Sigma_i(\Psi_i^3) \\ &\approx I \times M + \Sigma_j(\varphi_j^2) + \Sigma_i(\Psi_i^3), \end{aligned}$$

d'où une décomposition en anses de  $(W, M)$  sans anses d'indice 1.

**Elimination des anses d'indice  $q$  pour  $2 \leq q < r \leq n-2$ .**

Soit  $W = I \times M + (\varphi_1^q) + \dots + (\varphi_\alpha^q) + (\varphi_1^{q+1}) + \dots + (\varphi_\beta^{q+1}) + \dots$  une décomposition en anses du  $h$ -cobordisme donné  $W$  entre  $M$  et  $M'$  avec  $2 \leq q < r \leq n-2$  ( $\dim W = n+1 \geq 6$ ). On rappelle que  $X_s$  désigne la réunion de  $I \times M$  avec les anses d'indices  $\leq s$ , et que  $Y_s = bX_s - ((0) \times M)$  est la composante connexe du bord de  $X_s$  à laquelle sont attachées les anses d'indices  $\geq s+1$ . Soit  $a_i^s$  un relèvement de  $D_i^s$  (l'âme de l'anse  $(\varphi_i^s)$ ) dans  $X_s$ , le revêtement universel de  $X_s$ , qui s'identifie avec le sous-espace de  $W$  au dessus de  $X_s$ . On identifie  $a_i^s$  avec sa classe dans  $H_s(X_s, X_{s-1})$  qui est alors un  $\mathbb{Z}[\pi]$ -module libre engendré par les  $a_i^s$ . On notera  $d: H_{s+1}(X_{s+1}, X_s) \rightarrow H_s(X_s, X_{s-1})$  l'opérateur bord.

Soit  $f: S^q \rightarrow Y_q$  un plongement différentiable. Un relèvement de  $f$  dans  $X_q$  représente une classe de la forme  $f = \sum_i x_i a_i^q \in H_q(X_q, X)$ , avec  $x_i \in \mathbb{Z}[\pi]$ , univoquement déterminée à la multiplication par un élément  $\gamma \in \pi$  près. ( $X = I \times M$ ,  $X$  est le sous-espace de  $W$  au dessus de  $X$ .) On utilisera les deux lemmes suivants.

**Lemme 4.** *Le plongement  $f: S^q \rightarrow Y_q$  est difféotope (pour  $2 \leq q < n - 2$ ) à un plongement  $g: S^q \rightarrow Y_q$  tel que  $g(S^q)$  coupe la sphère transverse  $S_i^{n-q}$  de  $(\varphi_i^q)$  transversalement en un seul point, et  $g(S^q) \cap S_j^{n-q} = \emptyset$  pour  $j \neq i$ , si et seulement si les relèvements de  $f$  représentent  $\pm \gamma a_i^q \in H_q(X_q, X)$  avec  $\gamma \in \pi$ .*

Rappelons la notation  $Y_q^0 = Y_q - \bigcup_{j=1}^{\beta} \varphi_j^{q+1}(S^q \times B^{n-q})$  et l'inclusion  $Y_q^0 \subset Y_{q+1}$ .

**Lemme 5.** *Supposons  $f: S^q \rightarrow Y_q^0$ , et soient  $x_j \in \mathbb{Z}[\pi]$ ,  $j = 1, \dots, \beta$ , des éléments arbitraires donnés. Il existe un plongement  $g: S^q \rightarrow Y_q^0$  tel que les compositions de  $f$  et  $g$  avec l'inclusion  $Y_q^0 \subset Y_{q+1}$  soient difféotopes (dans  $Y_{q+1}$ ), et tel que*

$$g = f + \sum_j x_j d(a_j^{q+1}),$$

où  $g, f \in H_q(X_q, X)$  sont les classes de relèvement de  $g$  et  $f$ .

(Ce lemme est une adaptation évidente à la situation présente d'un lemme de SMALE.) Rappelons brièvement la démonstration du lemme 5. Le plongement  $h_j: S^q \rightarrow Y_q^0$  donné par  $h_j = \varphi_j^{q+1}|S^q \times y_0$ , où  $y_0 \in bD^{n-q+1}$ , est difféotope dans  $Y_{q+1}$  à un plongement trivial (plongement canonique dans le voisinage d'un point). En faisant la somme connexe dans  $Y_q^0$  (cf. [2]) de  $f$  avec  $\pm h_j$  (composition de  $h_j$  avec un difféomorphisme  $S^q \rightarrow S^q$  de degré  $\pm 1$ ) le long d'un chemin différentiable dans  $Y_q^0$ , on change  $f$  en  $f \pm \gamma h_j$ , où  $\gamma \in \pi$  peut être modifié arbitrairement par un choix convenable du chemin qui définit la somme connexe de  $f$  et  $\pm h_j$ . Cette somme connexe est difféotope à  $f$  dans  $Y_{q+1}$ . En itérant cette construction, on peut modifier  $f$  par n'importe quelle combinaison linéaire  $\sum_j x_j h_j = \sum_j x_j d(a_j^{q+1})$  avec  $x_j \in \mathbb{Z}[\pi]$ , sans changer sa classe de difféotopie (comme plongement dans  $Y_{q+1}$ ).

Supposons le lemme 4 démontré. On peut alors éliminer les anses d'indice  $q$  de la manière suivante: Puisque  $H_*(W, M) = 0$ , l'homomorphisme bord  $d: H_{q+1}(X_{q+1}, X_q) \rightarrow H_q(X_q, X)$  est surjectif. Pour tout index  $i$  ( $1 \leq i \leq \alpha$ ), il existe donc des  $x_{ij} \in \mathbb{Z}[\pi]$  tels que  $\sum_j x_{ij} d(a_j^{q+1}) = a_i^q$ . (On observe que  $d$  est un homomorphisme de  $\mathbb{Z}[\pi]$ -modules.) On attache à  $X_{q+1}$  des anses triviales  $(\psi_i^{q+1})$ ,  $i = 1, \dots, \alpha$ , puis à  $X_{q+1} + \sum_i (\psi_i^{q+1})$  des anses  $(\Psi_i^{q+2})$ ,  $i = 1, \dots, \alpha$ , telles que

$$X_{q+1} \approx X_{q+1} + \sum_i (\psi_i^{q+1}) + \sum_i (\Psi_i^{q+2}).$$

On suppose que l'image de  $\psi_i^{q+1}$  est contenue dans  $Y_q^0$  ce qui permet de former  $X_q + \Sigma_i(\psi_i^{q+1})$ . D'après le lemme 5 (et le théorème de relèvement des difféotopies) le plongement  $\psi_i: S^q \times D^{n-q} \rightarrow Y_q^0$  est difféotope dans  $Y_{q+1}$  à un plongement  $\psi'_i: S^q \times D^{n-q} \rightarrow Y_q^0$  tel que  $\psi'_i = \psi_i + \Sigma_j x_{ij} d(\mathbf{a}_j^{q+1}) = \mathbf{a}_i^q$ . (En fait l'ensemble des plongements  $(\psi_1, \dots, \psi_\alpha)$  est difféotope à l'ensemble des plongements  $(\psi'_1, \dots, \psi'_\alpha)$ .) Donc

$$X_{q+1} + \Sigma_i(\psi_i) \approx X_{q+1} + \Sigma_i(\psi'_i),$$

et comme  $\psi'_i(S^q \times D^{n-q}) \subset Y_q^0$  la variété  $X_q + \Sigma_i(\psi'_i)$  est définie. D'après le lemme 4 (et de nouveau le théorème de relèvement des difféotopies), on peut supposer que  $\psi'_i(S^q \times (0))$  coupe la sphère transverse  $S_i^{n-q}$  en un seul point (transversalement) et ne rencontre pas  $S_j^{n-q}$  pour  $j \neq i$ . (De nouveau, l'ensemble des  $(\psi'_1, \dots, \psi'_\alpha)$  est difféotope à un ensemble de plongements ayant ces propriétés. Cf. démonstration du lemme 4, ci-dessous.) On a alors  $X_q + \Sigma_i(\psi'_i) \approx I \times M + \Sigma_i((\varphi_i^q) + (\psi'_i))$  et en appliquant le lemme 3, il en résulte que

$$X_q + \Sigma_i(\psi'_i) \approx I \times M.$$

On a donc

$$\begin{aligned} X_{q+1} &\approx X_{q+1} + \Sigma_i(\psi_i) + \Sigma_i(\Psi_i^{q+2}) \\ &\approx X_q + \Sigma_i(\psi'_i) + \Sigma_j(\varphi_j^{q+1}) + \Sigma_i(\Psi_i^{q+2}) \\ &\approx I \times M + \Sigma_j(\varphi_j^{q+1}) + \Sigma_i(\Psi_i^{q+2}), \end{aligned}$$

d'où une décomposition en anses de  $(W, M)$  sans anses d'indices  $1, \dots, q$ .

Il reste à démontrer le lemme 4.

Il est évident qu'une difféotopie de  $f$  dans  $Y_q$  ne change pas la classe de son relèvement. D'autre part si  $f(S^q)$  coupe  $S_i^{n-q}$  en un seul point (transversalement) et si  $f(S^q) \cap S_j^{n-q} = \emptyset$  pour  $j \neq i$ , il est clair que  $f = \pm \gamma \mathbf{a}_i^q$  avec  $\gamma \in \pi$ .

Réiproquement, soit  $f: S^q \rightarrow Y_q$  un plongement avec  $f = \pm \gamma \mathbf{a}_i^q$ . On peut supposer que toutes les intersections de  $f(S^q)$  avec les  $S_k^{n-q}$ ,  $k = 1, \dots, \alpha$ , sont transversales. Il est facile de construire un  $n$ -disque plongé  $P$  dans  $Y_q$  qui a des intersections non-vides contractiles avec tous les  $\varphi_k^q(S^{q-1} \times D^{n-q+1})$ . On prendra  $P$  pour «point base» de  $Y_q$ . On suppose également que  $f(S^q)$  rencontre  $P$ . Soit  $A \in S^q$  un point tel que  $f(A) \in P$ . Soient alors  $Q_k^q$  les points de  $S^q$  tels que  $f(Q_k^q) \in S_k^{n-q}$ . On peut supposer que les  $Q_k^q$  sont distincts et qu'il existe des  $q$ -disques fermés  $U_k^q$  disjoints, de centre  $Q_k^q$ , sur  $S^q$  tels que  $f(U_k^q) = D^q \times f(Q_k^q) \subset D^q \times S_k^{n-q} = \text{bord de l'anse } (\varphi_k^q)$ , et aussi que  $f(U_k^q) \cap P \neq \emptyset$ .

Soient  $A_k^v \in b U_k^v$  des points tels que  $f(A_k^v) \in P$ . Pour toute paire d'indices  $(k, v)$  soit  $u_k^v$  un chemin sur  $S^q$ , disjoint des int  $U_l^\lambda$  et joignant  $A$  à  $A_k^v$ . Alors  $fu_k^v$  est un *lacet*  $w_k^v$  de  $Y_q$  (i.e. un chemin d'origine et d'extrémité contenues dans  $P$ ) représentant un certain élément  $\gamma_k^v \in \pi$ . Il est clair que

$$f = \sum_k \sum_v \varepsilon_k^v \gamma_k^v a_k^q,$$

où  $\varepsilon_k^v = I(f(U_k^v), S_k^{n-q}) = \pm 1$  (coefficient d'intersection). Comme  $f = \pm \gamma a_i^q$  par hypothèse, il en résulte

$$\sum_v \varepsilon_k^v \gamma_k^v = \pm \delta_{ik} \gamma \quad \text{pour tout } k.$$

( $H_q(X_q, X)$  est un  $\mathbb{Z}[\pi]$ -module libre.) Il s'ensuit que pour tout  $j \neq i$ , on peut grouper les points  $Q_j^v$  en paires  $(Q_j^\lambda, Q_j^\mu)$  telles que  $\gamma_j^\lambda = \gamma_j^\mu$  et  $\varepsilon_j^\lambda = -\varepsilon_j^\mu$ . En outre, il existe un  $Q_i^v$ , disons  $Q_i^1$  tel que  $\gamma_i^1 = \gamma$ , et les  $Q_i^v$  avec  $v > 1$  peuvent être groupés en paires  $(Q_i^\lambda, Q_i^\mu)$  telles que  $\gamma_i^\lambda = \gamma_i^\mu$  et  $\varepsilon_i^\lambda = -\varepsilon_i^\mu$ . Il est alors facile de voir que toute paire  $(Q_j^\lambda, Q_j^\mu)$ , même pour  $j = i$ , peut être éliminée par la méthode de WHITNEY. En effet, le chemin  $(u_j^\lambda)^{-1} \cdot u_j^\mu$  se projette par  $f$  sur  $(w_j^\lambda)^{-1} \cdot w_j^\mu$  qui est homotope à zéro dans  $Y_q$  et en fait dans  $Y_q - \bigcup_k S_k^{n-q}$  (dont le groupe de POINCARÉ est  $\pi$ ). Il sous-tend donc un 2-disque (après que l'on en ait fait un vrai lacet fermé en lui adjoignant un chemin de  $P$  le long de  $S_j^{n-q}$ ) plongé dans  $Y_q - \bigcup_k S_k^{n-q}$ , et dont l'intérieur peut être supposé disjoint de  $f(S^q)$  car  $q + 2 < n$ . Pour la même raison, ce 2-disque peut être supposé disjoint d'autres images de  $S^q$  dans  $Y_q$  s'il en existe. (Cette remarque a été utilisée ci-dessus.) On déforme  $f(S^q)$  le long de ce 2-disque par le procédé bien connu dû à WHITNEY. (Cf. SHAPIRO [8].) Le nouveau plongement, difféotope à  $f$ , ne présente plus la paire de points  $(fQ_j^\lambda, fQ_j^\mu)$  d'intersection avec  $S_j^{n-q}$ . Rien n'est changé aux autres paires  $(Q_k^\lambda, Q_k^\mu)$ . Par récurrence sur le nombre des paires  $(Q_k^\lambda, Q_k^\mu)$  on obtient la conclusion du lemme 4.

Le lemme 1 est ainsi complètement démontré.

## Démonstration du lemme 2.

Soit  $W$  un  $h$ -cobordisme entre  $M$  et  $M'$  de la forme

$$(*) \quad W \approx I \times M + (\varphi_1^r) + \dots + (\varphi_\alpha^r) + (\varphi_1^{r+1}) + \dots + (\varphi_\alpha^{r+1}).$$

(Le nombre d'anses d'indice  $r$  est en effet nécessairement égal au nombre des anses d'indice  $r + 1$  dans ce cas.) Supposons  $\tau(W, M) = 0$ . On va montrer que les anses d'indice  $r$  et  $r + 1$  se détruisent mutuellement.

On rappelle que l'on peut calculer la torsion de WHITEHEAD à partir du complexe

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow H_{r+1}(X_{r+1}, X_r) \xrightarrow{d} H_r(X_r, X) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

où les deux groupes non-nuls sont des  $\mathbb{Z}[\pi]$ -modules libres sur  $a_1^{r+1}, \dots, a_\alpha^{r+1}$  et  $a'_1, \dots, a'_\alpha$  respectivement, relèvements dans  $W$  des cellules  $D_1^{r+1}, \dots, D_\alpha^{r+1}$  et  $D'_1, \dots, D'_\alpha$ . On a  $d(a_i^{r+1}) = \sum_j x_{ij} a_j^r$  et la matrice (inversible)  $x = (x_{ij})$  représente  $(-1)^{r+1} \tau(W, M)$ . (Cf. [7] ou MILNOR [5], § 7.)

L'hypothèse  $\tau(W, M) = 0$  signifie que l'on peut transformer  $x$  en la matrice vide par une suite finie d'opérations élémentaires. (Cf. la définition de  $Wh(\pi)$  au début du papier.) Il s'agit de montrer qu'à ces opérations correspondent des transformations de la décomposition en anses qui ne changent pas la classe de difféomorphisme de  $W$ .

A la transformation (1) correspond une modification du choix du relèvement de l'âme  $D_i^{r+1}$  de l'une des anses d'indice  $r+1$ , accompagnée éventuellement d'un changement d'orientation de cette âme. On sait (d'après SMALE [9]) que cette dernière opération peut être accomplie par un difféomorphisme de  $W$ .

La transformation (2) peut être réalisée par une transformation de la décomposition en anses en appliquant le lemme 5.

L'opération correspondant à (3) est évidente: On ajoute une paire d'anses triviales d'indices  $r$  et  $r+1$  qui se détruisent mutuellement (Lemme 3).

Une opération du type (4) signifie que l'on a  $d(a_\beta^{r+1}) = a_\beta^r$ . On a vu au lemme 4 que l'anse  $(\varphi_\beta^{r+1})$  est alors difféotope à une anse qui se détruit avec  $(\varphi_\beta^r)$ . On peut donc supprimer ces deux anses.

On peut donc transformer la décomposition en anse de  $W$  de façon à faire disparaître toutes les anses. Il en résulte  $W \approx I \times M$ .

Enfin, pour démontrer la dernière assertion du théorème, considérons une variété  $M$ , et posons  $\pi = \pi_1 M$ . Soient  $\tau_0 \in Wh(\pi)$  un élément donné et  $x = (x_{ij})$  une matrice carrée inversible d'ordre  $\alpha$  représentant  $\tau_0$ . On attache à  $I \times M$ , le long de  $(1) \times M$ ,  $\alpha$  anses  $(\varphi_i^r)$ ,  $i = 1, \dots, \alpha$ , d'indice  $r$  trivialement attachées. Soit  $X_r = I \times M + \sum_i (\varphi_i^r)$ . On a

$$bX_r = M \# (S^r \times S^{n-r}) \# \dots \# (S^r \times S^{n-r}),$$

avec  $\alpha$  termes  $S^r \times S^{n-r}$ . L'inclusion dans  $bX_r$  de  $M \vee S^r \vee \dots \vee S^r$  fournit un homomorphisme (injectif) du  $\mathbb{Z}[\pi]$ -module libre engendré par  $a_1^r, \dots, a_\alpha^r$  dans  $\pi_r(bX_r)$ . On attache alors l'anse  $(\varphi_i^{r+1})$  par un plongement  $\varphi_i^{r+1}: S^r \times D^{n-r} \rightarrow bX_r$  représentant l'élément  $\sum_j x_{ij} a_j^r \in \pi_r(bX_r)$ . C'est possible à condition que  $r < \frac{1}{2}n$ . On vérifie sans difficulté que  $W = I \times M + \sum_i (\varphi_i^r) + \sum_j (\varphi_j^{r+1})$  est un  $h$ -cobordisme entre  $M$  et une variété  $M'$ , et que  $\tau(W, M) = (-1)^{r+1} \tau_0$ .

### Remarques

Soit  $W$  un  $h$ -cobordisme entre  $M$  et  $M'$ . Il est possible que  $M$  et  $M'$  soient difféomorphes même si  $W$  n'est pas difféomorphe au produit  $I \times M$ . Par exemple,  $M$  est difféomorphe à  $M'$  si  $\tau(W, M)$  est de la forme  $\sigma + (-1)^n \bar{\sigma}$ , où  $n = \dim M$ ,  $\sigma \in Wh(\pi)$ , et  $\sigma \rightarrow \bar{\sigma}$  est l'involution de  $Wh(\pi)$  induite par  $c: \mathbb{Z}[\pi] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi]$  défini par  $c(\Sigma_\gamma n_\gamma \cdot \gamma) = \Sigma_\gamma n_\gamma \cdot \gamma^{-1}$ . (Cf. MILNOR [5], § 11.) Les éléments de la forme  $\sigma + (-1)^n \bar{\sigma}$  ne sont pas nécessairement nuls (loc. cit.). Si l'on se donne  $M$ , de dimension  $n$ , et  $\pi = \pi_1 M$ , il est facile de voir que  $\tau \in Wh(\pi)$  détermine univoquement un  $h$ -cobordisme  $W_\tau$  (au difféomorphisme près) entre  $M$  et une variété  $M'_\tau$ . En particulier, la variété  $M'_\tau$  est (au difféomorphisme près) déterminée par  $M$  et  $\tau$ . On vérifie que l'ensemble des  $\tau \in Wh(\pi)$  tels que  $M'_\tau \approx M$  est un sous-groupe  $G(M)$  de  $Wh(\pi)$ . On ignore si  $G(M)$  dépend réellement de  $M$ . (On ne sait, à ma connaissance, rien d'autre sur  $G(M)$  que le résultat de MILNOR rappelé ci-dessus :  $G(M)$  contient tous les éléments de  $Wh(\pi)$  de la forme  $\sigma + (-1)^n \bar{\sigma}$ .)

Mentionnons, pour conclure, quelques conséquences assez curieuses du théorème de  $s$ -cobordisme.

Soit  $W$  un  $h$ -cobordisme (quelconque) entre  $M$  et  $M'$ , et supposons  $\dim W \geq 6$ . Alors

- (1)  $W - M' \approx [0, 1] \times M$ ,
- (2)  $(0, 1) \times M \approx (0, 1) \times M'$ ,
- (3)  $S^1 \times M \approx S^1 \times M'$ .

(Cette dernière remarque est dûe à G. DE RHAM.)

Il est clair que (1) entraîne (2), car (1) entraîne  $W - (M \cup M') \approx (0, 1) \times M$ , et l'on obtient (2) en permutant  $M$  et  $M'$ . Pour démontrer (1), soit  $\tau$  la torsion de WHITEHEAD de  $(W, M)$ , et soit  $W'$  un  $h$ -cobordisme entre  $M'$  et  $M''$  avec  $\tau(W', M') = -\tau$ . On a  $\tau(W \cup W', M) = \tau(W, M) + \tau(W', M') = 0$ . Donc,  $W \cup W' \approx I \times M$ , et en particulier  $M \approx M''$ . Par suite

$$[0, \infty) \times M \approx \bigcup_{i=0}^{\infty} [i, i+1] \times M \approx \bigcup_{i=0}^{\infty} (W \cup W')_i$$

où les copies  $(W \cup W')_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$ , de  $W \cup W'$  sont collées bout à bout.

Or,  $\bigcup_{i=0}^{\infty} (W \cup W')_i = W_0 \cup \bigcup_{i=0}^{\infty} W'_i \cup W_{i+1}$ , et comme  $\tau(W' \cup W, M') = 0$ , on a également  $[0, \infty) \times M' \approx \bigcup_{i=0}^{\infty} W'_i \cup W_{i+1}$ .

On en tire

$$[0, 1) \times M \approx W \cup ([0, 1) \times M'),$$

d'où (1) en observant que le deuxième membre est difféomorphe à  $W - M'$ .

Pour obtenir (3), on considère la variété

$$V = \cup_{i=-\infty}^{+\infty} W_i \cup W'_i$$

sur laquelle  $\mathbf{Z}$  agit par translation:

$$t(W_i) = W_{i+1}, \quad t(W'_i) = W'_{i+1}, \quad t = \text{générateur de } \mathbf{Z}.$$

On a vu que  $[0, 1] \times M \approx W_i \cup W'_i$ , et  $[0, 1] \times M' \approx W'_i \cup W_{i+1}$  pour tout  $i \in \mathbf{Z}$ . En exprimant le quotient de  $V$  par l'action de  $\mathbf{Z}$  de deux manières différentes, on trouve

$$S^1 \times M \approx V/(\mathbf{Z}) \approx S^1 \times M'.$$

Courant Institute of Math. Sciences  
4 Washington Place, New York 3, N.Y., USA

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] BARDEN D.: *The structure of manifolds*. Thèse. Université de Cambridge, 1963.
- [2] KERVAIRE M.: *Sur le fibré normal à une sphère immergée dans un espace euclidien*. Comment. Math. Helv. 33, 121–131 (1959).
- [3] MAZUR B.: *Relative neighborhoods and the theorems of SMALE*. Ann. of Math. 77, 232–249 (1963).
- [4] MILNOR J.: *Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct*. Ann. of Math. 74, 575–590 (1961).
- [5] MILNOR J.: *WHITEHEAD torsion*. Notes polycopiées. Université de Princeton, 1964.
- [6] PALAIS R.: *Local triviality of the restriction map for imbeddings*. Comment. Math. Helv. 34, 305–312 (1960).
- [7] DE RHAM G.: Séminaire de Mathématiques. Notes polycopiées. Université de Lausanne, 1964.
- [8] SHAPIRO A.: *Obstructions to the imbedding of a complex in a euclidean space. I. The first obstruction*. Ann. of Math. 66, 256–269 (1957).
- [9] SMALE S.: *Generalized POINCARÉ's conjecture in dimensions greater than four*. Ann. of Math. 74, 391–406 (1961).
- [10] SMALE S.: *On the structure of manifolds*. Amer. J. of Math. 84, 387–399 (1962).
- [11] WHITEHEAD J. H. C.: *Simple homotopy types*. Amer. J. of Math. 72, 1–57 (1950).

(Reçu le 12 décembre 1964)