

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 40 (1965-1966)

**Artikel:** Deux théorèmes sur les groupes stochastiques compacts.  
**Autor:** Carnal, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-30637>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 06.12.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Deux théorèmes sur les groupes stochastiques compacts

H. CARNAL

## § 1. Introduction et résultats

Dans un précédent article [1], nous avons défini, sur un groupe compact  $\Gamma$ , le générateur infinitésimal d'un semigroupe continu de mesures gaussiennes en caractérisant algébriquement les propriétés des fonctionnelles correspondant aux termes  $i\gamma t$  et  $-\sigma^2 t$  dans la formule de LÉVY-CHINTCHINE. Nous nous proposons ici de trouver l'équivalent de cette formule classique pour le groupe  $\Gamma$ . La difficulté principale réside dans la définition, pour  $x \in \Gamma$  et pour une combinaison linéaire  $f$  de coefficients de représentations unitaires de  $\Gamma$ , c'est-à-dire sur l'espace  $\Gamma \times \mathfrak{F}(\Gamma)$ , d'une fonction  $g(x, f)$  correspondant au terme  $\frac{itx}{1+x^2}$  sous l'intégrale de LÉVY-CHINTCHINE ou, plus généralement, au terme  $\sum x_i D_i f$  dans la formule de HUNT [2] valable sur les groupes de LIE. Si, pour une représentation unitaire  $M$  de  $\Gamma$ ,  $M \in \mathfrak{M}(\Gamma)$ , nous définissons encore  $g(x, M) = (g(x, m_{ij}))$ , nous devons avoir les propriétés :

- a)  $g(x, f)$  est continue en  $x$ .
- b)  $g$  linéaire en  $f$ ;  
 $g(x, \overline{f}) = \overline{g(x, f)}$ ;  
 $g(x, f_1 f_2) = f_1(e)g(x, f_2) + f_2(e)g(x, f_1)$ .
- c)  $g(x, M) = \log M(x)$  pour tout  $x$  compris dans un voisinage  $U_M$  de l'unité  $e$ .

Nous prouverons au paragraphe 2 l'existence d'une telle fonction et, au paragraphe 3, 1e

**Théorème 1.** Soit  $\{\mu_t; t > 0\}$  un semi-groupe continu de mesures de probabilité sur  $\Gamma$ :  $\mu_s \mu_t = \mu_{s+t}$ ,  $\mu_t \xrightarrow[t \downarrow 0]{} \delta_e$ . Le générateur du semi-groupe

$$A(M) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{1}{t} \left\{ \int_{\Gamma} M(x) d\mu_t(x) - E_m \right\}$$

est alors donné par

$$A(M) = B(M) + G(M) + \int_{\Gamma-e} (M(x) - E_m - g(x, M)) dF(x). \quad (1.1)$$

*Inversément, toute fonctionnelle de cette forme est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de mesures de probabilité.*

Dans (1.1),  $B$  et  $G$  sont des fonctionnelles linéaires sur  $\mathfrak{F}(\Gamma)$  ayant les propriétés (4.1.5) à (4.1.9) de [1] et  $F$  est une mesure positive sur  $\Gamma - e$  telle que l'intégrale existe et soit finie:

1.  $F$  est définie au moins pour les réunions et intersections finies d'ensembles de la forme

$$\{x: M(x) \in B, B \text{ ensemble borélien de } U(m) - E_m; m = \text{degré de } M\}.$$

$$2. \quad \int_{\Gamma-e} (ReTr M(x) - m) dF(x) > -\infty.$$

On peut étendre  $F$  aux ensembles boréliens de  $\Gamma$  ne coupant pas un certain voisinage de  $e$ .  $G$  et  $F$  sont univoquement déterminés par le semi-groupe alors que  $B$  dépend du  $g(x, M)$  choisi.

Dans le dernier paragraphe, nous examinerons les séquences infinitésimales de mesures de probabilité:

$$\{\mu_{nk}, 1 \leq k \leq k_n, \min_{1 \leq k \leq k_n} \mu_{nk}(U(e)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1\}$$

sur  $\Gamma$ . Il est bien connu que, sur la droite réelle, les mesures  $\mu_n = \prod_{k=1}^{k_n} \mu_{nk}$  ne peuvent converger que vers des mesures indéfiniment divisibles. Le même résultat a été obtenu pour des groupes abéliens localement compacts [3]. Lorsque le groupe n'est pas abélien, une restriction s'impose immédiatement: il faut que les mesures d'une même ligne commutent. Jusqu'à présent, toutefois, le théorème n'a pas pu être prouvé sous cette seule condition. Pour des groupes de LIE, WEHN [4], par exemple, exige de très fortes restrictions relatives aux moments du premier et du second ordre. Cependant, pour des groupes compacts généraux, nous prouverons ici le

**Théorème 2.** *Soit  $\{\mu_{nk}\}$  une séquence infinitésimale sur  $\Gamma$  telle que  $\mu_{nj} * \mu_{nk} = \mu_{nk} * \mu_{nj}$  ( $1 \leq j, k \leq k_n$ ) et  $\mu_n = \mu_{n1} * \mu_{n2} * \dots * \mu_{nk}$ . Si  $\mu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu$ ,  $\mu$  est indéfiniment divisible.*

Il ne nous a pas été possible de généraliser la démonstration classique de ce théorème. En effet, le procédé consiste à effectuer d'abord une translation des  $\mu_{nk}$ , ce qui ferait perdre la propriété de commutativité. Les conditions de WEHN permettent précisément d'éviter cette translation. Notre démonstration, qui peut aisément s'appliquer au cas classique, a l'avantage d'être plus directe

que la preuve habituelle. En revanche, elle ne permet pas de donner de conditions pour la convergence vers une limite particulière. Nous tenons à remercier ici M. J.-J. LOEFFEL qui nous a apporté la démonstration du lemme 2, clé du § 4.

## § 2. La fonction $g(x, M)$

Nous considérerons ici  $\Gamma$  comme la limite d'une suite transfinie de groupes compacts  $\Gamma_\alpha$ , les premiers étant des groupes de LIE. Nous définirons la fonction  $g$  par induction sur  $\alpha$ . Nous remarquerons d'abord que b) est équivalent à

b') Il existe un sous-groupe à un paramètre  $\{\xi_t(x), -\infty < t < \infty\}$  tel que  $M(\xi_t(x)) = \exp tg(x, M)$ .

En effet, le théorème 9 de [1] assure l'existence, pour  $t > 0$ , d'un semi-groupe ayant  $g(x, M)$  comme générateur infinitésimal et l'on voit immédiatement que les mesures de ce semi-groupe sont dégénérées,  $g(x, M)$  étant anti-hermitien et, par conséquent,  $\exp tg$  unitaire.

La condition c) est équivalent à

c') Si  $\varphi$  est un homomorphisme de  $\Gamma$  sur un groupe de LIE  $L$ , le sous-groupe  $\{\varphi\xi_t(x)\}$  est, pour  $x$  compris dans un voisinage de l'unité, le sous-groupe canoniquement associé à  $\varphi x$ . Il suffit, pour s'en rendre compte, de considérer une représentation fidèle  $N$  de  $L$  et la représentation  $N\varphi$  de  $\Gamma$ .

**Lemme 1.** Soit  $\Sigma_1$  un produit direct de groupes de matrices unitaires et  $\Sigma_2$  le produit direct de  $\Sigma_1$  par un groupe de matrices unitaires  $U$ . Soit  $G$  un sous-groupe fermé de  $\Sigma_2$ ,  $\varphi$  l'homomorphisme de projection de  $\Sigma_2$  sur  $\Sigma_1$  et  $H = \varphi G$ . Si  $h(y, N)$ , satisfaisant a), b) et c), est définie sur  $H \times \mathfrak{M}(H)$ , on peut définir une fonction analogue  $g(x, M)$  sur  $G \times \mathfrak{M}(G)$  telle que  $g(x, N\varphi) = h(\varphi x, N)$ .

**Démonstration.** Soit  $\psi$  l'homomorphisme de projection de  $\Sigma_2$  sur  $U$ ,  $R = \psi G$ ,  $P$  le noyau de  $\varphi$  dans  $G$  et  $Q$  celui de  $\psi$  dans  $G$ . On a naturellement  $P \cap Q = \{e\}$  dans  $G$  et, par conséquent,  $PQ \cong P \times Q$ . La projection de  $P$  par  $\psi$  est un sous-groupe invariant  $P' \cong P$  de  $R$  et celle de  $Q$  par  $\varphi$  un sous-groupe invariant  $Q' \cong Q$  de  $H$ . Soit encore  $S = G/PQ = R/P' = H/Q'$ ,  $\varphi'$  l'homomorphisme canonique de  $R$  sur  $S$  et  $\psi'$  celui de  $H$  sur  $S$ .

$R$  et  $S$  sont évidemment des groupes de LIE. Nous introduirons sur  $S$  des



coordonnées  $s_i(\sigma)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , continues et canoniques dans un voisinage  $W_1$  de l'unité  $e_1$ . Il est alors possible d'introduire sur  $R$  des coordonnées  $r_i(\varrho)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k + l$ , continues, canoniques dans un voisinage  $W_2 \subset \varphi'^{-1}(W_1)$  de l'unité  $e_2$  et telles que  $r_i(\varrho) = s_i(\varphi'\varrho)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Nous définirons  $D_i f = \frac{\partial f}{\partial r_i}(e_2)$  pour une fonction  $f$  de  $R$  et  $D'_i g = \frac{\partial g}{\partial s_i}(e_1)$  pour une fonction  $g$  de  $S$ .

Nous avons maintenant, compte tenu des remarques précédant l'énoncé du lemme, pour tout  $x \in G$ , un sous-groupe continu  $\{\psi' \eta_t(x)\}$  dans  $S$  qui, pour un voisinage  $V$  de  $e$  dans  $G$ , est canoniquement associé à  $\psi' \varphi x$ . Soit  $A_x$  le générateur infinitésimal de ce sous-groupe :

$$A_x(N') = \sum_{i=1}^k x_i(x) D'_i N' \quad N' \in \mathfrak{M}(S).$$

On peut alors définir des fonctions continues  $x_i(x)$ ,  $i = k + 1, k + 2, \dots, k + l$ , de façon que le générateur

$$B_x(M') = \sum_{i=1}^{k+l} x_i(x) D_i M' \quad M' \in \mathfrak{M}(R)$$

définisse un sous-groupe  $\{r_t(x)\}$  :

$$M'(r_t(x)) = \exp B_x(M')$$

satisfaisant  $\varphi'(r_t(x)) = s_t(x)$  et canoniquement associé à  $\psi(x)$  pour  $x \in W = V \cap \psi^{-1}(W_2)$ . Il suffit de définir  $x_i(x) = r_i(\psi x)$  pour  $x \in W$  et de prolonger ces fonctions de façon arbitraire, mais continue, à  $G$ .

On remarquera qu'un point  $h \in H$  et un point  $r \in R$  définissent de manière univoque un point  $x \in G$  à condition que  $\psi'(h) = \varphi'(r)$ . La condition est remplie pour les points  $r_t(x)$  et  $\eta_t(\varphi x)$  qui définissent donc un point  $\xi_t(x) \in G$ . Il suffit maintenant de définir  $g(x, M)$  comme le générateur infinitésimal du sous-groupe continu  $\{\xi_t(x)\}$ . Il est facile de voir que cette fonction satisfait toutes les conditions requises.

Nous démontrons maintenant l'existence de la fonction  $g(x, M)$  sur  $\Gamma$  compact. Soit  $\{M_\alpha\}$  l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de  $\Gamma$ , bien ordonnées par l'indice  $\alpha < \vartheta$ . On définira  $\Gamma_\alpha$ ,  $\alpha \leq \vartheta$ , comme la projection  $\varphi_\alpha$  de  $\Gamma$  sur  $\Sigma_\alpha = \prod_{\beta < \alpha} U_\beta$  :

$$\varphi_\alpha x = (M_1(x), M_2(x), \dots, M_\beta(x), \dots)$$

où  $U_\beta$  est un groupe de matrices unitaires de même degré que  $M_\beta$ . Il existe des homomorphismes naturels  $\varphi_{\alpha\beta}$  de  $\Gamma_\alpha$  sur  $\Gamma_\beta$  lorsque  $\beta < \alpha$ , et l'on a  $\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\beta\gamma} \varphi_{\alpha\beta}$ .

Si une fonction  $g_\alpha(x_\alpha, N_\alpha)$ , satisfaisant a), b) et c), est définie sur  $\Gamma_\alpha \times \mathfrak{M}(\Gamma_\alpha)$ , on pourra définir une fonction analogue  $g_{\alpha+1}$  sur  $\Gamma_{\alpha+1} \times \mathfrak{M}(\Gamma_{\alpha+1})$  ainsi qu'il est indiqué au lemme 1.  $\Gamma_\alpha$  et  $\Gamma_{\alpha+1}$  jouent ici les rôles de  $H$  et  $G$ ,  $\Sigma_\alpha$  et  $\Sigma_{\alpha+1}$  ceux de  $\Sigma_1$  et  $\Sigma_2$  et  $U_\alpha$  celui de  $U$ . On aura donc  $g_{\alpha+1}(x_{\alpha+1}, N_{\varphi_{\alpha+1}, \alpha}) = g_\alpha(\varphi_{\alpha+1, \alpha} x, N_\alpha)$  et, si pour tout  $\beta < \alpha$  l'on a  $g_\alpha(x_\alpha, N_{\beta \varphi_{\alpha\beta}}) = g_\beta(\varphi_{\alpha\beta} x, N_\beta)$ , la même condition sera remplie avec  $\alpha + 1$  à la place de  $\alpha$ .

Si  $\alpha$  est un indice sans antécédent, toute représentation  $N_\alpha$  est de la forme  $N_{\beta \varphi_{\alpha\beta}}$  pour certain  $\beta < \alpha$ . Si  $g_\beta$  a été défini pour  $\beta < \alpha$ , on pourra définir  $g_\alpha(x_\alpha, N_\alpha) = g_\beta(\varphi_{\alpha\beta} x_\alpha, N_\beta)$ , de manière univoque grâce aux relations existant entre les  $g_\beta$ . Il est facile de voir que de  $g_\alpha$  satisfait encore a), b) et c).

On montre donc, par induction transfinie, que  $g_\alpha$  existe pour tout  $\alpha \leq \vartheta$  et cela implique l'existence de  $g(x, M)$  sur  $\Gamma \times \mathfrak{M}(\Gamma)$ ,  $\Gamma$  n'étant autre que  $\Gamma_\vartheta$ .

### § 3. Démonstration du théorème 1

Nous considérerons ici  $\Gamma$  comme la limite projective d'un ensemble  $\{\Gamma_\alpha\}$  de groupes de LIE compacts, partiellement ordonnés par l'indice  $\alpha$ .  $\varphi_\alpha$  sera un homomorphisme de  $\Gamma$  sur  $\Gamma_\alpha$  et, si  $\beta < \alpha$ ,  $\varphi_{\alpha\beta}$  un homomorphisme de  $\Gamma_\alpha$  sur  $\Gamma_\beta$  de telle sorte que

$$\varphi_{\alpha\beta} \varphi_\alpha = \varphi_\beta \quad \varphi_{\beta\gamma} \varphi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha\gamma}.$$

Soit  $g(x, M)$  une fonction sur  $\Gamma \times \mathfrak{M}(\Gamma)$  possédant les propriétés a), b) et c) et  $g_\alpha(x_\alpha, M_\alpha)$  une fonction analogue sur  $\Gamma_\alpha \times \mathfrak{M}(\Gamma_\alpha)$ . La condition c) implique que, pour  $x \in U_\alpha(e)$ ,

$$g(x, M_\alpha \varphi_\alpha) = g_\alpha(\varphi_\alpha x, M_\alpha) \quad M_\alpha \in \mathfrak{M}(\Gamma_\alpha)$$

et toutes les représentations peuvent s'écrire  $M_\alpha \varphi_\alpha$  pour un certain  $\alpha$ .

Nous montrerons tout d'abord que la fonctionnelle  $A$  définie en (1.1) est bien le générateur infinitésimal d'un semi-groupe de mesures de probabilité. A ce but, nous définissons, sur  $\mathfrak{M}(\Gamma_\alpha)$ ,

$$\begin{aligned}
A_\alpha(M_\alpha) &= A(M_\alpha \varphi_\alpha) = \\
&= B(M_\alpha \varphi_\alpha) + G(M_\alpha \varphi_\alpha) + \int_{\Gamma-\epsilon} (M_\alpha \varphi_\alpha(x) - E_{m_\alpha} - g(x, M_\alpha \varphi_\alpha)) dF(x) = \\
&= B_\alpha(M_\alpha) + G_\alpha(M_\alpha) + \int_{\Gamma_\alpha - \epsilon_\alpha} (M_\alpha(x_\alpha) - E_{m_\alpha} - g(x_\alpha, M_\alpha)) dF_\alpha(x_\alpha) + \\
&\quad + \int_{\Gamma - U_\alpha} (g_\alpha(\varphi_\alpha x, M_\alpha) - g(x, M_\alpha \varphi_\alpha)) dF(x).
\end{aligned}$$

$F_\alpha$  est la projection de  $F$  sur  $\Gamma_\alpha$  par  $\varphi_\alpha$ , à savoir une mesure positive intégrant la fonction  $\sum x_i^2$  et satisfaisant

$$\int_{\Gamma_\alpha} f_\alpha(x_\alpha) dF_\alpha(x_\alpha) = \int_{\Gamma} f_\alpha(\varphi_\alpha x) dF(x)$$

lorsque la première intégrale existe. Comme  $F$  est bornée en dehors de tout voisinage de l'unité et comme la fonction

$$h(x, M_\alpha) = g_\alpha(\varphi_\alpha x, M_\alpha) - g(x, M_\alpha \varphi_\alpha)$$

satisfait, à cause de b), la condition

$$h(x, M_\alpha \otimes N_\alpha) = h(x, M_\alpha) \otimes E_{n_\alpha} + E_{m_\alpha} \otimes h(x, N_\alpha),$$

la dernière intégrale dans la définition de  $A_\alpha$  sera une fonction  $B'_\alpha(M_\alpha)$  de la même forme que  $B_\alpha(M_\alpha)$ .  $B''_\alpha = B_\alpha + B'_\alpha$  sera une fonction satisfaisant (4.1.5) et (4.1.6) de [1] et  $A_\alpha$  aura bien la forme requise dans la formule de HUNT (cf. aussi [1], lemme 4.2). Les semi-groupes  $\{\mu_{\alpha,t}, 0 < t < \infty\}$  de mesures aléatoires sur les  $\Gamma_\alpha$  ayant pour générateurs infinitésimaux les  $A_\alpha$  satisfont les relations de compatibilité

$$\mu_{\alpha,t} \varphi_{\alpha\beta}^{-1} = \mu_{\beta,t} \quad \beta < \alpha$$

puisque

$$A_\alpha(M_\beta \varphi_{\alpha\beta}) = A(M_\beta \varphi_{\alpha\beta} \varphi_\alpha) = A(M_\beta \varphi_\beta) = A_\beta(M_\beta)$$

et définissent par conséquent un semi-groupe  $\{\mu_t\}$  de mesures aléatoires sur  $\Gamma$ :  $\mu_t \varphi_\alpha^{-1} = \mu_{\alpha,t}$  dont le générateur infinitésimal n'est autre que  $A$ .

Soit inversement  $\{\mu_t\}$  un semi-groupe continu sur  $\Gamma$  et  $A$  son générateur infinitésimal. Le semi-groupe  $\{\mu_{\alpha,t}\}$ , projection du premier sur  $\Gamma_\alpha$ , aura un générateur infinitésimal  $A_\alpha$  donné par les fonctionnelles  $B_\alpha$  et  $G_\alpha$  et la mesure

$F_\alpha$ ,  $G_\alpha$  et  $F_\alpha$  ne dépendant pas des coordonnées particulières (c'est-à-dire du  $g_\alpha$ ) choisies sur  $\Gamma_\alpha$  et satisfaisant :

$$G_\alpha(M_\beta \varphi_{\alpha\beta}) = G_\beta(M_\beta) \quad M_\beta \in \mathfrak{M}(\Gamma_\beta), \quad \beta < \alpha$$

$$F_\alpha \varphi_{\alpha\beta}^{-1} = F_\beta.$$

Nous pourrions alors définir de façon univoque la fonctionnelle  $G$  sur  $\mathfrak{M}(\Gamma)$  par  $G(M) = G_\alpha(M_\alpha)$  si  $M = M_\alpha \varphi_\alpha$  et  $G$  aura les propriétés (4.1.7) à (4.1.9) de [1]. De même, pour un ensemble  $E = \varphi_\alpha^{-1}(E_\alpha)$ ,  $E_\alpha$  ensemble borélien de  $\Gamma_\alpha - e_\alpha$ , nous définirons  $F(E) = F_\alpha(E_\alpha)$  et pourrions étendre cette mesure à tout ensemble borélien de  $\Gamma$  ne coupant pas un certain voisinage de l'unité. Posons

$$A'(M) = G(M) + \int_{\Gamma-e} (M(x) - E_m - g(x, M)) dF(x)$$

$A(M) - A'(M)$  sera, pour  $M = M_\alpha \varphi_\alpha$ , égal à

$$\begin{aligned} B(M) &= A_\alpha(M_\alpha) - A'(M_\alpha \varphi_\alpha) = \\ &= B_\alpha(M_\alpha) + \int_{\Gamma-U_\alpha} \{g_\alpha(\varphi_\alpha x, M_\alpha) - g(x, M_\alpha \varphi_\alpha)\} dF(x) \end{aligned}$$

et aura les propriétés (4.1.5) et (4.1.6) de [1].  $A(M)$  aura donc bien la forme (1.1).

#### § 4. Démonstration du théorème 2

Nous ne démontrerons le théorème que pour les groupes compacts à base dénombrable, c'est-à-dire tels que les représentations unitaires irréductibles forment un ensemble dénombrable, en particulier donc pour les groupes de LIE compacts. Le cas général se ramène aisément à ce cas particulier: on projettera, comme au paragraphe précédent, les  $\mu_{nk}$  sur les groupes de LIE  $\Gamma_\alpha$ :  $\mu_{\alpha, nk} = \mu_{nk} \varphi_\alpha^{-1}$ . Ces  $\mu_{\alpha, nk}$  satisferont encore les conditions du théorème;  $\mu_\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n, \alpha} = \mu \varphi_\alpha^{-1}$  sera indéfiniment divisible pour tout  $\alpha$ , par conséquent  $\mu$  aura la même propriété [1, lemme 1.2].

L'idée de la démonstration est très simple: il s'agit de montrer que, lorsque  $n$  est assez grand,  $\mu_n$  se laisse décomposer en  $K$  facteurs «à peu près égaux». On y arrivera en répartissant les  $\mu_{nk}$  en  $K$  groupes, de telle sorte que les produits

à l'intérieur de ces groupes soient de nouveau «à peu près égaux». Le lemme suivant forme la base de la démonstration :

**Lemme 2.** Soit  $x_1, \dots, x_m$   $m$  vecteurs de l'espace euclidien  $R_n$  tels que  $\|x_i\| < \varepsilon$ , soit  $a = \sum x_i$  et  $0 < \lambda < 1$ . Il existe alors un sous-ensemble  $I$  de  $\{1, 2, \dots, m\}$  tel que

$$\|\sum_{i \in I} x_i - \lambda a\| < n\varepsilon.$$

**Démonstration.** Nous définissons l'application linéaire  $\psi$  de  $R^m$  dans  $R^n$  de la manière suivante :

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_m) \rightarrow c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_m x_m = \psi(c).$$

Soit  $D$  l'image du cube unité  $0 \leq c_i \leq 1$  par  $\psi$  et  $b \in D$  (p.ex.  $b = \lambda a$ ). L'ensemble

$$F = \{c : \psi(c) = b, 0 \leq c_i \leq 1\}$$

est convexe, fermé et non vide. Il possède par conséquent au moins un point extrême  $f$ . Nous allons montrer que  $f$  n'a pas plus de  $n$  coordonnées différentes de 0 ou 1. Soit en effet  $f_{i_1}, \dots, f_{i_k}$  les coordonnées égales à 0 ou 1. Le système homogène de  $k + n$  équations

$$c_{ij} = 0 \quad j = 1, 2, \dots, k; \quad \psi(c) = 0$$

a une solution non triviale  $c_0$  si  $n + k < m$ . Pour un  $\alpha$  suffisamment petit,  $|\alpha| < \delta$ , on a alors  $f + \alpha c_0 \in F$  contrairement à l'hypothèse que  $f$  est extrême. Ceci démontré, on pose  $A = \{i : f_i = 1\}$  et l'on a

$$\|\sum_{i \in A} x_i - b\| = \|\sum_{i \in A} x_i - \psi(f)\| = \|\sum_{i: 0 < f_i < 1} f_i x_i\| < n\varepsilon.$$

**Corollaire 1.** Sous la même hypothèse, on peut répartir les indices  $1, 2, \dots, m$  en  $K$  classes disjointes  $A_1, \dots, A_K$  telles que

$$\|\sum_{i \in A_r} x_i - \sum_{i \in A_s} x_i\| < M\varepsilon \quad r, s = 1, 2, \dots, K$$

où  $M$  ne dépend que de  $K$  et de  $n$ .

Soit maintenant  $M^1, M^2, \dots, M^l, \dots$  un système complet de représentations unitaires irréductibles de  $\Gamma$  et

$$M_{nk}^l = \int_{\Gamma} M^l(x) d\mu_{nk}(x).$$

Soit encore  $\|A\|$  la norme d'une matrice  $A$  :  $\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|$ .

**Corollaire 2.** Soit  $K, L$  et  $\varepsilon > 0$  donnés et fixes. Il existe alors un  $n_0(L, \varepsilon)$  tel que, pour  $n \geq n_0(L, \varepsilon)$ , on puisse répartir les indices  $1, 2, \dots, k_n$  en  $K$  classes  $A_1^n, \dots, A_K^n$  de telle sorte que

$$\left\| \prod_{k \in A_r^n} M_{nk}^l - \prod_{k \in A_s^n} M_{nk}^l \right\| < \varepsilon \quad l = 1, 2, \dots, L; r, s = 1, 2, \dots, K.$$

**Démonstration.** La condition d'infinitésimalité implique

$$\sup_{1 \leq k \leq k_n} \|M_{nk}^l - E_m\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Les matrices  $N_{nk}^l = \log M_{nk}^l$  tendront donc uniformément vers 0. Nous considérerons alors, dans l'espace à  $m = 2(m_1^2 + \dots + m_L^2)$  dimensions, les vecteurs  $x_k, 1 \leq k \leq k_n$ , ayant pour composantes les parties réelles et imaginaires des coefficients de  $N_{nk}^l, 1 \leq l \leq L$ . Ces vecteurs auront, pour  $n$  suffisamment grand, des normes arbitrairement petites. On pourra donc les répartir, comme au corollaire 1, en  $K$  classes  $k \in A_1^n, \dots, k \in A_K^n$  de telle manière que les différences entre les sommes  $y_r = \sum_{k \in A_r^n} x_k$  et, par conséquent, les normes

$$\left\| \sum_{k \in A_r^n} N_{nk} - \sum_{k \in A_s^n} N_{nk} \right\|$$

soient arbitrairement petites. On obtient alors le corollaire en remarquant que, grâce à l'hypothèse de commutativité,

$$\prod_{k \in A_r^n} M_{nk} - \prod_{k \in A_s^n} M_{nk} = \exp \left( \sum_{k \in A_s^n} N_{nk} \right) \{ \exp \left( \sum_{k \in A_r^n} N_{nk} - \sum_{k \in A_s^n} N_{nk} \right) - E_m \}.$$

Soit alors  $\varepsilon_L = \frac{1}{L}$  et  $n_L = n_0(\varepsilon_L, L)$ . En posant

$$\mu_{n_L, r} = \prod_{k \in A_r^{n_L}} \mu_{n_L k} \quad r = 1, 2, \dots, K,$$

on obtient  $K$  mesures telles que

$$\| \int_F M^l(x) d\mu_{n_L, r}(x) - \int_F M^l(x) d\mu_{n_L, s} \| < \frac{1}{L} \quad l = 1, 2, \dots, L$$

$$\mu_{n_L} = \mu_{n_L, 1} * \dots * \mu_{n_L, K}.$$

On peut alors trouver, dans la suite  $n_1, n_2, \dots, n_L, \dots$ , une sous-suite  $\sigma$  telle que les  $\mu_{n_L, r} (n_L \in \sigma)$  convergent vers des mesures aléatoires  $\mu_{\infty, r}$ . On voit immédiatement que  $\mu_{\infty, 1} = \mu_{\infty, 2} = \dots = \mu_{\infty, K} = \mu_{\infty}$  et l'on a

$$\mu = \mu_{\infty, 1} * \dots * \mu_{\infty, K} = \mu_{\infty}^{*K}.$$

Ceci pouvant être réalisé pour tout  $K$ , on voit que  $\mu$  est bien indéfiniment divisible.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] CARNAL: *Unendlich oft teilbare Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf kompakten Gruppen*. Math. Annalen Bd. 153, 351–383 (1964).
- [2] HUNT G.A.: *Semi-groups of measures on LIE groups*. Trans. Amer. Math. Soc. 81, 269–293 (1956).
- [3] PARTHASARATHY, K.R., RAO RANGO, VARADHAN S.R.S.: *Probability distributions on locally compact abelian groups*. Illinois J. of Math. 7 (1963).
- [4] WEHN D.F.: *Probabilities on LIE groups*. Proc. Nat. Acad. Sci., 1962.

(Reçu le 2 juillet 1965)