

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 39 (1964-1965)

Artikel: Sur le prolongement naturel de fonctions sigma-additives.
Autor: Cairoli, R.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-29878>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur le prolongement naturel de fonctions sigma-additives

par R. CAIROLI

1. Introduction

L'objet de cette remarque a été fourni par la conjecture de KRICKBERG-PAUC [5] que tout prolongement sigma-additif φ d'une fonction sigma-additive ψ , qui conserve la norme, peut être interprété comme prolongement naturel (cf. définition au § 4) relativement à une mesure convenable. Nous envisagerons ce problème, en étudiant d'abord quelques conditions nécessaires et suffisantes (théorèmes 2 et 3) pour qu'un prolongement puisse être considéré comme naturel relativement à une mesure donnée, et ensuite, en déduisant l'existence de la mesure prévue dans la conjecture. Un exemple simple montrera qu'en général il n'existera pas une mesure strictement positive qui réponde à la même question. La première condition étudiée, dont la nécessité résulte immédiatement de la représentation intégrale du prolongement, suppose, si μ désigne la mesure donnée, l'existence, pour tout nombre réel α , d'une décomposition de HAHN relative à $\varphi + \alpha\mu$, dans le domaine de définition C de ψ (cf. § 3). La suffisance de cette condition sera prouvée à l'aide d'une adaptation d'une démonstration connue [4]. L'invariabilité de la norme, pour tout α , dans le prolongement $\varphi + \alpha\mu$ de $\psi + \alpha\mu|C$, est une condition équivalente et cette invariabilité est assurée par deux conditions exprimées sous forme d'inégalités (théorème 3). Le théorème 4 établira que tout prolongement qui conserve la norme est un prolongement naturel.

2. Notations et résultats auxiliaires

Nous utiliserons les mêmes notations que dans [6]. B désignera une sigma-algèbre de sous-ensembles d'un ensemble donné E et C une sigma-sous-algèbre de B de même unité E . Les éléments de B seront désignés par A, B, C, \dots . Nous utiliserons, en outre, les notations usuelles: \leq pour l'ordre, AB ou $A \wedge B$ pour la borne inférieure, $A \vee B$ pour la borne supérieure et $A + B$ pour la différence symétrique. Par partition finie de B on entendra, comme d'habitude, une suite finie d'éléments $B_i \in B$, $i = 1, 2, \dots, k$, telle que $B_i B_j = 0$ si $i \neq j$ et que $B = B_1 + \dots + B_k$. Les fonctions réelles mesurables seront désignées par f , les fonctions réelles sigma-additives par les lettres φ, ψ, γ ou $\varphi|B, \psi|C$ si l'on veut mettre en évidence le domaine de définition qui entre en considération. La famille des fonctions sigma-additives

sur \mathcal{B} est munie d'une structure d'ordre, si on définit $\varphi \leq \psi$ par $\varphi(B) \leq \psi(B)$, pour tout $B \in \mathcal{B}$. On dit que φ est de variation bornée vers le haut (vers le bas) si l'ensemble des nombres $\varphi(B)$, $B \in \mathcal{B}$, est borné supérieurement (inférieurement). La fonction φ est dite de variation bornée si elle est de variation bornée vers le haut et vers le bas. Si \mathfrak{G} désigne une famille de fonctions sigma-additives qui contient au moins une fonction de variation bornée vers le bas, alors la borne supérieure $\sup \mathfrak{G} = \sup(\varphi/\varphi \in \mathfrak{G})$ existe ([2], [4]) et si B désigne un élément de \mathcal{B} , elle est définie par

$$(\sup \mathfrak{G})(B) = \sup(\varphi_1(B_1) + \varphi_2(B_2) + \dots + \varphi_k(B_k)), \quad (2, 1)$$

pour toute partition finie de B et toute suite finie $\varphi_1, \dots, \varphi_k$, $\varphi_i \in \mathfrak{G}$, telle que $\varphi_1(B_1) + \dots + \varphi_k(B_k)$ ait un sens. Sous l'hypothèse correspondante, la borne inférieure $\inf \mathfrak{G}$ existe et est définie de manière analogue. En particulier, pour tout φ , $\varphi^+ = \sup(\varphi, 0)$, $\varphi^- = \sup(-\varphi, 0)$ et $\varphi^T = \varphi^+ + \varphi^- = \sup(\varphi, -\varphi)$ existent. φ^T sera par exemple définie par

$$\varphi^T(B) = \sup(\varphi(B_1) - \varphi(B_2)), \quad (2, 2)$$

pour toute partition B_1, B_2 de B et pour tout $B \in \mathcal{B}$. Il résulte immédiatement de (2, 1) que si \mathfrak{G} est filtrant pour la relation \leq , sa borne supérieure coïncide avec l'enveloppe supérieure [5]: $(\sup \mathfrak{G})(B) = (\text{env } \sup \mathfrak{G})(B) = \sup(\varphi(B)/\varphi \in \mathfrak{G})$, $B \in \mathcal{B}$. De même pour la borne inférieure. Pour que φ soit de variation bornée, il faut et il suffit que $\varphi^T(E)$ soit fini. Dans ce cas, on appelle $\varphi^T(E)$ norme de φ et on la désigne par $\|\varphi\|$.

Les fonctions sigma-additives considérées dans la suite seront toujours supposées de variation bornée. Par conséquent, nous les appellerons simplement fonctions sigma-additives.

3. Fonctions admettant une décomposition de HAHN dans \mathcal{C}

Nous dirons que la fonction sigma-additive $\varphi | \mathcal{B}$ admet une décomposition de HAHN dans \mathcal{C} , s'il existe une partition C', C'' de E dans \mathcal{C} , telle que $\varphi^+(C'') = 0$ et $\varphi^-(C') = 0$. Soit μ une mesure finie sur \mathcal{B} . Désignons par \mathfrak{H} la famille des fonctions sigma-additives φ , telles que $\varphi + \alpha\mu$ admet, pour tout nombre réel α , une décomposition de HAHN dans \mathcal{C} . Il est immédiat que si $\varphi \in \mathfrak{H}$, tout multiple $\beta\varphi$ appartient aussi à \mathfrak{H} . En outre, les bornes supérieure $\sup_j \varphi_j$ resp. inférieure $\inf_j \varphi_j$ de toute suite $(\varphi_j)_{j=1, 2, \dots}$ d'éléments de \mathfrak{H} , majorée resp. minorée par une fonction sigma-additive, appartiennent à \mathfrak{H} , car $\sup_j \varphi_j$ resp. $\inf_j \varphi_j$ sont alors de variation bornée et on aura, par exemple,

pour la borne supérieure, si B désigne un élément de \mathcal{B} : $(\sup_j(\varphi_j + \alpha\mu))(B) = \sup((\varphi_{j_1} + \alpha\mu)(B_1) + \dots + (\varphi_{j_k} + \alpha\mu)(B_k)) = \sup(\varphi_{j_1}(B_1) + \dots + \varphi_{j_k}(B_k)) + \alpha\mu(B)$, pour toute partie finie $\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_k}$ de (φ_j) et toute partition finie de B , ce qui équivaut à $\sup_j(\varphi_j + \alpha\mu) = (\sup_j \varphi_j) + \alpha\mu$. Or, si on suppose α fixé, $\varphi_j + \alpha\mu$ admettant pour tout j une décomposition de HAHN dans \mathcal{C} , il en sera de même de $\sup_j(\varphi_j + \alpha\mu)$, car si C'_j, C''_j désigne une partition de E dans \mathcal{C} relative à $\varphi_j + \alpha\mu$, alors $C' = \bigvee_{j=1}^{\infty} C'_j, C'' = \bigwedge_{j=1}^{\infty} C''_j$ représente une décomposition de HAHN dans \mathcal{C} relative à la borne supérieure. En particulier, la limite supérieure $\lim \sup_j \varphi_j = \inf_j(\sup_{j \leq i} \varphi_i)$, la limite inférieure $\lim \inf_j \varphi_j = \sup_j(\inf_{j \leq i} \varphi_i)$ et, en cas d'égalité de ces deux fonctions, la limite $\lim_j \varphi_j = \lim \sup_j \varphi_j = \lim \inf_j \varphi_j$ de toute suite (φ_j) d'éléments de \mathfrak{S} , bornée par une fonction sigma-additive, appartiennent aussi à \mathfrak{S} . Remarquons que la stricte positivité de μ permettrait, grâce à un résultat dû à WECKEN ([6], page 380), de généraliser ces assertions à des suites $(\varphi_\tau; \tau \in \theta)$, où θ désigne un ensemble non vide d'indices, filtrant pour une relation transitive \ll .

Désignons par \mathfrak{E} la famille des fonctions de la forme $\alpha_1 \mu_{C_1} + \alpha_2 \mu_{C_2} + \dots + \alpha_n \mu_{C_n}$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ désignent des nombres réels, n un nombre naturel quelconque et μ_{C_i} la contraction de la mesure μ sur $C_i \in \mathcal{C}$, c'est-à-dire la fonction définie par $\mu_{C_i}(B) = \mu(C_i \wedge B)$, pour tout $B \in \mathcal{B}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Il est aisé de voir que \mathfrak{E} est un espace de RIESZ [1], sous-espace de \mathfrak{S} . La famille $\overline{\mathfrak{E}}$ des limites de suites d'éléments de \mathfrak{E} , bornées par des fonctions sigma-additives, est aussi un espace de RIESZ, les opérations linéaires, sup et inf étant continus par rapport à la limite introduite précédemment. On a $\mathfrak{E} \subseteq \overline{\mathfrak{E}} \subseteq \mathfrak{S}$.

Théorème 1. *La famille \mathfrak{S}_c des fonctions de \mathfrak{S} absolument continues par rapport à μ coïncide avec $\overline{\mathfrak{E}}$; c'est-à-dire: pour qu'une fonction sigma-additive φ soit limite d'une suite de fonctions de la forme $\alpha_1 \mu_{C_1} + \dots + \alpha_n \mu_{C_n}, C_i \in \mathcal{C}$, il faut et il suffit qu'elle soit absolument continue par rapport à μ et que $\varphi + \alpha\mu$ admette, pour tout réel α , une décomposition de HAHN dans \mathcal{C} .*

On voit facilement que la condition est nécessaire. Démontrons qu'elle est suffisante. A cet effet, il suffit de considérer $\varphi \in \mathfrak{S}_c$ non négatif. En adaptant un procédé connu ([3] page 129), choisissons dans l'ensemble \mathfrak{G} des $\psi \in \mathfrak{E}$ tels que $0 \leq \psi \leq \varphi$, une suite croissante (ψ_j) , telle que $\lim_j \psi_j(E) = \sup(\psi(E) / \psi \in \mathfrak{G})$. On a $\lim_j \psi_j = \gamma \leq \varphi$. Supposons $\gamma \neq \varphi$. En admettant, pour le moment, que $\varphi - \gamma \in \mathfrak{S}$, il existe, pour tout entier positif n , une décomposition de HAHN C'_n, C''_n dans \mathcal{C} , relative à $(\varphi - \gamma) - \frac{1}{n}\mu$. $C' = \bigvee_{n=1}^{\infty} C'_n, C'' = \bigwedge_{n=1}^{\infty} C''_n$ étant une décomposition relative à $\varphi - \gamma$, il résulte

que $(\varphi - \gamma)(C'') = 0$. On a donc nécessairement $(\varphi - \gamma)(C') > 0$ et par suite $\mu(C') > 0$. Ceci entraîne $\mu(C'_{n_0}) > 0$ pour un certain n_0 . Désignons C'_{n_0} par C et $\frac{1}{n_0}$ par λ . On aura alors $\mu(C) > 0$, $\lambda > 0$ et $(\varphi - \gamma - \lambda\mu)(B) \geq 0$, pour tout $B \in \mathcal{C}$, $C \in \mathcal{C}$. La dernière inégalité entraîne: $(\psi_j + \lambda\mu_C)(B) = \psi_j(B) + \lambda\mu(CB) \leq \gamma(B) + (\varphi - \gamma)(CB) = \gamma(B - CB) + \varphi(CB) \leq \varphi(B)$, pour tout $B \in \mathcal{B}$, et par suite $(\psi_j + \lambda\mu_C) \in \mathfrak{G}$, $j = 1, 2, \dots$. D'autre part, $\lim_j (\psi_j + \lambda\mu_C)(E) = \sup(\psi(E) | \psi \in \mathfrak{G}) + \lambda\mu(C) > \sup(\psi(E) | \psi \in \mathfrak{G})$, ce qui est impossible. On doit donc avoir $\varphi = \gamma \in \mathfrak{E}$. Reste à démontrer que $\varphi - \gamma \in \mathfrak{H}$, ou, ce qui revient au même, que $\varphi + \gamma \in \mathfrak{H}$, lorsque φ désigne un élément quelconque de \mathfrak{H} . $\varphi - \mu_C$, $C \in \mathcal{C}$, admet une décomposition de HAHN dans \mathcal{C} . En effet, il est aisé de vérifier que, si C', C'' , resp. C'_1, C''_1 , désigne une partition de E , dans \mathcal{C} , relative à φ , resp. $\varphi - \mu$, $(C' - C'_1C) + (C'_1C)$, $(C'' - C''_1C) + (C''_1C)$ représente une partition de E , dans \mathcal{C} , relative à $\varphi - \mu_C$. On en déduit que $\varphi + \alpha\mu + \beta\mu_C$ admet, pour tout couple α, β de nombres réels, une décomposition de HAHN dans \mathcal{C} , ce qui entraîne $\varphi + \psi \in \mathfrak{H}$, pour tout $\psi \in \mathfrak{E}$. L'assertion résulte donc du fait que $\gamma = \lim_j \psi_j$, pour une suite (ψ_j) d'éléments de \mathfrak{E} .

Remarquons que, dans le cas d'une mesure strictement positive, tout $\varphi \in \mathfrak{H}$ étant absolument continu par rapport à μ , $\mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{E}}$.

4. Représentation intégrale. Prolongements naturels.

Tout $\varphi \in \mathfrak{E}$ admet la représentation intégrale $\varphi(B) = (\alpha_1\mu_{C_1} + \dots + \alpha_n\mu_{C_n})(B) = \int_B (\alpha_1\chi_{C_1} + \dots + \alpha_n\chi_{C_n}) d\mu$, où χ_{C_i} désigne la fonction caractéristique de C_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Or, une telle représentation, par un intégrant \mathcal{C} -mesurable, est une propriété de la famille \mathfrak{H}_c . En effet, si $\varphi = \int f d\mu$, f \mathcal{C} -mesurable, $C'_\alpha = \{(f + \alpha) \geq 0\}$, $C''_\alpha = \{(f + \alpha) < 0\}$ représente une décomposition, dans \mathcal{C} , relative à $\varphi + \alpha\mu$. Réciproquement, si $0 \leq \varphi \in \mathfrak{H}_c$, il existe, d'après ce qui précède, une suite croissante (ψ_j) d'éléments de \mathfrak{E} qui converge vers φ . Si f_j désigne l'intégrant de ψ_j , on aura $\varphi(B) = \int_B (\sup_j f_j) d\mu$.

Toute fonction sigma-additive ψ sur \mathcal{C} , absolument continue par rapport à $\mu | \mathcal{C}$, peut être prolongée de manière naturelle à \mathcal{B} . Il existe, en effet, une fonction \mathcal{C} -mesurable et sommable f (intégrant de RADON-NIKODYM), telle que $\psi(C) = \int_C f d\mu$, pour tout $C \in \mathcal{C}$. Le prolongement sigma-additif $\hat{\psi}$ de ψ à \mathcal{B} , défini par $\hat{\psi}(B) = \int_B f d\mu$, $B \in \mathcal{B}$, est appelé prolongement naturel de ψ par rapport à μ [4]. Comme corollaire, on aura donc le

Théorème 2. *Pour que $\varphi | B$ soit le prolongement naturel de $\psi | C$ par rapport à μ , il faut et il suffit qu'il soit absolument continu par rapport à μ et que $\varphi + \alpha\mu$ admette, pour tout nombre réel α , une décomposition de HAHN dans C .*

Rappelons que la norme de la fonction sigma-additive φ sur B est définie par $\|\varphi\| = \varphi^T(E)$ et que, dans le cas où φ est l'intégrale de la fonction B -mesurable f , $\varphi^T(E) = \int_E |f| d\mu$. Si φ désigne un prolongement naturel, par rapport à μ , de ψ défini sur C , $\varphi + \alpha\mu$ est, pour tout α , un prolongement sigma-additif de $\psi + \alpha\mu | C$ qui conserve la norme. Ceci résulte du fait que, si φ est l'intégrale de f , $\varphi + \alpha\mu$ est l'intégrale de $f + \alpha$, qui est aussi C -mesurable. Cette propriété est aussi suffisante:

Théorème 3. *Si φ désigne un prolongement sigma-additif sur B de la fonction ψ , définie sur C , et si μ désigne une mesure finie sur B , les conditions suivantes sont équivalentes:*

- (1) φ est le prolongement naturel de ψ par rapport à μ .
- (2) φ est absolument continu par rapport à μ et le prolongement $\varphi + r\mu$ de $\psi + r\mu | C$ conserve la norme, pour tout nombre rationnel r .
- (3) φ est absolument continu par rapport à μ et pour tout $B \in \mathcal{B}$, tout nombre rationnel r et tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_1, C_2 \in C$ tels que les inégalités $(\psi + r\mu)(C_1) - \varepsilon \leq (\varphi + r\mu)(B) \leq (\psi + r\mu)(C_2) + \varepsilon$ soient satisfaites.
- (4) φ est absolument continu par rapport à μ et pour tout $B \in \mathcal{B}$, tout nombre rationnel $r \geq 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $C_1, C_2, C_3, C_4 \in C$ tels que les inégalités $(\varphi^+ - r\mu)(C_1) - \varepsilon \leq (\varphi^+ - r\mu)(B) \leq (\varphi^+ - r\mu)(C_2) + \varepsilon$ et $(\varphi^- - r\mu)(C_3) - \varepsilon \leq (\varphi^- - r\mu)(B) \leq (\varphi^- - r\mu)(C_4) + \varepsilon$ soient satisfaites.

D'après ce qui précède, (1) entraîne (2). Inversement, démontrons que si $\varphi | B$ est un prolongement de $\psi | C$ qui conserve la norme, φ admet une décomposition de HAHN dans C . Les égalités $\varphi^T(E) = \varphi^+(E) + \varphi^-(E) = \psi^T(E) = \psi^+(E) + \psi^-(E)$ et $\varphi(E) = \varphi^+(E) - \varphi^-(E) = \psi(E) = \psi^+(E) - \psi^-(E)$ entraînent $\varphi^+(E) = \psi^+(E)$ et $\varphi^-(E) = \psi^-(E)$. Soit $C', C'' \in C$ une décomposition de HAHN relative à ψ . On a alors $\psi^+(E) = \psi(C') = \varphi(C') = \varphi^+(C') - \varphi^-(C') \leq \varphi^+(E)$. D'où, puisque $\psi^+(E) = \varphi^+(E)$ et $\varphi^+(C') \leq \varphi^+(E)$, $\varphi^-(C') = 0$. De même, on démontre que $\varphi^+(C'') = 0$, de manière que C', C'' est aussi une décomposition relative à φ . $\varphi + r\mu$ admet donc, pour tout r , une décomposition dans C . Soit (r_j) une suite croissante qui converge vers α . La suite $(\varphi + r_j\mu)$ est croissante et $\lim_j (\varphi + r_j\mu) = \sup_j (\varphi + r_j\mu) = \text{env } \sup_j (\varphi + r_j\mu) = \varphi + \alpha\mu$. Ceci implique que, si α est réel, $\varphi + \alpha\mu$ admet aussi une décomposition dans C . D'après le théorème 2, (2) entraîne donc (1). La condition (3) (sans continuité absolue) est évidemment équivalente à la suivante:

$$\sup (\psi(C) + r\mu(C) \mid C \in \mathcal{C}) = \sup (\varphi(B) + r\mu(B) \mid B \in \mathcal{B})$$

et

$$\sup (-\psi(C) - r\mu(C) \mid C \in \mathcal{C}) = \sup (-\varphi(B) - r\mu(B) \mid B \in \mathcal{B}),$$

c'est-à-dire à la condition $(\psi + r\mu \mid \mathcal{C})^+(E) = (\varphi + r\mu)^+(E)$ et $(\psi + r\mu \mid \mathcal{C})^-(E) = (\varphi + r\mu)^-(E)$ qui, en vertu de la première partie de cette démonstration, est équivalente à $\|\psi + r\mu \mid \mathcal{C}\| = \|\varphi + r\mu\|$. (2) et (3) sont donc équivalents. Reste à démontrer l'équivalence de (1) et (4). (1) implique que φ^+ resp. φ^- soient les prolongements naturels, par rapport à μ , de ψ^+ resp. ψ^- . Donc, d'après l'équivalence déjà démontrée de (1) et (3), (1) implique (4). Inversement, la condition (4), pour $r = 0$, entraîne $\varphi^+(E) \leq \psi^+(E)$ et $\varphi^-(E) \leq \psi^-(E)$. On a aussi, d'après (2, 1), $\psi^+(E) \leq \varphi^+(E)$ et $\psi^-(E) \leq \varphi^-(E)$. D'où: $\varphi^+(E) = \psi^+(E)$ et $\varphi^-(E) = \psi^-(E)$. Ces égalités entraînent à leur tour $\varphi^+(C) = \psi^+(C)$ et $\varphi^-(C) = \psi^-(C)$, pour tout $C \in \mathcal{C}$, car, d'après (2, 1), on a $\psi^+(E) = \psi^+(C) + \psi^+(E - C) \leq \varphi^+(C) + \varphi^+(E - C) = \varphi^+(E)$, ce qui est possible seulement si $\varphi^+(C) = \psi^+(C)$. De manière analogue on démontre que $\varphi^-(C) = \psi^-(C)$, pour tout $C \in \mathcal{C}$. La condition (4) étant aussi satisfaite pour des r négatifs (dans ce cas on peut poser $C_1 = C_3 = 0$ et $C_2 = C_4 = E$), il résulte alors, en tenant compte de l'équivalence déjà démontrée de (1) et (3), que φ^+ resp. φ^- sont les prolongements naturels, par rapport à μ , de ψ^+ resp. ψ^- . Donc φ est le prolongement naturel de ψ , par rapport à μ , ce qui achève la démonstration.

L'invariabilité de la norme dans un prolongement ne suffit pas, en général, à assurer l'existence d'une mesure strictement positive, par rapport à laquelle ce prolongement puisse être considéré comme naturel. En effet, si $\varphi \mid \mathcal{B} \geq 0$ n'est pas strictement positif et non identiquement nul (on suppose que \mathcal{B} admet des mesures strictement positives) et si \mathcal{C} désigne la sigma-sous-algèbre $(0, E)$, les fonctions \mathcal{C} -mesurables étant les constantes, une telle mesure serait un multiple de φ , ce qui contredirait la stricte positivité. On a, par contre, le théorème suivant:

Théorème 4. *Si φ désigne un prolongement sigma-additif sur \mathcal{B} de la fonction ψ définie sur \mathcal{C} , qui conserve la norme, il existe une mesure μ , par rapport à laquelle ce prolongement est naturel.*

Posons $\mu = \varphi^T$ et montrons que $\varphi^+ + \alpha\mu = (\alpha + 1)\varphi^+ + \alpha\varphi^-$ admet pour tout nombre réel α , une décomposition de HAHN dans \mathcal{C} . Cela revient à démontrer que $\beta\varphi^+ - \varphi^-$ a cette propriété, pour tout $\beta > 0$. On a vu précédemment que tout prolongement qui conserve la norme admet une décomposition dans \mathcal{C} . Soit donc C', C'' une telle décomposition relative à φ . Elle est aussi une décomposition relative à $\beta\varphi^+ - \varphi^-$, car $(\beta\varphi^+ - \varphi^-)^+(C'') = \sup (\beta\varphi^+ - \varphi^-)(B) \mid B \leq C''$, $B \in \mathcal{B}) = 0$, puisque $\varphi^+(B) = 0$ si $B \leq C''$,

et $(\beta\varphi^+ - \varphi^-)(C') = \sup(\varphi^- - \beta\varphi^+)(B) / B \leq C', B \in \mathcal{B} = 0$, puisque $\varphi^-(B) = 0$ si $B \leq C'$. On démontre de façon analogue que $\varphi^- + \alpha\mu$ admet aussi, pour tout α , une décomposition dans \mathcal{C} . On en déduit alors, en tenant compte de la continuité absolue de φ^+ et φ^- par rapport à μ , que φ^+ et φ^- sont les prolongements naturels, par rapport à μ , de $\varphi^+|_{\mathcal{C}}$ resp. $\varphi^-|_{\mathcal{C}}$, ce qui signifie que φ est le prolongement naturel de $\varphi^+|_{\mathcal{C}} - \varphi^-|_{\mathcal{C}} = \psi$, par rapport à μ .

Les intégrants \mathcal{C} -mesurables réalisant le prolongement naturel coïncident φ^T -p.p. avec $\chi_{C'} - \chi_{C''}$, où C', C'' désigne une décomposition de HAHN relative à ψ et où $\chi_{C'}$ resp. $\chi_{C''}$ sont les fonctions caractéristiques de C' , resp. C'' .

Étant données deux sigma-sous-algèbres $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ de \mathcal{B} de même unité E que \mathcal{B} , telles que $\mathcal{C}_1 \subseteq \mathcal{C}_2$, deux fonctions sigma-additives ψ_1, ψ_2 définies sur \mathcal{C}_1 , resp. \mathcal{C}_2 et deux prolongements $\varphi_1 / \mathcal{B}, \varphi_2 / \mathcal{B}$ de ψ_1 , resp. ψ_2 , conservant les normes, on peut se demander (cf. [5], page 495) s'il existe une mesure μ , telle que φ_i soit le prolongement naturel de ψ_i relativement à μ ($i = 1, 2$). Or, sans hypothèses supplémentaires, ce ne sera pas le cas, car, si $\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}_2 = (0, E)$ et si φ_1, φ_2 désignent deux fonctions sigma-additives sur \mathcal{B} , non négatives, telles que $\varphi_1(E) = \varphi_2(E)$ et $\varphi_1 \neq \varphi_2$, l'existence d'une telle mesure entraînerait $\varphi_1 = \lambda_1\mu, \varphi_2 = \lambda_2\mu$ (λ_1, λ_2 nombres réels) et, par suite, $\varphi_1 = \varphi_2$, en contradiction avec l'hypothèse.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Intégration*. Livre VI, Paris 1952.
- [2] S. BOCHNER AND R. S. PHILLIPS, *Additive set functions and vector lattices*. Ann. of Math., 42 (1941), 316-324.
- [3] P. R. HALMOS, *Measure Theory*. New York 1950.
- [4] K. KRICKEBERG, *Convergence of martingales with a directed index set*. Trans. Amer. Math. Soc., 83 (1956) 313-337.
- [5] K. KRICKEBERG et C. Y. PAUC, *Martingales et dérivation*. Bull. Soc. Math. de France, 19 (1963) 455-543.
- [6] F. WECKEN, *Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen*. Math. Z., 45 (1939) 377-404.

(Reçu le 11 septembre, 1963)