

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 40 (1965-1966)

Artikel: Algèbres d'opérateurs non bornés sur un espace de HILBERT.
Autor: Leresche, Georges
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-30640>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 07.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Algèbres d'opérateurs non bornés sur un espace de HILBERT

par GEORGES LERESCHE

Introduction

Dans ce travail, \mathfrak{H} désigne un espace de HILBERT (pour simplifier, on supposera toujours que le corps de base est le corps des complexes \mathbb{C}). Par « sous-espace » de \mathfrak{H} , nous entendons : sous-espace de la structure hilbertienne (sous-espace fermé); « sous-espace vectoriel de \mathfrak{H} » désigne un sous-espace de la structure d'espace vectoriel sous-jacente de \mathfrak{H} . $L(\mathfrak{H})$ désignera toujours l'algèbre des opérateurs continus de \mathfrak{H} -appelés aussi, par abus de langage, opérateurs bornés. $1_{\mathfrak{H}}$ désignera l'opérateur identité sur \mathfrak{H} .

Les méthodes d'investigation algébrique, dans l'étude des opérateurs de $L(\mathfrak{H})$, ont été largement développées; elles font appel essentiellement à la théorie des algèbres *normées*. Ces méthodes ne s'étendent pas à l'étude des opérateurs non bornés. C'est d'ailleurs dans la nature des choses : un opérateur non borné – encore appelé opérateur sur \mathfrak{H} , par un abus de langage communément admis – est un couple $(T; \mathcal{D}_T)$, où \mathcal{D}_T est le domaine de définition de l'opérateur T ; \mathcal{D}_T est un sous-espace vectoriel de \mathfrak{H} . En théorie classique (cf. par exemple [10] et [12]), le « produit » de deux opérateurs est simplement leur composition en tant qu'applications. Ne tenant pas compte des domaines, un tel produit ne peut conduire à aucune théorie algébrique.

Des travaux ont été faits, en particulier par FELL et KELLEY [8], pour étendre certaines algèbres d'opérateurs bornés, et atteindre ainsi des opérateurs non bornés. Si \mathfrak{A} est une algèbre de $L(\mathfrak{H})$, fortement fermée, abélienne et unitaire, son spectre de GELFAND Z est un espace stonien (cf. [7]). Si $K(Z)$ est l'algèbre des fonctions continues sur Z , à valeurs complexes, on peut étendre $K(Z)$ en une algèbre $\hat{K}(Z)$; à toute fonction \hat{f} de $\hat{K}(Z)$ on peut associer un opérateur $T_{\hat{f}}$, normal non borné sur \mathfrak{H} si \hat{f} n'est pas continue. Si \mathfrak{A} est l'ensemble des opérateurs $T_{\hat{f}}$ ainsi définis, cet ensemble peut être muni d'une structure d'algèbre transportée de $\hat{K}(Z)$. Les opérations ainsi définies sur \mathfrak{A} diffèrent des opérations classiques lorsque les opérateurs ne sont pas bornés. On montre que tout opérateur normal N de \mathfrak{H} appartient à une telle algèbre \mathfrak{A} , extension de l'algèbre fortement fermée engendrée, dans $L(\mathfrak{H})$, par $1_{\mathfrak{H}}$, $(1_{\mathfrak{H}} + N \circ N^*)^{-1}$ et $N \circ (1_{\mathfrak{H}} + N \circ N^*)^{-1}$ (loc. cit.).

Travail réalisé à l'Institut de mathématiques de l'Université de Neuchâtel, avec l'appui du Fonds national de la Recherche scientifique (rech. 2560 et 3026).

Il faut cependant remarquer, à propos de ces extensions,

- a) que $\hat{\mathfrak{U}}$ n'est pas isomorphe à une algèbre de fonctions continues sur Z ;
- b) que l'extension n'est faite qu'à partir d'algèbres de von NEUMANN de $L(\mathfrak{H})$, puisqu'on part d'une algèbre \mathfrak{U} unitaire et fortement fermée (cf. [6], chap. I, § 3, n° 4). On n'obtient ainsi que des algèbres dont la « partie bornée » est une algèbre de von NEUMANN de $L(\mathfrak{H})$.

Dans [1], BADER et MARTIN introduisent une topologie sur l'algèbre $\hat{\mathfrak{U}}$.

Notre propos, dans le présent travail, est de définir d'une manière directe des algèbres d'opérateurs non bornés de \mathfrak{H} , et de prolonger les méthodes algébriques utilisées dans $L(\mathfrak{H})$. Nous tentons ainsi de répondre à une question posée à plusieurs reprises par l'étude de certains problèmes sur les opérateurs non bornés menée, à l'Université de Neuchâtel, par R. BADER. Nous n'apportons pas une théorie complète, mais plutôt un cadre algébrique et topologique dans lequel les problèmes étudiés puissent être posés correctement.

Pour les raisons mentionnées plus haut, nous faisons des hypothèses précises sur le domaine des opérateurs. Nous considérons une classe d'opérateurs dits *réductibles*: T est réductible si son domaine contient une famille $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ de sous-espaces de \mathfrak{H} telle que:

- i) \mathfrak{H}_α réduit T , et la restriction T_α de T à \mathfrak{H}_α appartient à $L(\mathfrak{H}_\alpha)$, $\forall \alpha$.
- ii) $\bigcup \mathfrak{H}_\alpha$ est dense dans \mathfrak{H} .

Nous dirons que T est réduit en bornés par la famille $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$, ou simplement, réduit-borné par cette famille. Les opérateurs de $L(\mathfrak{H})$ et les opérateurs normaux sont réductibles. Nous supposons, ce qui n'est pas une restriction, que la famille $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$, ordonnée par inclusion, est filtrante croissante.

Nous sommes ainsi amenés à considérer les couples $(T; \{\mathfrak{H}_\alpha\})$; si $(T; \{\mathfrak{H}_\alpha\})$ appartient à l'ensemble de ces couples, il en est de même de $(T^*; \{\mathfrak{H}_\alpha\})$; T possède alors un prolongement fermé \bar{T} , unique, tel que $(\bar{T}; \{\mathfrak{H}_\alpha\})$ appartienne à l'ensemble considéré. \bar{T} est la fermeture de T .

Si maintenant on pose

$$(T; \{\mathfrak{H}_\alpha\}) \equiv (T'; \{\mathfrak{H}_\beta\})$$

si et seulement si $\bar{T} = \bar{T}'$, on définit, par passage au quotient, l'ensemble des *opérateurs fermés réductibles*, qu'on notera $L(\mathfrak{H})$. C'est sur cet ensemble que nous introduirons des opérations, partiellement définies, et des structures d'algèbres, munies de topologies compatibles avec les structures d'espaces vectoriels. Cependant, l'ensemble $L(\mathfrak{H})$ est encore trop riche pour permettre la généralisation de certaines théories, en particulier celle des algèbres de von NEUMANN. C'est pourquoi nous introduisons les opérateurs de type « normal ou borné », plus brièvement appelés opérateurs de type (nb) . Cette classe d'opérateurs fermés

réductibles englobe encore les opérateurs normaux, et, naturellement, $L(\mathfrak{H})$. Elle contient donc les \ast -algèbres abéliennes, dont nous étudions la structure algébrique et topologique. C'est dans ce cadre que nous tentons de généraliser la notion d'algèbre de von NEUMANN.

La dernière partie du travail est consacrée à la généralisation de l'isomorphisme de GELFAND et de la notion de spectre (de GELFAND) des \ast -algèbres abéliennes. Un prolongement de cet isomorphisme y est également étudié.

Ce travail, élaboré dans le cadre d'une collaboration à des recherches de R. BADER, doit beaucoup à ce dernier; il a fait l'objet de discussions nombreuses; les idées et suggestions ne m'ont ainsi pas manqué, qui ont souvent donné à mon travail une orientation et une impulsion décisives, tout en me permettant d'éviter un certain nombre d'erreurs... J'en exprime ma vive reconnaissance à M. R. BADER.

Chap. I Systèmes inductifs d'espaces de HILBERT

1. Définition générale

Soit $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}_{\alpha \in J}$, une famille d'espaces de HILBERT, où J est un ensemble ordonné (la relation d'ordre étant notée « $<$ »), filtrant à droite.

Pour tout couple $(\alpha; \beta)$ d'indices de J tel que $\alpha < \beta$, on suppose qu'il existe une application $g_{\beta\alpha}$, *linéaire* et *isométrique*, de \mathfrak{H}_α dans \mathfrak{H}_β :

$$\mathfrak{H}_\alpha \xrightarrow{g_{\beta\alpha}} \mathfrak{H}_\beta,$$

les conditions suivantes étant réalisées:

$$\text{i) } \alpha < \beta < \gamma \Rightarrow g_{\gamma\beta} \circ g_{\beta\alpha} = g_{\gamma\alpha};$$

$$\text{ii) } g_{\alpha\alpha} = \text{identité, } \forall \alpha.$$

On notera que $g_{\beta\alpha}$ est continue et que, sous les conditions énoncées, $\{\mathfrak{H}_\alpha, g_{\beta\alpha}\}$ constitue un système inductif d'espaces de HILBERT.

Désignons par E la limite inductive des \mathfrak{H}_α (\lim d'ensembles):

$$E = \varinjlim \mathfrak{H}_\alpha.$$

g_α désignera l'application canonique (cf. [2], p. 89):

$$g_\alpha: \mathfrak{H}_\alpha \rightarrow E.$$

$g_{\beta\alpha}$ étant injective, il en est de même de g_α .

D'autre part, E est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel pour laquelle g_α est linéaire. Nous choisissons, sur E , la topologie localement convexe la plus fine pour laquelle, $\forall \alpha$, g_α soit continue (cf. [5a], p. 13); on l'appellera topologie limite inductive; elle fait de E un espace vectoriel topologique localement convexe.

2. Produit scalaire sur E . Système inductif de sous-espaces d'un espace de HILBERT

Rappelons d'abord que $\{\mathfrak{H}_\alpha \times \mathfrak{H}_\alpha, g_{\beta\alpha} \times g_{\beta\alpha}\}$ constitue un système inductif, et que $E \times E$ s'identifie canoniquement à $\lim_{\rightarrow} (\mathfrak{H}_\alpha \times \mathfrak{H}_\alpha)$ (cf. [2], pp. 97 et 98).

Soit alors $(x, y) = (g_\alpha x_\alpha, g_\alpha y_\alpha) \in E \times E$; l'application

$$\sigma: (x, y) \rightsquigarrow (x | y) = (x_\alpha | y_\alpha),$$

où $(x_\alpha | y_\alpha)$ désigne le produit scalaire sur \mathfrak{H}_α , est une forme sesquilinéaire continue sur $E \times E$; en effet, $g_{\beta\alpha}$ étant une isométrie, il est immédiat que $(x | y)$ ne dépend pas de α ; en outre, $\forall \alpha$, la composition

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_\alpha \times \mathfrak{H}_\alpha &\longrightarrow E \times E \xrightarrow{\sigma} \mathbb{C} \\ (x_\alpha, y_\alpha) &\rightsquigarrow (x_\alpha | y_\alpha) \end{aligned}$$

est continue, d'où la continuité de σ ([5a], p. 13). Enfin, σ est positive non dégénérée, et E peut être muni d'une structure d'espace préhilbertien séparé, noté E_σ . L'application $g_\alpha: \mathfrak{H}_\alpha \rightarrow E_\sigma$ est isométrique, donc continue; la topologie de E est plus fine que celle de E_σ . E est séparé.

Soit \mathfrak{H} , le complété de E_σ . L'injection canonique g_α permet d'identifier \mathfrak{H}_α à un sous-espace de \mathfrak{H} ; en outre, dans cette identification, $\alpha < \beta \Rightarrow g_\alpha(\mathfrak{H}_\alpha) \subset g_\beta(\mathfrak{H}_\beta)$, car $g_\alpha(x_\alpha) = g_\beta \circ g_{\beta\alpha}(x_\alpha)$.

Ainsi le système inductif $\{\mathfrak{H}_\alpha, g_{\beta\alpha}\}$ peut être réalisé par une famille de sous-espaces d'un espace de HILBERT \mathfrak{H} , ordonnée par inclusion, la réunion des sous-espaces étant dense dans \mathfrak{H} .

Inversément, soit \mathfrak{H} , un espace de HILBERT, et $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}_{\alpha \in J}$, une famille de sous-espaces, de réunion dense dans \mathfrak{H} , ordonnée filtrante à droite par inclusion; posons $\alpha < \beta$ lorsque $\mathfrak{H}_\alpha \subset \mathfrak{H}_\beta$, et désignons par $g_{\beta\alpha}$ l'injection naturelle de \mathfrak{H}_α dans \mathfrak{H}_β . Alors $\{\mathfrak{H}_\alpha, g_{\beta\alpha}\}$ est un système inductif d'espaces de HILBERT. Dès maintenant nous admettrons donc la définition suivante:

Définition. On appelle *système inductif d'espaces de HILBERT* toute famille de sous-espaces d'un espace de HILBERT \mathfrak{H} , ordonnée filtrante à droite par inclusion, la réunion des sous-espaces de la famille étant dense dans \mathfrak{H} .

Si $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ est un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} , et si p_α est le projecteur orthogonal de \mathfrak{H} sur \mathfrak{H}_α , $\{p_\alpha\}$ sera le système de projecteurs associé au système inductif $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$.

3. Propriétés des systèmes inductifs

Nous utiliserons par la suite, sans autre référence, les propriétés élémentaires des systèmes inductifs que nous donnons ici :

Lemme. Soit $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$, un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} ; les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $\bigcup \mathfrak{H}_\alpha$ est dense dans \mathfrak{H} ;
- ii) $p_\alpha x = 0, \forall \alpha \Rightarrow x = 0$ (cf. [5a], p. 31).

Proposition. Soient $\{\mathfrak{H}_\alpha\}, \{\mathfrak{H}_\beta\}$ deux systèmes inductifs de sous-espaces de \mathfrak{H} ; si, $\forall \alpha, \forall \beta, p_\alpha \circ p_\beta = p_\beta \circ p_\alpha$, alors $\{\mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}_\beta\}$ est un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} .

Démonstration. a) Il est facile de voir que $\{\mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}_\beta\}$, ordonné par inclusion, est encore filtrant croissant.

b) $p_\alpha \circ p_\beta x = 0 \Rightarrow x = 0, \forall \alpha, \forall \beta, x \in \mathfrak{H}$; en effet, en appliquant deux fois le lemme, on a :

$$\forall \alpha, p_\alpha \circ p_\beta x = 0 \Rightarrow p_\beta x = 0 - \text{et ceci, } \forall \beta, \text{ d'où } x = 0.$$

Ainsi $\bigcup_{\alpha, \beta} (\mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}_\beta)$ est dense dans \mathfrak{H} , cqfd.

Chap. II L'ensemble $\underline{L}(\mathfrak{H})$

1. Convergence suivant α

Soit $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}_{\alpha \in J}$, un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} . J étant ordonné filtrant croissant, on appelle *section* de J relative à α le sous-ensemble de J :

$$S(\alpha) = \{\beta; \alpha < \beta\}$$

(cf. [3a], p. 67). Les sections de J engendrent un filtre appelé *filtre des sections* de J .

Définition 1. Une application $f: J \rightarrow Y$, où Y est un espace topologique, converge suivant α si f converge suivant le filtre des sections de J ; on notera

$$f(\alpha) \xrightarrow{\alpha} y \text{ ou } \lim_{\alpha} f(\alpha) = y.$$

Lemme. $\{\mathfrak{H}_{\alpha}\}$ étant un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} , $\forall x \in \mathfrak{H}$, l'application

$$\alpha \rightsquigarrow \xrightarrow{f} \text{dist}(\mathfrak{H}_{\alpha}, x)$$

converge vers 0 suivant α .

Démonstration. a) Par définition, $\text{dist}(\mathfrak{H}_{\alpha}, x) = \inf_{y_{\alpha} \in \mathfrak{H}_{\alpha}} \{\|y_{\alpha} - x\|\}$; alors $\alpha < \beta \Rightarrow \text{dist}(\mathfrak{H}_{\beta}, x) \leq \text{dist}(\mathfrak{H}_{\alpha}, x)$.

b) $\cup \mathfrak{H}_{\alpha}$ dense dans $\mathfrak{H} \Rightarrow \exists$ une suite y_{α_n} de $\cup \mathfrak{H}_{\alpha}$, telle que $\lim_n y_{\alpha_n} = x$: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N(\varepsilon)$ tel que $\text{dist}(\mathfrak{H}_{\alpha_{N(\varepsilon)}}, x) < \varepsilon$, d'où, en vertu de a), $f(S(\alpha_{N(\varepsilon)})) \subset [0, \varepsilon[$, cqfd.

Proposition 1. Si $\{\mathfrak{H}_{\alpha}\}$ est un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} , et $(x_{\alpha}) \in \prod \mathfrak{H}_{\alpha}$; si, de plus, l'application $\alpha \rightsquigarrow x_{\alpha}$ de J dans \mathfrak{H} converge, alors (x_{α}) définit un élément x de \mathfrak{H} . Réciproquement, $\forall x, x \in \mathfrak{H} \Rightarrow x = \lim_{\alpha} p_{\alpha} x$, et $(p_{\alpha} x) \in \prod \mathfrak{H}_{\alpha}$. Cette proposition résulte de ce qui précède.

2. Opérateurs réductibles

Sans autre mention ultérieure, les opérateurs qu'on considère ici sont à domaine dense dans \mathfrak{H} . T désignant un tel opérateur, \mathcal{D}_T désignera son domaine; c'est un sous-espace vectoriel de \mathfrak{H} , et T applique linéairement \mathcal{D}_T dans \mathfrak{H} . S, T étant deux opérateurs, on désignera par $S \circ T$ la composition des applications – produit des opérateurs au sens classique (cf. [10], [12]). Il faut remarquer que $\mathcal{D}_{S \circ T}$ n'est pas forcément dense dans \mathfrak{H} .

$S \subset T$ signifiera que $D_S \subset D_T$, et que $T|_{\mathcal{D}_S} = S$; on dira aussi que T prolonge S . $T = S$ équivaut à $T \subset S$ et $S \subset T$.

T^* désignera l'adjoint de T – \mathcal{D}_{T^*} n'est pas forcément dense dans \mathfrak{H} .

Définition 2. Soient T , un opérateur sur \mathfrak{H} , et \mathfrak{H}_{α} , un sous-espace de \mathfrak{H} ; on dira que \mathfrak{H}_{α} réduit T si

$$p_{\alpha} \circ T \subset T \circ p_{\alpha} \quad (\text{cf. [12], pp. 31 et ss}).$$

On remarquera que si \mathfrak{H}_α réduit T , \mathfrak{H}_α et $\mathfrak{H}_\alpha^\perp$ sont stables par T (nous désignons ici par $\mathfrak{H}_\alpha^\perp$ le complément orthogonal de \mathfrak{H}_α dans \mathfrak{H}). Si on pose $T_\alpha = T|_{\mathfrak{H}_\alpha}$, $T_\alpha^\perp = T|_{\mathfrak{H}_\alpha^\perp}$, alors

$$\mathfrak{H}_\alpha \text{ réduit } T \Leftrightarrow T = T_\alpha \oplus T_\alpha^\perp \quad (\text{loc. cit.}).$$

Il faut noter que $\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\alpha^\perp$ stables par $T \not\Rightarrow \mathfrak{H}_\alpha$ réduit T . Dans ce cas, on a seulement

$$T_\alpha \oplus T_\alpha^\perp \subseteq T.$$

Il y a deux cas, néanmoins, où la réductibilité équivaut à une condition de stabilité:

- a) si $T \in L(\mathfrak{H})$, et si \mathfrak{H}_α est stable par T et T^* , alors \mathfrak{H}_α réduit T ([12], p. 33).
- b) Plus généralement.

Proposition 2. *Si T est fermé, et si \mathfrak{H}_α est stable par T et T^* , avec $T_\alpha \in L(\mathfrak{H}_\alpha)$, $T_\alpha^* \in L(\mathfrak{H}_\alpha)$ — où T_α et T_α^* sont les restrictions à \mathfrak{H}_α de T et T^* — alors \mathfrak{H}_α réduit T .*

Démonstration. Comme $p_\alpha \in L(\mathfrak{H})$, on a

$$(p_\alpha \circ T)^* = T^* \circ p_\alpha \quad ([10], \text{pp. 297, 298});$$

en outre, par hypothèse, $T^* \circ p_\alpha \in L(\mathfrak{H})$, d'où $(p_\alpha \circ T)^* \in L(\mathfrak{H})$. Alors

$$(p_\alpha \circ T \circ p_\alpha)^* = p_\alpha \circ (p_\alpha \circ T)^* = p_\alpha \circ T^* \circ p_\alpha;$$

\mathfrak{H}_α étant stable par T et T^* , cette relation équivaut à

$$(T \circ p_\alpha)^* = T^* \circ p_\alpha,$$

d'où

$$(T \circ p_\alpha)^{**} = (T^* \circ p_\alpha)^* \supset p_\alpha \circ T^{**};$$

comme $T \circ p_\alpha$ et T sont fermés, on a finalement ([10], p. 302)

$$T \circ p_\alpha \supset p_\alpha \circ T \quad \text{cqfd.}$$

Proposition 3. *Si \mathfrak{H}_α réduit T , \mathfrak{H}_α réduit T^* , et*

$$T^* = (T_\alpha)^* \oplus (T_\alpha^\perp)^*;$$

donc $T^|_{\mathfrak{H}_\alpha} = (T|_{\mathfrak{H}_\alpha})^* = \text{adjoint, dans } L(\mathfrak{H}_\alpha), \text{ de } T|_{\mathfrak{H}_\alpha}$.*

Démonstration.

$$p_\alpha \circ T \subset T \circ p_\alpha \Rightarrow p_\alpha \circ T^* \subset T^* \circ p_\alpha \quad ([10], \text{ p. 298, j}).$$

En outre, $\mathcal{D}_T \cap \mathfrak{H}_\alpha$ est dense dans \mathfrak{H}_α ; en effet, soit $x_\alpha \in \mathfrak{H}_\alpha$:

$$x_\alpha = \lim_n x_n, \text{ où } \{x_n\} \text{ est une suite } \subset \mathcal{D}_T;$$

alors

$\lim_n p_\alpha x_n = p_\alpha x_\alpha = x_\alpha$ (continuité de p_α), et $\{p_\alpha x_n\} \subset \mathcal{D}_T$ par hypothèse.

Alors $(T_\alpha)^*$ - adjoint, dans $L(\mathfrak{H}_\alpha)$, de $T|_{\mathfrak{H}_\alpha}$ - existe; l'égalité de la proposition 3 est alors un résultat classique ([12], p. 32).

Définition 3. Si \mathfrak{H}_α réduit T , et si $T_\alpha \in L(\mathfrak{H}_\alpha)$, nous dirons que \mathfrak{H}_α réduit T en borné, ou que T est réduit borné par \mathfrak{H}_α .

La proposition 3 a pour corollaire:

Corollaire. $\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\beta$ réduisant T en bornés, si T est fermé, $\mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}_\beta$ et $\mathfrak{H}_\alpha \cup \mathfrak{H}_\beta$ réduisent T en bornés¹⁾.

Démonstration. Posons $\mathfrak{H}_\gamma = \mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}_\beta$; $\mathfrak{H}_\gamma, \mathfrak{H}_\gamma^\perp \cap \mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\gamma^\perp \cap \mathfrak{H}_\beta$ sont stables par T et T^* , qui sont bornés sur chacun d'eux (pour T^* , cela résulte de la proposition 3); donc T est réduit borné par chacun d'eux, ainsi que par

$$\mathfrak{H}_\alpha \cup \mathfrak{H}_\beta = \mathfrak{H}_\gamma \oplus \mathfrak{H}_\gamma^\perp \cap \mathfrak{H}_\alpha \oplus \mathfrak{H}_\gamma^\perp \cap \mathfrak{H}_\beta.$$

Définition 4. Un opérateur T est dit réductible s'il existe un système inductif $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ de sous-espaces de \mathfrak{H} , où chaque \mathfrak{H}_α réduit T en un opérateur borné T_α .

Sous les conditions de la définition 4, on dira que T est réduit borné sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$.

Proposition 4. T réduit borné sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\} \Rightarrow T^*$ réduit borné sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$.

C'est une conséquence immédiate de la proposition 3.

Corollaire. Sous les conditions de la proposition 4, T admet un prolongement fermé, réductible sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$.

En effet, $\cup \mathfrak{H}_\alpha \subset \mathcal{D}_{T^*} \Rightarrow \mathcal{D}_{T^*}$ partout dense dans \mathfrak{H} , et T a un prolongement fermé, en vertu d'un théorème classique ([12], p. 30). En particulier, T^{**} , prolongement fermé minimal de T , est la fermeture de T , et T^{**} est réductible sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ (proposition 4).

¹⁾ $\mathfrak{H}_\alpha \cup \mathfrak{H}_\beta$ désigne la réunion hilbertienne, c'est-à-dire le plus petit sous-espace de \mathfrak{H} contenant $\mathfrak{H}_\alpha \cup \mathfrak{H}_\beta$.

3. Une propriété des opérateurs réductibles

Théorème 1. Soit T , un opérateur réductible, réduit borné sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$; soit $T' = T| \cup \mathfrak{H}_\alpha$; la fermeture de T' est égale à la fermeture de T .

Démonstration. Soient \bar{T}, \bar{T}' , les fermetures de T et T' .

$$T' \subset T \Rightarrow \bar{T}' \subset \bar{T}.$$

Montrons que, réciproquement, $\bar{T} \subset \bar{T}'$, et même, plus simplement, que $T \subset \bar{T}'$:

On sait que fermer un opérateur équivaut à fermer son graphe (cf. [10], p. 301); autrement dit, $\text{Gr}(\bar{T}') = \text{adh. Gr}(T')$.

Montrons alors le

Lemme. $\mathcal{D}_{\bar{T}'} = \{x; x \in \mathfrak{H}, T' \circ p_\alpha x \xrightarrow[\alpha]{} y\}$.

Démonstration. a) Soit (x, y) , avec $\lim_\alpha T' \circ p_\alpha x = y : \forall n, \exists \alpha_1(n), \exists \alpha_2(n)$, tels que

$$\alpha > \alpha_1(n) \Rightarrow \|p_\alpha x - x\| < \frac{1}{n}$$

$$\alpha > \alpha_2(n) \Rightarrow \|T' \circ p_\alpha x - y\| < \frac{1}{n};$$

soit alors $\alpha(n)$ majorant $\alpha_i(n)$ ($i = 1, 2$), et $x_n = p_{\alpha(n)} x$:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_n x_n = x \\ \lim_n T' x_n = y \end{array} \right\} \Rightarrow (x, y) \in \text{adh. Gr}(T') \quad ([10], \text{pp. 297, 301}).$$

b) Soit $(x, y) \in \text{adh. Gr}(T')$: \exists une suite x_n de $\cup \mathfrak{H}_\alpha$ telle que $\lim_n x_n = x$ et $\lim_n T' x_n = y$ (loc. cit.); alors

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \lim_n p_\alpha(T' x_n) = p_\alpha y \\ \lim_n p_\alpha x_n = p_\alpha x \end{array} \right\} \text{ par continuité de } p_\alpha.$$

D'autre part

$$\left. \begin{array}{l} T' \subset T \\ p_\alpha \circ T \subset T \circ p_\alpha \end{array} \right\} \Rightarrow p_\alpha \circ T' \subset p_\alpha \circ T \subset T \circ p_\alpha = T' \circ p_\alpha = T_\alpha \circ p_\alpha;$$

d'où

ii) T' est réduit borné par \mathfrak{H}_α ;

iii) $\lim_n T' \circ p_\alpha x_n = \lim_n T'_\alpha \circ p_\alpha x_n = T' \circ p_\alpha x$ (continuité de T'_α);
mais à cause de ii), et $x_n \in \mathcal{D}_{T'}$, $\forall n$, on a

$$T' \circ p_\alpha x_n = p_\alpha \circ T' x_n, \text{ d'où;}$$

iiii) $\lim_n p_\alpha \circ T' x_n = \lim_n p_\alpha \circ T' x_n = T' \circ p_\alpha x$ (iii), et de i) et iii) résulte alors:

$$\forall \alpha, p_\alpha y = T' \circ p_\alpha x,$$

d'où

$$\lim_\alpha T' \circ p_\alpha x = y, \text{ cqfd.}$$

La démonstration du théorème s'achève alors ainsi:

$$x \in \mathcal{D}_T \Rightarrow \lim_\alpha p_\alpha \circ T x = T x = y,$$

et

$$p_\alpha \circ T x = T \circ p_\alpha x = T' \circ p_\alpha x, \text{ d'où } x \in \mathcal{D}_{\bar{T}'}.$$

Donc $T \subset \bar{T}'$, car, toujours pour $x \in \mathcal{D}_T$,

$$\bar{T}' x = \lim_\alpha T' \circ p_\alpha x = \lim_\alpha T \circ p_\alpha x = T x \text{ cqfd.}$$

Remarque. Parmi les opérateurs réductibles, il y a naturellement les opérateurs continus de \mathfrak{H} , mais aussi les opérateurs normaux, en vertu de théorèmes classiques ([12], pp. 32, 48 et ss).

4. Systèmes inductifs d'opérateurs bornés

Définition 5. Soit $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$, un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} ; on appellera système inductif d'opérateurs bornés sur \mathfrak{H} toute famille $(T_\alpha) \in \Pi L(\mathfrak{H}_\alpha)$, telle que $\mathfrak{H}_\alpha \subset \mathfrak{H}_{\alpha'} \Rightarrow \mathfrak{H}_\alpha$ réduit $T_{\alpha'}$, et $T_{\alpha'}|_{\mathfrak{H}_\alpha} = T_\alpha$.

Si $p_{\alpha\alpha'}$ est le projecteur de $\mathfrak{H}_{\alpha'}$ sur \mathfrak{H}_α , on a donc $p_{\alpha\alpha'} \circ T_{\alpha'} = T_\alpha \circ p_{\alpha\alpha'}$.

Proposition 5. Sous les conditions de la définition 5, à (T_α) est associé un opérateur fermé réductible T , réduit borné sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$.

Démonstration. Soit T' , défini sur $\cup \mathfrak{H}_\alpha$, par $T' x = T_\alpha x$ si $x \in \mathfrak{H}_\alpha$. On vérifie immédiatement que $T' x$ ne dépend pas de l'indice α , et que c'est un opérateur linéaire – en fait, $T' = \lim_{\rightarrow} T_\alpha$ au sens de [2], § 7, no 6.

De plus, T' est réduit borné par \mathfrak{H}_α ; en effet, $T' \circ p_\alpha \in L(\mathfrak{H})$, d'où

$$\mathcal{D}_{p_\alpha \circ T'} = \mathcal{D}_{T'} \subset \mathcal{D}_{T' \circ p_\alpha};$$

soit alors $x \in \mathcal{D}_{T'}$:

$$p_\alpha \circ T' x = T' \circ p_\alpha x,$$

car $x \in \mathfrak{H}_{\alpha'}$, pour un certain indice α' , et on peut supposer $\alpha < \alpha'$ – sinon on remplacerait α' par un majorant de (α, α') –; alors

$$p_\alpha \circ T' x = p_\alpha \circ T'_{\alpha'} x = p_{\alpha\alpha'} \circ T_{\alpha'} x = T_{\alpha'} \circ p_{\alpha\alpha'} x = T' \circ p_\alpha x;$$

on a bien $p_\alpha \circ T' \subset T' \circ p_\alpha$, et ceci $\forall \alpha$. Ainsi T' est réductible, et admet un prolongement fermé T , réductible sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ (corollaire de la proposition 4, § 2) *cqfd*.

Remarques. i) $\mathcal{D}_T = \{x; T_\alpha \circ p_\alpha x \xrightarrow{\alpha} y\}$;

ii) Si (S_α) est un second système inductif d'opérateurs bornés, auquel est associé S ,

$$\forall \alpha, S_\alpha = T_\alpha \Leftrightarrow S = T$$

(en vertu du théorème 1).

Dès maintenant on désignera par $L(\mathfrak{H})$ l'ensemble des opérateurs fermés réductibles de \mathfrak{H} .

$L(\mathfrak{H})$ est \ast -stable (proposition 4, § 2). En vertu du théorème 1, T fermé réductible sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ est maximal fermé réductible sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$. En particulier, $T \in L(\mathfrak{H})$, $T \subset T^* \Rightarrow T = T^*$.

Enfin, T réductible et partout défini $\Rightarrow T \in L(\mathfrak{H})$ ([10], théorème p. 303).

Définition 6. Deux systèmes inductifs d'opérateurs bornés (T_α) et (T_β) , définis sur deux systèmes inductifs $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ et $\{\mathfrak{H}_\beta\}$, seront dits équivalents s'ils définissent le même opérateur de $L(\mathfrak{H})$.

Proposition 6. Si $\{\mathfrak{H}_\beta\}$ est un sous-système inductif de $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$, et (T_β) , la restriction à $\{\mathfrak{H}_\beta\}$ d'un système inductif d'opérateurs bornés (T_α) défini sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$, (T_α) et (T_β) sont équivalents.

Démonstration.

$$(T_\alpha) \rightsquigarrow T \in L(\mathfrak{H});$$

T est réduit borné sur $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$; soit $T' = T| \cup \mathfrak{H}_\beta$; en vertu du théorème 1, la fermeture de T' est égale à T ; or la fermeture de T' est précisément l'opérateur de $L(\mathfrak{H})$ associé à (T_β) , cqfd.

→ Introduisons encore une définition commode pour la suite:

Définition 7. $\mathfrak{M} \subset L(\mathfrak{H})$, $\mathfrak{M}^* = \{T^*; T \in \mathfrak{M}\}$; on dira que \mathfrak{M} est auto-adjoint – ou \mathfrak{M} $*$ -stable – si $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^*$.

Chap. III Algèbres de $L(\mathfrak{H})$

1. Systèmes projectifs d'algèbres d'opérateurs bornés

Soit $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}_{\alpha \in J}$, un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} , et, $\forall \alpha$, A_α , une algèbre d'opérateurs bornés sur \mathfrak{H}_α : $A_\alpha \subset L(\mathfrak{H}_\alpha)$.

Définition 1. On dira que $\{A_\alpha\}$ est un système projectif d'algèbres d'opérateurs bornés si:

$$\alpha, \beta \in J, \alpha < \beta, T_\beta \in A_\beta \Rightarrow \mathfrak{H}_\alpha \text{ réduit } T_\beta \text{ et } T_\beta|_{\mathfrak{H}_\alpha} \in A_\alpha.$$

Sous les conditions de la définition 1, si $\alpha < \beta$, on a un homomorphisme $\varphi_{\alpha\beta}$ d'algèbres:

$$A_\alpha \xleftarrow{\varphi_{\alpha\beta}} A_\beta$$

où

$$T_\beta|_{\mathfrak{H}_\alpha} \longleftarrow T_\beta,$$

et il est immédiat que

i) $\varphi_{\alpha\alpha} = \text{identité}$;

ii) $\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow \varphi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta\gamma} = \varphi_{\alpha\gamma}$.

Par passage à la limite projective, on obtient donc une algèbre (abstraite) $A = \varprojlim A_\alpha$.

Proposition 1. L'algèbre A s'identifie canoniquement à un ensemble – encore noté A – d'opérateurs de $L(\mathfrak{H})$.

Démonstration. Il résulte immédiatement de la définition de $\varprojlim A_\alpha$, que si $(T_\alpha) \in \varprojlim A_\alpha$, (T_α) est un système inductif d'opérateurs bornés (chap. II, no 4). En vertu de la proposition 5 du chap. II, et de la remarque ii) qui la suit, on a une injection

$$A \xrightarrow{\psi} L(\mathfrak{H}), \text{ cqfd.}$$

Remarques. i) Si, $\forall \alpha$, A_α est \ast -stable dans $L(\mathfrak{H}_\alpha)$, alors A est une algèbre involutive.

ii) Si, $\forall \alpha$, A_α est abélienne, A est abélienne.

2. Topologies sur $A = \varprojlim A_\alpha$

Sous les conditions du no 1, munissons A_α de la topologie induite par la topologie normique de $L(\mathfrak{H}_\alpha)$. On a évidemment

$$\|\varphi_{\alpha\beta}(T_\beta)\| \leq \|T_\beta\|;$$

ainsi $\varphi_{\alpha\beta}$ est un homomorphisme *continu*, et A peut être munie de la topologie *limite projective* des topologies normiques ([3a], I, § 4, no 4). Cette topologie est compatible avec la structure d'algèbre de A ([5a], § 3, no 13), et nous l'appellerons topologie uniforme.

De même, la topologie faible de $L(\mathfrak{H}_\alpha)$ induit, sur A_α , une topologie définie par les semi-normes

$$p_{x_\alpha, y_\alpha}(T_\alpha) = |(T_\alpha x_\alpha | y_\alpha)|,$$

où $(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathfrak{H}_\alpha \times \mathfrak{H}_\alpha$, $T_\alpha \in A_\alpha$ ([6], p. 33); si, pour $\alpha < \beta$, $g_{\beta\alpha}$ désigne l'injection

$$\mathfrak{H}_\alpha \xrightarrow{g_{\beta\alpha}} \mathfrak{H}_\beta \quad (\text{cf. chap. I}),$$

et si $T_\beta \in A_\beta$, on a

$$|(\varphi_{\alpha\beta}(T_\beta) x_\alpha | y_\alpha)| = |(T_\beta \circ g_{\beta\alpha}(x_\alpha) | g_{\beta\alpha}(y_\alpha))|$$

ou encore

$$p_{x_\alpha y_\alpha}(\varphi_{\alpha\beta}(T_\beta)) = p_{g_{\beta\alpha}(x_\alpha), g_{\beta\alpha}(y_\alpha)}(T_\beta).$$

Ainsi $\varphi_{\alpha\beta}$ est continu pour les topologies faibles; nous appellerons topologie faible sur A la topologie limite projective des topologies faibles. Cette topologie est compatible avec la structure d'espace vectoriel de A . En outre, la multiplication sur A est séparément continue pour cette topologie, puisqu'il en est ainsi sur chaque A_α ([6], p. 34).

Remarque. On peut considérer A comme une algèbre de $L(E)$, espace des endomorphismes continus de l'espace vectoriel topologique

$$E = \varinjlim \mathfrak{H}_\alpha \quad (\text{cf. chap. I});$$

$(x, y) \in E \times E$, $T \in L(E)$, l'application

$$T \xrightarrow{p_{x,y}} |(Tx|y)|$$

est une semi-norme sur $L(E)$; la topologie définie sur $L(E)$ par le système de semi-normes $\{p_{x,y}\}_{(x,y) \in E \times E}$ induit sur A la topologie faible, comme on peut le vérifier sans peine.

3. L'algèbre $\underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}}$

Soit $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}_{\alpha \in J}$, un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} , et soit

$$\underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}} = \{T; T \in \underline{L(\mathfrak{H})}, T \text{ réduit borné sur } \mathfrak{J}\}.$$

$S, T \in \underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}}$, posons S_α, T_α pour les restrictions de S et T à \mathfrak{H}_α . Il est immédiat que $(S_\alpha \circ T_\alpha), (S_\alpha + T_\alpha), (T_\alpha^*), (\lambda T_\alpha)$ sont des systèmes inductifs d'opérateurs bornés (Chap. II, no 4). Les opérateurs de $\underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}}$ canoniquement associés à ces systèmes inductifs seront notés respectivement $ST, S + T, T^*, \lambda T$. Ainsi, $\underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}}$ est muni de manière naturelle d'une structure d'algèbre involutive.

Soit, pour $\alpha \in J$, φ_α , l'application

$$\begin{aligned} \underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}} &\longrightarrow \underline{L(\mathfrak{H}_\alpha)} \\ T &\longmapsto T_\alpha, \end{aligned}$$

et posons $L_\alpha = \varphi_\alpha[\underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}}]$; φ_α est un homomorphisme de $\underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}}$ sur une sous-algèbre de $\underline{L(\mathfrak{H}_\alpha)}$; de plus, $\{L_\alpha\}$ est un système projectif d'algèbres d'opérateurs bornés; enfin, pour $\alpha < \beta$, le schéma

$$\begin{array}{ccc} \underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}} & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & L_\alpha \\ & \searrow \varphi_\beta & \uparrow \varphi_{\alpha\beta} \\ & & L_\beta \end{array}$$

est évidemment commutatif. Ainsi, $\{\varphi_\alpha\}$ est un système projectif d'homomorphismes. Alors, $\varphi = \varprojlim \varphi_\alpha$ ([2], § 7, no 2) est un homomorphisme de $\underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}}$ dans $\varprojlim L_\alpha$.

Proposition 2. φ est un isomorphisme de $\underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}}$ sur $\varprojlim L_\alpha$.

Démonstration. Notons encore ψ l'injection canonique

$$\lim_{\leftarrow} L_{\alpha} \rightarrow L(\mathfrak{H}) \quad (\text{cf. } \S 2);$$

on a $Im(\psi) \subset L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{Z}}$, et $\psi \circ \varphi$ est l'identité, en vertu du théorème 1. De même, $\varphi \circ \psi$ est l'identité sur $\lim_{\leftarrow} L_{\alpha}$, cqfd.

$L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{Z}}$ étant identifiée canoniquement à $\lim_{\leftarrow} L_{\alpha}$, nous considérerons, sur $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{Z}}$, les topologies uniforme et faible telles qu'elles ont été définies plus haut.

Proposition 3. Soit $A \subset L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{Z}}$: si A est fermé (pour l'une quelconque des topologies) dans $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{Z}}$, on a

$$A = \lim_{\leftarrow} \varphi_{\alpha}(A). \quad (\text{cf. [3a], p. 54}).$$

Proposition 4. Soit $\{A_{\alpha}, \varphi_{\alpha\beta}\}$, un système projectif d'algèbres d'opérateurs bornés, et soit, pour tout α , \mathfrak{A}_{α} , l'adhérence faible de A_{α} dans $L(\mathfrak{H}_{\alpha})$; $\{\mathfrak{A}_{\alpha}\}$ est un système projectif d'algèbres d'opérateurs bornés.

Démonstration. i) \mathfrak{A}_{α} est un espace vectoriel; de plus, la multiplication, sur $L(\mathfrak{H}_{\alpha})$, étant séparément faiblement continue ([6], p. 34), on en conclut sans peine que \mathfrak{A}_{α} est une algèbre.

ii) Soit, pour $\alpha < \beta$, $p_{\alpha\beta}$, le projecteur de \mathfrak{H}_{β} sur \mathfrak{H}_{α} . Soit $\{p_{\alpha\beta}\}'$, le commutant de $p_{\alpha\beta}$ dans $L(\mathfrak{H}_{\beta})$: $\{p_{\alpha\beta}\}'$ est faiblement fermé; en effet, c'est le noyau de l'endomorphisme continu de $L(\mathfrak{H}_{\beta})$: $S_{\beta} \rightsquigarrow S_{\beta} \circ p_{\alpha\beta} - p_{\alpha\beta} \circ S_{\beta}$. Or, par hypothèse, $A_{\beta} \subset \{p_{\alpha\beta}\}'$, d'où, également, \mathfrak{A}_{β} . Ainsi, $\varphi_{\alpha\beta}$ se prolonge à \mathfrak{A}_{β} , et, par continuité, $\varphi_{\alpha\beta}(\mathfrak{A}_{\beta}) \subset \mathfrak{A}_{\alpha}$.

iii) Enfin, les propriétés de transitivité des $\varphi_{\alpha\beta}$ se prolongent également par continuité, ce qui achève la démonstration.

Si, par exemple, on revient à $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{Z}}$, et si \bar{L}_{α} est l'adhérence faible de L_{α} , on aura, en particulier à cause de la proposition 5 du chap. II, l'égalité d'ensembles

$$L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{Z}} = \lim_{\leftarrow} L_{\alpha} = \lim_{\leftarrow} \bar{L}_{\alpha};$$

de plus, les topologies limites projectives sont les mêmes. En effet, L_{α} , \bar{L}_{α} sont munis de la topologie induite de la topologie faible de $L(\mathfrak{H}_{\alpha})$; des propriétés des topologies-produits ([3a], p. 50, corollaire de la prop. 3), et de la transitivité des topologies induites résulte que les topologies induites sur $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{Z}}$ (identifié à un sous-ensemble de $\prod L(\mathfrak{H}_{\alpha})$) par $\prod L_{\alpha}$, $\prod \bar{L}_{\alpha}$ et $\prod L(\mathfrak{H}_{\alpha})$ sont identiques. Il en est encore de même si, dans ce qui précède, on remplace « faible » par « uniforme ».

Soient maintenant: $\mathfrak{K} = \{\mathfrak{H}_\beta\}_{\beta \in K}$, $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}_{\alpha \in J}$, deux systèmes inductifs, avec $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{J}$. On a une injection évidente (prop. 6 du chap. II)

$$\begin{array}{ccc} L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}} & \xrightarrow{\Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}}} & L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{K}} \\ \longrightarrow & & \longrightarrow \end{array}$$

Proposition 5. $\Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}}$ est continue, $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$ et $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{K}}$ étant tous deux munis de la topologie faible – ou uniforme.

Démonstration. $\forall \beta \in K$, on a le schéma commutatif

$$\begin{array}{ccc} L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}} & \xrightarrow{\Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}}} & L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{K}} \\ & \searrow \varphi_{\beta\mathfrak{J}} & \downarrow \varphi_{\beta\mathfrak{K}} \\ & & L(\mathfrak{H}_\beta) ; \end{array}$$

$\varphi_{\beta\mathfrak{K}} \circ \Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}}$ étant continu, $\Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}}$ est continu, cqfd.

4. Opérations sur $L(\mathfrak{H})$

Définition 2. Soient $S, T \in L(\mathfrak{H})$; on dira que S et T sont composables s'il existe un système inductif $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de sous-espaces de \mathfrak{H} réduisant S et T en bornés.

Proposition 6. S, T étant composables, les opérateurs $ST, S + T$, définis dans $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$, sont indépendants de \mathfrak{J} .

Démonstration. Supposons que S et T soient composables sur deux systèmes inductifs $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}$, et $\mathfrak{K} = \{\mathfrak{H}_\beta\}$ – et supposons, ce qui est toujours réalisable, que $\{0\}$ appartient à \mathfrak{K} et \mathfrak{J} . Soit alors

$$\mathfrak{L} = \{\mathfrak{H}_\alpha \cup \mathfrak{H}_\beta\} \quad (\text{cf. note 1, p. 288}).$$

Comme, par exemple, $\mathfrak{H}_\alpha \cup \{0\} = \mathfrak{H}_\alpha$, on a $\mathfrak{K} \subset \mathfrak{L}$, et $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{L}$.

En vertu de ce qui a été vu au chap. II (corollaire de la prop. 3 et prop. 6),

$$\begin{array}{ccc} L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}} & \cap & L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{K}} \\ \longrightarrow & & \longrightarrow \end{array} \subset L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{L}},$$

et, compte tenu de ce qui vient d'être fait (chap. III, no 3), on a

$$\xrightarrow{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}} \cap \xrightarrow{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{K}}} = \xrightarrow{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{L}}},$$

d'où la proposition 6.

Remarque. La relation «être composables» n'est pas transitive, et les opérations définies ci-dessus ne sont que partiellement définies.

Si $\mathfrak{T} \subset \xrightarrow{L(\mathfrak{H})}$, on dira que \mathfrak{T} est un ensemble d'opérateurs composables s'il existe un système inductif \mathfrak{J} tel que $\mathfrak{T} \subset \xrightarrow{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}$. Les opérations étant définies comme on vient de le voir, si S, T, U sont des opérateurs de \mathfrak{T} , on a évidemment

$$S(TU) = (ST)U$$

$$(S + T)U = SU + TU$$

$$(ST)^* = T^*S^*$$

$$(S + T)^* = S^* + T^*.$$

On notera encore que, si $\mathfrak{H}_\alpha \in \mathfrak{J}$, $S \circ T|_{\mathfrak{H}_\alpha} = S_\alpha \circ T_\alpha$, et que, par conséquent, en vertu du théorème 1, ST est la fermeture de $S \circ T$; si $S, T \in L(\mathfrak{H})$, $ST = S \circ T$.

Définition 3. Soient $S, T \in \xrightarrow{L(\mathfrak{H})}$; on dira que S et T commutent, ce qu'on notera $S \smile T$, si S et T sont composables et si $ST = TS$.

Soient $S, T \in \xrightarrow{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}$, où $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}$; on a

Proposition 7. $S \smile T \iff \forall \mathfrak{H}_\alpha \in \mathfrak{J}, S \circ p_\alpha \smile T \circ p_\alpha$.

Démonstration. Par hypothèse, $S \circ p_\alpha, T \circ p_\alpha \in L(\mathfrak{H})$; de plus,

$$(S \circ p_\alpha)(T \circ p_\alpha) = S \circ T \circ p_\alpha = S_\alpha \circ T_\alpha \circ p_\alpha = T_\alpha \circ S_\alpha \circ p_\alpha = (T \circ p_\alpha)(S \circ p_\alpha).$$

Réciproquement, si

$$(S \circ p_\alpha)(T \circ p_\alpha) = (T \circ p_\alpha)(S \circ p_\alpha),$$

on a

$$S \circ T \circ p_\alpha = T \circ S \circ p_\alpha,$$

et, par restriction à \mathfrak{H}_α , $S_\alpha \circ T_\alpha = T_\alpha \circ S_\alpha$, $\forall \mathfrak{H}_\alpha \in \mathfrak{J}$, d'où

$$ST = TS, \text{ cqfd.}$$

La notion de commutation introduite ici doit être comparée à la notion classique. Rappelons que si B et T sont des opérateurs sur \mathfrak{H} , avec $B \in L(\mathfrak{H})$, B et T commutent (au sens classique) si

$$B \circ T \subseteq T \circ B,$$

ce qu'on note $B \smile T$ (ou $T \smile B$, $T \circ B \supseteq B \circ T$) (cf. [10], p. 298).

Si B et T sont bornés, les deux notions coïncident. Plus généralement, on a :

Proposition 8. $B, T \in L(\mathfrak{H})$, avec B borné, alors $B \xrightarrow{\smile} T \Rightarrow B \smile T$.

Démonstration. $BT = TB$ prolonge $B \circ T$ et $T \circ B$; il suffit donc de vérifier que $\mathcal{D}_{B \circ T} \subset \mathcal{D}_{T \circ B}$, ou encore, puisque $\mathcal{D}_{B \circ T} = \mathcal{D}_T$, que $\mathcal{D}_T \subset \mathcal{D}_{T \circ B}$.

Les notations étant inchangées, par hypothèse, $\exists \mathfrak{J}$ avec $B, T \in L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$. $x \in \mathcal{D}_T \Leftrightarrow T_{\alpha} \circ p_{\alpha} x$ converge (cf. chap. II, no 4, rem. i). Montrons que $\xrightarrow{\smile}$

$$x \in \mathcal{D}_T \Rightarrow Bx \in \mathcal{D}_T \quad (\text{ou: } T_{\alpha} \circ p_{\alpha}(Bx) \text{ converge}),$$

ce qui démontrera la proposition :

$$T_{\alpha} \circ p_{\alpha} \circ Bx = T_{\alpha} \circ B \circ p_{\alpha} x \quad (\text{car, par hypothèse, } Bp_{\alpha} = p_{\alpha} B);$$

puis

$$T_{\alpha} \circ B \circ p_{\alpha} x = T_{\alpha} \circ B_{\alpha} \circ p_{\alpha} x = B_{\alpha} \circ T_{\alpha} \circ p_{\alpha} x \quad (\text{par hypothèse de commutation}), \text{ et}$$

$$B_{\alpha} \circ T_{\alpha} \circ p_{\alpha} x = B(T_{\alpha} \circ p_{\alpha} x).$$

Or $T_{\alpha} \circ p_{\alpha} x$ converge par hypothèse, et, par continuité de B , $B(T_{\alpha} \circ p_{\alpha} x)$ converge, cqfd.

Remarque. $B \smile T \not\Rightarrow B \xrightarrow{\smile} T$, car il faut supposer en outre que B et T sont composables. De plus, $S \xrightarrow{\smile} T$ peut être défini alors que $S \smile T$ ne l'est pas (cas où S et T ne sont pas bornés).

Définition 4. Si $N \in L(\mathfrak{H})$, et $N \xrightarrow{\smile} N^*$, N est dit *normal*. Cette définition est équivalente à la définition classique (cf. [12], V, 4): N est normal si N est fermé et si $N \circ N^* = N^* \circ N$. En effet, si N est normal au sens classique, N est réductible ([12], VIII, 1) et $N \circ N^* = N^* \circ N \Rightarrow N \xrightarrow{\smile} N^*$.

Réciproquement, soit $N \in L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$, avec $NN^* = N^*N$. Alors, $\forall \mathfrak{H}_{\alpha} \in \mathfrak{J}$, N_{α} est normal au sens classique, et on a (loc. cit.):

$$\|N_{\alpha} \circ p_{\alpha} x\| = \|N_{\alpha}^* \circ p_{\alpha} x\| \quad \forall x \in \mathfrak{H}.$$

De cette égalité résulte: $\forall \mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\beta \in \mathfrak{J}$,

$$\|N_\alpha \circ p_\alpha x - N_\beta \circ p_\beta x\| = \|N_\alpha^* \circ p_\alpha x - N_\beta^* \circ p_\beta x\|,$$

car si $\gamma \in J$, γ majorant α et β , et si $p_{\alpha\gamma}$ et $p_{\beta\gamma}$ sont les projecteurs de \mathfrak{H}_γ respectivement sur \mathfrak{H}_α et \mathfrak{H}_β , on a

$$N_\alpha \circ p_\alpha x - N_\beta \circ p_\beta x = N_\gamma \circ p_\gamma \circ (p_{\alpha\gamma} - p_{\beta\gamma}) \circ p_\gamma x = N_\gamma \circ p_\gamma y$$

et, de même,

$$N_\alpha^* \circ p_\alpha x - N_\beta^* \circ p_\beta x = \dots = N_\gamma^* \circ p_\gamma y.$$

De là résulte que

$$N_\alpha \circ p_\alpha x \text{ converge} \iff N_\alpha^* \circ p_\alpha x \text{ converge},$$

donc $\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_{N^*}$. Enfin,

$$\|Nx\| = \lim_\alpha \|N_\alpha \circ p_\alpha x\|, \text{ d'où } \|Nx\| = \|N^*x\|, \forall x \in \mathcal{D}_N,$$

ce qui équivaut également à N normal au sens classique (loc. cit.).

Définition 5. Soit $\mathfrak{M} \subset L(\mathfrak{H})$; on dira que \mathfrak{M} est abélien si $S \smile T \forall S, \forall T \in \mathfrak{M}$.

En vertu de ce qui précède, si \mathfrak{M} est abélien et auto-adjoint, les opérateurs de \mathfrak{M} sont normaux.

Chap. IV Les opérateurs de type «normal ou borné» (type (nb)).

1. Remarques préliminaires

Soit E , un ensemble, muni d'une relation notée τ ; si $A \subset E$, notons

$$A' = \{x; x \in E, x \tau y \forall y \in A\};$$

on notera $A'' = (A')'$, etc.; on a $\emptyset' = E$.

Propriété 1. $B \subset A \Rightarrow B' \supset A'$.

Propriété 2. τ symétrique $\Rightarrow A \subset A''$.

Propriété 3. τ symétrique \Rightarrow i) $A' = A''' = \dots$

ii) $A'' = A^{IV} = \dots$

En effet, $A' \subset (A')'' = A'''$ (propr. 2); mais on a successivement: $A \subset A''$, d'où $A' \supset (A'')' = A'''$, ce qui démontre 3, i); en outre i) \Rightarrow ii).

Si E est muni d'une opération partiellement définie, notée xy , et si on pose

$$x\tau y \Leftrightarrow \begin{cases} xy \text{ et } yx \text{ définis} \\ xy = yx, \end{cases}$$

A' s'appelle le *commutant* de A dans E , A'' , le *bicommutant*.

La relation de commutation ainsi définie est symétrique, et on a encore la propriété suivante:

Propriété 4. A'' est le plus petit ensemble égal à son bicommutant et contenant A .

En effet, si $A \subset B \subset A''$, avec $B = B''$, alors $A'' \subset B'' = B$; d'où $A'' = B$.

Enfin, et sans supposer la relation symétrique, on a la

Propriété 5. $(A \cup B)' = A' \cap B'$; $(A \cap B)' \supset A' \cup B'$.

2. La condition (nb)

Définition 1. Soit $T \in L(\mathfrak{H})$; on dira que T est de type (nb) — i.e.: normal ou borné — s'il satisfait à la condition suivante: \exists un système inductif $\{\mathfrak{H}_i\}$ réduisant T en bornés, et tel que

$$\{T, T^*\}' \subset \{p_i\}',$$

où $\{p_i\}$ est le système de projecteurs associé à $\{\mathfrak{H}_i\}$, $\{T, T^*\}'$, $\{p_i\}'$ étant les commutants dans $L(\mathfrak{H})$.

Les projecteurs p_i jouissent, en un certain sens, de propriétés de projecteurs spectraux. On dira que $\{p_i\}$ est une (nb)-famille de projecteurs de T .

Remarques. i) $T \in L(\mathfrak{H}) \Rightarrow T$ de type (nb), car $\{\mathfrak{H}_i\} = \{\mathfrak{H}\}$ satisfait à la condition (nb);

ii) a) $S = S^*$, $S \frown T$, T de type (nb) $\Rightarrow S \frown p_i$;

b) T auto-adjoint de type (nb), $S \frown T \Rightarrow S \frown p_i$.

Proposition 1. T auto-adjoint $\Rightarrow T$ de type (nb).

Démonstration. On sait construire (cf. [10], p. 312) une suite $\{\mathfrak{H}_n\}$ de sous-espaces orthogonaux deux-à-deux, et tels que:

- i) \mathfrak{H}_n réduit T en un opérateur auto-adjoint borné.
- ii) $B \in L(\mathfrak{H})$, $B \frown T \Rightarrow B$ réduit (borné) par $\{\mathfrak{H}_n\}$.
- iii) $\bigoplus \mathfrak{H}_n = \mathfrak{H}$.

Soit $\{\mathfrak{H}_i\}$, le système inductif engendré par $\{\mathfrak{H}_n\}$ – en faisant les sommes finies de \mathfrak{H}_n . Ce système jouit encore des propriétés i) et ii), en particulier à cause de la proposition 2 et du corollaire de la proposition 3 du chap. II.

Soit $S \in L(\mathfrak{H})$, avec $S \frown T$; \exists un système inductif $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ réduisant S et T en bornés $(S_\alpha), (T_\alpha)$, avec $S_\alpha \circ T_\alpha = T_\alpha \circ S_\alpha$. Alors $S \circ p_\alpha \frown T$:

$$S \circ p_\alpha \circ T \subset S \circ T \circ p_\alpha = T \circ S \circ p_\alpha;$$

$$S \circ p_\alpha \in L(\mathfrak{H}), p_\alpha \in L(\mathfrak{H}) \Rightarrow S \circ p_\alpha \frown p_t \text{ et } p_\alpha \frown p_t \text{ (ii)}.$$

D'où

$$S \circ (p_\alpha \circ p_t) \frown p_\alpha \circ p_t = p_t \circ (p_\alpha \circ p_t),$$

et $\{\mathfrak{H}_\alpha \cap \mathfrak{H}_t\}$ est un système inductif (chap. I, 3), d'où $S \frown p_t$ (chap. III, prop. 7), cqfd.

De la proposition 1 et de sa démonstration résultent:

Corollaire 1. B borné, T auto-adjoint, $B \frown T \Rightarrow B \frown T$ (en d'autres termes, lorsque B est borné, et T auto-adjoint, la commutation «classique» est équivalente à la commutation introduite ici).

Corollaire 2. $T = T^* \Rightarrow$ toute (nb) -famille de projecteurs de T est abélienne.

En effet, $T \frown T \Rightarrow T \frown p_t \Rightarrow p_t \frown p_{t'}$ (on utilise la remarque ii) b) ci-dessus).

Corollaire 3. $T = T^* \Rightarrow$ la réunion de toutes les (nb) -familles de T est une (nb) -famille de T .

Démonstration. Soit $\{p_\alpha\}$, la réunion des (nb) -familles de projecteurs de T ; comme plus haut, on vérifie que c'est une famille abélienne, et alors $p_\alpha + p_\beta - p_\alpha p_\beta$ majore p_α et p_β , et il suffit de vérifier que $p_\alpha + p_\beta - p_\alpha p_\beta$ est encore un projecteur de la famille, autrement dit que

$$S \frown T \Rightarrow S \frown (p_\alpha + p_\beta - p_\alpha p_\beta);$$

mais $S \frown T$ sous-entend: $\exists \mathfrak{J}$, avec $S, T \in L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$; mais alors on a aussi $\{p_\alpha\} \subset L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$, et en opérant dans cette algèbre, on a sans peine

$$S(p_\alpha + p_\beta - p_\alpha p_\beta) = (p_\alpha + p_\beta - p_\alpha p_\beta)S.$$

Définition 2. On appellera (nb) -famille totale d'un opérateur auto-adjoint la réunion de toutes ses (nb) -familles.

3. Commutants dans l'ensemble des opérateurs de type (nb)

Soit \mathfrak{M} , un ensemble d'opérateurs de type (nb) ; on désignera dès maintenant par \mathfrak{M}' , \mathfrak{M}'' , etc., les commutants successifs de \mathfrak{M} dans l'ensemble des opérateurs de type (nb) . La commutation étant une relation symétrique, on appliquera sans autre les propriétés établies au no 1.

Proposition 2. Soit A , une algèbre de $L(\mathfrak{H})$; si $\mathfrak{M} \subset A$, alors $\mathfrak{M}' \cap A$ est une algèbre.

Démonstration. Soient $S, U \in \mathfrak{M}' \cap A$, et $T \in \mathfrak{M}$; alors $S + U$ et SU appartiennent à A , et comme $\mathfrak{M} \subset A$, on a, en opérant dans A :

$$(S + U)T = ST + UT = TS + TU = T(S + U),$$

et la même chose avec SU , ce qui montre que $S + U$ et SU sont dans \mathfrak{M}' , cqfd.

Remarque. Cette proposition est indépendante de la condition (nb) .

Proposition 3. Soit \mathfrak{M} , un ensemble abélien d'opérateurs auto-adjoints: \exists une algèbre B d'opérateurs de type (nb) qui contient \mathfrak{M} .

Démonstration. Soit \mathfrak{E} , la réunion des (nb) -familles de projecteurs des opérateurs de \mathfrak{M} ; $\mathfrak{M} \cup \mathfrak{E}$ est abélien. En effet, soient $T, T' \in \mathfrak{M}$, $\{p_t\}$, $\{p_{t'}\}$, les (nb) -familles totales de T et T' ; on a

$$T \dot{\smile} T' \Rightarrow \begin{cases} T \dot{\smile} p_{t'} \Rightarrow p_t \dot{\smile} p_{t'} \\ p_t \dot{\smile} T' \end{cases}.$$

Soit alors $E = \{p; p = \text{produit fini de projecteurs de } \mathfrak{E}\}$; $\mathfrak{M} \cup E$ est abélien, car $T \in \mathfrak{M}$, $p \in E \Rightarrow T \dot{\smile} p$, en vertu d'une propriété classique ([10], p. 298, e)), et puisque T est auto-adjoint, $T \dot{\smile} p$. Soient $\mathfrak{J}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \dots$, des systèmes inductifs $\{p_j\}$, $\{p_k\}$, $\{p_l\}, \dots$, tels que $\{p_j\} \subset E$, etc. Soit $B_{\mathfrak{J}} = E' \cap L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$; $B_{\mathfrak{J}}$ est une algèbre (prop. 2 ci-dessus), car $E \subset L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$, $\forall \mathfrak{J}$. On définit donc de même des algèbres $B_{\mathfrak{K}}, B_{\mathfrak{L}}, \dots$. Ces algèbres sont \ast -stables. Introduisons alors sur $\{\mathfrak{J}, \mathfrak{K}, \mathfrak{L}, \dots\}$ la relation de préordre

$$\mathfrak{J} < \mathfrak{K} \Leftrightarrow B_{\mathfrak{J}} \subset B_{\mathfrak{K}};$$

cette relation est filtrante à droite:

soient $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_j\}$, $\mathfrak{L} = \{\mathfrak{H}_l\}$, et soit $\mathfrak{K} = \{\mathfrak{H}_k\} = \{\mathfrak{H}_j \cap \mathfrak{H}_l\}$;

$$p_k = p_j p_l \in E.$$

Montrons que $B_{\mathfrak{J}} \subset B_{\mathfrak{K}}$, c'est-à-dire simplement: $S \in B_{\mathfrak{J}} \Rightarrow S \in L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{K}}$.
Par hypothèse, $S \in E'$, d'où $S \preceq p_k$; S est donc réduit par \mathfrak{H}_k ; comme $\mathfrak{H}_k \subset \mathfrak{H}_j$, S est réduit borné par \mathfrak{H}_k , d'où $S \in L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{K}}$. Soit, maintenant, pour $\mathfrak{J} < \mathfrak{K}$, $\Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}}$, l'injection naturelle

$$\Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}} : B_{\mathfrak{J}} \rightarrow B_{\mathfrak{K}};$$

il est clair que $\{B_{\mathfrak{J}}; \Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}}\}$ est un système inductif d'algèbres de E' , et définit $B = \varinjlim B_{\mathfrak{J}}$, cqfd.

Remarque. Si $S \in L(\mathfrak{H}) \cap E'$, alors $S \in B_{\mathfrak{J}}, \forall \mathfrak{J}$; ainsi

$$L(\mathfrak{H}) \cap E' \subset B_{\mathfrak{J}} \subset B.$$

Proposition 4. *Sous les conditions précédentes, on a $\mathfrak{M}' \subset E'$.*

Démonstration. Soit $S \in \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{S} = \{\mathfrak{H}_s\}$, un (nb) -système inductif de S ; en gardant les notations de la proposition 3, on a:

$$T \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{S, S^*\} \subset \{T\}' \subset \{p_t\}'$$

puis

$$\{p_s\}' \supset \{S, S^*\}' \supset \{p_t\}'' \supset \{p_t\},$$

compte tenu, en particulier, de ce que S et T sont de type (nb) . Ainsi

$$\{p_t\} \subset \underline{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{S}}},$$

d'où

$$\mathfrak{E} \subset \underline{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{S}}}, \text{ puis } E \subset \underline{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{S}}};$$

alors

$$Sp_t = p_t S, \forall p_t \in \mathfrak{E} \Rightarrow Sp = pS, \forall p \in E, \text{ cqfd.}$$

Des trois propositions précédentes résulte alors:

Proposition 5. \mathfrak{M} étant un ensemble abélien d'opérateurs auto-adjoints, \exists une algèbre A d'opérateurs de type (nb) telle que:

- i) $\mathfrak{M} \subset A \subset \mathfrak{M}'$.
- ii) $\mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H}) \subset A$.
- iii) $S \in \mathfrak{M}', \{U_1, \dots, U_n\} \subset \text{centre de } A \Rightarrow \exists$ un système inductif $\mathfrak{R} = \{\mathfrak{H}_k\}$ tel que $\{S, U_1, \dots, U_n\} \subset \xrightarrow{\quad} L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{R}}$.

Démonstration. $A = \mathfrak{M}' \cap B$ satisfait à i); de plus:

$$\mathfrak{M}' \subset E' \Rightarrow \mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H}) \subset E' \cap L(\mathfrak{H}) \subset B$$

(remarque ci-dessus), d'où ii). Soit alors $\{U_1, \dots, U_n\} \subset \text{centre de } A$, et $S \in \mathfrak{M}'$:

- a) $\{p_s\} \subset \mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H}) \subset A$, d'où $\{p_s\}' \supset A' \supset \{U_1, \dots, U_n\}$;
- b) $\{U_1, \dots, U_n\} \subset B_{\mathfrak{J}}$ pour une certaine famille \mathfrak{J} , et $S \in \{p_j\}'$ (puisque $S \in E'$).

Alors $\{p_j\} \subset \{p_s\}'$ (propriété (nb) de S), et

$$\{\mathfrak{H}_j \cap \mathfrak{H}_s\} = \{\mathfrak{H}_k\} = \mathfrak{R}$$

est un système inductif satisfaisant à iii), cqfd.

Remarque. $\mathfrak{M} \cup E \subset A \cap A' = \text{centre de } A$; pour \mathfrak{M} , c'est évident, à cause de i), proposition 5; d'autre part,

$$E \subset \mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H}) \subset A \subset \mathfrak{M}' \subset E',$$

d'où

$$A' \supset E'' \supset E;$$

ainsi

$$E \subset A \cap A'.$$

Définition 3. \mathfrak{M} étant un ensemble abélien d'opérateurs auto-adjoints, on appellera algèbre engendrée par \mathfrak{M} la plus petite algèbre de $L(\mathfrak{H})$ qui contient \mathfrak{M} .

Proposition 6. Sous les conditions de la définition 3, l'algèbre engendrée par \mathfrak{M} est auto-adjointe et abélienne, contenue dans \mathfrak{M}' .

Démonstration. Cette algèbre est contenue dans le centre de A , puisque \mathfrak{M} est dans le centre de A ; en outre, si M est une algèbre contenant \mathfrak{M} , il en est de même de M^* , donc aussi de $M \cap M^*$, cqfd.

4. Le cas des opérateurs normaux

Soit N , un opérateur normal, et $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{H}_n\}$, un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} réduisant N en bornés. On a $\{N, N^*\} \subset L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{N}}$.

En opérant dans cette algèbre, on a :

$$T_1 = \frac{1}{2} (N + N^*) \quad \text{et} \quad T_2 = \frac{1}{2i} (N - N^*),$$

puis

$$N = T_1 + iT_2 \quad N^* = T_1 - iT_2,$$

$$T_k = T_k^* \quad (k = 1, 2)$$

$$T_1 T_2 = T_2 T_1.$$

Ainsi $N \in$ algèbre engendrée par $\mathfrak{M} = \{T_1, T_2\}$, système abélien d'opérateurs auto-adjoints. Donc N est de type (nb) . Enfin, on peut considérer l'algèbre engendrée par $\{N, N^*\}$ – dans le même sens qu'à la définition 3; des relations ci-dessus résulte que c'est aussi l'algèbre engendrée par \mathfrak{M} ; on peut donc énoncer :

Proposition 7. i) N normal $\Rightarrow N$ de type (nb) ;

ii) l'algèbre engendrée par \mathfrak{M} est aussi celle engendrée par $\{N, N^*\}$.

Proposition 8. Toujours avec les mêmes notations, on a $\{N, N^*\}' = \mathfrak{M}'$.

Démonstration. Désignons par \mathfrak{U} l'algèbre engendrée par \mathfrak{M} ; en vertu de la prop. 5 iii), si $S \in \mathfrak{M}'$, S, T_1, T_2 sont composables, et

$$ST_k = T_k S \quad (k = 1, 2) \Rightarrow S \in \{N, N^*\}'.$$

Réciproquement, soit $S \in \{N, N^*\}' \subset \{p_n\}'$, où $\{p_n\}$ est une (nb) -famille de projecteurs de N ; alors $\{p_n\} \subset \{p_s\}'$ (propriété (nb) de S), et S, N, N^* sont composables. Alors

$$S \in \{N, N^*\}' \Rightarrow S \in \{T_1, T_2\}', \quad \text{cqfd.}$$

Corollaire.

$$B \in L(\mathfrak{H}), B \frown N \text{ et } B \frown N^* \Rightarrow B \frown N \text{ (et } N^*).$$

En effet, on aura aussi $B \frown T_1$ et $B \frown T_2$ ([12], p. 32), d'où $B \in \mathfrak{M}'$ (corollaire 1 de la prop. 1 ci-dessus), cqfd.

Si $B \in L(\mathfrak{H})$, et si $B \frown N$ et $B^* \frown N$, alors B (et B^*) $\frown N$ (et N^*).

N normal, étant de type (nb) , on a – si $\{p_n\}$ est une (nb) -famille de projecteurs de N , et puisque $N \subset N^*$:

$$\{N, N^*\} \subset \{N, N^*\}' \subset \{p_n\}',$$

d'où

$$\{p_n\}' \supset \{N, N^*\}' \supset \{N, N^*\}'' \supset \{p_n\}'' \supset \{p_n\};$$

ainsi $\{p_n\} \subset \{p_n\}'$, c'est-à-dire que la (nb) -famille de N est abélienne. La réunion de toutes les (nb) -familles de N est donc encore une (nb) -famille de projecteurs de N , qu'on appellera la (nb) -famille totale.

Proposition 9. Soit $N \subset L(\mathfrak{H})$, \mathfrak{N} étant auto-adjoint et abélien: $\exists A$, algèbre de $L(\mathfrak{H})$, telle que $\mathfrak{N} \subset A \subset \overrightarrow{N'}$; de plus, $N' \cap L(\mathfrak{H}) \subset A$ et les opérateurs de \mathfrak{N}' sont composables avec ceux du centre de A dans les mêmes conditions qu'en iii) de la proposition 5.

Démonstration. Soit $\mathfrak{M} = \{T; T = \frac{1}{2}(N + N^*) \text{ ou } T = \frac{1}{2i}(N - N^*), N \in \mathfrak{N}\}$; on a, en vertu de la prop. 8, $\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}'$; de plus, \mathfrak{N} étant abélien, si T_1 et $T_2 \in \mathfrak{M}$, T_1 et T_2 sont composables, et on vérifie sans peine que $T_1 T_2 = T_2 T_1$. Ainsi \mathfrak{M} est abélien. La proposition résulte alors de la proposition 5; $\exists A$, algèbre de $L(\mathfrak{H})$, telle que

$$\mathfrak{M} \subset A \subset \mathfrak{M}' = \mathfrak{N}';$$

$$\mathfrak{M} \subset A \Rightarrow \mathfrak{N} \subset A, \text{ cqfd.}$$

Corollaire. Sous les conditions précédentes, l'algèbre engendrée par \mathfrak{N} (plus petite algèbre de $L(\mathfrak{H})$ qui contient \mathfrak{N}) est aussi celle engendrée par \mathfrak{M} ; une \ast -algèbre abélienne est engendrée par ses opérateurs auto-adjoints.

En effet, une algèbre contenant \mathfrak{M} contient \mathfrak{N} , et réciproquement.

Proposition 10. Si \mathfrak{M} est un ensemble d'opérateurs de type (nb) , et si \mathfrak{M}' est \ast -abélien, alors \mathfrak{M}' est une algèbre.

Démonstration. Soit \mathfrak{A} , l'algèbre engendrée par \mathfrak{M}' : $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}''$, et les opérateurs de \mathfrak{M}'' sont composables avec ceux de \mathfrak{A} (prop. 9); $S, T \in \mathfrak{M}'$, $U \in \mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}''$, on aura:

$$(S + T)U = SU + TU = US + UT = U(S + T)$$

$$(ST)U = U(ST) \text{ cqfd.}$$

Corollaire. $\mathfrak{M} \text{ } \ast\text{-abélien} \Rightarrow \mathfrak{M}'' \text{ est une algèbre.}$ En effet, $\mathfrak{M}'' = (\mathfrak{M}')'$ est $\ast\text{-abélien}$ ($\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}' \Rightarrow \mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'''$).

Soit, maintenant, $\mathfrak{M} \subset \overrightarrow{L(\mathfrak{H})}$, \mathfrak{M} étant supposé $\ast\text{-abélien}$; \mathfrak{A} désignant l'algèbre engendrée par \mathfrak{M} , on a :

Proposition 11. $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{M}''$.

Démonstration. a) \mathfrak{M}'' est une algèbre contenant \mathfrak{M} , d'où $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{M}''$, puis $\mathfrak{A}'' \subset \mathfrak{M}'''' = \mathfrak{M}''$.

b) $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{A} \Rightarrow \mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{A}''$, donc $\mathfrak{A}'' = \mathfrak{M}''$.

\mathfrak{M}'' est la plus petite algèbre contenant \mathfrak{M} et égale à son bicommutant.

5. Bicommutant de \mathfrak{M} , ensemble auto-adjoint d'opérateurs de type (nb) .

Lemme. Soit \mathfrak{M} , ensemble d'opérateurs de type (nb) , avec $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^*$; $S \in \mathfrak{M}'$, $\{\mathfrak{H}_s\} = (nb)\text{-famille de } S \Rightarrow p_s \text{ et } S \circ p_s \in \mathfrak{M}'$.

Démonstration. $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* \Rightarrow \mathfrak{M}' = (\mathfrak{M}')^*$; ainsi :

$$\begin{aligned} S \in \mathfrak{M}', T \in \mathfrak{M}, \{p_t\} = (nb)\text{-famille} \\ \text{de projecteurs de } T \end{aligned} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} S, S^* \frown T \Rightarrow S \frown p_t \\ S \frown T, T^* \Rightarrow p_s \frown T \end{array} \right\} \Rightarrow p_s \frown p_t.$$

Alors $\{\mathfrak{H}_\gamma\} = \{\mathfrak{H}_s \cap \mathfrak{H}_t\}$ est un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} réduisant S et T en bornés (S_γ) , (T_γ) , et $S \frown T \Rightarrow S_\gamma \frown T_\gamma$. Il en résulte que, si on fixe t , et si S_t et T_t sont les restrictions de S et T à \mathfrak{H}_t , $\{\mathfrak{H}_{\gamma(t)}\} = \{\mathfrak{H}_s \cap \mathfrak{H}_t\}$ étant une famille inductive de sous-espaces de \mathfrak{H}_t réduisant S_t et T_t en bornés qui commutent, on a $S_t \frown T_t$; et comme $T_t \in L(\mathfrak{H}_t)$, on a aussi $T_t \frown S_t$ (chap. III, prop. 8), c'est-à-dire $T_t \circ S_t \subset S_t \circ T_t$.

D'autre part, si $p_{st} = p_s|_{\mathfrak{H}_t}$, on a aussi $T_t \frown p_{st}$ (car T_t est réduit par $\mathfrak{H}_{\gamma(t)}$) et p_{st} est le projecteur de \mathfrak{H}_t sur $\mathfrak{H}_{\gamma(t)}$. D'où ([10], p. 298, e)) :

$$T_t \frown S_t \circ p_{st} = (S \circ p_s)|_{\mathfrak{H}_t},$$

c'est-à-dire

$$S \circ p_s \frown T, \quad \text{cqfd.}$$

Théorème 2. Sous les conditions précédentes,

$$\mathfrak{M}'' = [\mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H})]'$$

Démonstration. a) $\mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{M}' \Rightarrow [\mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H})]' \supset \mathfrak{M}''$.

b) Montrons qu'on a aussi $[\mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H})]' \subset \mathfrak{M}''$: soient $U \in [\mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H})]'$, $\{p_u\}$, (nb) -famille de projecteurs de U , associée au système inductif $\{\mathfrak{H}_u\}$; soient encore $S \in \mathfrak{M}'$, $\{p_s\}$, (nb) -famille de S associée au système inductif $\{\mathfrak{H}_s\}$; en vertu du lemme et de l'hypothèse, on a:

$$\{U, p_u, U \circ p_u\} \subset [\mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H})]',$$

car $\mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H})$ est auto-adjoint; de même, on a

$$\{p_s, S \circ p_s\} \subset \mathfrak{M}' \cap L(\mathfrak{H}),$$

d'où: i) $U \in \{p_s\}' \Rightarrow$ ii) $\{p_u, U \circ p_u\} \subset \{p_s\}'$ (lemme) iii) $S \circ p_s \leq p_u$ et $U \circ p_u \leq S \circ p_s$; ii) et iii) $\Rightarrow S \circ p_s \leq \mathfrak{H}_s \leq p_u \leq \mathfrak{H}_u$, c'est-à-dire $S \leq p_u$.

Il résulte de là que $\{\mathfrak{H}_\alpha\} = \{\mathfrak{H}_u \cap \mathfrak{H}_s\}$ est un système inductif réduisant U et S en bornés (U_α) et (S_α) . De plus, pour un α donné, iii) $\Rightarrow U_\alpha S_\alpha = S_\alpha U_\alpha$ (par restriction de $U \circ p_u \leq S \circ p_s$ à \mathfrak{H}_α). Ainsi $U \leq S$, cqfd.

Corollaire. Si $\mathfrak{N} \subset L(\mathfrak{H})$, \mathfrak{N} auto-adjoint et abélien, et si A est l'algèbre de la proposition 9, on a $A' = \mathfrak{N}''$.

En effet, $\mathfrak{N}' \cap L(\mathfrak{H}) \subset A \subset \mathfrak{N}'$ entraîne:

$$\mathfrak{N}'' = [\mathfrak{N}' \cap L(\mathfrak{H})]' \supset A' \supset \mathfrak{N}''.$$

Chap. V Algèbres de von NEUMANN et $*$ -algèbres abéliennes de $L(\mathfrak{H})$

1. Algèbres de von NEUMANN

Soit A , une algèbre de type (nb) – i. e.: les opérateurs de A sont de type (nb) . On désignera par \mathfrak{S} l'ensemble des projecteurs de A .

Définition 1. A sera appelée algèbre de von NEUMANN si $A = \mathfrak{S}''$.

Proposition 1. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

- i) A est une algèbre de von NEUMANN;
- ii) A est auto-adjointe, et $A = A''$.

Démonstration. i) \Rightarrow ii) en vertu de la définition 1. Montrons que ii) \Rightarrow i):

$$A = A'' \Rightarrow A \cap L(\mathfrak{H}) = A'' \cap L(\mathfrak{H}),$$

d'où

$$[A \cap L(\mathfrak{H})]' = [A'' \cap L(\mathfrak{H})]'$$

A auto-adjointe $\Rightarrow A'$ auto-adjointe, d'où, en vertu du théorème 2,

$$A''' = [A'' \cap L(\mathfrak{H})]';$$

ainsi

$$[A \cap L(\mathfrak{H})]' = A''' = A',$$

et encore

$$[[A \cap L(\mathfrak{H})]' \cap L(\mathfrak{H})]' = A''.$$

En restreignant cette dernière égalité à $L(\mathfrak{H})$, on conclut : la sous-algèbre des opérateurs bornés de A est une algèbre de von NEUMANN de $L(\mathfrak{H})$, engendrée par ses projecteurs ([6], p. 4), qui sont aussi ceux de A ; exactement :

$$[\mathfrak{S}' \cap L(\mathfrak{H})]' \cap L(\mathfrak{H}) = A \cap L(\mathfrak{H}).$$

Mais \mathfrak{S} est un ensemble auto-adjoint d'opérateurs de type (nb) , d'où, en vertu du théorème 2 :

$$[\mathfrak{S}' \cap L(\mathfrak{H})]' = \mathfrak{S}'';$$

alors

$$[\mathfrak{S}'' \cap L(\mathfrak{H})]' = [A \cap L(\mathfrak{H})]',$$

c'est-à-dire

$$\mathfrak{S}' = A', \quad \text{cqfd.}$$

Remarque. Soit N , un opérateur normal, et $\mathfrak{N} = \{N, N^*\}$; \mathfrak{N}'' est une algèbre de von NEUMANN; soit $\{p_n\}$, la (nb) -famille totale de projecteurs de N :

$$\{p_n\} \subset \{p_n\}'' \subset \mathfrak{N}'',$$

car $\mathfrak{N}' \subset \{p_n\}'$ (chap. IV, no 2).

2. Structure d'une \ast -algèbre abélienne A

Soit A , une \ast -algèbre abélienne de $L(\mathfrak{H})$; les opérateurs de A sont normaux. On désignera par \mathfrak{S} l'ensemble des projecteurs de A'' . On a

$$A \subset A'' = \mathfrak{S}'' \subset A' = \mathfrak{S}'.$$

$N \in A \Rightarrow \mathfrak{N} = \{N, N^*\} \subset A \Rightarrow \mathfrak{N}'' \subset A''$. Ainsi $\{p_n\} \subset \mathfrak{S}$, où $\{p_n\}$ est la (nb) -famille totale de projecteurs de N . De là résulte:

- a) $p_\alpha \in \mathfrak{S}$, $p_\alpha(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_\alpha \Rightarrow \mathfrak{H}_\alpha$ réduit N , $\forall N \in A$;
- b) tout opérateur de A est réduit borné par un système inductif $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ tel que $\{p_\alpha\} \subset \mathfrak{S}$.

Soit $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_j\}$, un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} , tel que $\{p_j\} \subset \mathfrak{S}$; la famille $\{p_j\}$ sera dite *complète* – dans \mathfrak{S} – si:

$$p_\alpha \in \mathfrak{S}, p_\alpha(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}_\alpha \subset \mathfrak{H}_j \text{ pour un indice } j \Rightarrow \mathfrak{H}_\alpha \in \mathfrak{J}.$$

Toute famille $\{p_j\}$ peut être complétée en $\{p_j, p\}$, où p parcourt \mathfrak{S} .

Soit $I = \{\mathfrak{J}, \mathfrak{K}, \dots\}$, l'ensemble des systèmes inductifs correspondant à des familles complètes de projecteurs; introduisons la relation d'ordre

$$\mathfrak{J} < \mathfrak{K} \text{ si } \mathfrak{J} \supset \mathfrak{K};$$

cette relation est filtrante à droite:

$$\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_j\} \in I, \mathfrak{K} = \{\mathfrak{H}_k\} \in I \Rightarrow \mathfrak{L} = \{\mathfrak{H}_j \cap \mathfrak{H}_k\} \in I,$$

et \mathfrak{L} « majeure » \mathfrak{J} et \mathfrak{K} .

Soit alors, pour $\mathfrak{J} < \mathfrak{K}$, $\Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}}$, l'homomorphisme défini au chap. III, no 3:

$$\Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}}: \underline{\underline{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}} \longrightarrow \underline{\underline{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{K}}}};$$

$\{\underline{\underline{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}}, \Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}}\}$ est un système inductif d'algèbres de $L(\mathfrak{H})$ – c'est aussi un système inductif pour les structures d'espaces vectoriels topologiques définies sur les $\underline{\underline{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}}$ en vertu de la proposition 5 du chap. III.

Si $u_{\mathfrak{J}}$ désigne l'injection

$$u_{\mathfrak{J}}: \underline{\underline{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}} \longrightarrow \underline{\underline{L(\mathfrak{H})}},$$

on a, pour $\mathfrak{J} < \mathfrak{K}$, et en vertu du théorème 1, un schéma commutatif

$$\begin{array}{ccc} \underline{\underline{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}} & \xrightarrow{u_{\mathfrak{J}}} & \underline{\underline{L(\mathfrak{H})}} \\ \downarrow \Phi_{\mathfrak{K}\mathfrak{J}} & \nearrow u_{\mathfrak{K}} & \\ \underline{\underline{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{K}}}} & & \end{array}$$

Si $u = \varinjlim u_{\mathfrak{J}}$, u identifie $\varinjlim \underline{\underline{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}}$ à une algèbre de $\underline{\underline{L(\mathfrak{H})}}$; cette algèbre

est munie de topologies compatibles soit avec la structure d'algèbre, soit avec la structure d'espace vectoriel sous-jacente.

Soit encore $A_{\mathfrak{J}} = A \cap L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$; il est clair que $\Phi_{\mathfrak{R}\mathfrak{J}}(A_{\mathfrak{J}}) \subset A_{\mathfrak{R}}$; ainsi $\{A_{\mathfrak{J}}\}$ est un système inductif de parties des $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$ ([2], § 7); $u = \varinjlim u_{\mathfrak{J}}$ envoie $\varinjlim A_{\mathfrak{J}}$ isomorphiquement dans A , et

$$u(\varinjlim A_{\mathfrak{J}}) = A,$$

à cause de b) ci-dessus. En définitive, on a le théorème:

Théorème 3. *Soit A , une \ast -algèbre abélienne de $L(\mathfrak{H})$; à A est associé un système inductif $\{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}; \Phi_{\mathfrak{R}\mathfrak{J}}\}$; A est canoniquement isomorphe à la limite inductive d'un système inductif de sous-algèbres des $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$.*

$\varinjlim L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$ est une algèbre de $L(\mathfrak{H})$, munie de structures topologiques compatibles soit avec la structure d'algèbre, soit avec la structure sous-jacente d'espace vectoriel.

Remarque.

$$\forall \mathfrak{J}, A \cap L(\mathfrak{H}) \subset A_{\mathfrak{J}}.$$

3. Structure des algèbres de von NEUMANN (a.v.N.) abéliennes

Soit A , une a. v. N. abélienne, \mathfrak{S} désignant l'ensemble de ses projecteurs: $A = \mathfrak{S}''$; avec les notations du no 2, on a

$$A = \varinjlim A_{\mathfrak{J}} = \varinjlim (\mathfrak{S}'')_{\mathfrak{J}}.$$

$$\forall \mathfrak{J}, \mathfrak{S} \subset L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}, \text{ et } \mathfrak{S}' \cap L(\mathfrak{H}) \subset L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}.$$

Désignons par $\mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}}$, $\mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}}$ les commutants successifs de \mathfrak{S} dans $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$, plus précisément:

$$\mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{S}' \cap L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}} \quad \mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}} = (\mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}})' \cap L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}.$$

On a

$$\mathfrak{S}' \supset \mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}} \supset \mathfrak{S}' \cap L(\mathfrak{H}),$$

d'où

$$\mathfrak{S}'' \subset (\mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}})' \subset [\mathfrak{S}' \cap L(\mathfrak{H})]' = \mathfrak{S}'',$$

donc

$$\mathfrak{S}'' = (\mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}})'$$

par restriction de cette dernière égalité à $\xrightarrow{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}$, on a

$$(\mathfrak{S}'')_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}}.$$

Pour $\mathfrak{H}_{\alpha} \in \mathfrak{J}$, posons $\mathfrak{S}_{\mathfrak{J}\alpha} = \varphi_{\alpha}(\mathfrak{S})$, où φ_{α} est l'homomorphisme de restriction à \mathfrak{H}_{α} (chap. III, 3); comme $\mathfrak{S} \subset A_{\mathfrak{J}}$, $\{\varphi_{\alpha}(\mathfrak{S}); \varphi_{\alpha\beta}\}$ est un système projectif, et il en est de même des algèbres engendrées, dans chaque $L(\mathfrak{H}_{\alpha})$, par $\varphi_{\alpha}(\mathfrak{S})$. Comme $1_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{S}$, ces algèbres sont unitaires, et leur adhérence faible, dans $L(\mathfrak{H}_{\alpha})$, donne $\mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}\alpha}$, bicommutant, dans $L(\mathfrak{H}_{\alpha})$, de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{J}\alpha}$ ([6], p. 44). Comme $\varphi_{\alpha\beta}$ est faiblement continu (chap. III, 3), $\{\mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}\alpha}\}$ est aussi un système projectif (cf. [3a], p. 54). On a

$$\mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}} = \varprojlim \mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}\alpha};$$

en effet, désignons encore par $\mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}\alpha}$ le commutant, dans $L(\mathfrak{H}_{\alpha})$, de $\mathfrak{S}_{\mathfrak{J}\alpha}$; alors:

a) $T = (T_{\alpha}) \in \varprojlim \mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}\alpha} \Rightarrow T \in \mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}}$.

Soit, en effet, $U \in \mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}} = \mathfrak{S}' \cap \xrightarrow{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}$; $U_{\alpha} \in \mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}\alpha}$, d'où $U_{\alpha} \perp T_{\alpha}$, et par conséquent $U \perp T$.

b) Soit $T \in \mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}}$; alors $T_{\alpha} = T|_{\mathfrak{H}_{\alpha}} \in \mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}\alpha}$, car si $U_{\alpha} \in \mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}\alpha}$,

$$U = U_{\alpha} \circ p_{\alpha} \in \mathfrak{S}' \cap L(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}},$$

et, par conséquent $U \perp T$, et, sur \mathfrak{H}_{α} , $U_{\alpha} \perp T_{\alpha}$, cqfd.

Enfin, remarquons que $\varphi_{\alpha}(\mathfrak{S}'') = \mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}\alpha}$, car si $T_{\alpha} \in \mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}\alpha}$, $T = T_{\alpha} \circ p_{\alpha} \in \mathfrak{S}'' \cap L(\mathfrak{H})$. En effet, si $U \in \mathfrak{S}' \cap L(\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}}$, alors $U_{\alpha} = U|_{\mathfrak{H}_{\alpha}} \in \mathfrak{S}'_{\mathfrak{J}\alpha}$, d'où $U_{\alpha} \perp T_{\alpha}$, donc $U \perp T$. Ainsi $U \in \mathfrak{S}'' \cap L(\mathfrak{H})$, et on a aussi $U \in \mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}}$; par conséquent,

$$\mathfrak{S}''_{\mathfrak{J}\alpha} = A_{\mathfrak{J}\alpha} = \varphi_{\alpha}(A_{\mathfrak{J}}).$$

On a ainsi démontré le théorème suivant:

Théorème 4. Soit A , une a.v.N. abélienne; avec les notations du théorème 3, on a

$$A = \varinjlim A_{\mathfrak{J}},$$

où

- i) $A_{\mathfrak{J}} = \varprojlim A_{\mathfrak{J}\alpha}$, $A_{\mathfrak{J}\alpha}$ étant une algèbre de von NEUMANN de $L(\mathfrak{H}_{\alpha})$.
- ii) $A_{\mathfrak{J}}$ peut être considérée comme une a.v.N. dans $\xrightarrow{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}$.
- iii) L'homomorphisme canonique $\varphi_{\alpha}: A_{\mathfrak{J}} \rightarrow A_{\mathfrak{J}\alpha}$ est surjectif.

Chap. VI Isomorphisme de GELFAND

1. Propositions et rappels préliminaires

Soient A, B , des \mathbb{C} -algèbres abéliennes et unitaires. Un *caractère* de A est un homomorphisme surjectif $\chi: A \longrightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$. Le noyau d'un tel homomorphisme est un idéal maximal strict de A . Désignons par Z_A (respectivement Z_B) l'ensemble des caractères de A (resp. de B), et par \mathfrak{M}_A (resp.: \mathfrak{M}_B) l'ensemble des idéaux maximaux stricts de A (resp.: de B). La correspondance

$$\chi \rightsquigarrow \text{noyau}(\chi)$$

est une injection de Z_A dans \mathfrak{M}_A . Soit, maintenant, φ , un homomorphisme surjectif

$$\varphi: B \longrightarrow A \rightarrow 0;$$

φ induit une application ψ

$$Z_B \xleftarrow{\psi} Z_A$$

définie par le schéma

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\varphi} & A \\ & \searrow \psi(\chi) & \downarrow \chi \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

Proposition 1. *Sous les conditions énoncées, ψ est injective.*

Démonstration. Soit $\bar{\psi}: \mathfrak{M}_A \rightarrow \mathfrak{M}_B$, définie par

$$\bar{\psi}: I \rightsquigarrow \varphi^{-1}(I);$$

on sait que cette application est injective, et on a le schéma commutatif suivant (avec abus de notation):

$$\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Z_A & \longrightarrow & \mathfrak{M}_A \\ & & \downarrow \psi & & \downarrow \bar{\psi} \\ 0 & \longrightarrow & Z_B & \longrightarrow & \mathfrak{M}_B, \end{array}$$

d'où il ressort que ψ est injective.

Soit maintenant \mathfrak{H}_β un espace de HILBERT, et $A_\beta \subset L(\mathfrak{H}_\beta)$, A_β étant une \ast -algèbre abélienne et unitaire, uniformément fermée dans $L(\mathfrak{H}_\beta)$. Ecrivons Z_β pour Z_{A_β} ; on sait (cf., par exemple, [11]) que:

- i) $\forall \chi_\beta \in Z_\beta$, χ_β est continu;
- ii) Z_β peut être muni d'une topologie (induite par la topologie du dual faible de l'espace de BANACH A_β) qui en fait un espace compact.
- iii) $K(Z_\beta)$ désignant l'algèbre des fonctions à valeurs complexes, définies et continues sur Z_β , on a un isomorphisme d'algèbres normées Γ_β :

$$A_\beta \xrightarrow{\Gamma_\beta} K(Z_\beta)$$

($f \in K(Z_\beta)$, $\|f\| = \sup \{|f(\zeta)|, \zeta \in Z_\beta\}$); Γ_β est l'isomorphisme de GELFAND; Z_β est appelé le *spectre* (de GELFAND) de A_β . On a

$$\Gamma_\beta(T_\beta): \chi_\beta \rightsquigarrow \chi_\beta(T_\beta).$$

Supposons en outre que \mathfrak{H}_α , sous-espace de \mathfrak{H}_β , réduit tout opérateur de A_β ; la correspondance $T_\beta \rightsquigarrow T_\beta|_{\mathfrak{H}_\alpha}$ définit un homomorphisme

$$L(\mathfrak{H}_\alpha) \xleftarrow{\varphi_{\alpha\beta}} A_\beta.$$

Soit A_α , la fermeture uniforme, dans $L(\mathfrak{H}_\alpha)$, de $\varphi_{\alpha\beta}(A_\beta)$, et soit Z_α , le spectre de A_α . $\varphi_{\alpha\beta}$ induit une application

$$\psi_{\beta\alpha}: Z_\alpha \longrightarrow Z_\beta$$

$$\chi_\alpha \rightsquigarrow \chi_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}.$$

On a:

Proposition 2. $\psi_{\beta\alpha}$ est une application injective.

Démonstration. $\chi_\alpha \in Z_\alpha \Rightarrow$ la restriction de χ_α à $\varphi_{\alpha\beta}(A_\beta)$ est un caractère de cette algèbre (car celle-ci contient l'élément unité de A_α). En vertu de la proposition 1,

$$\psi_{\beta\alpha}(\chi_\alpha) = \psi_{\beta\alpha}(\chi'_\alpha) \Rightarrow \chi_\alpha \text{ et } \chi'_\alpha \text{ coïncident sur } \varphi_{\alpha\beta}(A_\beta);$$

or $\chi_\alpha, \chi'_\alpha$ sont continus, et $\varphi_{\alpha\beta}(A_\beta)$ est dense dans A_α , d'où

$$\chi_\alpha = \chi'_\alpha.$$

Proposition 3. $\psi_{\beta\alpha}$ est une application continue.

Démonstration. $T_\alpha \in A_\alpha$, $t_\alpha: \chi_\alpha \rightsquigarrow \chi_\alpha(T_\alpha)$ définit une application de Z_α dans C , et la topologie sur Z_α est la topologie initiale définie par les applications t_α lorsque T_α parcourt A_α (cf. [3a], I, § 2, 3). La topologie sur Z_β est définie de la même manière par les applications $f_\beta: \chi_\beta \rightsquigarrow \chi_\beta(F_\beta)$, où F_β parcourt A_β . $\forall f_\beta, \exists t_\alpha$ - application associée à $T_\alpha = F_\beta| \mathfrak{H}_\alpha$ - telle qu'on ait:

$$\begin{array}{ccc} Z_\alpha & \xrightarrow{\psi_{\beta\alpha}} & Z_\beta \\ & \searrow t_\alpha & \downarrow f_\beta \\ & & C, \end{array}$$

d'où la continuité de $\psi_{\beta\alpha}$.

Corollaire. $\psi_{\beta\alpha}$ est un homéomorphisme de Z_α sur un sous-espace compact $\psi_{\beta\alpha}(Z_\alpha)$ de Z_β .

Ce corollaire résulte immédiatement des prop. 2 et 3 et des propriétés classiques des espaces compacts.

Toujours avec les mêmes notations et hypothèses, désignons par $\bar{\varphi}_{\alpha\beta}$ l'homomorphisme induit par $\psi_{\beta\alpha}; K(Z_\beta) \xrightarrow{\bar{\varphi}_{\alpha\beta}} K(Z_\alpha)$, défini par le schéma

$$\begin{array}{ccc} Z_\alpha & \xrightarrow{\psi_{\beta\alpha}} & Z_\beta \\ & \searrow h_\beta \circ \psi_{\beta\alpha} = \bar{\varphi}_{\alpha\beta}(h_\beta) & \downarrow h_\beta \\ & & C; \end{array}$$

Proposition 4. On a le schéma commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A_\alpha & \xleftarrow{\varphi_{\alpha\beta}} & A_\beta \\ \Gamma_\alpha \downarrow & & \downarrow \Gamma_\beta \\ K(Z_\alpha) & \xleftarrow{\bar{\varphi}_{\alpha\beta}} & K(Z_\beta). \end{array}$$

Démonstration. Pour T_β fixé et χ_α parcourant Z_α , on a

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_{\alpha\beta}(\Gamma_\beta(T_\beta))(\chi_\alpha) &= \Gamma_\beta(T_\beta)[\psi_{\beta\alpha}(\chi_\alpha)] = [\psi_{\beta\alpha}(\chi_\alpha)](T_\beta) = \chi_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}(T_\beta) = \\ &= \Gamma_\alpha(\varphi_{\alpha\beta}(T_\beta))(\chi_\alpha). \end{aligned}$$

Ainsi

$$\bar{\varphi}_{\alpha\beta} \circ \Gamma_\beta = \Gamma_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}, \quad \text{cqfd.}$$

Corollaire. $\varphi_{\alpha\beta}(A_\beta) = A_\alpha$.

En effet, il suffit de remarquer que $\overline{\varphi}_{\alpha\beta}$ est surjectif, d'où résultera – à cause du diagramme de la prop. 4, que $\varphi_{\alpha\beta}$ est aussi surjectif. Or $\psi_{\beta\alpha}$ identifie Z_α à un sous-espace compact de Z_β ; une fonction continue, définie sur $\psi_{\beta\alpha}(Z_\alpha)$, se prolonge alors en une fonction continue sur Z_β (propriété classique des espaces compacts). Donc $\overline{\varphi}_{\alpha\beta}$ est surjectif.

2. Spectre de $A \subset \varinjlim L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$

Soit $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}_{\alpha \in J}$, un système inductif de sous-espaces de \mathfrak{H} , et considérons, sur $\varinjlim L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$, la topologie uniforme (cf. chap. III, 2 et 3). Soit A , une sous algèbre de $\varinjlim L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$, \ast -abélienne unitaire et fermée; les notations étant celles introduites au chap. III, on a :

Théorème 5. $A = \varprojlim A_\alpha$ où :

- i) A_α est une \ast -algèbre abélienne unitaire, contenue et uniformément fermée dans $L(\mathfrak{H}_\alpha)$;
- ii) $\alpha < \beta \Rightarrow$ l'homomorphisme $\varphi_{\alpha\beta} (\varphi_{\alpha\beta} : T_\beta \rightsquigarrow T_\beta|_{\mathfrak{H}_\alpha})$ est surjectif;
- iii) $\varphi_\alpha(A)$ est dense dans A_α .

Démonstration. Posons $A_\alpha =$ adhérence uniforme de $\varphi_\alpha(A)$ (dans $L(\mathfrak{H}_\alpha)$); les algèbres A_α forment un système projectif d'algèbres d'opérateurs bornés, et on a

$$A = \varprojlim A_\alpha$$

(cf. [3a], p. 54, coroll. de la prop. 9).

$\varphi_\alpha(A)$ est évidemment abélienne et unitaire, \ast -stable en vertu de la prop. 3 du chap. II. Ces propriétés sont conservées par passage à l'adhérence uniforme, ce qui démontre les points i) et iii). Le point ii) résulte du corollaire de la proposition 4 ci-dessus, cqfd.

Soit alors Z_α le spectre de A_α , et, pour $\alpha < \beta$, $\psi_{\beta\alpha} : Z_\alpha \rightarrow Z_\beta$, l'application définie au no précédent: $\{Z_\alpha, \psi_{\beta\alpha}\}$ est un système inductif d'espaces compacts.

Soit $Z = \varinjlim Z_\alpha$, munie de la topologie finale relative aux applications canoniques ψ_α (cf. [3a], § 2, 4):

$$\psi_\alpha : Z_\alpha \rightarrow Z;$$

Z est le spectre de A . Remarquons que, $\psi_{\beta\alpha}$ étant injective, il en est de même de ψ_α .

Proposition 5. Z est l'ensemble des caractères continus de A .

Démonstration. a) soit $T = (T_\alpha) \in \varprojlim A_\alpha$, et soit $\chi \in Z$: $\exists \alpha$ tel que $\chi = \psi_\alpha(\chi_\alpha)$, où $\chi_\alpha \in Z_\alpha$. Posons

$$\chi(T) = \chi_\alpha(T_\alpha);$$

pour $\alpha < \beta$, on a

$$\psi_{\beta\alpha}(\chi_\alpha) : T_\beta \rightsquigarrow \chi_\alpha(\varphi_{\alpha\beta}(T_\beta)) = \chi_\alpha(T_\alpha).$$

Ainsi $\chi(T)$ ne dépend pas de α ; en outre, $\chi = \chi_\alpha \circ \varphi_\alpha$, d'où la continuité de χ . Enfin, $\text{Im}(\varphi_\alpha)$ étant dense dans A_α , on a:

$$\chi_\alpha \in Z_\alpha, \chi'_\alpha \in Z_\alpha, \chi_\alpha \neq \chi'_\alpha \Rightarrow \chi_\alpha \circ \varphi_\alpha \neq \chi'_\alpha \circ \varphi_\alpha.$$

b) Réciproquement, on va montrer que, pour tout caractère continu χ de A , $\exists \alpha$ et $\chi_\alpha \in Z_\alpha$, tels que χ se factorise en $\chi_\alpha \circ \varphi_\alpha$. Pour cela, montrons d'abord deux lemmes:

Lemme 1. Soit A , une algèbre munie d'une topologie pour laquelle la multiplication soit séparément continue; soit B , une sous-algèbre dense de A . Si I est un idéal de B , alors son adhérence \overline{I} dans A est un idéal de A .

Démonstration. Si $x_0 \in I$, l'application $f: x \rightsquigarrow x x_0$ de A dans A est continue par hypothèse, et $f(B) \subset I$. Alors, par continuité de f , $f(\overline{B}) = f(A) \subset \overline{I}$; soit maintenant $a \in A$, a fixé; l'application $g: x \rightsquigarrow a x$, de A dans A , envoie I dans \overline{I} , en vertu de ce qui précède; on a donc aussi, par continuité de g , $g(\overline{I}) \subset \overline{I}$, cqfd.

Lemme 2. A, B étant deux algèbres, et φ , un homomorphisme surjectif de A sur B , si M est un idéal de A , $\varphi(M)$ est un idéal de B .

Démonstration. En effet, $\varphi(M)$ est un sous-module de B , et si $b, b' \in B$, avec $b \in \varphi(M)$, et si $a \in \varphi^{-1}(b)$ et $a' \in \varphi^{-1}(b')$, on a $aa' \in M$ et $bb' = \varphi(aa') \in \varphi(M)$, cqfd.

Soit alors $\chi: A \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow 0$, χ étant un caractère continu de A ; $M = \text{Ker}(\chi)$ - noyau de χ - est un idéal maximal fermé strict de A . Alors, en vertu des deux lemmes et du théorème 5, $\forall \alpha$, $M_\alpha = \text{adh } \varphi_\alpha(M)$ est un idéal de A_α ; de plus, M étant fermé, on a

$$M = \varprojlim M_\alpha \quad ([3a], \text{ p. 54}).$$

M idéal strict $\Rightarrow 1_{\mathfrak{S}} \notin M$, donc $\exists \alpha$ tel que $1_{\mathfrak{S}_\alpha} \notin M_\alpha$. \exists un idéal maximal strict N_α tel que $M_\alpha \subset N_\alpha$ (théorème de KRULL): N_α définit un caractère continu $\chi_\alpha \in Z_\alpha$, et $\chi = \chi_\alpha \circ \varphi_\alpha$, en effet, par construction, $M \subseteq \text{Ker}(\chi_\alpha \circ \varphi_\alpha)$, et $\chi_\alpha \circ \varphi_\alpha(1_{\mathfrak{S}}) = 1$. $\text{Ker}(\chi_\alpha \circ \varphi_\alpha)$ est donc un idéal strict, et M étant maximal, il ne peut y avoir qu'égalité. La proposition 5 est ainsi démontrée.

3. Isomorphisme de GELFAND, Γ

Nous prolongeons ici la notion d'isomorphisme de GELFAND rappelée au début de ce chapitre.

On a défini au no 1 l'homomorphisme

$$K(Z_\alpha) \xleftarrow{\bar{\varphi}_{\alpha\beta}} K(Z_\beta);$$

$\{K(Z_\alpha); \bar{\varphi}_{\alpha\beta}\}$ constitue un système projectif d'algèbres; posons

$$K(Z) = \varprojlim K(Z_\alpha).$$

Théorème 6. i) \exists un isomorphisme d'algèbres, continu et bijectif

$$\Gamma: A \rightarrow K(Z);$$

ii) $K(Z)$ s'identifie à l'algèbre des fonctions continues définies sur Z et à valeurs complexes;

iii) tout caractère continu z de A est de la forme

$$z: F \rightsquigarrow \Gamma(F)(z).$$

Démonstration. En vertu de la proposition 4, $\{\Gamma_\alpha\}$ est un système projectif d'isomorphismes bijectifs et continus, d'où $\Gamma = \varprojlim \Gamma_\alpha$ satisfait à i).

Soit alors $(h_\alpha) \in \varprojlim K(Z_\alpha)$; (h_α) est un système inductif d'applications continues, à valeurs complexes, définies sur le système inductif $\{Z_\alpha\}$, et $h = \varinjlim h_\alpha$ est une fonction continue sur Z ([3a], I, § 2, 4).

Inversément, si h est une fonction continue, définie sur Z et à valeurs complexes, $(h_\alpha) = (h \circ \varphi_\alpha) \in \varprojlim K(Z_\alpha)$, ce qui démontre ii).

$$z_\alpha \in Z_\alpha, F_\alpha \in A_\alpha \Rightarrow z_\alpha(F_\alpha) = \Gamma_\alpha(F_\alpha)(z_\alpha),$$

comme rappelé au no 1. Si donc $z \in Z$, $\exists \alpha$ et $z_\alpha \in Z_\alpha$, avec:

a) $F = (F_\alpha) \in A$, $z(F) = z_\alpha(F_\alpha)$ (prop. 5);

b) $\lim_{\leftarrow} \Gamma_\alpha = \Gamma: F \rightsquigarrow (\Gamma_\alpha(F_\alpha))$;

d'où

$$\Gamma_\alpha(F_\alpha)(z_\alpha) = z(F) = \Gamma(F)(z).$$

Le théorème est ainsi démontré.

Corollaire. Z est un espace séparé.

Démonstration. $z \neq z' \Leftrightarrow \exists F \in A$, avec $z(F) \neq z'(F)$; la fonction $\Gamma(F)$ prend alors des valeurs distinctes en z et z' , cqfd.

4. Cas où $\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}$ est A -complète

Définition 1. La famille \mathfrak{J} des nos 2 et 3 est dite A -complète si

$$\left. \begin{array}{l} \mathfrak{H}_{\alpha'} \subset \mathfrak{H}_\alpha \text{ pour un indice } \alpha \\ p_{\alpha'} \circ T \subset T \circ p_{\alpha'}, \forall T \in A \end{array} \right\} \Rightarrow \mathfrak{H}_{\alpha'} \in \mathfrak{J}.$$

Sous les conditions du no 2 ($A \subset \overrightarrow{L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}}$), on peut toujours compléter la famille \mathfrak{J} en lui adjoignant les $\mathfrak{H}_{\alpha'}$ jouissant des propriétés:

i) $\exists \alpha \in J$ tel que $\mathfrak{H}_{\alpha'} \subset \mathfrak{H}_\alpha$;

ii) $\mathfrak{H}_{\alpha'}$ réduit T , $\forall T \in A$.

Nous supposons, dans ce no 4, que \mathfrak{J} est A -complète. Alors

$$\alpha < \beta \Rightarrow \mathfrak{H}_{\alpha'} = \mathfrak{H}_\alpha^\perp \cap \mathfrak{H}_\beta \in \mathfrak{J}.$$

Avec les notations introduites au no 2, on a:

Proposition 7. i) $A_\beta \subset A_\alpha \oplus A_{\alpha'}$;

ii) $Z_\beta = Z_\alpha \cup Z_{\alpha'}$,

où on identifie Z_α (resp.: $Z_{\alpha'}$) à $\psi_{\beta\alpha}(Z_\alpha)$ (resp.: $\psi_{\beta\alpha'}(Z_{\alpha'})$).

Démonstration. Le point i) est immédiat, car $T_\beta \in A_\beta$, et $\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_{\alpha'}$ réduisant T_β , on a $T_\beta = T_\beta|_{\mathfrak{H}_\alpha} \oplus T_\beta|_{\mathfrak{H}_{\alpha'}}$.

Pour le point ii), on sait déjà que $Z_\alpha \cup Z_{\alpha'} \subset Z_\beta$. Soit alors $\chi_\beta \in Z_\beta$, avec $N_\beta = \text{Ker}(\chi_\beta)$. $\varphi_{\alpha\beta}$ et $\varphi_{\alpha'\beta}$ étant surjectifs, $N_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}(N_\beta)$ et $N_{\alpha'} = \varphi_{\alpha'\beta}(N_\beta)$ sont des idéaux de A_α et $A_{\alpha'}$; $1_{\mathfrak{H}_\beta} \notin N_\beta \Rightarrow$ l'un des deux idéaux

$N_\alpha, N_{\alpha'}$ est strict – sinon il existerait $T_\beta \in N_\beta$, tel que $T_\beta | \mathfrak{H}_\alpha = 1_{\mathfrak{H}_\alpha}$, et $S_\beta \in N_\beta$, tel que $S_\beta | \mathfrak{H}_{\alpha'} = 1_{\mathfrak{H}_{\alpha'}}$, d'où $T_\beta + S_\beta - T_\beta S_\beta = 1_{\mathfrak{H}_\beta} \in N_\beta$. Supposons N_α strict: \exists un idéal maximal M_α de A_α contenant N_α (théorème de KRULL). M_α définit un caractère continu χ_α , et $\chi_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}(1_{\mathfrak{H}_\beta}) = 1$, ce qui entraîne que $\chi_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}$ est un caractère de A_β . Par construction, $\text{Ker}(\chi_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}) \supseteq N_\beta$; N_β étant maximal, l'égalité est seule possible, d'où $\chi_\beta = \chi_\alpha \circ \varphi_{\alpha\beta}$, cqfd.

Remarque. Le spectre Z défini au no 3 dépend de la famille \mathfrak{J} . Toutefois, si A est fermée dans $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}}$, il en est encore de même dans $L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}'}$ pour toute famille \mathfrak{J}' telle que $\mathfrak{J}' \supset \mathfrak{J}$, et $A \subset L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}'}$. Il est facile de voir qu'il existe une famille maximale \mathfrak{J}_m telle que $A \subset L(\mathfrak{H})_{\mathfrak{J}} \Rightarrow \mathfrak{J}_m \supset \mathfrak{J}$. Il semblerait naturel de définir le spectre de A relativement à cette famille \mathfrak{J}_m . En particulier, si $A \subset L(\mathfrak{H})$, on retrouverait ainsi le spectre usuel.

5. Prolongement de l'isomorphisme Γ

Rappelons que, $\forall (x_\alpha, y_\alpha) \in \mathfrak{H}_\alpha \times \mathfrak{H}_\alpha$, on peut définir sur Z_α une mesure spectrale $\nu_{x_\alpha y_\alpha}$ définie ainsi:

$$h_\alpha \in K(Z_\alpha), \text{ avec } h_\alpha = \Gamma_\alpha(H_\alpha) \Rightarrow \nu_{x_\alpha y_\alpha}(h_\alpha) = (H_\alpha x_\alpha | y_\alpha).$$

(cf. par exemple, [6], appendice I, ou [11]).

Désignons par $B(Z_\alpha)$ l'algèbre des fonctions à valeurs complexes définies et bornées sur Z_α , et mesurables pour toute mesure spectrale $\nu_{x_\alpha y_\alpha}$; il existe une application Φ_α :

$$L(\mathfrak{H}_\alpha) \xleftarrow{\Phi_\alpha} B(Z_\alpha)$$

jouissant des propriétés suivantes:

- i) $\Phi_\alpha | K(Z_\alpha) = \Gamma_\alpha^{-1}$;
- ii) $h_\alpha \in B(Z_\alpha), H_\alpha = \Phi_\alpha(h_\alpha) \Rightarrow \nu_{x_\alpha y_\alpha}(h_\alpha) = (H_\alpha x_\alpha | y_\alpha)$;
- iii) $\mathfrak{U}_\alpha = \Phi_\alpha(B(Z_\alpha)) \subset A_\alpha''$ (bicommutant de A_α dans $L(\mathfrak{H}_\alpha)$, comme plus haut).

En outre, Φ_α est un homomorphisme d'algèbres, continu pour la topologie normique sur $B(Z_\alpha)$ et \mathfrak{U}_α . N_α , noyau de Φ_α , est l'ensemble des fonctions négligeables pour toute mesure spectrale.

Soient maintenant $\mathfrak{H}_\alpha, \mathfrak{H}_\beta \in \mathfrak{J}$, avec $\alpha < \beta$; l'injection

$$\psi_{\beta\alpha}: Z_\alpha \rightarrow Z_\beta$$

est une application propre (application continue d'un compact dans un compact) et on peut définir l'image $\psi_{\beta\alpha}(\nu_{x_\alpha y_\alpha})$ de la mesure spectrale $\nu_{x_\alpha y_\alpha}$ ([4b], p. 74). Désignons encore par $g_{\beta\alpha}$ l'injection naturelle de \mathfrak{H}_α dans \mathfrak{H}_β , et soit $h_\beta \in K(Z_\beta)$, avec $h_\beta = \Gamma_\beta(H_\beta)$; on aura:

$$\nu_{g_{\beta\alpha} x_\alpha g_{\beta\alpha} y_\alpha}(h_\beta) = (H_\beta g_{\beta\alpha} x_\alpha | g_{\beta\alpha} y_\alpha) = (H_\alpha x_\alpha | y_\alpha),$$

d'où

$$\nu_{g_{\beta\alpha} x_\alpha g_{\beta\alpha} y_\alpha}(h_\beta) = \nu_{x_\alpha y_\alpha} \bar{\varphi}_{\alpha\beta}(h_\beta) = \nu_{x_\alpha y_\alpha}(h_\beta \circ \psi_{\beta\alpha}) = \psi_{\beta\alpha}(\nu_{x_\alpha y_\alpha})(h_\beta)$$

et $\psi_{\beta\alpha}(\nu_{x_\alpha y_\alpha})$ est encore une mesure spectrale sur Z_β .

En vertu des propriétés de l'image d'une mesure, on a alors le schéma commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & N_\beta & \longrightarrow & B(Z_\beta) & \xrightarrow{\Phi_\beta} & \mathfrak{A}_\beta \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \bar{\varphi}_{\alpha\beta} & & \downarrow \bar{\varphi}_{\alpha\beta} & & \downarrow \eta_{\alpha\beta} \\ 0 & \longrightarrow & N_\alpha & \longrightarrow & B(Z_\alpha) & \xrightarrow{\Phi_\alpha} & \mathfrak{A}_\alpha \longrightarrow 0, \end{array}$$

où $\eta_{\alpha\beta}$ est défini par exactitude. Lorsque α parcourt J , on a un système projectif de suites exactes, d'où

$$0 \longrightarrow \varprojlim N_\alpha \longrightarrow \varprojlim B(Z_\alpha) \xrightarrow{\Phi} \varprojlim \mathfrak{A}_\alpha,$$

avec $\Phi|K(Z) = \Gamma^{-1}$. On posera $B(Z) = \varprojlim B(Z_\alpha)$.

Remarque. Nous laissons de côté ici l'étude des conditions pour que Φ soit surjectif.

6. Spectre d'un opérateur auto-adjoint T

Soit \mathfrak{S} l'ensemble des projecteurs de $\{T\}''$, et $\{p_\alpha\}$, la (nb) -famille totale de projecteurs de T , c'est-à-dire la sous-famille de \mathfrak{S} correspondant à des sous-espaces qui réduisent T en borné (cf. remarque de chap. V, 1); posons

$\mathfrak{J} = \{p_\alpha(\mathfrak{H})\} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}$. Nous munissons $\underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}}$ de la topologie uniforme (cf. chap. III).

Soit A , la fermeture, dans $\underline{\mathfrak{L}(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}}$, de l'algèbre engendrée par T :

$$A = \varprojlim A_\alpha,$$

où A_α est l'algèbre uniformément fermée engendrée par T_α dans $L(\mathfrak{H}_\alpha)$. Remarquons que si T est borné, $\{\mathfrak{H}\} \subset \mathfrak{J}$, et $\{\mathfrak{H}\}$ est une sous-famille cofinale, d'où $\underline{L(\mathfrak{H})}_{\mathfrak{J}} \subset L(\mathfrak{H})$; ce qui suit se ramène, dans ce cas, à la théorie classique.

On appellera spectre de T le spectre de A :

$$Z = \varinjlim Z_\alpha;$$

il est immédiat que Z_α est le spectre de T_α , et s'identifie canoniquement à un compact de la droite réelle R (les résultats utilisés ici de la théorie de GELFAND pour un opérateur borné se trouvent exposés dans [11]). Nous supposons donc $Z_\alpha \subset R$. Pour $\lambda \in R$, la fonction caractéristique de $] \leftarrow, \lambda] \cap Z_\alpha$ est mesurable pour toute mesure spectrale, et il lui correspond un projecteur $E_\alpha^{(\lambda)} \in \mathfrak{A}_\alpha$; pour α fixé, la famille $\{E_\alpha^{(\lambda)}\}_{\lambda \in R}$ n'est autre que la famille spectrale classique de T_α .

Si $\alpha < \beta$, on a $Z_\alpha \subset Z_\beta$, d'où $(] \leftarrow, \lambda] \cap Z_\beta) \cap Z_\alpha =] \leftarrow, \lambda] \cap Z_\alpha$. Il en résulte que la fonction caractéristique de $] \leftarrow, \lambda] \cap Z_\beta$, restreinte à Z_α , est la fonction caractéristique de $] \leftarrow, \lambda] \cap Z_\alpha$, d'où

$$E_\beta^{(\lambda)}|_{\mathfrak{H}_\alpha} = E_\alpha^{(\lambda)};$$

alors

$$E_\lambda = (E_\alpha^{(\lambda)}) \in \Phi(B(Z)).$$

Pour λ parcourant R , $\{E_\lambda\}$ est la famille spectrale classique de T ([10], pp. 312 et ss.).

Remarquons que $E_\lambda \in [\{T\}' \cap L(\mathfrak{H})]' = \{T\}''$, donc $\{E_\lambda\} \subset \mathfrak{S}$.

Proposition 8. *Pour tout entier naturel n , soit $p_n = E_n - E_{-n}$; $\{p_n(\mathfrak{H})\}_{n \in N}$ est une sous-famille cofinale de \mathfrak{J} .*

Démonstration. Z_α étant compact, $\exists n \in N$, tel que $Z_\alpha \subset I_n$ (où I_n désigne le segment $[-n, n]$), l'inclusion pouvant être supposée stricte. Alors $E_\alpha^{(-n)} = 0_{\mathfrak{H}_\alpha}$, et $E_\alpha^{(n)} = 1_{\mathfrak{H}_\alpha}$. Ainsi $p_n p_\alpha = p_\alpha$. D'autre part, $p_n(\mathfrak{H}) \in \mathfrak{J}$ (cf.: [10], p. 314), cqfd.

On remarquera encore que $Z_n \subset [-n, n]$, et que pour $m > n$, $Z_m \cap I_n = Z_n$, ce qui découle de la théorie classique. Alors

$$Z = \varinjlim Z_n ;$$

en effet, on a une bijection canonique d'ensembles

$$\varinjlim Z_n \longrightarrow \varinjlim Z_\alpha ,$$

qui est continue. Montrons que c'est aussi une application fermée: A fermé dans $\varinjlim Z_n \iff A \cap Z_n$ fermé pour tout n ; alors $A \cap Z_\alpha = (A \cap Z_n) \cap Z_\alpha$, pour n assez grand, est un fermé de Z_α , sous-espace de Z_n , cqfd.

Proposition 9. $Z = \varinjlim Z_n$ s'identifie à un sous-espace de R .

Démonstration. Comme $\cup \text{intérieur}(I_n)$ est un recouvrement de R , il est immédiat que $R = \varinjlim I_n$. Il suffit donc de montrer que l'injection continue

$$Z = \varinjlim Z_n \longrightarrow \varinjlim I_n$$

est fermée. Or $F \subset Z \implies F \cap I_n = F \cap Z_n$, et Z_n étant fermé dans I_n , on a $F \cap Z_n$ fermé dans Z_n si et seulement si $F \cap Z_n$ est fermé dans I_n , cqfd.

Introduction des symboles

$\mathfrak{J} = \{\mathfrak{H}_\alpha\}_{\alpha \in J}; \varinjlim \mathfrak{H}_\alpha$	p. 283	$S \smile T, T \smile B$	p. 297
$\mathfrak{H}_\alpha \smile \mathfrak{H}_\beta$	288	Z	316
$L(\mathfrak{H})$	291	$K(Z), \Gamma$	318
$\varinjlim A_\alpha$	292	Φ	321
$\varinjlim L(\mathfrak{H})_\mathfrak{J}, L_\alpha$	294	$B(Z)$	321

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BADER R., MARTIN F.: *Extensions de certaines algèbres*. Institut de l'Université de Neuchâtel, 1961/62.
- [2] BOURBAKI N.: *Théorie des ensembles*. Chap. 3, Act. Sc. Ind. no 1243, Paris, Hermann, 1956.
- [3a] BOURBAKI N.: *Topologie générale*. Chap. 1 et 2, 3e édition, Act. Sc. Ind. no 1142, Paris, Hermann, 1961.
- [3b] BOURBAKI N.: *Topologie générale*. Chap. 9, Act. Sc. Ind. no 1045, Paris, Hermann, 1948.
- [3c] BOURBAKI N.: *Topologie générale*. Chap. 10, Act. Sc. Ind. no 1084, Paris, Hermann, 1961.
- [3d] BOURBAKI N.: *Topologie générale*. Résultats, Act. Sc. Ind. no 1196, Paris, Hermann, 1953.
- [4a] BOURBAKI N.: *Intégration*. Act. Sc. Ind. no 1175, Paris, Hermann, 1952.
- [4b] BOURBAKI N.: *Intégration des mesures*. Act. Sc. Ind. no 1244, Paris, Hermann, 1956.
- [4c] BOURBAKI N.: *Intégration vectorielle*. Act. Sc. Ind. no 1281, Paris, Hermann, 1959.
- [5a] BOURBAKI N.: *Espaces vectoriels topologiques*. Résultats, Act. Sc. Ind. no 1230, Paris, Hermann, 1955.
- [5b] BOURBAKI N.: *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. 1 et 2, Act. Sc. Ind. no 1189, Paris, Hermann, 1953.
- [5c] BOURBAKI N.: *Espaces vectoriels topologiques*. Chap. 3, Act. Sc. Ind. no 1229, Paris, Hermann, 1955.
- [6] DIXMIER J.: *Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien*. Paris, Gauthier-Villars, 1957.
- [7] DIXMIER J.: *Sur certains espaces considérés par M. H. Stone*. Summa Brasil. Math. t. 2, fasc. 11, 1951, pp. 151 et ss.
- [8] FELL J. M. G., KELLEY J. L.: *Algebra of unbounded operators*. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 38, 1952, pp. 592 et ss.
- [9] HALMOS P. R.: *Measure theory*. New-York, van Nostrand, 1950.
- [10] RIESZ F., SZ.-NAGY B.: *Leçons d'analyse fonctionnelle*. Académie des Sciences de Hongrie, 1955, 3e édition.
- [11] Séminaire DE RHAM G., exposés de BADER R., Université de Lausanne, 1962/63.
- [12] SZ.-NAGY B.: *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes*. Ergebnisse d. Math. V, 5, Berlin 1942.
- [13] TAYLOR A. E.: *Introduction to functional analysis*. New York, Wiley, 1958.

(Reçu le 13 juillet 1965)