

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 39 (1964-1965)

Artikel: Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises II.
Autor: Strebel, Kurt
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-29877>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 26.04.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises II

VON KURT STREBEL, Freiburg (Schweiz)

Einleitung

1. Bildet man den Einheitskreis $|z| < 1$ durch eine analytische Funktion $z^* = \Phi(z)$ auf eine RIEMANNSche Fläche R^* über der z^* -Ebene ab, streckt diese durch die affine Abbildung $w^* = F(z^*) = Kx^* + iy^*$ ($K \geq 1$), wodurch sie in eine RIEMANNSche Fläche S^* über der w^* -Ebene übergeführt wird, und bildet schließlich S^* durch die Umkehrfunktion einer im Einheitskreis $|w| < 1$ analytischen Funktion Ψ wieder auf den letzteren ab, so erhält man durch Zusammensetzung eine K -quasikonforme Abbildung $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$. Die Abbildung f induziert eine topologische Abbildung des Randes $|z| = 1$ auf den Rand $|w| = 1$. Im ersten Teil dieser Arbeit [4] wurden gewisse Eigenschaften der Fläche R^* angegeben, aus denen folgt, daß f für die induzierte Randabbildung die extremale quasikonforme Abbildung ist, das heißt diejenige mit der kleinsten maximalen Dilatation, und es wurden Beispiele gegeben, in denen f wohl eine extremale Abbildung, aber nicht die einzige, und solche, in denen f nicht extremal ist. Insbesondere ist f nach Satz 1 der zitierten Arbeit stets einzige Extremale, wenn R^* in der Metrik der z^* -Ebene endlichen Flächeninhalt $\iint_{|z| < 1} |\Phi'|^2 dx dy$ hat.

2. Es liegt auf der Hand, daß die Eindeutigkeit der Funktion Φ eine allzu einschränkende Voraussetzung in diesem Unitätssatz darstellt. Bildet man zum Beispiel den über $|z| < 1$ gelegenen Teil der zweiblättrigen Fläche der Quadratwurzel durch die Funktion $z^* = \Phi(z) = z^{\frac{3}{2}}$ auf ein dreiblättriges Flächenstück R^* über $|z^*| < 1$ ab, unterwirft dieses der Streckung F , wodurch es in ein dreiblättriges elliptisches Flächenstück S^* übergeführt wird, und nachträglich S^* der Abbildung Φ^{-1} , so wird dadurch eine quasikonforme Abbildung f des schlichten Einheitskreises auf ein schlichtes dreizipfliges Gebiet (das man noch konform auf den Einheitskreis $|w| < 1$ abbilden kann) induziert. Es ist leicht zu sehen (und wird aus unserem Satz folgen), daß diese Abbildung f für die durch sie induzierte Randabbildung einzige Extremale ist. Der Beweis von Satz 1 besagt jedoch nur, daß $F: R^* \rightarrow S^*$ unter allen quasikonformen Abbildungen H von R^* auf die gestreckte Fläche S^* , die auf dem Rande mit F übereinstimmen, die kleinste maximale Dilatation hat. Wenn wir nun f mit einer andern quasikonformen Abbildung h gleichen Randverhaltens

vergleichen wollen, liegt es nahe, diese auf die Quadratwurzelflächen über $|z| < 1$ und $|w| < 1$ «hinaufzudrücken» und dann den Vergleich auf R^* durchzuführen. Aber das kann man nur, wenn $h(0) = 0$ ist, das heißt der Verzweigungspunkt auf den Verzweigungspunkt abgebildet wird. Man möchte jedoch f mit allen h , die nur auf dem Rande mit f übereinstimmen, vergleichen.

Ein Horizontalquerschnitt γ^* von R^* wird durch F auf einen Horizontalquerschnitt $F(\gamma^*)$ von S^* der K -fachen Länge und durch eine Vergleichsabbildung H auf eine Kurve von mindestens der K -fachen Länge abgebildet, da sie dieselben Endpunkte auf S^* hat wie $F(\gamma^*)$. Im Falle eines beliebigen h wird man $\Phi^{-1}(\gamma^*)$ im Einheitskreis nehmen und deren h -Bild auf die Quadratwurzelfläche über der w -Ebene hinaufdrücken. Die entsprechende Kurve auf S^* ist wegen der zwei Blätter nicht eindeutig bestimmt, aber ihre Länge ist es, und man kontrolliert leicht, daß diese mindestens gleich der Länge von $F(\gamma^*)$ ist, auch wenn die Kurve nicht dieselben Endpunkte wie $F(\gamma^*)$ besitzt. Diese Sachlage gestattet es, die Methode der SCHWARZschen Ungleichung auch hier anzuwenden.

3. O. TEICHMÜLLER [6] hat die extremale quasikonforme Abbildung des Einheitskreises auf sich bestimmt, die jeden Randpunkt festhält, aber den Nullpunkt in einen gegebenen Punkt $w_0 \neq 0$ überführt. Die Abbildung Φ bildet die zweiblättrige Überlagerungsfläche des Einheitskreises mit Windungspunkt im Nullpunkt, Ψ diejenige mit Windungspunkt im Punkte w_0 je auf eine schlichte Ellipse R^* beziehungsweise S^* ab, die einander durch F entsprechen. Die gesuchte Abbildung ist $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$. (Die Zweideutigkeit von Φ wird durch Ψ wieder aufgehoben.) Eine Vergleichsabbildung h mit $h(0) = w_0$ induziert durch «Hinaufdrücken» eine Abbildung H von R^* auf S^* , die mit F auf dem Rande von R^* übereinstimmt, und hat daher größere maximale Dilatation als f , außer wenn $h = f$ ist. Es ist jedoch leicht zu sehen, daß in diesem Falle für Abbildungen h mit $h(0) \neq w_0$ die Länge des Bildes eines Horizontalquerschnittes γ^* von R^* kleiner als das K -fache der Länge von γ^* sein kann.

4. In diesem II. Teil wird der Satz 1 auf TEICHMÜLLERSche Abbildungen verallgemeinert. Die Bezeichnungsweise ist gegenüber der früheren Arbeit, deren Kenntnis nicht erforderlich ist, etwas anders gewählt.

TEICHMÜLLERSche Abbildungen

5. Wir bezeichnen mit T die Menge aller topologischen Abbildungen f von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$, die mit Ausnahme höchstens isolierter Punkte von der Form «konform \circ affin \circ konform» sind. Das bedeutet: Mit Ausnahme einer

Punktmenge, die sich höchstens gegen $|z| = 1$ häuft, besitzt jeder Punkt des Einheitskreises eine Umgebung U , so daß in U und $V = f(U)$ je eine eindeutige konforme Abbildung $\Phi = \Phi_U$ beziehungsweise $\Psi = \Psi_V$ und eine affine Abbildung $F = F_U$ existieren, für welche in U gilt $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$.

Mit f ist auch f^{-1} eine Abbildung dieser Klasse (von $|w| < 1$ auf $|z| < 1$).

Sind U_1 und U_2 zwei ausgezeichnete Umgebungen mit nicht-leerem Durchschnitt und F_1 und F_2 entsprechende affine Abbildungen mit den Dilatationen K_1 beziehungsweise K_2 , so ist im gemeinsamen Teil $U_1 \cap U_2$ die Abbildung f sowohl K_1 als auch K_2 -quasikonform, und es muß daher $K_1 = K_2$ sein. Da man zwei beliebige ausgezeichnete Umgebungen durch eine zusammenhängende Kette von solchen miteinander verbinden kann, müssen alle lokalen affinen Abbildungen dieselbe Dilatation K haben. f ist somit eine K -quasikonforme Abbildung von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$. Man kann die lokalen konformen Abbildungen Φ und Ψ durch zusätzliche Ähnlichkeits-transformationen so abändern, daß F die Form bekommt

$$w^* = F(z^*) = Kx^* + iy^* \quad (K \geq 1)$$

und damit von der Umgebung U unabhängig wird.

Sei nun $K > 1$. Die Urbilder der Horizontalen $y^* = \text{konst}$ mittels der lokalen konformen Abbildung Φ_1 sind die Linien größter Richtungsableitung von f in U_1 . Dasselbe gilt für Φ_2 in U_2 . Im Durchschnitt $U_1 \cap U_2$ müssen daher Φ_1 und Φ_2 gleich sein bis auf eine Ähnlichkeit mit reellem Koeffizienten $\lambda \neq 0$: $\Phi_2 = \lambda\Phi_1 + \mu$. Sind Ψ_1 und Ψ_2 die Φ_1 beziehungsweise Φ_2 entsprechenden lokalen konformen Abbildungen von $V_1 = f(U_1)$ beziehungsweise $V_2 = f(U_2)$, so besteht eine ebensolche Beziehung zwischen Ψ_1 und Ψ_2 , und wegen

$$\Psi_2 = F(\Phi_2) = F(\lambda\Phi_1 + \mu) = \lambda F(\Phi_1) + F(\mu) = \lambda\Psi_1 + F(\mu)$$

erhalten wir denselben Koeffizienten λ und die additive Konstante $\nu = F(\mu)$. Wählt man nun an Stelle des lokalen Abbildungspaares (Φ_2, Ψ_2) in den Umgebungen U_2, V_2 das Paar $(\tilde{\Phi}_2, \tilde{\Psi}_2) = \left(\frac{1}{\lambda}(\Phi_2 - \mu), \frac{1}{\lambda}(\Psi_2 - \nu)\right)$, so stimmen die neuen lokalen Abbildungen in den Durchschnitten $U_1 \cap U_2$ beziehungsweise $V_1 \cap V_2$ mit den alten überein. Ein beliebiges Paar (Φ_1, Ψ_1) von zusammengehörenden konformen Abbildungselementen kann demnach in den beiden punktierten Einheitskreisen $|z| < 1$ und $|w| < 1$ unbegrenzt fortgesetzt werden. Die einander entsprechenden Abbildungselemente werden dadurch zu Funktionselementen je einer *i. A. mehrdeutigen analytischen Funktion*, die wir wieder mit Φ beziehungsweise Ψ bezeichnen. Die Bildflächen nennen wir R^* beziehungsweise S^* . Die Abbildung f hat nun die Darstellung

$f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ im großen. Das Paar (Φ, Ψ) ist durch f bis auf eine Transformation $\lambda\Phi + \mu, \lambda\Psi + \nu$, wo $\lambda \neq 0$ reell und $\nu = F(\mu)$ ist, eindeutig bestimmt.

6. Setzt man ein Funktionselement Φ_1 von Φ längs einem geschlossenen Weg γ , der die Ausnahmepunkte meidet, und das entsprechende Element Ψ_1 von Ψ längs $f(\gamma)$ fort, so geht es in $\lambda\Phi_1 + \mu$ beziehungsweise $\lambda\Psi_1 + \nu$ ($\nu = F(\mu)$) über. Wählt man an Stelle von Φ_1 ein anderes Ausgangselement $\Phi_2 = \lambda_1\Phi_1 + \mu_1$, so geht dieses bei der Fortsetzung längs γ über in $\lambda_1(\lambda\Phi_1 + \mu) + \mu_1 = \lambda(\lambda_1\Phi_1 + \mu_1) + \mu_1(1 - \lambda) + \lambda_1\mu = \lambda\Phi_2 + \mu_1(1 - \lambda) + \lambda_1\mu$, das heißt der Koeffizient λ hängt nur vom Weg, nicht aber von der Wahl des Ausgangselementes ab. *Wir setzen nun voraus, daß $\lambda = \pm 1$ sei für jeden solchen Weg γ . Das ist für Φ und Ψ gleichzeitig der Fall, und es ist gleichbedeutend damit, daß $\varphi = \Phi'^2$ und $\psi = \Psi'^2$ eindeutige analytische Funktionen sind in den punktierten Einheitskreisen.*

Ist $z_0, w_0 = f(z_0)$ ein Paar von Ausnahmepunkten, und setzen wir die einander entsprechenden Zweige Φ_1, Ψ_1 in hinreichend kleinen Umgebungen U und $V = f(U)$ der Punkte z_0, w_0 unbegrenzt fort, so sind wegen der Darstellung $f = \Psi_1^{-1} \circ F \circ \Phi_1$ beide Zweige zugleich beschränkt oder unbeschränkt. Bei einmaligem Umlauf von z_0 beziehungsweise w_0 gehen sie über entweder in $\Phi_1 + \mu, \Psi_1 + \nu$ oder in $-\Phi_1 + \mu, -\Psi_1 + \nu$, wo $\nu = F(\mu)$ ist. Ist die Konstante $\mu = 0$ und $\lambda = 1$ für einen Zweig von Φ , so ist sie es für alle; dann ist auch $\nu = 0$.

Φ_1 ist dann und nur dann beschränkt in U , wenn φ an der Stelle z_0 regulär ist oder höchstens einen Pol 1. Ordnung besitzt. Ist nämlich Φ_1 beschränkt, so muß im ersten Falle $\mu = 0$ sein und daher Φ_1 eindeutig in U und gleich einer Potenzreihe in $z - z_0$, woraus die Regularität von φ folgt. Im zweiten Fall ist Φ_1 eine eindeutige Funktion von $\zeta = \sqrt{z - z_0}$ (Φ_1 reproduziert sich bei zweimaligem Umlauf) und, da beschränkt, eine Potenzreihe in ζ . Daraus folgt offenbar, daß $\left(\frac{d\Phi_1}{dz}\right)^2 = \left(\frac{d\Phi_1}{d\zeta} \frac{1}{2\sqrt{z - z_0}}\right)^2$ höchstens einen Pol erster Ordnung hat. Die Umkehrung ist evident, denn aus

$$\varphi(z) = (z - z_0)^n (a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \dots), \quad n \geq -1, \quad a_n \neq 0$$

folgt

$$\Phi(z) = (z - z_0)^{\frac{n+2}{2}} (c_0 + c_1(z - z_0) + \dots), \quad c_0 \neq 0$$

Es sind dann offenbar alle Zweige von Φ und Ψ über U beziehungsweise V beschränkt. Die Entwicklung von ψ im Punkte w_0 hat die Form

$$\psi(w) = (w - w_0)^m (b_m + b_{m+1}(w - w_0) + \dots), \quad m \geq -1, \quad b_m \neq 0$$

und

$$\Psi(w) = (w - w_0)^{\frac{m+2}{2}} (d_0 + d_1(w - w_0) + \dots), \quad d_0 \neq 0.$$

Wir wollen zeigen, daß $m = n$ ist. Der Fall $\Phi_1 \rightarrow \Phi_1 + \mu$, $\Psi_1 \rightarrow \Psi_1 + \nu$ entspricht offenbar geraden Werten n und m , der Fall $\Phi_1 \rightarrow -\Phi_1 + \mu$, $\Psi_1 \rightarrow -\Psi_1 + \nu$ ungeraden. Die Exponenten m und n sind daher beide gerade oder beide ungerade. Bei geradem n wird eine einblättrige Umgebung von z_0 durch Φ_1 auf eine $\frac{n+2}{2}$ -blättrige von $\Phi_1(z_0)$ abgebildet, und da bei F die Blätterzahl unverändert bleibt, muß der Exponent $m = n$ sein. Bei ungeradem n wird eine zweiblättrige Umgebung von z_0 auf eine $n+2$ -blättrige abgebildet, und es muß daher aus demselben Grunde $m = n$ sein.

Eine beliebige K -quasikonforme Abbildung $w(z)$ besitzt fast überall ein totales Differential $dw = pdz + \overline{qdz}$, und der Betrag der komplexen Dilatation $\kappa = \frac{q}{p}$ ist $|\kappa| \leq k = \frac{K-1}{K+1}$. Zwei quasikonforme Abbildungen mit fast überall derselben komplexen Dilatation unterscheiden sich nur um eine konforme Transformation des Bildgebietes (LEHTO & VIRTANEN [2]). Die komplexe Dilatation unserer Abbildung f ist außer in den kritischen Punkten von f gleich $\kappa_f = k \frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}$. Sei nun umgekehrt φ bis auf Pole höchstens erster Ordnung regulär in $|z| < 1$, $0 < k < 1$, und f quasikonform mit der komplexen Dilatation $\kappa = k \frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}$. Wir betrachten im Einheitskreis der z -Ebene eine hinreichend kleine Umgebung U , die keinen kritischen Punkt von φ (Pol oder Nullstelle) enthält und $V = f(U)$. U wird durch einen Zweig von $\Phi = \int \sqrt{\varphi(z)} dz$ konform auf eine schlichte Umgebung U^* in der z^* -Ebene abgebildet, die wir der Horizontalstreckung F mit der Dilatation K unterwerfen. Das Bild sei V^* . Die Abbildung $F \circ \Phi$ von U auf V^* hat die komplexe Dilatation $k \frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}$, und es gibt daher eine konforme Abbildung Ψ von V auf V^* , so daß in U $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ ist. f ist daher von der Form $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ im großen, mit $\Phi'^2 = \varphi$.

Definition: Unter einer TEICHMÜLLERSchen Abbildung f von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$ verstehen wir eine quasikonforme Abbildung mit der komplexen Dilatation $k \frac{\overline{\varphi}}{|\varphi|}$, wo φ bis auf Pole 1. Ordnung in $|z| < 1$ regulär analytisch und $0 \leq k < 1$ ist.¹⁾ Ist insbesondere φ regulär, so nennen wir f regulär.

¹⁾ Wenn man nicht einen einheitlichen Parameter z hat, wie das hier der Fall ist, so ist das quadratische Differential φdz^2 die invariante Größe.

7. Wir betrachten nun speziell reguläre TEICHMÜLLERSche Abbildungen. Ist Φ eindeutig, so ist

$$\iint_{|z|<1} |\Phi'|^2 dx dy = \iint_{|z|<1} |\varphi| dx dy$$

gleich dem Inhalt der Bildfläche R^* über der z^* -Ebene, und die Endlichkeit dieses Integrals, die nur von f abhängt, ist hinreichend dafür, daß f einzige Extremale ist. Wir wollen nun zeigen, daß das auch im allgemeinen Falle gilt. Die geometrische Bedeutung von $\iint_{|z|<1} |\varphi| dx dy$ ist evident: Zerlegt man den Einheitskreis in ein oder mehrere einfach zusammenhängende Gebiete G_j , die keine kritischen Stellen (= Nullstellen) von φ im Innern enthalten, und so, daß die gesamte Berandung den Flächeninhalt null hat – zum Beispiel in ein Gebiet, indem man von den kritischen Stellen aus zum Rand $|z| = 1$ radial aufschlitzt – so kann man in jedem derselben einen eindeutigen Zweig von Φ auswählen. Das Integral $\iint_{G_j} |\Phi'|^2 dx dy = \iint_{G_j} |\varphi| dx dy$ ist von der Wahl dieses Zweiges unabhängig und $\iint_{|z|<1} |\varphi| dx dy$ gibt den Gesamtflächeninhalt der Bilder aller G_j durch die Zweige Φ .

Satz: Eine reguläre TEICHMÜLLERSche Abbildung f von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$ mit endlichem $\iint_{|z|<1} |\varphi| dx dy$ ist für die durch sie induzierte Randabbildung die einzige extremale quasikonforme Abbildung.

Die Metrik $|\varphi|^{\frac{1}{2}} |dz|$

8. Sei $\varphi(z)$ analytisch im Einheitskreis. Wir betrachten die Metrik $|\varphi|^{\frac{1}{2}} |dz|$.²⁾ Die lokalen Eigenschaften der Geodätischen findet man am bequemsten, wenn man in der Umgebung des interessierenden Punktes z_0 die Abbildung $z^* = \Phi(z) = \int_{z_0}^z \sqrt{\varphi(z)} dz$ einführt, womit $|dz^*| = \left| \frac{d\Phi}{dz} \right| |dz| = |\varphi|^{\frac{1}{2}} |dz|$ wird. Auf dem Flächenstück R^* existiert die kürzeste Verbindung zweier hinreichend nahe am Nullpunkt gelegenen Punkte stets und ist eindeutig bestimmt: Sie besteht aus der Verbindungsstrecke, falls die beiden Punkte im selben Halbblatt liegen, und sonst aus den beiden Verbindungsstrecken zum Windungspunkt. Bei ungeradem n sind dabei Punkte auf R^* , deren Argumente sich um $(2 + n)\pi$ unterscheiden, als gleichwertig zu betrachten, da ihre Urbilder übereinanderliegen. Daraus folgt auch, daß zwei Teilbogen einer geodätischen Linie stets mindestens einen Winkel von $\frac{2\pi}{n+2}$ bilden.

²⁾ Die Sätze dieser Nr. finden sich in der Literatur und sind hier nur der Vollständigkeit halber wiedergegeben. Siehe zum Beispiel AHLFORS [1], S. 28/29.

Ist γ eine rektifizierbare Jordankurve in $|z| < 1$, die mindestens an den Nullstellen z_k von φ einseitige Tangenten besitzt, deren innere Zwischenwinkel wir mit ω_k bezeichnen, so ergibt das Argumentprinzip

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d \arg \varphi(z) = \sum_j n_j + \sum_k \frac{\omega_k}{2\pi} n_k,$$

wobei die n_j die Vielfachheiten der inneren Nullstellen von φ und die n_k diejenigen der Nullstellen z_k auf dem Rande γ sind: Nullstellen auf dem Rande sind nur zu einem Teil, nämlich mit dem Bruchteil des inneren Winkels von 2π zu rechnen. (Sind auch Pole vorhanden, so sind deren Vielfachheiten mit Minuszeichen mitzunehmen.)

Unter einem *geodätischen Polygonzug* verstehen wir eine Kurve, deren Seiten geodätische Linien sind, die nicht durch kritische Punkte von φ gehen. Die «Ecken» sind die kritischen Stellen von φ und dazu beliebige weitere Punkte, aber höchstens endlich viele. Ein *geodätisches Polygon* ist außerdem eine Jordankurve. Längs einer Seite eines geodätischen Polygons ist offenbar das Argument von $d\Phi^2 = \varphi dz^2 = \text{konst}$ und daher $d(\arg \varphi) = -2d(\arg dz)$. Da die gesamte Drehung des Argumentes von dz auf den Seiten $2\pi - \sum_k (\pi - \omega_k)$ ist, erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} d(\arg \varphi) = \sum_j n_j + \sum_k \frac{\omega_k}{2\pi} n_k = -\frac{1}{\pi} (2\pi - \sum_k (\pi - \omega_k))$$

und daraus die Winkelrelation

$$2 + \sum_j n_j = \sum_k \left(1 - \frac{1}{2\pi} \omega_k (2 + n_k) \right)$$

und die Ungleichung $\sum_k \left(1 - \frac{1}{2\pi} \omega_k (2 + n_k) \right) \geq 2$.

Aus dieser Ungleichung schließt man leicht, daß sich zwei Punkte z_1 und z_2 höchstens durch eine geodätische Linie verbinden lassen. Sind nämlich γ_1 und γ_2 zwei kürzeste Verbindungskurven von z_1 und z_2 , die nicht zusammenfallen, so gibt es zwei Punkte z'_1 und z'_2 , die beide sowohl auf γ_1 als auch auf γ_2 liegen, aber so, daß die beiden Verbindungsbogen dieser Punkte ein geodätisches Polygon bilden. Wenden wir auf dieses die obige Ungleichung an, so ergibt sich ein Widerspruch, da alle Winkel $\omega_k \geq \frac{2\pi}{n_k + 2}$ sind, außer höchstens bei z'_1 und z'_2 , wo sie aber jedenfalls noch positiv sind.

Bei diesem Eindeutigkeitsbeweis benützt man nur, daß γ_1 und γ_2 lokal geodätisch sind. Eine Kurve heißt lokal geodätisch, wenn jeder Punkt eine Umgebung besitzt, in der sie zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte die kürzeste Verbindung darstellt. Wir haben somit bewiesen:

Lemma 1: *Zwei Punkte z_1 und z_2 lassen sich höchstens durch eine lokal geodätische Linie verbinden.*

Dies gilt auch, wenn $z_1 = z_2$ ist. *Eine geschlossene Linie, die außerhalb höchstens eines ihrer Punkte lokal geodätisch ist, reduziert sich auf diesen Punkt.* Ist nämlich z_1 dieser Punkt, so könnte man andernfalls einen weiteren Teilungspunkt z_2 einführen. Die Kurve müßte dann aus einem einzigen Verbindungsbogen der Punkte z_1 und z_2 bestehen und wäre bei z_2 nicht lokal geodätisch. Das ist jedoch nur eine scheinbare Verschärfung des Eindeutigkeitssatzes, wie das folgende Lemma zeigt.

9. Lemma 2: *Eine Verbindungskurve γ zweier Punkte z_1 und z_2 , die lokal geodätisch ist, ist es auch im großen.*

Beweis: Sei γ eine lokal geodätische Verbindungslinie von z_1 und z_2 und $\tilde{\gamma}$ eine beliebige weitere Verbindungskurve. Es ist zu zeigen, daß die Länge $|\tilde{\gamma}| \geq |\gamma|$ ist. Wir dürfen die Kurve $\tilde{\gamma}$ als geodätischen Polygonzug voraussetzen, da wir sie sonst hinreichend fein unterteilen und die einzelnen Intervalle durch lokale Geodätische ersetzen könnten; dabei würde die Länge höchstens verkleinert.

Wir wählen z'_1 und z'_2 so, daß sie auf beiden Kurven liegen und die Zwischenstücke keine weiteren Punkte gemeinsam haben. Da eventuell vorhandene gemeinsame Stücke von γ und $\tilde{\gamma}$ gleiche Länge haben, genügt es, die Ungleichung für solche Jordanpolygone zu beweisen und dann aufzusummieren. Wir können also zum vorneherein voraussetzen, daß γ und $\tilde{\gamma}$ zusammen ein geodätisches Polygon bilden. Unter allen Verbindungskurven von z_1 und z_2 , die in der abgeschlossenen Hülle \bar{G} des Innengebietes G dieses Polygons liegen, gibt es eine kürzeste. Ist nämlich $l_0 > 0$ die untere Grenze der Längen aller in \bar{G} gelegenen Verbindungskurven, so gibt es jedenfalls eine Minimalfolge γ_n , $l_n = |\gamma_n| \rightarrow l_0$. Sei $g_n(t)$, $0 \leq t \leq 1$, die Parameterdarstellung von γ_n , wobei der Parameter $t = \frac{s_n}{l_n}$ und s_n die Bogenlänge ist. Jeder Punkt $z \in \bar{G}$ ist Mittelpunkt eines geodätischen Kreises in $|z| < 1$ von einem Radius ρ (entsprechend einer Kreisumgebung in der Φ -Ebene), so daß auch der Kreis mit dem Radius 2ρ außer höchstens z keinen kritischen Punkt von φ enthält. Durch endlich viele solcher Umgebungen U können wir \bar{G} überdecken und dann eine Unterteilung des Parameterintervalles in gleiche Teile so vornehmen, daß das g_n -Bild jedes Teilintervalles für jedes n ganz in einem \bar{U} liegt. Die Teilungspunkte bezeichnen wir mit t_j , und wir können eine Teilfolge der g_n finden, die auf den t_j konvergiert; die Limites nennen wir z_j . Diese z_j verbinden wir nun mit den benachbarten Punkten durch die lokale Geodätische,

falls die betreffende Umgebung ganz in \bar{G} liegt; andernfalls durch die kürzeste Verbindung in $\bar{U} \cap \bar{G}$, die offenbar auch existiert. Wir erhalten dadurch einen geodätischen Polygonzug γ_0 , der z_1 mit z_2 in \bar{G} verbindet, und dessen Länge daher $|\gamma_0| \geq l_0$ ist. Andererseits ist diese für hinreichend große n offensichtlich beliebig wenig größer als $|\gamma_n|$, woraus $|\gamma_0| = l_0$ folgt.

γ_0 ist natürlich ein Jordanbogen und hat daher zwei Seiten. Wir bezeichnen die Winkel auf der Seite von γ als die inneren. Wir dürfen auf γ_0 zusätzliche Teilungspunkte wählen, so daß die Seiten lokale geodätische werden, die keinen kritischen Punkt von φ enthalten. Sei z_0 nun eine Ecke von γ_0 . Wäre der innere Winkel $\omega_0 < \frac{2\pi}{n_0 + 2}$, so könnte z_0 nicht auf γ liegen, und man könnte daher einen Bogen von γ_0 , der z_0 enthält, durch einen kürzeren ersetzen, der auch in \bar{G} liegt, was auf Grund der Konstruktion von γ_0 nicht sein kann. Es sind daher alle inneren Winkel $\geq \frac{2\pi}{n_j + 2}$ und man schließt wie oben, daß $\gamma = \gamma_0$ sein muß. Daraus folgt wegen $|\gamma_0| \leq |\tilde{\gamma}|$, daß $|\gamma| \leq |\tilde{\gamma}|$, q. e. d.

Korollar: Das Urbild $\gamma = \Phi^{-1}(\gamma^*)$ einer Geraden γ^* auf R^* , die durch keinen Windungspunkt von R^* geht, ist durch $\arg(d\Phi)^2 = \arg \varphi dz^2 = \text{konst}$ ausgezeichnet. γ heißt insbesondere eine Trajektorie oder orthogonale Trajektorie von φ , wenn dieses Argument gleich 0 beziehungsweise π , das heißt $\varphi dz^2 > 0$ beziehungsweise < 0 ist. *Eine solche Linie ist zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte geodätisch.*

Geometrische Hilfsbetrachtungen

10. Jede Trajektorie γ ist ein Querschnitt von $|z| < 1$. Nach Lemma 1 kann γ keinen Doppelpunkt haben und ist daher ein offener Jordanbogen. Die beiden Enden von γ haben keinen Häufungspunkt in $|z| < 1$. Wäre nämlich z_0 ein solcher Häufungspunkt, so gäbe es eine Folge von Punkten z_n^* auf γ^* , die gegen den Rand von R^* gehen, und deren Urbilder $z_n = \Phi^{-1}(z_n^*)$ nach z_0 streben. Wir wählen eine Umgebung U von z_0 so klein, daß darin zwei beliebige Punkte sich geodätisch verbinden lassen, und m und $n \neq m$ so groß, daß $z_m \in U$, $z_n \in U$, aber der Verbindungsbogen von z_m und z_n nicht ganz in U liegt. Dieser ist eine von der lokalen kürzesten Verbindung verschiedene lokal geodätische Linie zwischen z_m und z_n , im Widerspruch zu Lemma 1.

11. Wir betrachten ein senkrechtes offenes Intervall β^* auf R^* , das keinen Windungspunkt von R^* trifft, und ziehen von den Punkten von β^* aus die Horizontalen γ^* bis zum nächsten Windungspunkt beziehungsweise bis zum Rand von R^* . Wir erhalten auf diese Weise ein offenes, einfach zusammenhängendes, über der z^* -Ebene schlichtes Gebiet G^* auf R^* , das wir einen *offenen Horizontalstreifen* (den zu β^* gehörigen) nennen wollen. $G = \Phi^{-1}(G^*)$ ist ein schlichtes Gebiet des Einheitskreises. Gäbe es nämlich zwei Punkte z_1^* und $z_2^* \neq z_1^*$ in G^* , die auf denselben Punkt z abgebildet werden, so könnten vorerst z_1^* und z_2^* nicht auf derselben Horizontalen liegen, sonst wäre das Φ -Urbild des Intervalles $z_1^* \dots z_2^*$ eine geschlossene Trajektorie. Liegen sie auf verschiedenen Horizontalen, so betrachten wir das Zwischenintervall auf β^* . Dessen Urbild ist eine orthogonale Trajektorie, deren beide Endpunkte auf der Trajektorie durch den Punkt z liegen, was wieder einen Widerspruch gegen Lemma 1 bedeutet. $G = \Phi^{-1}(G^*)$ besteht aus einer orthogonalen Trajektorie β und den durch ihre Punkte gehenden Trajektorien, wobei jedoch kritische Punkte von φ nicht überschritten werden.

Unter einem *Horizontalstreifen* E^* verstehen wir eine Teilmenge von Horizontalen eines offenen Streifens, deren Ordinaten eine meßbare Teilmenge von β^* darstellen. Auch für diese gilt daher, daß $E = \Phi^{-1}(E^*)$ schlicht ist in $|z| < 1$. Dem Streifen E^* ordnen wir eine Funktion $l(y^*)$ zu: Ihr Wert ist gleich der Länge der Horizontalen in E^* mit der Ordinate y^* , wenn es eine solche gibt, sonst null. Wegen $\iint_{E^*} \left| \frac{d\Phi^{-1}}{dz^*} \right|^2 dx^* dy^* \leq \pi$ folgt aus der SCHWARZSchen Ungleichung, daß fast alle Urbilder der Horizontalen eines Streifens endliche Länge, und daher um so mehr konvergente Enden haben. Das Flächenmaß eines Streifens ist $\iint_E |\Phi'|^2 dx dy \leq \iint_{|z| < 1} |\varphi| dx dy < \infty$.

12. Auf der Fläche R^* läßt sich eine Folge außerhalb voneinander liegender Streifen E_n^* angeben, deren Urbilder $E_n = \Phi^{-1}(E_n^*)$ keine gemeinsamen Punkte haben und $|z| < 1$ bis auf eine Punktmenge vom Maße null (sogar bis auf die kritischen Punkte von φ) ausschöpfen. Zum Beweis wählen wir auf R^* eine überall dichte, abzählbare Punktmenge $\{P_j^*\}$ und durch jedes P_j^* eine offene Vertikalstrecke β_j^* (die wir etwa bis zum Rande oder bis zum nächsten Windungspunkt verlängern). Zu jeder dieser Strecken konstruieren wir den offenen Horizontalstreifen G_j^* ; offenbar liegt jeder Punkt $P^* \in R^*$, der kein Windungspunkt ist, in mindestens einem G_j^* , und daher jeder nicht-kritische Punkt von $|z| < 1$ in einem G_j . Wir zerlegen nun $|z| < 1$ in der folgenden Weise:

$$G_1 + (G_2 - G_1) + (G_3 - (G_1 \cup G_2)) + \dots + (G_n - (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{n-1})) + \dots$$

Die $E_n = G_n - (G_1 \cup G_2 \cup \dots \cup G_{n-1})$ sind offenbar getrennt und schöpfen

$|z| < 1$ bis auf die kritischen Punkte von φ aus. Ist $z \in G_n \cap G_m$, so gilt dies für alle Trajektorien, die durch eine Umgebung von z gehen, und daher ist der Teil E_n^* von G_n^* , der durch Φ^{-1} auf E_n abgebildet wird, offenbar ein Streifen. Das sind die gesuchten Streifen E_n^* .

Der Eindeutigkeitsbeweis

13. Sei $f = \Psi^{-1} \circ F \circ \Phi$ eine reguläre TEICHMÜLLERSche Abbildung von $|z| < 1$ auf $|w| < 1$ mit endlichem $\iint_{|z|<1} |\varphi| dx dy$ und h eine Vergleichsabbildung. Mit γ_z bezeichnen wir eine konvergente Trajektorie von φ . Die Kurve $f(\gamma_z) = \gamma_w$ ist dann eine konvergente Trajektorie von Ψ , denn sie ist das Ψ -Urbild eines Horizontalquerschnittes von S^* und konvergiert, weil f quasikonform ist. Das h -Bild von γ_z , das wir mit $h(\gamma_z) = \tilde{\gamma}_w$ bezeichnen, ist ein Querschnitt von $|w| < 1$ mit den selben Endpunkten wie γ_w . Da $|dw^*| = \left| \frac{d\Psi}{dw} \right| |dw| = |\psi|^{\frac{1}{2}} |dw|$ eindeutig ist, hat $\tilde{\gamma}_w$ in dieser Metrik eine bestimmte Länge (die $= \infty$ sein kann). Wir erhalten sie, indem wir ein (nicht eindeutig bestimmtes) Ψ -Bild von $\tilde{\gamma}_w$ betrachten und die Länge desselben in der Metrik der w^* -Ebene messen. Wir können uns etwa auf diejenigen γ_w beschränken, die durch keinen kritischen Punkt von ψ gehen, indem wir nur Trajektorien zulassen, die die h -Urbilder der kritischen Punkte von ψ in $|z| < 1$ meiden. Für diese Länge gilt $|\tilde{\gamma}_w| = \int_{\tilde{\gamma}_w} |\psi|^{\frac{1}{2}} |dw| \geq |\gamma_w|$.

Zum Beweis benützen wir Lemma 2 und die Forderung, daß $\iint |\varphi| dy dx < \infty$ ist. Die Trajektorie γ_w ist zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte Geodätische. Sei w_0 ein Endpunkt von γ_w . Wir betrachten die von den Punkten von γ_w ausgehenden Bogen auf den Kreisen $|w - w_0| = \varrho$, solange sie in $|w| < 1$ liegen und keinen kritischen Punkt von ψ treffen. Fast alle haben einen Punkt mit $\tilde{\gamma}_w$ gemeinsam. Ihre Länge, gemessen in der Metrik $|\psi|^{\frac{1}{2}} |dw|$, bezeichnen wir mit $L(\varrho) = \int |\psi|^{\frac{1}{2}} |dw| = \int |\psi|^{\frac{1}{2}} \varrho d\vartheta$. Aus der SCHWARZschen Ungleichung ergibt sich auf bekannte Weise

$$L^2(\varrho) \leq \varrho \pi \int |\psi| \varrho d\vartheta$$

und daraus

$$\int_0^1 \frac{L^2(\varrho)}{\varrho} d\varrho \leq \pi \cdot \iint_{|w|<1} |\psi| \varrho d\varrho d\vartheta = \pi \cdot K \iint_{|z|<1} |\varphi| dx dy < \infty.$$

Daher gibt es für beliebig kleine Werte von ϱ beliebig kurze Verbindungsbogen von γ_w und $\tilde{\gamma}_w$. Daraus folgt offenbar $|\tilde{\gamma}_w| \geq |\gamma_w|$.

14. Das totale Differential $dw = pdz + q\bar{dz}$ der Abbildung h existiert fast überall in $|z| < 1$. Lokal lassen sich die drei Abbildungen Φ^{-1} , h , Ψ außerhalb der kritischen Punkte von φ und ψ zusammensetzen; dabei existiert das Differential $dw^* = p^*dz^* + q^*\bar{dz}^*$ der Zusammensetzung fast überall auf R^* und ist bis auf das Vorzeichen eindeutig bestimmt. Der Flächeninhalt der Vereinigungsmenge der Streifen E_j^* , gemessen in dieser Metrik, ist offenbar

$$\iint_{\sum_j E_j^*} (|p^*|^2 - |q^*|^2) dx^* dy^* = \iint_{|w| < 1} |\psi| du dv = K \iint_{|z| < 1} |\varphi| dx dy =: K \sum_j |E_j^*|,$$

währendem die Länge $L_j(y^*)$ eines Horizontalquerschnittes von E_j^* nach obigem für fast alle y^*

$$L_j(y^*) = \int |dw^*| = \int |p^* + q^*| dx^* \geq K l_j(y^*)$$

wird, wo $l_j(y^*)$ die Länge der Horizontalen von E_j^* in der Metrik der zu Grunde liegenden z^* -Ebene bedeutet. Wenden wir nun die Methode der SCHWARZSchen Ungleichung auf die Vereinigung der Streifen E_j^* an, so erhalten wir folgendes:

$$K \sum_j \int l_j(y^*) dy^* \leq \iint_{\sum_j E_j^*} |p^* + q^*| dx^* dy^*,$$

daraus mittels der SCHWARZSchen Ungleichung

$$\begin{aligned} K^2 (\sum_j |E_j^*|)^2 &\leq \left(\iint_{\sum_j E_j^*} |p^* + q^*| dx^* dy^* \right)^2 \leq \\ &\iint_{\sum_j E_j^*} (|p^*|^2 - |q^*|^2) dx^* dy^* \iint_{\sum_j E_j^*} \frac{|p^* + q^*|^2}{|p^*|^2 - |q^*|^2} dx^* dy^* \\ &= K (\sum_j |E_j^*|) \iint_{\sum_j E_j^*} \frac{|1 + \kappa^*|^2}{1 - |\kappa^*|^2} dx^* dy^*. \end{aligned}$$

Hier ist $\kappa^* = \frac{q^*}{p^*}$ die eindeutig bestimmte komplexe Dilatation des Differentials $dw^* = p^*dz^* + q^*\bar{dz}^* = p^*\bar{\Phi}'(z)dz + q^*\bar{\Phi}'(z)\bar{dz}$. Aus $dw^* = \frac{dw^*}{dw} dw = \Psi'(w)(pdz + q\bar{dz})$ folgt $\kappa = \frac{q}{p} = \frac{q^*\bar{\Phi}'(z)}{p^*\bar{\Phi}'(z)} = \kappa^* \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|}$ und daher $|\kappa^*| = |\kappa| \leq \tilde{k}$ fast überall, wobei $\tilde{K} = \frac{1 + \tilde{k}}{1 - \tilde{k}}$ die maximale Dilatation der Abbildung h bedeutet. Die Abschätzung

$$|1 + \kappa^*|^2 = 1 + |\kappa^*|^2 + 2\operatorname{Re} \kappa^* \leq (1 + \tilde{k})^2 - 2(\tilde{k} - \operatorname{Re} \kappa^*)$$

ergibt

$$\frac{|1 + \kappa^*|^2}{1 - |\kappa^*|^2} \leq \tilde{K} - \frac{2}{1 - \tilde{k}^2} (\tilde{k} - \operatorname{Re} \kappa^*)$$

und damit

$$K^2(\Sigma | E_j^* |)^2 \leq K(\Sigma | E_j^* |) \left(\tilde{K}(\Sigma | E_j^* |) - \frac{2}{1 - \tilde{k}^2} \iint_{\Sigma E_j^*} (\tilde{k} - \operatorname{Re} \kappa^*) dx^* dy^* \right) \leq \\ \leq K \tilde{K}(\Sigma | E_j^* |)^2.$$

Daraus folgt $K \leq \tilde{K}$, und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn fast überall $\kappa^* = \tilde{k}$ und daher $\kappa = \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|} \tilde{k}$ ist.

Die komplexe Dilatation der Abbildung f mit dem Differential $dw = \frac{dw}{dw^*} dw^* = \Psi'^{-1} \frac{K+1}{2} (dz^* + k \overline{dz^*}) = \Psi'^{-1} \frac{K+1}{2} (\Phi' dz + \bar{\Phi}' k \overline{dz})$ ist $k \frac{\bar{\varphi}}{|\varphi|}$.

Aus der Gleichung $K = \tilde{K}$ folgt somit, daß h und f fast überall in $|z| < 1$ dieselbe komplexe Dilatation haben und daraus, daß sie bis auf eine konforme Transformation der w -Ebene gleich sind. Wegen der Übereinstimmung auf dem Rand $|w| = 1$ müssen sich somit identisch sein.

LITERATUR

- [1] L. V. AHLFORS: *On quasiconformal mappings*. J. d'analyse math. III (1953/54), 1–58.
- [2] O. LEHTO-K. VIRTANEN: *On the existence of quasiconformal mappings with prescribed complex dilation*. Ann. Acad. Sci. Fenn. 274 (1960), 1–23.
- [3] E. REICH: *Sharpened distortion theorems of quasiconformal mapping*. Notices of the Amer. Math. Soc. 10 (1963) 81.
- [4] K. STREBEL: *Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises*. Comment. Math. Helv. 36 (1962), 306–323.
- [5] O. TEICHMÜLLER: *Extremale quasikonforme Abbildungen und quadratische Differentiale*. Abh. Preuss. Acad. Wiss. math.-naturw. Kl. 22 (1939), 1–197.
- [6] O. TEICHMÜLLER: *Ein Verschiebungssatz der quasikonformen Abbildung*. Deutsche Mathematik 7 (1944), 336–343.

(Eingegangen den 10. Oktober 1963)