

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 39 (1964-1965)

**Artikel:** Distributions et opérateurs différentiels homogènes et invariants.  
**Autor:** Jeanquartier, Pierre  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-29883>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 26.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Distributions et opérateurs différentiels homogènes et invariants

par PIERRE JEANQUARTIER, Lausanne

## Introduction

L'opérateur de la chaleur (cf. SCHWARTZ [12], t. 1, p. 145) et l'opérateur  $\partial/\partial t - \square$ , où

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \dots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

est un dalembertien de signature quelconque (cf. [5] ou [6]), admettent chacun une solution élémentaire  $E$ , invariante par le groupe  $G$  des transformations linéaires de  $R^{n+1} \ni (x, t)$  conservant  $t$  et la forme quadratique

$$u = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2,$$

et homogène au sens suivant: lorsque  $x$  et  $t$  sont changés en  $\lambda x$  et  $\lambda^2 t$  ( $\lambda > 0$ ),  $E$  est multipliée par  $\lambda^{-n}$ .

Plus généralement,  $a$  étant un nombre rationnel  $> 0$  quelconque, nous considérerons l'espace  $H_\nu$  des distributions  $f$  sur  $R^{n+1}$ , invariantes par le groupe  $G$ , et homogènes de degré  $\nu$  au sens suivant:  $f(\lambda x, \lambda^a t) = \lambda^\nu f(x, t)$  pour tout  $\lambda > 0$ . Soit  $H$  la réunion des  $H_\nu$  lorsque  $\nu$  parcourt le corps  $C$  des nombres complexes. L'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants le plus général conservant  $H$  est de la forme

$$D = \square^h (\partial/\partial t)^k \sum_{j=0}^m a_j \square^{bj} (\partial/\partial t)^{(m-j)c},$$

où  $a_j \in C$ ,  $h, k, m$  entiers  $\geq 0$ ,  $b$  et  $c$  étant les entiers  $> 0$  premiers entre eux tels que  $a = 2b/c$ . Pour tout  $\nu \in C$ ,  $D$  applique  $H_\nu$  dans  $H_\mu$ , avec  $\mu = \nu - 2h - ak - 2bm$ . Le but du présent travail est de répondre aux questions suivantes: Etant donné  $g \in H_\mu$ , l'équation  $Df = g$  a-t-elle des solutions  $f \in H_\nu$ ? L'opérateur  $D$  admet-il une solution élémentaire dans  $H$  (donc dans  $H_\nu$ , avec  $\nu = -(n+a) + 2h + ak + 2bm$ , puisque la mesure de DIRAC  $\delta \in H_\mu$ , avec  $\mu = -(n+a)$ )?

Dans une première partie, on donne une représentation paramétrique de  $H_\nu$ , à l'aide du dual d'un espace de fonctions d'une variable. La méthode suivie est analogue à celle utilisée par GÄRDING, ROOS et TENGSTRAND dans l'étude des distributions invariantes par un groupe orthogonal de signature quelconque (cf. [13]). Supposons d'abord que la forme quadratique  $u$  soit non définie. En

remarquant que l'application  $(x, t) \rightarrow w = u |t|^{-2/a}$  est régulière dans l'ouvert  $\Omega$  de  $R^{n+1}$ , défini par  $|x| |t| \neq 0$ , on montre que, pour tout  $f \in H_\nu$ , il existe deux distributions  $h_+$  et  $h_- \in D'(R)$ , telles que

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle h_+, M_\nu^+ \varphi \rangle + \langle h_-, M_\nu^- \varphi \rangle,$$

pour tout  $\varphi \in D(\Omega)$ , l'application  $M_\nu: \varphi \rightarrow (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi)$  étant linéaire continue de  $D(\Omega)$  sur le produit  $D(R) \times D(R)$ . Si  $h_+$  et  $h_-$  sont des fonctions, on a

$$f = |t|^{\nu/a} [Y(t)h_+(w) + Y(-t)h_-(w)]$$

dans  $\Omega$ , en désignant par  $Y(t)$  la fonction d'HEAVISIDE. Il est possible de prolonger  $M_\nu$  en une application linéaire de  $D(R^{n+1})$  sur un espace vectoriel  $K_\nu$ , formé de couples de fonctions d'une variable  $s$ , de classe  $C^\infty$  pour  $s \neq 0$ , et ayant, lorsque  $s$  tend vers 0,  $-\infty$  ou  $+\infty$ , des développements asymptotiques de types particuliers (§2). On peut alors munir  $K_\nu$  d'une structure d'espace de FRÉCHET (§3), de sorte que l'application  $M_\nu: D(R^{n+1}) \rightarrow K_\nu$  soit continue, et que sa transposée  $M'_\nu: K'_\nu \rightarrow D'(R^{n+1})$  ait pour image un sous-espace fermé  $K'_\nu = M'_\nu K'_\nu$  de  $D'(R^{n+1})$  contenant  $H_\nu$ .  $K'_\nu$  est somme directe topologique de  $H_\nu$  et d'un espace vectoriel de dimension finie. L'application  $M'_\nu$ , qui est un isomorphisme vectoriel de  $K'_\nu$  sur  $K'_\nu$ , fournit une représentation paramétrique de  $H_\nu$  au moyen d'un sous-espace  $H'_\nu$ , de codimension finie, de  $K'_\nu$  (§5). En fait, on a  $H_\nu = K'_\nu$  et  $H'_\nu = K'_\nu$  sauf pour une suite discrète de valeurs négatives de  $\nu$ .

Les distributions de  $H_\nu$  et  $K'_\nu$  sont tempérées et la transformation de FOURIER établit un isomorphisme de  $H_\nu$  sur  $H_{\nu'}$ , avec  $\nu' = -(\nu + n + a)$ . Nous considérerons également l'image de FOURIER  $K_{\nu'}$  de  $K'_\nu: K_{\nu'} = F K'_\nu$ .  $K_{\nu'}$  est somme directe topologique de  $H_{\nu'}$  et d'un espace vectoriel de dimension finie; on a  $H_{\nu'} = K_{\nu'}$  sauf pour une suite croissante de valeurs réelles de  $\nu$  (§6).

Dans une deuxième partie, on considère l'opérateur  $D$  défini précédemment.  $D$  applique  $K_\nu$  dans  $K_\mu$  avec  $\mu = \nu - 2h - ak - 2bm$ . Par transformation de FOURIER, et à l'aide des isomorphismes  $M'_{\nu'}$  et  $M'_{\mu'}$ , l'application  $D: K_\nu \rightarrow K_\mu$  est remplacée par une application  $P': K'_{\nu'} \rightarrow K'_{\mu'}$  transposée de  $P: K_{\mu'} \rightarrow K_{\nu'}$ ,  $P$  étant une application linéaire continue, analogue à la multiplication par un polynôme (§7). L'étude de  $P'$  (§9) conduit aux résultats suivants:

Pour tout  $\nu \in C$ , l'application  $D: K_\nu \rightarrow K_\mu$  est surjective; son noyau est de dimension finie (th. 9.1). En particulier,  $D$  admet toujours une solution élémentaire dans  $K_\nu$  pour  $\nu = -(n + a) + 2h + ak + 2bm$ ; autrement dit,  $D$  admet toujours une solution élémentaire somme d'une distribution invariante et homogène de degré  $\nu$ , et d'une combinaison linéaire de distributions de la forme

$$u_\pm^j \otimes t^k, u_\pm^j \log |u| \otimes t^k, u^j \log^2 |u| \otimes t^k, u^j \otimes t^k \log |t|,$$

avec  $j \in R$  et  $k \in N$  (th. 9.3 et §6).

Par contre,  $D: H_\nu \rightarrow H_\mu$  n'est pas surjective dans tous les cas (th. 9.2) et  $D$  n'admet pas toujours de solution élémentaire dans  $H$  (th. 9.3 et exemple du § 10).

Des résultats analogues sont valables lorsque la forme quadratique  $u$  est définie (cas euclidien, §§ 11 à 14).

Les résultats de ce travail ont été annoncés dans la note [7].

## 1. Distributions homogènes et invariants

Soit  $V$  un ouvert d'un espace numérique  $R^m$ . Nous désignerons par  $D(V)$  l'espace des fonctions à valeurs complexes, de classe  $C^\infty$ , à support compact dans  $V$ , et par  $D'(V)$  le dual de  $D(V)$ , c'est-à-dire l'espace des distributions sur  $V$ . Si  $f \in D'(V)$  et  $\varphi \in D(V)$ , la valeur de  $f$  pour  $\varphi$  sera notée  $\langle f, \varphi \rangle$ . Nous désignerons par  $\mathcal{S}(R^m)$  l'espace des fonctions à décroissance rapide sur  $R^m$ , et par  $\mathcal{S}'(R^m)$  l'espace des distributions tempérées sur  $R^m$  (cf. SCHWARTZ [12]). Pour la transformation de FOURIER  $F$  et sa conjuguée  $\bar{F}$  nous adopterons les définitions suivantes:  $F\varphi(y) = \int e^{-ix \cdot y} \varphi(x) dx$  et  $\bar{F}\varphi(y) = \int e^{+ix \cdot y} \varphi(x) dx$  pour  $\varphi \in \mathcal{S}(R^m)$ , d'où  $Ff$  et  $\bar{F}f$  par continuité, pour  $f \in \mathcal{S}'(R^m)$ . Nous utiliserons la notation fonctionnelle  $f = f(x)$  pour marquer que  $f$  est une distribution sur  $R^m \ni x$ . Si  $\alpha$  est un difféomorphisme de  $R^m$ , et si  $f(x) \in \mathcal{S}'(R^m)$ , nous définirons  $f(\alpha x) \in \mathcal{S}'(R^m)$  par l'égalité  $\langle f(\alpha x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(\alpha^{-1}x) |J(x)| \rangle$ , pour tout  $\varphi \in \mathcal{S}(R^m)$ ,  $J(x)$  étant le jacobien de l'application  $\alpha^{-1}$ ; si  $f(x)$  est une fonction, cette définition coïncide avec la définition habituelle.

Dans la suite,  $x = (x_1, \dots, x_n)$  sera toujours un point de l'espace  $R^n$ ,  $|x| = (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ . La partie entière de  $\frac{n-2}{2}$  sera notée  $\bar{n}$ . Sur  $R^n$ , considérons la forme quadratique

$$u = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_n^2,$$

de signature  $(p, q)$ , avec  $1 \leq p \leq n$ ,  $q = n - p$ . Nous distinguerons quatre cas:

- 1<sup>er</sup> cas:  $p$  et  $q$  impairs  $\geq 1$ ,
- 2<sup>e</sup> cas:  $p$  impair  $\geq 1$  et  $q$  pair  $\geq 1$ ,
- 3<sup>e</sup> cas:  $p$  et  $q$  pairs  $\geq 1$ ,
- 4<sup>e</sup> cas (cas euclidien):  $p = n$ ,  $q = 0$ .

Le cas  $p$  pair et  $q$  impair se ramène au 2<sup>e</sup> cas, et le cas  $p = 0$ ,  $q = n$  au 4<sup>e</sup> cas.

Soit  $G$  le groupe des transformations linéaires de  $R^n$  qui laissent  $u$  invariante. Dans l'espace  $R^{n+1} \ni (x, t)$ , nous dirons qu'une distribution  $f \in \mathcal{S}'(R^{n+1})$  est

*invariante* si  $f(Lx, t) = f(x, t)$  pour tout  $L \in G$ . Si  $f$  est invariante, on a

$$\left( \varepsilon_i x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \varepsilon_j x_j \frac{\partial}{\partial x_i} \right) f = 0, \quad i, j = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

avec  $\varepsilon_i = 1$  si  $i \leq p$  et  $\varepsilon_i = -1$  si  $i > p$  (cf. METHÉE [8] et TENGSTRAND [13]).

Soit  $a$  un nombre  $> 0$ .  $\nu$  étant un élément quelconque du corps  $C$  des nombres complexes, nous dirons que  $f \in D'(R^{n+1})$  est *homogène de degré  $\nu$*  si  $f(\lambda x, \lambda^a t) = \lambda^\nu f(x, t)$ , pour tout  $\lambda > 0$ . Lorsque  $a = 1$ ,  $f$  est homogène au sens habituel (cf. [3] et [4]); le cas  $a = 2$  a été envisagé dans [6]. Si  $f$  est homogène de degré  $\nu$ , on a la relation d'EULER

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + at \frac{\partial f}{\partial t} = \nu f. \quad (1.2)$$

Nous désignerons par  $H_\nu$  le sous-espace vectoriel fermé de  $D'(R^{n+1})$  formé des distributions *invariantes et homogènes de degré  $\nu$* . Si  $U$  est un ouvert de  $R^{n+1}$  invariant par les transformations  $(x, t) \rightarrow (Lx, t)$ ,  $L \in G$  et  $(x, t) \rightarrow (\lambda x, \lambda^a t)$ ,  $\lambda > 0$ , on peut considérer de façon analogue l'espace  $H_\nu(U)$  formé des distributions de  $D'(U)$  invariantes et homogènes de degré  $\nu$ . Des ouverts de ce type sont, par exemple, l'ensemble  $\Omega$  des points de  $R^{n+1}$  tels que  $|x|t \neq 0$ , et les parties  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  de  $\Omega$  définies respectivement par  $t > 0$  et  $t < 0$ . Dans  $\Omega$ , nous poserons  $w = u |t|^{-2/a}$ .

Dès maintenant, et jusqu'à la fin du §10, nous supposons que la forme quadratique  $u$  est non définie (1<sup>er</sup>, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cas).

L'application  $\mu : (x, t) \rightarrow w$  de  $\Omega$  sur  $R$  est régulière et a des restrictions  $\mu_+ : \Omega_+ \rightarrow R$  et  $\mu_- : \Omega_- \rightarrow R$ . Comme  $\mu_+$  est une application surjective, on peut lui associer une application linéaire, continue, surjective,  $\mu_+ : D(\Omega_+) \rightarrow D(R)$ , telle que, si  $\varphi \in D(\Omega_+)$ ,  $\langle \mu_+ \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \mu_+^* \psi \rangle$ , pour tout  $\psi \in D(R)$ , où  $\mu_+^* \psi(x, t) = \psi(w)$  (cf. DE RHAM [10], p. 55—57 ou GÅRDING [3], p. 388—389). L'application transposée  $\mu_+' : D'(R) \rightarrow D'(\Omega_+)$  est linéaire, continue, injective, et il est clair que  $\mu_+' D'(R) \subset H_0(\Omega_+)$ . Inversement, si  $f \in H_0(\Omega_+)$ , les relations (1.1) et (1.2) entraînent  $df \wedge dw = 0$ , où l'on considère  $f$  comme un courant de degré 0. D'autre part, si la sous-variété  $w = \text{constante}$  de  $\Omega_+$  n'est pas connexe, il existe un élément  $L \in G$  tel que la transformation  $(x, t) \rightarrow (Lx, t)$  échange ses composantes connexes. Par des méthodes classiques (cf. [8], démonstration du théorème 2, [13], lemme 5.1 ou [6], lemmes 4.1 et 4.2), on en déduit qu'il existe  $h \in D'(R)$  tel que  $\mu_+' h = f$ . De même, on peut associer à  $\mu_-$  une application linéaire continue  $\mu_- : D(\Omega_-) \rightarrow D(R)$ , dont la transposée  $\mu_-' : D'(R) \rightarrow D'(\Omega_-)$  soit injective et ait  $H_0(\Omega_-)$  pour image.

Soit maintenant  $\nu \in C$  quelconque. L'application  $f \rightarrow |t|^{\nu/a} f$  de  $H_0(\Omega)$  sur  $H_\nu(\Omega)$  est un isomorphisme. Par suite, si  $f \in H_\nu(\Omega)$ , il existe deux distributions  $h_+$  et  $h_- \in D'(R)$ , déterminées de façon unique, telles que  $f = |t|^{\nu/a} \mu'_+ h_+$  dans  $\Omega_+$  et  $f = |t|^{\nu/a} \mu'_- h_-$  dans  $\Omega_-$ . Si  $\varphi \in D(\Omega)$  a des restrictions  $\varphi_+ \in D(\Omega_+)$  et  $\varphi_- \in D(\Omega_-)$ , posons

$$M_\nu^+ \varphi = \mu_+( |t|^{\nu/a} \varphi_+ ), \quad M_\nu^- \varphi = \mu_-( |t|^{\nu/a} \varphi_- ). \quad (1.3)$$

Comme  $\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi_+ \rangle + \langle f, \varphi_- \rangle$ , on a donc

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle h_+, M_\nu^+ \varphi \rangle + \langle h_-, M_\nu^- \varphi \rangle = \langle h, M_\nu \varphi \rangle,$$

en posant  $M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi) \in D(R) \times D(R) = D(R)^2$ , et en considérant  $h = (h_+, h_-) \in D'(R) \times D'(R) = D'(R)^2$  comme un élément du dual du produit  $D(R)^2$ . On peut donc énoncer :

**Proposition 1.1.** *A tout élément  $f \in H_\nu(\Omega)$ , on peut associer un couple  $h = (h_+, h_-) \in D'(R)^2$ , déterminé de façon unique, tel que  $\langle f, \varphi \rangle = \langle h, M_\nu \varphi \rangle$ , pour tout  $\varphi \in D(\Omega)$ ,  $M_\nu$  étant une application linéaire continue de  $D(\Omega)$  sur le produit  $D(R)^2 : M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi)$ , avec (1.3).*

En d'autres termes, l'application transposée  $M'_\nu$ , de  $D'(R)^2$  identifié au dual de  $D(R)^2$ , dans  $D'(\Omega)$ , est injective et admet  $H_\nu(\Omega)$  pour image.

## 2. Prolongement de l'application $M_\nu$

Soit  $F(\lambda)$  une fonction méromorphe de  $\lambda \in C$ , à valeurs dans  $C$  ou dans un espace de distributions. En un pôle  $\lambda_0$  de  $F(\lambda)$ , nous appellerons *prolongement naturel* de  $F(\lambda)$  le coefficient  $c_0$  du développement de LAURENT

$$F(\lambda) = \frac{c_{-m}}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \dots + \frac{c_{-1}}{\lambda - \lambda_0} + c_0 + c_1(\lambda - \lambda_0) + \dots$$

de  $F(\lambda)$ , et poserons  $F(\lambda_0) = c_0$ . Par exemple, pour  $R\lambda > -1$ , les fonctions  $t_+^\lambda = Y(t)t^\lambda$  et  $t_-^\lambda = Y(-t)|t|^\lambda$  ( $Y(t)$ , fonction d'HEAVISIDE) sont localement intégrables sur  $R$ . Considérées comme fonctions de  $\lambda$  à valeurs dans  $D'(R)$ ,  $t_+^\lambda$  et  $t_-^\lambda$  sont prolongeables en fonctions méromorphes de  $\lambda \in C$  ayant les points  $\lambda = -1, -2, \dots$  pour pôles simples. Nous définirons ces distributions pour tout  $\lambda \in C$  par prolongement naturel. De manière analogue, pour tout  $\lambda \in C$ , nous définirons par prolongement naturel, les distributions égales à  $t_+^\lambda \log |t| = Y(t)t^\lambda \log t$  et  $t_-^\lambda \log |t| = Y(-t)|t|^\lambda \log |t|$  pour  $R\lambda > -1$  (cf. [4], chap. I, § 3 et § 4).

Rappelons qu'à toute fonction  $\varphi(x) \in D(R^n)$  on peut associer une fonction  $\tilde{\varphi}(v)$ , d'une variable  $v \in R$ , de classe  $C^\infty$  pour  $v \neq 0$ , à support compact, telle que

$$\int_{R^n} f(u)\varphi(x)dx = \int_R f(v)\tilde{\varphi}(v)dv, \quad (2.1)$$

pour tout  $f \in D(R)$  (cf. METHÉE [8], DE RHAM [11] ou TENGSTRAND [13]). Avec les notations de [13]:  $\tilde{\varphi} = N\varphi$ . Si  $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$ , on peut également lui associer  $\tilde{\varphi}(v)$ , de classe  $C^\infty$  pour  $v \neq 0$ , telle que (2.1) soit vérifié; au lieu d'être à support compact,  $\tilde{\varphi}$  est alors à décroissance rapide. Lorsque  $v \rightarrow 0$ ,  $\tilde{\varphi}$  admet un développement asymptotique de la forme

$$\tilde{\varphi}(v) = \sum_{j=0}^m (\langle A_j, \varphi \rangle + \langle B_j, \varphi \rangle \gamma(v)) v^j + R_m(v), \quad (2.2)$$

où  $R_m(v) \in C^m$ ,  $R_m^{(k)}(v) = O(v^{m-k+\frac{1}{2}})$  pour  $k \leq m$ , et

$$\gamma(v) = \begin{cases} \log |v| & \text{dans le 1er cas,} \\ Y(v)\sqrt{|v|} & \text{dans le 2e cas,} \\ Y(v) & \text{dans le 3e cas,} \end{cases} \quad (2.3)$$

$Y(v)$ , fonction d'HEAVISIDE.  $A_j$  et  $B_j$  sont des distributions tempérées sur  $R^n$ , invariantes par le groupe  $G$ ;  $A_j$  est à support  $u = 0$ ,  $B_j = 0$  si  $j < \bar{n}$ , et si  $j \geq \bar{n}$ ,

$$B_j = \lambda_j \square^{j-\bar{n}} \delta(x), \quad (2.4)$$

où  $\lambda_j$  est une constante non nulle et  $\delta(x)$  la mesure de DIRAC (cf. [8], [11] et [13]).

Prenons maintenant  $\varphi \in \mathcal{S}(R^n)$  fonction d'un paramètre  $t \in R$ , de sorte que  $\varphi(x, t)$  appartienne à  $\mathcal{S}(R^{n+1})$ , et soit  $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(v, t)$  la fonction correspondante. En reprenant, par exemple, les calculs de TENGSTRAND ([13], p. 208—212) on obtient les résultats suivants (on pose  $D_v = \partial/\partial v$ ,  $D_t = \partial/\partial t$  et on désigne par  $N$  l'ensemble des entiers  $\geq 0$ ):

**Lemme 2.1.** *Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+1})$ . La fonction  $\tilde{\varphi}(v, t)$  est de classe  $C^\infty$  pour  $v \neq 0$ . Pour toute fonction  $\alpha(v) \in C^\infty$ , telle que  $\alpha(v) = 0$  au voisinage de 0,  $\alpha(v) = 1$  pour  $|v|$  assez grand, on a  $\alpha\tilde{\varphi} = \alpha(v)\tilde{\varphi}(v, t) \in \mathcal{S}(R^2)$ , et l'application  $\varphi \rightarrow \alpha\tilde{\varphi}$  de  $\mathcal{S}(R^{n+1})$  dans  $\mathcal{S}(R^2)$  est continue.*

Pour  $v \neq 0$ , et pour tout  $m \in N$ , on a

$$\tilde{\varphi}(v, t) = \sum_{j=0}^m (\alpha_j(t) + \beta_j(t)\gamma(v)) v^j + R_m(v, t), \quad (2.5)$$

avec:

$$1^\circ \quad \alpha_j(t) = \langle A_j(x), \varphi(x, t) \rangle, \quad \beta_j(t) = \langle B_j(x), \varphi(x, t) \rangle,$$

de sorte que les applications  $\varphi \rightarrow \alpha_j$  et  $\varphi \rightarrow \beta_j$  de  $\mathcal{S}(R^{n+1})$  dans  $\mathcal{S}(R)$  sont continues.

2° Toutes les dérivées de  $R_m(v, t)$  d'ordre  $k \leq m$  en  $v$ , et d'ordre  $j \in N$  en  $t$ , existent et sont continues. Il existe des constantes  $C_{kjr}(\varphi)$  telles que

$$|D_v^k D_t^j R_m(v, t)(1 + t^2)^r| \leq C_{kjr}(\varphi) |v|^{m-k+\frac{1}{2}}$$

pour tout  $(v, t) \in R^2$ ,  $k \leq m$ ,  $j \in N$ ,  $r \in N$ . Si  $\varphi \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}(R^{n+1})$ ,  $C_{kjr}(\varphi) \rightarrow 0$ .

Cherchons alors à prolonger l'application  $M_\nu : D(\Omega) \rightarrow D(R)^2$ . D'après (1.3) et la définition de  $\mu_+$  et  $\mu_-$ , on a, pour  $\varphi \in D(\Omega)$ ,

$$M_\nu^\pm \varphi(s) = \int_0^\infty \tilde{\varphi}(st^{\frac{2}{a}}, \pm t) t^{\frac{\nu+2}{a}} dt. \tag{2.6}$$

Supposons maintenant que  $\varphi$  appartienne à  $\mathcal{S}(R^{n+1})$ . Pour  $s \neq 0$ , d'après le lemme 2.1, l'intégrale (2.6) conserve un sens si  $R\nu > -(a + 2)$ , et définit une fonction holomorphe de  $\nu$  dans ce demi-plan. D'après (2.5) on peut écrire

$$M_\nu^\pm \varphi(s) = \sum_{j=0}^m (\langle A_{\nu j}^\pm, \varphi \rangle + \langle B_{\nu j}^\pm, \varphi \rangle \gamma(s)) s^j + F_{\nu m}^\pm(s), \tag{2.7}$$

avec

$$F_{\nu m}^\pm(s) = \int_0^\infty R_m(st^{\frac{2}{a}}, \pm t) t^{\frac{\nu+2}{a}} dt.$$

Les distributions  $A_{\nu j}^\pm$  et  $B_{\nu j}^\pm$  sont tempérées; on a

$$A_{\nu j}^\pm = \begin{cases} A_j(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+2}{a}} + \frac{2}{a} B_j(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+2}{a}} \log |t|, & \text{dans le 1er cas,} \\ A_j(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+2}{a}}, & \text{dans les 2e et 3e cas;} \end{cases} \tag{2.8}$$

$$B_{\nu j}^\pm = \begin{cases} B_j(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+2}{a}}, & \text{dans les 1er et 3e cas,} \\ B_j(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+3}{a}}, & \text{dans le 2e cas.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Comme  $t_\pm^\lambda$  et  $t_\pm^\lambda \log |t|$  sont fonctions méromorphes de  $\lambda \in C$ , les distributions  $A_{\nu j}^\pm$  et  $B_{\nu j}^\pm$  sont fonctions méromorphes de  $\nu \in C$ , et nous étendrons leur définition pour tout  $\nu \in C$  par prolongement naturel. Les égalités (2.8) et (2.9) sont donc valables pour tout  $\nu \in C$ , et  $A_{\nu j}^\pm, B_{\nu j}^\pm \in \mathcal{S}'(R^{n+1})$  pour tout  $\nu \in C$ . Les pôles de  $A_{\nu j}^\pm$  et  $B_{\nu j}^\pm$  se déduisent de ceux de  $t_\pm^\lambda$  et  $t_\pm^\lambda \log |t|$  (cf. [4]).  $A_{\nu j}^\pm$  a donc un pôle en  $\nu = -2(j + 1) - a(k + 1)$ ,  $k \in N$ , de résidu

$$c_{-1} = a \frac{(\mp 1)^k}{k!} A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t). \tag{2.10}$$

Ce pôle est simple, sauf dans le 1er cas si  $j \geq \bar{n}$ ; le pôle est alors double et le

coefficient  $c_{-2}$  du développement de LAURENT est

$$c_{-2} = -2a \frac{(\mp 1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t). \quad (2.11)$$

Dans les 1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> cas,  $B_{\nu_j}^{\pm}$  a un pôle simple en  $\nu = -2(j+1) - a(k+1)$ ,  $k \in N$ , de résidu

$$c_{-1} = a \frac{(\mp 1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t). \quad (2.12)$$

Dans le 2<sup>e</sup> cas,  $B_{\nu_j}^{\pm}$  a un pôle simple en  $\nu = -2j - 3 - a(k+1)$ ,  $k \in N$ , dont le résidu est encore donné par (2.12).

D'après le lemme 2.1, pour  $s \neq 0$ , la fonction  $\nu \rightarrow F_{\nu m}^{\pm}(s)$  est holomorphe dans le demi-plan  $R\nu > -(a+2m+3)$ . L'égalité (2.7), avec  $m$  arbitrairement grand, entraîne donc que  $M_{\nu}^{\pm} \varphi(s)$  est prolongeable en une fonction méromorphe de  $\nu \in C$ . Pour  $s \neq 0$  et pour tout  $\nu \in C$ , nous définirons  $M_{\nu}^{\pm} \varphi(s)$  par prolongement naturel. Le lemme 2.1 montre aussi que, pour  $R\nu > -(a+2m+3)$ ,  $F_{\nu m}^{\pm}(s)$  est de classe  $C^m$  pour  $s \neq 0$ , et que, lorsque  $s \rightarrow 0$

$$D^k F_{\nu m}^{\pm}(s) = O(s^{m-k+\frac{1}{2}}), \quad k \leq m.$$

Grâce à (2.7), on en déduit le résultat suivant:

**Lemme 2.2.** Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+1})$ . Pour tout  $\nu \in C$ ,  $M_{\nu}^{+} \varphi(s)$  et  $M_{\nu}^{-} \varphi(s)$  sont des fonctions de  $s \in R$  de classe  $C^{\infty}$  pour  $s \neq 0$ . Pour tout  $m \in N$  on a

$$M_{\nu}^{\pm} \varphi(s) = \sum_{j=0}^m (\langle A_{\nu_j}^{\pm}, \varphi \rangle + \langle B_{\nu_j}^{\pm}, \varphi \rangle \gamma(s)) s^j + F_{\nu m}^{\pm}(s),$$

avec  $F_{\nu m}^{\pm}(s) \in C^m$  et, si  $0 \leq k \leq m$ ,

$$D^k F_{\nu m}^{\pm}(s) = O(s^{m-k+\frac{1}{2}})$$

lorsque  $s \rightarrow 0$ .

Étudions maintenant le comportement de  $M_{\nu}^{\pm} \varphi(s)$  lorsque  $|s| \rightarrow \infty$ . En supposant toujours  $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+1})$ , pour  $R\nu > -(a+2)$ , on déduit de (2.6)

$$M_{\nu}^{\pm} \varphi(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} T_{\nu}^{\text{sgn } s} \varphi(\pm |s|^{-\frac{a}{2}}), \quad (2.13)$$

avec

$$T_{\nu}^{\pm} \varphi(s) = \frac{a}{2} \int_0^{\infty} \tilde{\varphi}(\pm v, sv^{\frac{a}{2}}) v^{\frac{\nu+a}{2}} dv.$$

Pour  $R\nu > -(a+2)$ ,  $T_{\nu}^{\pm} \varphi(s)$  est une fonction  $C^{\infty}$  de  $s \in R$ . On a

$$D^k T_{\nu}^{\pm} \varphi(s) = \frac{a}{2} \int_0^{\infty} D_t^k \tilde{\varphi}(\pm v, sv^{\frac{a}{2}}) v^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} dv. \quad (2.14)$$

Le lemme 2.1 permet d'écrire

$$D^k T_{\nu}^{\pm} \varphi(0) = \frac{a}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (\pm 1)^j \int_0^1 (\alpha_j^{(k)}(0) + \beta_j^{(k)}(0) \gamma(\pm v)) v^{\frac{\nu+a(k+1)+2j}{2}} dv + F_m(\nu),$$

avec

$$F_m(\nu) = \frac{a}{2} \int_1^{\infty} D_t^k \tilde{\varphi}(\pm v, 0) v^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} dv + \frac{a}{2} \int_0^1 D_t^k R_m(\pm v, 0) v^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} dv.$$

La fonction  $F_m(\nu)$  est holomorphe de  $\nu$  dans le demi-plan  $R\nu > -(\alpha + ak + 2m + 3)$ . Il en résulte que  $D^k T_{\nu}^{\pm} \varphi(0)$  est prolongeable en une fonction méromorphe de  $\nu \in C$ . On peut alors écrire, pour  $R\nu > -(\alpha + 2)$ ,

$$T_{\nu}^{\pm} \varphi(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^k}{k!} D^k T_{\nu}^{\pm} \varphi(0) + \int_0^s \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^m T_{\nu}^{\pm} \varphi(t) dt, \tag{2.15}$$

où  $D^m T_{\nu}^{\pm} \varphi(t)$ , donné par (2.14), est fonction holomorphe de  $\nu$  dans  $R\nu > -(\alpha + am + 2)$ . Par conséquent,  $T_{\nu}^{\pm} \varphi(s)$  est prolongeable en une fonction méromorphe de  $\nu \in C$ . Pour tout  $\nu \in C$ , définissons  $T_{\nu}^{\pm} \varphi(s)$  par prolongement naturel; avec cette définition, il résulte de (2.15) que  $T_{\nu}^{\pm} \varphi$  est une fonction  $C^{\infty}$  de  $s \in R$ , pour tout  $\nu \in C$ .

Pour tout  $j \in N$ , posons

$$k_{\nu}(j) = -\frac{\nu + \alpha + 2j + 2}{a}, \tag{2.16}$$

$$k'_{\nu}(j) = \begin{cases} k_{\nu}(j), & \text{dans les 1}^{\text{er}} \text{ et } 3^{\text{e}} \text{ cas,} \\ -\frac{\nu + \alpha + 2j + 3}{a}, & \text{dans le 2}^{\text{e}} \text{ cas.} \end{cases} \tag{2.17}$$

Soient d'autre part  $N_{\nu}$  et  $N'_{\nu}$  les parties de l'ensemble  $N$  des entiers  $\geq 0$  définies par

$$N_{\nu} = \{j \in N; k_{\nu}(j) \in N\}, \tag{2.18}$$

$$N'_{\nu} = \{j \in N; j \geq \bar{n}, k'_{\nu}(j) \in N\}. \tag{2.19}$$

Pour tout  $\nu \in C$ ,  $N_{\nu}$  et  $N'_{\nu}$  sont finis. Chacun des ensembles  $N_{\nu}$  et  $N'_{\nu}$  est vide sauf pour une suite discrète de valeurs négatives de  $\nu$ .

En tenant compte des égalités (2.10) à (2.12), par prolongement naturel de la relation (2.13), on obtient:

**Lemme 2.3.** *Soit  $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+1})$ . Pour  $s \neq 0$  on a*

$$M_{\nu}^{\pm} \varphi(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} T_{\nu}^{\text{sgn } s} \varphi(\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) + \log |s| \sum_{j \in N_{\nu}} (\pm 1)^{k_{\nu}(j)} c_j s^j + \tag{2.20}$$

$$+ \gamma(s) \log |s| \sum_{j \in N'_{\nu}} (\pm 1)^{k'_{\nu}(j)} c'_j s^j,$$

avec

$$c_j = -\frac{a}{2} \frac{(-1)^k}{k!} \langle A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi \rangle, \quad k = k_\nu(j), \quad j \in N_\nu,$$

$$c'_j = -\frac{a}{\alpha} \frac{(-1)^k}{k!} \langle B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi \rangle, \quad k = k'_\nu(j), \quad j \in N'_\nu,$$

$\alpha = 4$  dans le 1<sup>er</sup> cas,  $\alpha = 2$  dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cas.  $T_\nu^+ \varphi$  et  $T_\nu^- \varphi$  sont des fonctions  $C^\infty$  de  $s \in R$ .

L'application  $M_\nu$ , qui, à toute fonction  $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+1})$ , fait correspondre le couple  $M_{\nu, \varphi} = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi)$  de fonctions d'une variable  $s$ , de classe  $C^\infty$  pour  $s \neq 0$ , est un prolongement de l'application  $M_\nu: D(\Omega) \rightarrow D(R)^2$ . Nous allons montrer que l'image de  $D(R^{n+1})$  par  $M_\nu$  est un espace vectoriel  $K_\nu$ , caractérisé par les propriétés énoncées dans les lemmes 2.2 et 2.3.

### 3. Espaces $K_\nu$ et $K'_\nu$

Désignons par  $K_\nu$  l'espace vectoriel sur  $C$  formé des couples  $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-)$  de fonctions d'une variable réelle  $s$ , ayant les propriétés suivantes :

1°  $\varphi^+(s)$  et  $\varphi^-(s)$  sont de classe  $C^\infty$  pour  $s \neq 0$ .

2° Lorsque  $s \rightarrow 0$ ,  $\varphi^+$  et  $\varphi^-$  ont des développements asymptotiques de la forme

$$\varphi^\pm(s) \sim \sum_{j=0}^{\infty} (\langle \alpha_j^\pm, \varphi \rangle + \langle \beta_j^\pm, \varphi \rangle \gamma(s)) s^j, \quad (3.1)$$

où  $\gamma(s)$  est la fonction définie par (2.3), les  $\langle \alpha_j^\pm, \varphi \rangle$  et  $\langle \beta_j^\pm, \varphi \rangle$  étant des nombres complexes,  $\langle \beta_j^\pm, \varphi \rangle = 0$  si  $j < \bar{n}$ . Les dérivées successives de  $\varphi^+$  et  $\varphi^-$  admettent les développements déduits de (3.1) par dérivation terme à terme.

3° Pour  $s \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} \varphi^\pm(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \chi^{\text{sgn } s} \varphi(\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) + \log |s| \sum_{j \in N_\nu} (\pm 1)^{k_\nu(j)} \langle \gamma_j, \varphi \rangle s^j + \\ + \gamma(s) \log |s| \sum_{j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \langle \gamma'_j, \varphi \rangle s^j, \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec les définitions (2.16) à (2.19),  $\chi^+ \varphi$  et  $\chi^- \varphi$  étant des fonctions  $C^\infty$  de  $s \in R$ ,  $\langle \gamma_j, \varphi \rangle$  et  $\langle \gamma'_j, \varphi \rangle \in C$ .

Munissons  $K_\nu$  de la structure d'espace vectoriel topologique définie par les semi-normes

$$p_m^\pm(\varphi) = \sum_{j=0}^m |\langle \beta_j^\pm, \varphi \rangle| + \sup_{\substack{|s| \leq 1 \\ k \leq m}} |D^k(\varphi^\pm(s) - \gamma(s) \sum_{j=0}^m \langle \beta_j^\pm, \varphi \rangle s^j)|,$$

$$q_m^\pm(\varphi) = \sup_{\substack{|s| \leq 1 \\ k \leq m}} |D^k \chi^\pm \varphi(s)|, \quad q(\varphi) = \sum_{j \in N_\nu} |\langle \gamma_j, \varphi \rangle| + \sum_{j \in N'_\nu} |\langle \gamma'_j, \varphi \rangle|,$$

où  $m \in N$ . On vérifie sans peine que  $K_\nu$  est alors un espace de FRÉCHET (cf. [2]). Il est clair que  $D(R)^2 \subset K_\nu$ , l'injection étant continue.

D'autre part, d'après les lemmes 2.2 et 2.3, si  $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+1})$ ,  $M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi) \in K_\nu$ . De plus, en vertu du lemme 2.1,  $M_\nu \varphi \rightarrow 0$  dans  $K_\nu$  si  $\varphi \rightarrow 0$  dans  $\mathcal{S}(R^{n+1})$ . On a donc :

**Proposition 3.1.** *L'application  $M_\nu : D(\Omega) \rightarrow D(R)^2$  admet un prolongement linéaire continu  $M_\nu : \mathcal{S}(R^{n+1}) \rightarrow K_\nu$ .*

Nous noterons encore  $M_\nu$  la restriction à  $D(R^{n+1})$  de l'application  $M_\nu : \mathcal{S}(R^{n+1}) \rightarrow K_\nu$ . Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 3.1.** *Soit  $S$  le sous-espace vectoriel fermé de  $K_\nu$  formé des éléments  $\varphi$  tels que  $\langle \beta_j^+, \varphi \rangle = \langle \beta_j^-, \varphi \rangle = 0$ , pour tout entier  $j \geq \bar{n}$ . Il existe une application linéaire continue  $L_\nu$  de  $S$  dans  $D(R^{n+1})$  telle que l'application composée  $M_\nu L_\nu$  soit égale à l'identité. On a  $D(R)^2 \subset S$  et l'image de  $D(R)^2$  par  $L_\nu$  est contenue dans  $D(\Omega)$ .*

Soit en effet  $\varphi \in S$ . En vertu de (3.1), on a  $\varphi^+$  et  $\varphi^- \in C^\infty$ . D'après TENGSTRAND ([13], lemme 4.3), il existe  $\vartheta_j \in D(R^n)$ , pour tout  $j \in N$ , tel que

$$\langle A_k, \vartheta_j \rangle = \delta_{kj}, \quad \langle B_k, \vartheta_j \rangle = 0, \quad k \in N,$$

et  $\omega_j \in D(R^n)$ , pour tout  $j \in N, j \geq \bar{n}$ , tel que

$$\langle A_k, \omega_j \rangle = 0, \quad \langle B_k, \omega_j \rangle = \delta_{kj}, \quad k \in N.$$

Soit  $\varrho(t) \in D(R)$  n'ayant aucune dérivée nulle à l'origine. D'après le lemme 2.3, il existe des constantes  $\lambda_j$ , pour  $j \in N_\nu$ , et  $\mu_j$ , pour  $j \in N'_\nu$ , telles que, si

$$\begin{aligned} \Phi_3(x, t) &= \sum_{j \in N_\nu} \lambda_j \langle \gamma_j, \varphi \rangle \vartheta_j(x) \varrho(t) \\ &+ \sum_{j \in N'_\nu} \mu_j \langle \gamma'_j, \varphi \rangle \omega_j(x) \varrho(t), \end{aligned}$$

on ait  $\langle \gamma_j, M_\nu \Phi_3 \rangle = \langle \gamma_j, \varphi \rangle$ , pour tout  $j \in N_\nu$ , et  $\langle \gamma'_j, M_\nu \Phi_3 \rangle = \langle \gamma'_j, \varphi \rangle$ , pour tout  $j \in N'_\nu$ . L'application  $\varphi \rightarrow \Phi_3$  de  $S$  dans  $D(R^{n+1})$  est linéaire continue.

Soient  $\alpha_1(s)$  et  $\alpha_2(s) \in C^\infty$ , telles que  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1(s)$  nulle pour  $|s| > 2$  et  $\alpha_2(s)$  nulle pour  $|s| < 1$ . Les éléments  $\varphi_1 = \alpha_1(\varphi - M_\nu \Phi_3)$  et  $\varphi_2 = \alpha_2(\varphi - M_\nu \Phi_3)$  appartiennent à  $K_\nu$ . Soit  $\alpha \in D(]0, 1[)$  telle que

$$\int_0^\infty \alpha(t) t^{\frac{\nu+2}{a}} dt = 1,$$

et soit  $\beta(x) \in D(R^n)$ , nulle au voisinage de l'origine, telle que  $\tilde{\beta}(v) = 1$  pour  $|v| < 3$ . Posons

$$\Phi_1(x, t) = \beta(x) [\alpha(t) \varphi_1^+(u|t|^{-\frac{2}{a}}) + \alpha(-t) \varphi_1^-(u|t|^{-\frac{2}{a}})].$$

On a  $\Phi_1 \in D(R^{n+1})$  et, d'après (2.6),  $M_\nu \Phi_1 = \varphi_1$ . De plus, l'application  $\varphi \rightarrow \Phi_1$  est linéaire continue de  $S$  dans  $D(R^{n+1})$ . D'après (3.2), on a

$$\varphi_2^\pm(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \psi^{\text{sgn } s}(\pm |s|^{-\frac{a}{2}}),$$

où  $\psi^+$  et  $\psi^-$  appartiennent à  $D(R)$ . Soit  $\vartheta \in D(]0, 1[)$  telle que

$$\int_0^\infty \vartheta(t^{\frac{2}{a}}) t^{\frac{\nu+2}{a}} dt = 1.$$

Posons

$$\Phi_2(x, t) = \beta(x) [\vartheta(u) \psi^+(t|u|^{-\frac{a}{2}}) + \vartheta(-u) \psi^-(t|u|^{-\frac{a}{2}})].$$

On a  $\Phi_2 \in D(R^{n+1})$  et, d'après (2.6),  $M_\nu \Phi_2 = \varphi_2$ . L'application  $\varphi \rightarrow \Phi_2$  de  $S$  dans  $D(R^{n+1})$  est linéaire continue. Posons alors  $L_\nu \varphi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ . L'application  $L_\nu : S \rightarrow D(R^{n+1})$  est donc linéaire continue et l'on a  $M_\nu L_\nu \varphi = \varphi$ , pour tout  $\varphi \in S$ . En outre, si  $\varphi \in D(R)^2$ , on a  $\langle \gamma_j, \varphi \rangle = 0$  pour  $j \in N_\nu$ ,  $\langle \gamma'_j, \varphi \rangle = 0$  pour  $j \in N'_\nu$  et  $\psi^\pm(s) = 0$  au voisinage de l'origine, de sorte que  $L_\nu \varphi \in D(\Omega)$ , c. q. f. d.

**Proposition 3.2.** *L'application  $M_\nu : D(R^{n+1}) \rightarrow K_\nu$  est surjective.*

Soit en effet  $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\nu$ . D'après (2.9) et (2.4), il résulte d'un théorème classique de BOREL, qu'il existe  $\Phi \in D(R^{n+1})$  de la forme

$$\Phi(x, t) = \psi_+(x) \alpha(t) + \psi_-(x) \alpha(-t),$$

avec  $\psi_+$  et  $\psi_- \in D(R^n)$ ,  $\alpha \in D(]0, 1[)$ ,  $\alpha(t) \geq 0$ , telle que  $\langle B_{\nu j}^\pm, \Phi \rangle = \langle \beta_j^\pm, \varphi \rangle$ , pour tout  $j \geq \bar{n}$ . En vertu du lemme 2.2, on a donc  $\langle \beta_j^\pm, M_\nu \Phi \rangle = \langle \beta_j^\pm, \varphi \rangle$  pour tout  $j \geq \bar{n}$ , de sorte que  $\varphi - M_\nu \Phi = \varphi_1$  appartient au sous-espace  $S$  du lemme 3.1. Si  $\Phi_1 = L_\nu \varphi_1$  on a  $M_\nu(\Phi + \Phi_1) = M_\nu \Phi + \varphi_1 = \varphi$ , c. q. f. d.

Soit  $K'_\nu$  le dual de  $K_\nu$ . Les coefficients du développement (3.1) définissent des éléments  $\alpha_j^+, \alpha_j^- (j \in N)$  et  $\beta_k^+, \beta_k^- (\bar{n} \leq k \in N)$  de  $K'_\nu$ . De même les coefficients de (3.2) définissent des éléments  $\gamma_j (j \in N_\nu)$  et  $\gamma'_j (j \in N'_\nu)$  de  $K'_\nu$ . Nous considérerons également les éléments  $\varepsilon_j^+$  et  $\varepsilon_j^-$  de  $K'_\nu$  donnés par  $\langle \varepsilon_j^\pm, \varphi \rangle = D^j \chi^\pm \varphi(0) (j \in N)$ , pour  $\varphi \in K_\nu$ .

Comme l'injection  $D(R)^2 \subset K_\nu$  est continue, à tout élément  $h \in K'_\nu$ , on peut associer deux distributions  $h_+, h_- \in D'(R)$  telles que

$$\langle h, \varphi \rangle = \langle h_+, \varphi^+ \rangle + \langle h_-, \varphi^- \rangle,$$

pour tout  $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in D(R)^2$ . Mais  $D(R)^2$  n'étant pas dense dans  $K_\nu$ ,  $h_+$  et  $h_-$  ne déterminent pas  $h$ . On vérifie que si  $h_+ = h_- = 0$ ,  $h$  est combinaison linéaire des éléments  $\beta_j^+, \beta_j^-, (\bar{n} \leq j \in N), \gamma_j (j \in N_\nu), \gamma_j' (j \in N'_\nu), \varepsilon_k^+, \varepsilon_k^- (k \in N)$ .

Soit  $M'_\nu : K'_\nu \rightarrow D'(R^{n+1})$  la transposée de l'application  $M_\nu : D(R^{n+1}) \rightarrow K_\nu$ . Des propositions 3.1 et 3.2 résulte immédiatement :

**Proposition 3.3.** *L'application linéaire continue  $M'_\nu : K'_\nu \rightarrow D'(R^{n+1})$  est injective. Son image  $M'_\nu K'_\nu$  est contenue dans  $S'(R^{n+1})$ .*

#### 4. Eléments de $H_\nu$ nuls dans $\Omega$

Dans l'espace  $R^n$ , considérons les fonctions localement intégrables  $u_+^\nu = Y(u)u^\nu$  et  $u_-^\nu = Y(-u)|u|^\nu$ , pour  $R\nu > -1$ . Si  $\varphi \in D(R^n)$ , on a, d'après (2.1),

$$\langle u_\pm^\nu, \varphi \rangle = \int_{R^n} Y(\pm u) |u|^\nu \varphi(x) dx = \int_0^\infty \nu^\nu \tilde{\varphi}(\pm \nu) d\nu.$$

Compte tenu du développement (2.2), on en déduit que  $u_+^\nu$  et  $u_-^\nu$  sont prolongeables en fonctions méromorphes de  $\nu \in C$  à valeurs dans  $D'(R^n)$ , avec pôles simples ou doubles  $\nu = -(k+1)$  et  $\nu = -(\frac{n}{2} + k)$ ,  $k \in N$  (cf. [4], chap. III, § 2); les coefficients  $c_{-2}$  et  $c_{-1}$  des développements de LAURENT s'expriment simplement à l'aide des distributions  $A_j$  et  $B_j$ . Nous définirons  $u_+^\nu$  et  $u_-^\nu$  pour tout  $\nu \in C$  par prolongement naturel (voir § 2); ce sont des distributions invariantes par le groupe  $G$ . Si  $\nu$  est un entier de signe quelconque, nous poserons

$$u^\nu = u_+^\nu + (-1)^{|\nu|} u_-^\nu.$$

Pour  $\lambda > 0$ , on a, lorsque  $\nu \neq -1, -2, \dots$  et  $\nu \neq -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \dots$

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu} u_\pm^\nu(x). \tag{4.1}$$

Dans le 1<sup>er</sup> cas, si  $\nu = -(k+1)$ ,  $k \in N$ ,

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu} [u_\pm^\nu(x) + 2 \log \lambda (\pm 1)^k A_k(x) - 2 \log^2 \lambda (\pm 1)^k B_k(x)]. \tag{4.2}$$

Dans le 2<sup>e</sup> cas, si  $\nu = -(k+1)$ ,  $k \in N$ ,

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu} [u_\pm^\nu(x) + 2 \log \lambda (\pm 1)^k A_k(x)], \tag{4.3}$$

et si  $\nu = -(\frac{n}{2} + k)$ ,  $k \in N$ ,

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu} [u_\pm^\nu(x) + 2 \log \lambda Y(\pm 1) B_{\frac{n}{2}+k}^-(x)]. \tag{4.4}$$

Enfin, dans le 3<sup>e</sup> cas, si  $\nu = -(k + 1)$ ,  $k \in N$ ,

$$u_{\pm}^{\nu}(\lambda x) = \lambda^{2\nu} [u_{\pm}^{\nu}(x) + 2 \log \lambda (\pm 1)^k A_k(x) + 2 \log \lambda Y(\pm 1) B_k(x)]. \quad (4.5)$$

D'autre part, on vérifie facilement que

$$A_j(\lambda x) = \begin{cases} \lambda^{-2(j+1)} [A_j(x) - 2 \log \lambda B_j(x)], & \text{dans le 1<sup>er</sup> cas,} \\ \lambda^{-2(j+1)} A_j(x), & \text{dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cas;} \end{cases} \quad (4.6)$$

$$B_j(\lambda x) = \begin{cases} \lambda^{-2(j+1)} B_j(x), & \text{dans les 1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> cas,} \\ \lambda^{-(2j+3)} B_j(x), & \text{dans le 2<sup>e</sup> cas.} \end{cases} \quad (4.7)$$

Soit alors  $f \in H_{\nu}$ , une distribution nulle dans  $\Omega$ . Dans  $|x| \neq 0$ ,  $f$  est à support dans  $t = 0$ , donc est de la forme  $\Sigma g_k(x) \otimes \delta^{(k)}(t)$  (cf. SCHWARTZ [12], t. 1, th. 36, p. 101), avec  $g_k(x) \in D'(R^n)$ , invariante par  $G$  et homogène de degré  $\nu + a(k + 1)$ . Par suite, il existe des constantes  $c_k^+$  et  $c_k^-$  telles que

$$g_k(x) = c_k^+ u_+^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} + c_k^- u_-^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} + h_k(x),$$

où  $h_k(x)$  est une distribution sur  $R^n$ , invariante par le groupe  $G$ , nulle dans l'ouvert  $u(x) \neq 0$ . Il en résulte (cf. [8], [11] et [13]) que  $h_k(x)$  est combinaison linéaire des  $A_j(x)$  et des  $B_j(x)$ . En exprimant que  $g_k(x)$  est homogène de degré  $\nu + a(k + 1)$ , compte tenu des formules (4.1) à (4.6), on voit que, dans  $|x| \neq 0$ ,

$$g_k(x) = \begin{cases} \alpha_k u_+^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} + \beta_k u_-^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}}, & \text{si } k \neq k_{\nu}(j) \text{ pour tout } j \in N_{\nu}, \\ \alpha_k u^{-(j+1)} + \beta_k A_j(x), & \text{si } k = k_{\nu}(j), j \in N_{\nu}, \end{cases} \quad (4.8)$$

$\alpha_k$  et  $\beta_k$  étant des constantes. Ainsi, dans  $|x| \neq 0$ ,  $f$  est égale à

$$f_1 = \Sigma g_k(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \quad (4.9)$$

où les  $g_k$  sont de la forme (4.8), la somme (4.9) ne comportant qu'un nombre fini de termes.

Dans  $t \neq 0$ ,  $f$  est à support dans  $|x| = 0$ , donc est de la forme  $\Sigma P_k(\partial/\partial x) \delta(x) \otimes h_k(t)$  (SCHWARTZ, loc. cit.), où  $P_k$  est un polynôme homogène de degré  $k$ . Comme  $f$  est homogène de degré  $\nu$ , il faut que  $h_k(t)$  soit homogène de degré  $\frac{\nu + n + k}{a}$  au sens habituel, donc que dans  $t \neq 0$

$$h_k(t) = a_k^+ t_+^{\frac{\nu+n+k}{a}} + a_k^- t_-^{\frac{\nu+n+k}{a}},$$

avec  $a_k^+$  et  $a_k^- \in C$ . D'autre part, pour que  $f$  soit invariante, il faut que  $P_k(\partial/\partial x)$  soit, à un facteur constant près, un dalembertien itéré. D'après les

égalités (2.4) et (2.9), on a donc  $f = f_2$  dans  $t \neq 0$ , avec

$$f_2 = \Sigma a_j^+ B_{\nu j}^+ + \Sigma a_j^- B_{\nu j}^-, \quad (4.10)$$

les sommes étant finies,  $a_j^+, a_j^- \in C$ . Remarquons que, si  $\lambda > 0$ ,

$$B_{\nu j}^\pm(\lambda x, \lambda^\alpha t) - \lambda^\nu B_{\nu j}^\pm(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \notin N'_\nu, \\ a \lambda^\nu \log \lambda \frac{(\mp 1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), & \text{si } j \in N'_\nu, k = k'_\nu(j). \end{cases} \quad (4.11)$$

Posons alors  $f_3 = f - f_1 - f_2$ , avec (4.9) et (4.10). Il résulte de ce qui précède que  $f_3$  est une distribution invariante, nulle dans le complémentaire de l'origine, donc que  $f_3$  est combinaison linéaire des distributions  $B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t)$ ,  $j, k \in N$ ,  $j \geq \bar{n}$ . Enfin, à l'aide des formules (4.1) à (4.7) et (4.11), en exprimant que  $f$  est homogène de degré  $\nu$ , on obtient le résultat suivant:

**Proposition 4.1.** *Une base de l'espace vectoriel des distributions de  $H_\nu$  nulles dans  $\Omega$  est formée des éléments*

$$B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \quad j \in N'_\nu, \quad k = k'_\nu(j),$$

$$B_{\nu j}^+, B_{\nu j}^-, \quad \bar{n} \leq j \in N, \quad j \notin N'_\nu,$$

et, suivant le cas envisagé, des éléments

1<sup>er</sup> cas:

$$2k! B_{\nu j}^\pm + a(\mp 1)^k A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \quad j \in N'_\nu, \quad k = k'_\nu(j),$$

$$u_\pm^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \quad k \neq k'_\nu(j) \quad \text{pour tout } j \in N_\nu, \quad k \in N,$$

$$u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t), \quad j \in N_\nu, \quad k = k'_\nu(j),$$

$$A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \quad j \in N_\nu - N'_\nu, \quad k = k'_\nu(j);$$

2<sup>e</sup> cas:

$$2k! B_{\nu j}^\pm - a(\mp 1)^k u_+^{-(j+\frac{3}{2})} \otimes \delta^{(k)}(t), \quad j \in N'_\nu, \quad k = k'_\nu(j),$$

$$u_+^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \quad N \ni k \neq \begin{cases} k'_\nu(j) \text{ pour tout } j \in N_\nu, \\ k'_\nu(j) \text{ pour tout } j \in N'_\nu, \end{cases}$$

$$u_-^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \quad N \ni k \neq k'_\nu(j) \text{ pour tout } j \in N_\nu,$$

$$u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t), \quad j \in N_\nu, \quad k = k'_\nu(j),$$

$$A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \quad j \in N_\nu, \quad k = k'_\nu(j);$$

3<sup>e</sup> cas:

$$2k! B_{\nu j}^\pm - a(\mp 1)^k u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t), \quad j \in N'_\nu, \quad k = k'_\nu(j),$$

$$u_\pm^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \quad N \ni k \neq k'_\nu(j) \text{ pour tout } j \in N_\nu,$$

$$u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t), j \in N_\nu - N'_\nu, k = k_\nu(j),$$

$$A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), j \in N_\nu, k = k_\nu(j).$$

Des lemmes 2.2 et 2.3 et des relations (2.14), (3.1) et (3.2) on déduit

$$M'_\nu \beta_j^\pm = B_{\nu j}^\pm, \quad (4.12)$$

$$M'_\nu \gamma_j = -\frac{a}{2} \frac{(-1)^k}{k!} A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), k = k_\nu(j),$$

$$M'_\nu \gamma'_j = -\frac{a}{\alpha} \frac{(-1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), k = k'_\nu(j),$$

avec  $\alpha = 4$  dans le 1<sup>er</sup> cas,  $\alpha = 2$  dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cas,

$$M'_\nu \varepsilon_k^\pm = \frac{a}{2} (-1)^k u_\pm^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t). \quad (4.13)$$

Ces égalités et la proposition 4.1 entraînent:

**Proposition 4.2.** *Les distributions de  $H_\nu$ , nulles dans  $\Omega$  sont contenues dans  $M'_\nu K'_\nu$ .*

## 5. Espace $H_\nu$ , représentation paramétrique de $H_\nu$

Cherchons à quelle condition l'image  $M'_\nu h$  d'un élément  $h$  de  $K'_\nu$  appartient à  $H_\nu$ .

Soient  $\varphi \in D(R^{n+1})$  et  $f \in D'(R^{n+1})$ . Si  $L \in G$ , on a  $\langle f(Lx, t), \varphi(x, t) \rangle = \langle f(x, t), \psi_L(x, t) \rangle$ , avec  $\psi_L(x, t) = \varphi(L^{-1}x, t)$ . Or  $\tilde{\psi}_L(v, t) = \tilde{\varphi}(v, t)$ , de sorte que, d'après la définition de  $M_\nu$ ,  $M_\nu \varphi = M_\nu \psi_L$ . Si  $h \in K'_\nu$  on a donc  $\langle M'_\nu h, \varphi \rangle = \langle h, M_\nu \varphi \rangle = \langle h, M_\nu \psi_L \rangle = \langle M'_\nu h, \psi_L \rangle$ . Par conséquent,  $M'_\nu h$  est une distribution invariante sur  $R^{n+1}$ .

Si maintenant  $\lambda$  est un nombre  $> 0$ , on a  $\langle f(\lambda x, \lambda^a t), \varphi(x, t) \rangle = \langle f(x, t), \varphi_\lambda(x, t) \rangle$ , avec  $\varphi_\lambda(x, t) = \lambda^{-(n+a)} \varphi(\lambda^{-1}x, \lambda^{-a}t)$ , et d'après (2.1),  $\tilde{\varphi}_\lambda(v, t) = \lambda^{-(2+a)} \tilde{\varphi}(\lambda^{-2}v, \lambda^{-a}t)$ . Pour  $R\nu > -(a+2)$ , la définition (2.6) donne donc  $M_\nu \varphi_\lambda = \lambda^\nu M_\nu \varphi$ . Par prolongement naturel de cette égalité, en tenant compte des formules (2.7) et (2.10) à (2.12), on obtient, pour tout  $\nu \in C$ ,

$$M_\nu^\pm \varphi_\lambda(s) = \lambda^\nu \left[ M_\nu^\pm \varphi(s) + a \log \lambda \sum_{j \in N_\nu} \frac{(\mp 1)^{k_\nu(j)}}{k_\nu(j)!} \langle A_j(x) \otimes \delta^{(k_\nu(j))}(t), \varphi \rangle s^j + \right. \\ \left. + (\alpha(\lambda) + \gamma(s)) a \log \lambda \sum_{j \in N'_\nu} \frac{(\mp 1)^{k'_\nu(j)}}{k'_\nu(j)!} \langle B_j(x) \otimes \delta^{(k'_\nu(j))}(t), \varphi \rangle s^j \right], \quad (5.1)$$

avec  $\alpha(\lambda) = -\log \lambda$  dans le 1<sup>er</sup> cas,  $\alpha(\lambda) = 0$  dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cas.

Comme les distributions  $A_j(x) \otimes \delta^{(k_\nu(j))}(t)$ ,  $j \in N_\nu$  et  $B_j(x) \otimes \delta^{(k'_\nu(j))}(t)$ ,  $j \in N'_\nu$  sont linéairement indépendantes (cf. [13]), il résulte d'abord de (5.1) que

$$\sigma_j = (s^j, (-1)^{k_\nu(j)} s^j), j \in N_\nu, \quad (5.2)$$

et

$$\tau_j = (\gamma(s) s^j, (-1)^{k'_\nu(j)} \gamma(s) s^j), j \in N'_\nu, \quad (5.3)$$

sont des éléments de  $K_\nu$ . Il est clair que ces éléments sont linéairement indépendants. Soit  $X_\nu$  leur ensemble :

$$X_\nu = \{\sigma_j; j \in N_\nu\} \cup \{\tau_j; j \in N'_\nu\}. \quad (5.4)$$

D'autre part, pour que l'image  $M'_\nu h$  de  $h \in K'_\nu$  soit homogène de degré  $\nu$ , il faut et il suffit que

$$\langle M'_\nu h, \varphi_\lambda \rangle = \langle h, M_\nu \varphi_\lambda \rangle = \lambda^\nu \langle h, M_\nu \varphi \rangle$$

pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(R^{n+1})$  et pour tout  $\lambda > 0$ ; d'après (5.1) on a donc :

**Proposition 5.1.** *Soit  $h \in K'_\nu$ . Pour que  $M'_\nu h \in H_\nu$ , il faut et il suffit que  $h \in H_\nu$ ,  $H_\nu$  étant le sous-espace vectoriel fermé de  $K'_\nu$  défini par les relations*

$$\langle h, \varphi \rangle = 0, \text{ pour tout } \varphi \in X_\nu,$$

avec (5.4).

$H_\nu$  est donc de codimension finie dans  $K'_\nu$  (cf. [1], § 4, th. 1) :

$$\text{codim } H_\nu = \text{card } N_\nu + \text{card } N'_\nu.$$

D'après (5.2), on a, pour  $j \in N_\nu$ ,

$$\langle \alpha_k^\pm, \sigma_j \rangle = (\pm 1)^{k_\nu(j)} \delta_{kj}, k \in N, \quad (5.5)$$

$$\langle \beta_k^\pm, \sigma_j \rangle = 0, \bar{n} \leq k \in N. \quad (5.6)$$

On peut écrire, pour  $s \neq 0$ ,  $j \in N_\nu$ ,  $k = k_\nu(j)$ ,

$$\sigma_j^\pm = (\pm 1)^{k_\nu(j)} s^j = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} (\text{sgn } s)^j (\pm |s|^{-\frac{a}{2}})^k.$$

On en déduit  $\chi^\pm \varphi(s) = (\pm 1)^j s^k$ , et

$$\langle \gamma_i, \sigma_j \rangle = 0, i \in N_\nu, \quad (5.7)$$

$$\langle \gamma'_i, \sigma_j \rangle = 0, i \in N'_\nu, \quad (5.8)$$

$$\langle \varepsilon_i^\pm, \sigma_j \rangle = (\pm 1)^j k! \delta_{ik}, k = k_\nu(j), i \in N. \quad (5.9)$$

La définition (5.3) donne, pour  $j \in N'_\nu$ ,

$$\langle \alpha_k^\pm, \tau_j \rangle = 0, k \in N, \quad (5.10)$$

$$\langle \beta_k^\pm, \tau_j \rangle = (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \delta_{kj}, \bar{n} \leq k \in N. \quad (5.11)$$

D'autre part, pour  $s \neq 0$ , on a dans le 1<sup>er</sup> cas

$$\tau_j^\pm = \log |s| (\pm 1)^{k'_v(j)} s^j,$$

et dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cas,

$$\tau_j^\pm = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} Y(s) (\pm |s|^{-\frac{a}{2}})^{k'_v(j)}.$$

On en déduit, d'après (3.2),

$$\langle \gamma_i, \tau_j \rangle = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{dans le 1<sup>er</sup> cas,} \\ 0, & \text{dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cas,} \end{cases} \quad i \in N_\nu, \quad (5.12)$$

$$\langle \gamma'_i, \tau_j \rangle = 0, \quad i \in N'_\nu. \quad (5.13)$$

Dans le 1<sup>er</sup> cas,

$$\langle \varepsilon_i^\pm, \tau_j \rangle = 0, \quad i \in N; \quad (5.14)$$

dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cas,

$$\langle \varepsilon_i^\pm, \tau_j \rangle = Y(\pm 1) k! \delta_{ik}, \quad k = k'_v(j), \quad i \in N. \quad (5.15)$$

Dans un espace vectoriel, désignons par  $[e_i; i \in J]$  le sous-espace vectoriel engendré par les éléments  $e_i, i \in J$ , et notons  $\oplus$  une somme directe topologique. Avec ces notations, la proposition 5.1 et les formules (5.5), (5.6), (5.10) et (5.11) entraînent (cf. [2], chap. I, § 2, prop. 3)

$$K'_\nu = H_\nu \oplus [\alpha_j^+; j \in N_\nu] \oplus [\beta_j^+; j \in N'_\nu].$$

De même, les formules (5.6), (5.9), (5.11), (5.14) et (5.15) donnent

$$K'_\nu = H_\nu \oplus [\varepsilon_{k'_v(j)}^-; j \in N_\nu] \oplus [\beta_j^+; j \in N'_\nu]. \quad (5.16)$$

Le théorème suivant montre que l'application  $M'_\nu: H_\nu \rightarrow H_\nu$  fournit une représentation paramétrique de  $H_\nu$ :

**Théorème 5.1.** *L'application linéaire continue  $M'_\nu: K'_\nu \rightarrow D'(R^{n+1})$  induit un isomorphisme vectoriel de  $H_\nu$  sur  $H_\nu$ .*

En effet, on sait déjà que  $M'_\nu$  est injective (prop. 3.3). Montrons que  $M'_\nu$  est surjective. Soit  $f \in H_\nu$ . D'après la proposition 1.1, il existe  $h_+$  et  $h_- \in D'(R)$  tels que  $\langle f, \Phi \rangle = \langle h_+, M'_\nu \Phi \rangle + \langle h_-, M'_\nu \Phi \rangle$ , pour tout  $\Phi \in D(\Omega)$ . Soit  $h_0$  la forme linéaire sur  $D(R)^2$  définie par  $\langle h_0, \varphi \rangle = \langle h_+, \varphi^+ \rangle + \langle h_-, \varphi^- \rangle$ , pour tout  $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in D(R)^2$ . En utilisant l'application  $L_\nu$  du lemme 3.1, on a  $\langle h_0, \varphi \rangle = \langle f, L_\nu \varphi \rangle$  pour tout  $\varphi \in D(R)^2$ , d'où il résulte que  $h_0$  est une forme linéaire continue pour la topologie induite par  $K_\nu$  sur  $D(R)^2$ . L'adhérence de  $D(R)^2$  dans  $K_\nu$ , et  $X_\nu$ , ont leur intersection égale à  $\{0\}$ . En effet, les éléments de  $D(R)^2$  annulent les formes linéaires continues  $\beta_k^+$  et  $\varepsilon_k^+$ , alors que  $\langle \beta_k^+, \sigma_j \rangle = 0$ ,  $\langle \beta_k^+, \tau_j \rangle = \delta_{kj}$ ,  $\langle \varepsilon_k^+, \sigma_j \rangle = k! \delta_{k, k'_v(j)}$  (formules (5.6), (5.11) et (5.9)). Par conséquent, d'après [2] (chap. I, § 2, prop. 3) et le théo-

rème de HAHN-BANACH ([2], chap. II), il est possible de prolonger  $h_0$  en une forme linéaire continue sur  $K_\nu$ , nulle sur  $X_\nu$ , donc en un élément  $h_1$  de  $H_\nu$ . Soit alors  $f_1 = M'_\nu h_1$ ; on a  $f_1 \in H_\nu$  (prop. 5.1), de sorte que  $f - f_1 \in H_\nu$ . Si  $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ , on a  $\langle f_1, \Phi \rangle = \langle h_1, M_\nu \Phi \rangle = \langle h_0, M_\nu \Phi \rangle = \langle f, \Phi \rangle$ , puisque  $M_\nu \Phi \in \mathcal{D}(R)^2$ . Ainsi  $f - f_1$  est un élément de  $H_\nu$  nul dans  $\Omega$ . Les propositions 4.2 et 5.1 impliquent que  $f - f_1 \in M'_\nu H_\nu$ , donc  $f \in M'_\nu H_\nu$ , c. q. f. d.

En particulier, en vertu de la proposition 3.3,  $H_\nu \subset M'_\nu K'_\nu \subset \mathcal{S}'(R^{n+1})$ , donc:

**Corollaire.** *Pour tout  $\nu \in C$ , les éléments de  $H_\nu$  sont des distributions tempérées.*

## 6. Transformation de FOURIER. Espaces $K'_\nu$ et $K_\nu$

Pour tout  $\nu \in C$ , nous poserons

$$\nu' = -(\nu + n + a). \quad (6.1)$$

On démontre aisément la proposition suivante (cf. [6], prop. 2.2 et 3.1, voir aussi [3], [9] et [13]):

**Proposition 6.1.** *Pour tout  $\nu \in C$ , les transformations de FOURIER  $F$  et  $\bar{F}$  induisent des isomorphismes de  $H_\nu$  sur  $H_{\nu'}$ , avec (6.1).*

Désignons par  $K'_\nu$  le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{D}'(R^{n+1})$  image de  $K'_\nu$  par  $M'_\nu$ :  $K'_\nu = M'_\nu K'_\nu$ . En vertu de la proposition 3.3, les distributions de  $K'_\nu$  sont tempérées. D'autre part, d'après (5.16), (4.12), (4.13), (2.9) et (2.4), puisque  $M'_\nu$  est un isomorphisme vectoriel, on a

$$\begin{aligned} K'_\nu = H_\nu \oplus [u_-^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t); k = k_\nu(j), j \in N_\nu] \\ \oplus [\square^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes t_+^{-(k+1)}; k = k'_\nu(j), j \in N'_\nu]; \end{aligned} \quad (6.2)$$

d'après [2] (chap. I, § 2, corollaire 4 du th. 2 et prop. 3)  $K'_\nu$  est un sous-espace fermé de  $\mathcal{D}'(R^{n+1})$  ou  $\mathcal{S}'(R^{n+1})$ , et le deuxième membre de (6.2) est une somme directe topologique.

Notons  $K_\nu$  l'image par  $F$  de  $K'_\nu$ , avec (6.1). De (6.2) on déduit

$$\begin{aligned} K_\nu = H_\nu \oplus [F(u_-^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t)); k = k_\nu(j), j \in N_\nu] \\ \oplus [F(\square^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes t_+^{-(k+1)}), k = k'_\nu(j), j \in N'_\nu], \end{aligned} \quad (6.3)$$

$K_\nu$  étant également un sous-espace vectoriel fermé de  $\mathcal{D}'(R^{n+1})$  ou  $\mathcal{S}'(R^{n+1})$ , et le second membre de (6.3) une somme directe topologique. Nous allons

remplacer les transformées de FOURIER figurant dans (6.3) par des expressions explicites. On a

$$F \delta^{(k)}(t) = (it)^k, \quad F \square^j \delta(x) = (-u)^j.$$

De l'expression de  $F t_+^\lambda$  lorsque  $\lambda$  n'est pas un pôle de  $t_+^\lambda$  (cf. [4]) on déduit, par prolongement naturel,

$$F t_+^{-(k+1)} = \frac{(-i)^k}{k!} \left[ c_k t^k - i \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} t t^k + t^k \log |t| \right]$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , avec  $c_k = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \Gamma'(1)$ .

De la même façon (cf. [4]), on obtient pour  $j \in \mathbb{N}$ , dans le 1<sup>er</sup> cas,

$$F u_-^{-(j+1)} = \begin{cases} a_0^j u_-^{j-\bar{n}} + a_1^j \left( u_-^{j-\bar{n}} \log |u| + \frac{\pi^2}{2} A_{\bar{n}-j-1}^- \right), & \text{si } j < \bar{n}, \\ a_0^j u_-^{j-\bar{n}} + a_1^j u_-^{j-\bar{n}} \log |u| + a_2^j \left( u_-^{j-\bar{n}} \log^2 |u| - \pi^2 (-1)^{j-\bar{n}} u_-^{j-\bar{n}} \right), & \\ \text{si } j \geq \bar{n}; \end{cases}$$

dans le 2<sup>e</sup> cas,

$$F u_-^{-(j+1)} = b_0^j u_-^{j+1-\frac{n}{2}} + b_1^j u_-^{j+1-\frac{n}{2}} \log |u|;$$

et dans le 3<sup>e</sup> cas,

$$F u_-^{-(j+1)} = \begin{cases} c_0^j u_-^{j-\bar{n}} + c_1^j A_{\bar{n}-j-1}^-, & \text{si } j < \bar{n}, \\ c_0^j u_-^{j-\bar{n}} + c_1^j u_-^{j-\bar{n}} \log |u|, & \text{si } j \geq \bar{n}; \end{cases}$$

les  $a_i^j, b_i^j, c_i^j$  sont des constantes non nulles. Les distributions  $u_\pm^\lambda \log |u|$ , égale à  $Y(\pm u) |u|^\lambda \log |u|$  pour  $R\lambda > -1$ , et  $u_\pm^\lambda \log^2 |u|$ , égale à  $Y(\pm u) |u|^\lambda \log^2 |u|$  pour  $R\lambda > -1$ , sont définies par prolongement naturel pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}$ ; on pose, pour  $\lambda$  entier de signe quelconque,

$$u^\lambda \log^k |u| = u_+^\lambda \log^k |u| + (-1)^{|\lambda|} u_-^\lambda \log^k |u|, \quad k = 1, 2.$$

Remarquons que les éléments suivants font partie de  $H_\nu$  (formules (4.1) à (4.6)) :

$$u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k, \quad u_-^{j-\bar{n}} \otimes \operatorname{sgn} t t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N_{\nu'},$$

$$A_{\bar{n}-j-1}^- \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N_{\nu'}, \quad \text{1<sup>er</sup> et 3<sup>e</sup> cas;}$$

et, dans le 1<sup>er</sup> cas,

$$u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N_{\nu'},$$

$$u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad \bar{n} \leq j \in N_{\nu'},$$

$$2u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log |t| - a u_-^{j-\bar{n}} \log |u| \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N_{\nu'};$$

dans le 2<sup>e</sup> cas,

$$u_-^{j+1-\frac{n}{2}} \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N_{\nu'};$$

dans le 3<sup>e</sup> cas,  $u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k$ ,  $k = k_{\nu'}(j)$ ,  $\bar{n} \leq j \in N_{\nu'}$ .

De ce qui précède et de (6.3) on déduit, dans le 1<sup>er</sup> cas :

$$\begin{aligned} K_{\nu} = H_{\nu} \oplus & [u_-^{j-\bar{n}} \log |u| \otimes t^k; k = k_{\nu'}(j), \bar{n} > j \in N_{\nu'}] \\ & \oplus [u_-^{j-\bar{n}} \log^2 |u| \otimes t^k; k = k_{\nu'}(j), \bar{n} \leq j \in N_{\nu'}] \\ & \oplus [u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log |t|; k = k'_{\nu'}(j), j \in N'_{\nu'}], \end{aligned} \quad (6.4)$$

dans le 2<sup>e</sup> cas :

$$\begin{aligned} K_{\nu} = H_{\nu} \oplus & [u_-^{j+1-\frac{\bar{n}}{2}} \log |u| \otimes t^k; k = k_{\nu'}(j), j \in N_{\nu'}] \\ & \oplus [u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log |t|; k = k'_{\nu'}(j), j \in N'_{\nu'}], \end{aligned} \quad (6.5)$$

dans le 3<sup>e</sup> cas :

$$\begin{aligned} K_{\nu} = H_{\nu} \oplus & [u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k; k = k_{\nu'}(j), \bar{n} > j \in N_{\nu'}] \\ & \oplus [u_-^{j-\bar{n}} \log |u| \otimes t^k; k = k_{\nu'}(j), \bar{n} \leq j \in N_{\nu'}] \\ & \oplus [u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log |t|; k = k'_{\nu'}(j), j \in N'_{\nu'}]. \end{aligned} \quad (6.6)$$

On a également  $K_{\nu} = \bar{F}K'_{\nu}$ . On peut donc énoncer :

**Proposition 6.2.** *Pour tout  $\nu \in C$ , les transformations de FOURIER établissent des isomorphismes  $F$  et  $\bar{F}$  de  $K_{\nu}$  sur  $K'_{\nu}$ , et de  $K'_{\nu}$  sur  $K_{\nu}$ , avec (6.1),  $K_{\nu}$  et  $K'_{\nu}$  étant les sous-espaces vectoriels fermés de  $\mathcal{S}'(R^{n+1})$  définis par (6.4), (6.5), (6.6) et (6.2).*

## 7. Opérateurs différentiels homogènes et invariants

Soit  $H = \bigcup_{\nu \in C} H_{\nu}$  le sous-ensemble de  $D'(R^{n+1})$  formé de toutes les distributions homogènes et invariantes. Cherchons à déterminer l'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants  $D$ , le plus général, qui conserve  $H$ . Comme la mesure de DIRAC  $\delta$  appartient à  $H$ , il faut que  $D\delta \in H$ , donc que  $FD\delta$  soit un polynôme  $P$  de  $H$  (prop. 6.1). Par conséquent,  $P$  est de la forme

$$P(u, t) = \sum A_{jk} u^j t^k.$$

Supposons que  $P$  ait au moins deux termes non nuls,  $A_{j_1 k_1} \neq 0$ ,  $A_{j_2 k_2} \neq 0$ .  $\lambda$  étant le degré d'homogénéité de  $P$ , on a

$$\lambda = 2j_1 + ak_1 = 2j_2 + ak_2, \quad (7.1)$$

d'où l'on déduit  $k_1 \neq k_2$  et  $a = 2(j_1 - j_2) / (k_2 - k_1)$ . Ainsi, pour qu'il existe des opérateurs conservant  $H$  ayant plus d'un terme, il faut que  $a$  soit

rationnel. Dans la suite, nous supposons que  $a$  est rationnel et posons

$$a = 2 \frac{b}{c}, \quad (7.2)$$

avec  $b$  et  $c$  entiers  $> 0$  premiers entre eux.

Cela étant, (7.1) entraîne  $j_1 - j_2 = \alpha b$  et  $k_2 - k_1 = \alpha c$ ,  $\alpha$  entier rationnel  $\neq 0$ , d'où l'on déduit

$$P(u, t) = u^h t^k \sum_{j=0}^m a_j u^{jb} t^{(m-j)c}, \quad (7.3)$$

avec  $h, k, m \in \mathbb{N}$ ,  $a_j \in \mathbb{C}$ ,  $a_0$  et  $a_m \neq 0$ . Si  $P$  n'a qu'un terme non nul,  $P$  est de la forme (7.3) avec  $m = 0$ . Considérons le polynôme

$$Q(s) = \sum_{j=0}^m a_j s^j \quad (7.4)$$

formé avec les coefficients de  $P$ . Soient  $z_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , les zéros de  $Q$ .

On a

$$Q(s) = a_m \prod_{j=1}^m (s - z_j), \quad (7.5)$$

d'où

$$P(u, t) = u^h t^{k+mc} Q(u^b t^{-c}) = a_m u^h t^k \prod_{j=1}^m (u^b - z_j t^c).$$

On a donc :

**Théorème 7.1.** *Tout opérateur différentiel linéaire à coefficients constants conservant  $H$  est de la forme*

$$D = (-\square)^h \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \sum_{j=0}^m a_j (-\square)^{jb} \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(m-j)c}, \quad (7.6)$$

avec  $h, k, m \in \mathbb{N}$ ,  $a_j \in \mathbb{C}$ ,  $a_0$  et  $a_m \neq 0$ . Pour tout  $\nu' \in \mathbb{C}$ ,  $D$  applique  $H_{\nu'}$  dans  $H_{\mu'}$ , avec

$$\mu' = \nu' - 2h - ak - 2bm. \quad (7.7)$$

$D$  est produit d'une constante et d'opérateurs des types suivants :

$$\square, \quad \frac{\partial}{\partial t}, \quad \square^b - z \left( \frac{\partial}{\partial t} \right)^c,$$

$z$ , nombre complexe non nul.

Par transformation de FOURIER, l'application  $D : H_{\nu'} \rightarrow H_{\mu'}$ , est remplacée par  $FDF^{-1} = P : H_{\nu} \rightarrow H_{\mu}$ , avec (6.1),  $P$  désignant la multiplication par le polynôme (7.3). Nous allons montrer que  $P'_0 = M_{\mu}'^{-1} P M_{\nu}' : H_{\nu} \rightarrow H_{\mu}$  (théorème 5.1) est la restriction à  $H_{\nu}$  de la transposée  $P' : K_{\nu}' \rightarrow K_{\mu}'$  d'une application linéaire continue  $P : K_{\mu} \rightarrow K_{\nu}$ . Considérons d'abord le cas des opérateurs  $\square$  et  $\frac{\partial}{\partial t}$ ; on a alors les résultats suivants :

**Proposition 7.1.** *Pour tout  $\nu \in C$ , l'application*

$$\sigma : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \rightarrow \sigma\varphi = (s\varphi^+, s\varphi^-), \tag{7.8}$$

de  $K_{\nu+2}$  dans  $K_\nu$  est linéaire continue. Sa transposée  $\sigma' : K'_\nu \rightarrow K'_{\nu+2}$  est une application linéaire continue telle que l'application  $M'_{\nu+2}\sigma' M'^{-1}_\nu : K'_\nu \rightarrow K'_{\nu+2}$  soit égale à la multiplication par  $u$ .  $\sigma'$  applique  $H_\nu$  dans  $H_{\nu+2}$ .

Soit en effet  $\Phi \in D(R^{n+1})$ . D'après (2.6), pour  $R\nu > -(a+2)$ , on a  $M_\nu^\pm(u\Phi) = sM_{\nu+2}^\pm\Phi$ , relation qui reste vraie pour tout  $\nu \in C$  par prolongement naturel. Il s'ensuit que l'application (7.8) est linéaire de  $K_{\nu+2}$  dans  $K_\nu$  (prop. 3.2), et que

$$M_\nu(u\Phi) = \sigma M_{\nu+2}\Phi$$

pour tout  $\Phi \in D(R^{n+1})$ .

Remarquons que si  $j \in N_{\nu+2}$ , alors  $j+1 \in N_\nu$  et  $k_{\nu+2}(j) = k_\nu(j+1)$ . Inversement, si  $j \in N_\nu, j \geq 1$ , alors  $j-1 \in N_{\nu+2}$ . De même, si  $j \in N'_{\nu+2}$ , alors  $j+1 \in N'_\nu$  et  $k'_{\nu+2}(j) = k'_\nu(j+1)$ ; si  $j \in N'_\nu, j \geq \bar{n}+1$ , alors  $j-1 \in N'_{\nu+2}$  (formules (2.16) à (2.19)). D'après (3.2) et la remarque précédente, si  $\varphi \in K_{\nu+2}, \psi = \sigma\varphi$ , on a

$$\begin{aligned} \psi^\pm(s) = & |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \operatorname{sgn} s \chi^{\operatorname{sgn} s} \varphi(\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) + \log |s| \sum_{1 \leq j \in N_\nu} (\pm 1)^{k_\nu(j)} \langle \gamma_{j-1}, \varphi \rangle s^j + \\ & + \gamma(s) \log |s| \sum_{\bar{n}+1 \leq j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \langle \gamma'_{j-1}, \varphi \rangle s^j, \end{aligned}$$

d'où

$$\chi^\pm(\sigma\varphi) = \pm \chi^\pm \varphi, \tag{7.9}$$

$$\langle \gamma_j, \sigma\varphi \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } j = 0, \\ \langle \gamma_{j-1}, \varphi \rangle, & \text{si } j \geq 1, \end{cases} \quad j \in N_\nu, \tag{7.10}$$

$$\langle \gamma'_j, \sigma\varphi \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } j = \bar{n}, \\ \langle \gamma'_{j-1}, \varphi \rangle, & \text{si } j \geq \bar{n} + 1. \end{cases} \quad j \in N'_\nu, \tag{7.11}$$

Il s'ensuit que  $\sigma : K_{\nu+2} \rightarrow K_\nu$  est continue.

Soit  $f = M'_\nu h \in K'_\nu$ , avec  $h \in K'_\nu$ . On a  $\langle uf, \Phi \rangle = \langle M'_\nu h, u\Phi \rangle = \langle h, M_\nu(u\Phi) \rangle = \langle h, \sigma M_{\nu+2}\Phi \rangle = \langle M'_{\nu+2}\sigma' h, \Phi \rangle$ , pour tout  $\Phi \in D(R^{n+1})$ . Grâce à la proposition 3.3, il en résulte que  $M'_{\nu+2}\sigma' M'^{-1}_\nu = u$ . Comme la multiplication par  $u$  applique  $H_\nu$  dans  $H_{\nu+2}$ , on en déduit que  $\sigma'H_\nu \subset H_{\nu+2}$  (théorème 5.1), c. q. f. d.

**Proposition 7.2.** *Pour tout  $\nu \in C$ , l'application*

$$\eta : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \rightarrow \eta\varphi = (\varphi^+, -\varphi^-), \tag{7.12}$$

de  $K_{\nu+a}$  dans  $K_\nu$  est linéaire continue. Sa transposée  $\eta' : K'_\nu \rightarrow K'_{\nu+a}$  est une

application linéaire continue telle que  $M'_{\nu+a}\eta' M'^{-1}_{\nu} : K'_{\nu} \rightarrow K'_{\nu+a}$  soit égale à la multiplication par  $t$ .  $\eta'$  applique  $H_{\nu}$  dans  $H_{\nu+a}$ .

En effet, pour  $\Phi \in D(R^{n+1})$  et pour  $\nu > -(a+2)$ , on a, d'après (2.6),  $M^{\pm}_{\nu}(t\Phi) = \pm M^{\pm}_{\nu+a}\Phi$ , relation qui reste vraie, par prolongement naturel, pour tout  $\nu \in C$ . Il s'ensuit que l'application (7.12) est linéaire de  $K_{\nu+a}$  dans  $K_{\nu}$  (prop. 3.2), et que

$$M_{\nu}(t\Phi) = \eta M_{\nu+a}\Phi,$$

pour tout  $\Phi \in D(R^{n+1})$ .

D'autre part, on a  $N_{\nu+a} \subset N_{\nu}$  et, si  $j \in N_{\nu+a}$ ,  $k_{\nu}(j) = k_{\nu+a}(j) + 1$ . Inversement, si  $j \in N_{\nu}$  et  $k_{\nu}(j) \geq 1$ , on a  $j \in N_{\nu+a}$ . De même,  $j \in N'_{\nu+a}$  si et seulement si  $j \in N'_{\nu}$  et  $k'_{\nu}(j) \geq 1$ ; on a alors  $k'_{\nu}(j) = k'_{\nu+a}(j) + 1$  (formules (2.16) à (2.19)). Il en résulte, en vertu de (3.2), que si  $\varphi \in K_{\nu+a}$ ,  $\psi = \eta\varphi$ ,

$$\begin{aligned} \psi^{\pm}(s) &= |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} (\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) \chi^{\text{sgn } s} \varphi (\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) + \\ &+ \log |s| \sum_{\substack{j \in N_{\nu} \\ k_{\nu}(j) \geq 1}} (\pm 1)^{k_{\nu}(j)} \langle \gamma_j, \varphi \rangle s^j + \gamma(s) \log |s| \sum_{\substack{j \in N'_{\nu} \\ k'_{\nu}(j) \geq 1}} (\pm 1)^{k'_{\nu}(j)} \langle \gamma'_j, \varphi \rangle s^j. \end{aligned}$$

On a donc

$$\chi^{\pm}(\eta\varphi)(s) = s \chi^{\pm} \varphi(s), \tag{7.13}$$

$$\langle \gamma_j, \eta\varphi \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } k_{\nu}(j) = 0, \\ \langle \gamma_j, \varphi \rangle, & \text{si } k_{\nu}(j) \geq 1, \end{cases} \quad j \in N_{\nu}, \tag{7.14}$$

$$\langle \gamma'_j, \eta\varphi \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } k'_{\nu}(j) = 0, \\ \langle \gamma'_j, \varphi \rangle, & \text{si } k'_{\nu}(j) \geq 1. \end{cases} \quad j \in N'_{\nu}, \tag{7.15}$$

On en déduit que  $\eta : K_{\nu+a} \rightarrow K_{\nu}$  est continue.

Si  $f = M'_{\nu}h \in K'_{\nu}$ ,  $h \in K'_{\nu}$ , on a  $\langle tf, \Phi \rangle = \langle M'_{\nu}h, t\Phi \rangle = \langle h, M_{\nu}(t\Phi) \rangle = \langle h, \eta M_{\nu+a}\Phi \rangle = \langle M'_{\nu+a}\eta' h, \Phi \rangle$ , pour tout  $\Phi \in D(R^{n+1})$ , d'où (prop. 3.3)  $M'_{\nu+a}\eta' M'^{-1}_{\nu} = t$ . Comme la multiplication par  $t$  applique  $H_{\nu}$  dans  $H_{\nu+a}$ , il en résulte que  $\eta' H_{\nu} \subset H_{\nu+a}$  (th. 5.1), c. q. f. d.

Soit alors  $D$  un opérateur différentiel de la forme (7.6), le polynôme associé étant donné par (7.3). Des propositions 7.1 et 7.2 on déduit:

**Proposition 7.3.** *Pour tout  $\nu \in C$ ,  $\sigma$  et  $\eta$  étant les applications linéaires définies par (7.8) et (7.12),*

$$P = \sigma^h \eta^k \sum_{j=0}^m a_j \sigma^{jb} \eta^{(m-j)c} \tag{7.16}$$

*est une application linéaire continue de  $K_{\mu}$  dans  $K_{\nu}$ , avec*

$$\mu = \nu + 2h + ak + 2bm. \tag{7.17}$$

*La multiplication par le polynôme  $P(u, t)$  induit une application linéaire*

continue  $P : K'_\nu \rightarrow K'_\mu$ , avec (7.17), telle que  $M'^{-1}_\mu P M'_\nu$  soit égale à la transposée  $P' : K'_\nu \rightarrow K'_\mu$  de  $P : K_\mu \rightarrow K_\nu$ . L'application  $P'$  induit une application linéaire continue  $P'_0$  de  $H_\nu$  dans  $H_\mu$ .

Enfin, grâce à la proposition 6.2, on a :

**Théorème 7.2.** Pour tout  $\nu' \in C$ , l'opérateur  $D$  donné par (7.6) applique  $K_{\nu'}$  dans  $K_{\mu'}$  avec (7.7).

### 8. Application $P$

Soit  $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\mu$ . D'après (7.8) et (7.12), l'image de  $\varphi$  par l'application (7.16) est  $P\varphi = (P_+\varphi^+, P_-\varphi^-)$ , avec

$$P_\pm(s) = (\pm 1)^{k+mc} s^h Q((\pm 1)^c s^b), \tag{8.1}$$

$Q$  étant donné par (7.4). Les polynômes  $P_+$  et  $P_-$  ne sont pas identiquement nuls (on suppose  $a_0$  et  $a_m \neq 0$ ); par suite :

**Proposition 8.1.** L'application linéaire continue  $P : K_\mu \rightarrow K_\nu$ , avec (7.17), est injective.

Cherchons à déterminer l'image  $PK_\mu$  de  $P$ . Soient  $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\mu$  et  $\psi = P\varphi = (\psi^+, \psi^-) \in K_\nu$ .

On a  $P_\pm(s) = s^h Q_\pm(s)$ ,  $Q_\pm(s)$  étant un polynôme  $\neq 0$  pour  $s = 0$ . Par conséquent, en considérant la partie

$$Z^0_\nu = \{\alpha_j^+, \alpha_j^-; 0 \leq j < h\} \cup \{\beta_j^+, \beta_j^-; \bar{n} \leq j < \bar{n} + h\} \tag{8.2}$$

de  $K'_\nu$ , on a  $\langle h, \psi \rangle = 0$ , pour tout  $h \in Z^0_\nu$ . (8.3)

Soit  $r_0$  un zéro réel d'ordre  $n_0$  de  $Q_\pm(s)$ . De l'égalité  $\psi^\pm(s) = s^h Q_\pm(s) \varphi^\pm(s)$ , on déduit que  $\langle \delta_k^\pm(s - r_0), \psi \rangle = 0$ , pour tout  $k < n_0$ , où  $\delta_k^+(s - r_0)$  et  $\delta_k^-(s - r_0)$  sont les éléments de  $K'_\nu$  définis par

$$\langle \delta_k^\pm(s - r_0), \psi \rangle = D^k \psi^\pm(r_0), k \in \mathbb{N}, \psi \in K_\nu.$$

Soient alors  $z_j, 1 \leq j \leq m'$ , les zéros réels distincts de  $Q(s)$ ,  $z_j$  étant d'ordre  $n_j$ . D'après (8.1), les zéros réels  $r_0$  de  $Q_\pm(s)$  sont les nombres tels que  $(\pm 1)^c r_0^b = z_j$ , pour un entier  $j \geq 1, j \leq m'$ . Considérons la partie  $Z^1_\nu$  de  $K'_\nu$  définie de la façon suivante :

$$Z^1_\nu = \begin{cases} \{\delta_k^+(s - r_j), \delta_k^-(s + r_j); r_j \in \mathbb{R}, r_j^b = z_j\}, & \text{si } b \text{ et } c \text{ sont impairs,} \\ \{\delta_k^+(s - r_j), \delta_k^-(s - r_j); r_j \in \mathbb{R}, r_j^b = z_j\}, & \text{si } b \text{ est impair et } c \text{ pair,} \\ \{\delta_k^{\text{sgn } z_j}(s - r_j), \delta_k^{\text{sgn } z_j}(s + r_j); r_j > 0, r_j^b = |z_j|\}, & \text{si } b \text{ est pair et } c \text{ impair,} \end{cases} \tag{8.4}$$

l'entier  $j$  prenant les valeurs  $1, 2, \dots, m'$  et  $k$  les valeurs  $0, 1, \dots, n_j - 1$ ;  $Z_\nu^1 = \emptyset$  si  $Q$  n'a pas de zéro réel. Avec ces notations, on a donc

$$\langle h, \psi \rangle = 0, \text{ pour tout } h \in Z_\nu^1. \quad (8.5)$$

Les formules (7.9) et (7.13) entraînent

$$\chi^\pm \psi(s) = (\pm 1)^h s^k \sum_{j=0}^m a_j (\pm 1)^{jb} s^{(m-j)c} \chi^\pm \varphi(s).$$

Par suite, en posant

$$Z_\nu^2 = \{\varepsilon_j^+, \varepsilon_j^-; 0 \leq j < k\}, \quad (8.6)$$

on a

$$\langle h, \psi \rangle = 0, \text{ pour tout } h \in Z_\nu^2. \quad (8.7)$$

D'après (7.10) et (7.14), si  $j \in N_\nu$  et  $0 \leq \lambda \leq m$ ,

$$\langle \gamma_j, \sigma^{h+\lambda b} \eta^{k+(m-\lambda)c} \varphi \rangle$$

est égal à  $\langle \gamma_{j-h-\lambda b}, \varphi \rangle$  si  $j \geq h + \lambda b$  et  $k_\nu(j) \geq k + (m - \lambda)c$ , et est nul dans les autres cas. Soit  $\bar{N}_\nu$  l'ensemble des  $j \in N_\nu$  pour lesquels existe un entier  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda \leq m$ , tel que  $j \geq h + \lambda b$  et  $k_\nu(j) \geq k + (m - \lambda)c$ . On a

$$\bar{N}_\nu = \{i + h + \lambda b; i \in N_\mu, 0 \leq \lambda \leq m\}.$$

$\bar{N}_\nu$  est vide si et seulement si  $N_\mu$  l'est. Si  $j \in N_\nu - \bar{N}_\nu$ , on a  $\langle \gamma_j, \psi \rangle = 0$ , et si  $j \in \bar{N}_\nu$ ,

$$\langle \gamma_j, \psi \rangle = \sum a_\lambda \langle \gamma_i, \varphi \rangle,$$

la somme étant étendue à tous les entiers  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda \leq m$ , et  $i \in N_\mu$ , tels que  $i + h + \lambda b = j$ .

Supposons que  $N_\mu \neq \emptyset$ , donc  $\bar{N}_\nu \neq \emptyset$ , et posons

$$n_\mu = \text{card } N_\mu, i_\mu = \min N_\mu, s_\mu = \max N_\mu.$$

On a

$$N_\mu = \{i_\mu, i_\mu + b, i_\mu + 2b, \dots, s_\mu\},$$

$$\bar{N}_\nu = \{i + h; i \in N_\mu\} \cup \{s_\mu + h + \lambda b; 1 \leq \lambda \leq m\}, \quad (8.8)$$

de sorte que  $\text{card } \bar{N}_\nu = n_\mu + m$ . Les  $n_\mu$  nombres  $\langle \gamma_i, \varphi \rangle$ ,  $i \in N_\mu$ , sont liés par les  $n_\mu + m$  relations linéaires

$$\begin{aligned} \langle \gamma_{i_\mu+h}, \psi \rangle &= a_0 \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi \rangle \\ \langle \gamma_{i_\mu+h+b}, \psi \rangle &= a_1 \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi \rangle + a_0 \langle \gamma_{i_\mu+b}, \varphi \rangle \\ \dots &\dots \\ \langle \gamma_{s_\mu+h}, \psi \rangle &= a_{n_\mu-1} \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi \rangle + \dots + a_0 \langle \gamma_{s_\mu}, \varphi \rangle \\ \langle \gamma_{s_\mu+h+b}, \psi \rangle &= a_{n_\mu} \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi \rangle + \dots + a_1 \langle \gamma_{s_\mu}, \varphi \rangle \\ \dots &\dots \\ \langle \gamma_{s_\mu+h+mb}, \psi \rangle &= a_m \langle \gamma_{s_\mu}, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

où l'on pose  $a_\lambda = 0$  si  $\lambda > m$ . Le déterminant des coefficients des  $\langle \gamma_i, \varphi \rangle$  dans les  $n_\mu$  premières relations vaut  $a_0^{n_\mu} \neq 0$ . On a donc  $m$  relations de compatibilité  $\langle L_\lambda, \psi \rangle = 0$ ,  $1 \leq \lambda \leq m$ , où les  $L_\lambda$  sont  $m$  éléments de  $K'_\nu$ , linéairement indépendants :

$$L_\lambda = \gamma_{s_\mu+h+\lambda b} + a_0^{-n_\mu} \sum_{i \in N_\mu} A_\lambda^i \gamma_{i+h}, \quad 1 \leq \lambda \leq m, \quad (8.9)$$

$A_\lambda^i$  étant le mineur de  $X_i$  dans la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & X_{i_\mu} & X_{i_\mu+b} & \cdots & X_{s_\mu} \\ a_{\lambda+n_\mu-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n_\mu-1} \\ a_{\lambda+n_\mu-2} & 0 & a_0 & \cdots & a_{n_\mu-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_\lambda & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$Z_\nu^3 = \begin{cases} \{\gamma_j; j \in N_\nu\}, & \text{si } N_\mu = \emptyset, \\ \{\gamma_j; j \in N_\nu - \bar{N}_\nu\} \cup \{L_1, \dots, L_m\}, & \text{si } N_\mu \neq \emptyset. \end{cases} \quad (8.10)$$

Avec ces notations, on a

$$\langle h, \psi \rangle = 0, \quad \text{pour tout } h \in Z_\nu^3. \quad (8.11)$$

De même, soit  $\bar{N}'_\nu$  l'ensemble des  $j \in N'_\nu$  pour lesquels existe un entier  $\lambda$ ,  $0 \leq \lambda \leq m$ , tel que  $j \geq \bar{n} + h + \lambda b$ ,  $k'_\nu(j) \geq k + (m - \lambda)c$ .  $\bar{N}'_\nu$  est vide si et seulement si  $N'_\mu$  l'est.

Si  $N'_\mu \neq \emptyset$ , posons

$$n'_\mu = \text{card } N'_\mu, \quad i'_\mu = \min N'_\mu, \quad s'_\mu = \max N'_\mu.$$

On a

$$N'_\mu = \{i'_\mu, i'_\mu + b, i'_\mu + 2b, \dots, s'_\mu\},$$

$$\bar{N}'_\nu = \{i + h; i \in N'_\mu\} \cup \{s'_\mu + h + \lambda b; 1 \leq \lambda \leq m\}. \quad (8.12)$$

Soient  $L'_1, \dots, L'_m$  les éléments de  $K'_\nu$  définis par

$$L'_\lambda = \gamma'_{s'_\mu+h+\lambda b} + a_0^{-n'_\mu} \sum_{i \in N'_\mu} A'^i_\lambda \gamma'_{i+h}, \quad 1 \leq \lambda \leq m, \quad (8.13)$$

$A'^i_\lambda$  étant le mineur de  $X_i$  dans la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & X_{i'_\mu} & X_{i'_\mu+b} & \cdots & X_{s'_\mu} \\ a_{\lambda+n'_\mu-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n'_\mu-1} \\ a_{\lambda+n'_\mu-2} & 0 & a_0 & \cdots & a_{n'_\mu-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_\lambda & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Considérons la partie  $Z'_\nu$  de  $K'_\nu$  définie par

$$Z'_\nu = \begin{cases} \{\gamma'_j; j \in N'_\nu\}, & \text{si } N'_\mu = \emptyset, \\ \{\gamma'_j; j \in N'_\nu - \bar{N}'_\nu\} \cup \{L'_1, \dots, L'_m\}, & \text{si } N'_\mu \neq \emptyset. \end{cases} \quad (8.14)$$

Comme précédemment, (7.11) et (7.15) entraînent

$$\langle h, \psi \rangle = 0 \text{ pour tout } h \in Z'^3_\nu. \quad (8.15)$$

Inversement, si  $\psi \in K_\nu$  vérifie (8.3), (8.5), (8.7), (8.11) et (8.15), il existe  $\varphi \in K_\mu$  tel que  $\psi = P\varphi$ . On a donc:

**Proposition 8.2.** *L'image  $PK_\mu$  de l'application  $P: K_\mu \rightarrow K_\nu$  est le sous-espace vectoriel fermé de  $K_\nu$ , de codimension finie, formé des  $\psi \in K_\nu$  tels que  $\langle h, \psi \rangle = 0$ , pour tout  $h \in Z_\nu$ , où  $Z_\nu$  est la partie*

$$Z_\nu = Z^0_\nu \cup Z^1_\nu \cup Z^2_\nu \cup Z^3_\nu \cup Z'^3_\nu \quad (8.16)$$

de  $K'_\nu$ , avec (8.2), (8.4), (8.6), (8.10) et (8.14).

Enfin, on vérifie que si  $\psi = P\varphi \rightarrow 0$  dans  $K_\nu$ , alors  $\varphi \rightarrow 0$  dans  $K_\mu$  (cf. TENGSTRAND [13], lemme 8.1 et SCHWARTZ [12], t. 1, p. 123). Par suite:

**Proposition 8.3.** *L'application réciproque  $P^{-1}: PK_\mu \rightarrow K_\mu$  est continue.*

## 9. Applications $P'$ et $P'_0$ , opérateur $D$

A tout opérateur  $D$  de la forme (7.6), associons le nombre

$$d = 2(2h + m_0 + k), \quad (9.1)$$

$m_0$  étant le nombre de zéros réels du polynôme  $Q(s)$  donné par (7.4) (dans [7], la valeur de  $d$  indiquée est inexacte).

Pour tout  $\nu \in C$ , posons

$$n_\nu = \text{card } N_\nu, \quad n'_\nu = \text{card } N'_\nu, \quad (9.2)$$

avec (2.18) et (2.19).

Il est clair que les éléments de la partie  $Z_\nu$  de  $K'_\nu$  définie par (8.16) sont linéairement indépendants, et que leur nombre  $c_\nu$  est fini:

$$c_\nu = \text{card } Z_\nu = d + n_\nu - n_\mu + n'_\nu - n'_\mu. \quad (9.3)$$

D'après la proposition 8.2,  $PK_\mu$  est orthogonal à  $Z_\nu$ , donc est un sous-espace fermé de codimension  $c_\nu$  dans  $K_\nu$  ([1], § 4, n° 6). Par suite ([2], chap. I, § 2, prop. 3),  $K_\nu$  est somme directe topologique de  $PK_\mu$  et d'un sous-espace de dimension  $c_\nu$ . Compte tenu de la proposition 8.3, il en résulte que la trans-

posée  $P' : K'_\nu \rightarrow K'_\mu$  est surjective. D'autre part, les éléments  $f$  de  $K'_\nu$  tels que  $P'f = 0$  sont ceux qui s'annulent sur  $PK_\mu$ ; ce sont donc les éléments du sous-espace vectoriel  $[Z_\nu]$  engendré par  $Z_\nu$  ([1], loc. cit.). On a ainsi montré :

**Proposition 9.1.** *L'application transposée  $P' : K'_\nu \rightarrow K'_\mu$  est surjective. Son noyau est le sous-espace vectoriel  $[Z_\nu]$  de  $K'_\nu$ , de dimension  $c_\nu$  (formule (9.3)), dont  $Z_\nu$  (formule (8.16)) est une base.*

Cherchons à déterminer le noyau et l'image de l'application  $P'_0 : H_\nu \rightarrow H_\mu$  induite par  $P'$ . Rappelons d'abord que, pour tout  $\nu \in C$ ,  $H_\nu$  est le sous-espace vectoriel fermé de  $K'_\nu$ , de codimension  $n_\nu + n'_\nu$ , orthogonal à la partie libre  $X_\nu$  de  $K_\nu$  (prop. 5.1). Nous désignerons par  $[X_\nu]$  le sous-espace vectoriel engendré par  $X_\nu$ . Si  $j \in N_{\nu+2}$ , on a  $\sigma_j \in X_{\nu+2}$  et (prop. 7.1)

$$\sigma \sigma_j = \sigma_{j+1} \in X_\nu; \quad (9.4)$$

si  $j \in N'_{\nu+2}$ , on a  $\tau_j \in X_{\nu+2}$  et (prop. 7.1)

$$\sigma \tau_j = \tau_{j+1} \in X_\nu; \quad (9.5)$$

si  $j \in N_{\nu+a}$ , on a  $\sigma_j \in X_{\nu+a}$  et (prop. 7.2)

$$\eta \sigma_j = \sigma_j \in X_\nu; \quad (9.6)$$

si  $j \in N'_{\nu+a}$ , on a  $\tau_j \in X_{\nu+a}$  et (prop. 7.2)

$$\eta \tau_j = \tau_j \in X_\nu. \quad (9.7)$$

D'après (7.16), les relations (9.4) à (9.7) montrent que

$$PX_\mu \subset [X_\nu]. \quad (9.8)$$

Le noyau de  $P' : K'_\nu \rightarrow K'_\mu$  étant  $[Z_\nu]$ , celui de  $P'_0$  est  $P'_0{}^{-1}(0) = [Z_\nu] \cap H_\nu$ . Mais  $P'_0{}^{-1}(0)$  est aussi le noyau de l'application linéaire  $\alpha$  de  $[Z_\nu]$  dans  $C^{n_\nu+n'_\nu}$ , qui à  $h \in [Z_\nu]$  fait correspondre le vecteur  $\alpha h = (\langle h, \varphi \rangle)_{\varphi \in X_\nu}$  (prop. 5.1). Soit  $\varrho_\nu$  le rang de  $\alpha$ , c'est-à-dire le rang de la matrice

$$M = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in [Z_\nu], \varphi \in X_\nu}. \quad (9.9)$$

On a  $\dim [Z_\nu] = c_\nu = \varrho_\nu + d_\nu$ , en posant  $d_\nu = \dim P'_0{}^{-1}(0)$ ; donc  $d_\nu = c_\nu - \varrho_\nu$ , et :

**Proposition 9.2.** *Le noyau de  $P'_0 : H_\nu \rightarrow H_\mu$  est le sous-espace vectoriel  $H_\nu \cap [Z_\nu]$  de  $H_\nu$ , de dimension  $d_\nu = c_\nu - \varrho_\nu$ , avec (9.3),  $\varrho_\nu$  étant le rang de la matrice (9.9).*

Soit  $W = [X_\nu] \cap PK_\mu$ . D'après (9.8), on a  $P[X_\mu] \subset [X_\nu]$ , donc  $P[X_\mu] \subset W$ . Soit  $V_\nu$  un supplémentaire de  $P[X_\mu]$  dans  $W : W = P[X_\mu] \oplus V_\nu$ . Soient enfin  $Y_0$  un supplémentaire de  $W$  dans  $[X_\nu]$  et  $Y_1$  un supplémentaire

de  $PK_\mu \oplus Y_0$  dans  $K_\nu : [X_\nu] = P[X_\mu] \oplus V_\nu \oplus Y_0, K_\nu = PK_\mu \oplus Y_0 \oplus Y_1$  (cf. [2], chap. I, § 2, th. 2 et prop. 3).

Soit  $g \in H_\mu$ . Il existe  $f \in K'_\nu$  tel que  $g = P'f$  (prop. 9.1). Si  $\psi \in PK_\mu$ , on a  $\langle f, \psi \rangle = \langle f, PP^{-1}\psi \rangle = \langle g, P^{-1}\psi \rangle$ ; sur  $Y_0 \oplus Y_1$ ,  $f$  est arbitraire. Pour que  $f \in H_\nu$ , il faut et il suffit que  $f$  s'annule sur  $[X_\nu]$  (prop. 5.1). On peut toujours supposer que  $f$  est nulle sur  $Y_0$ . Sur  $P[X_\mu]$ ,  $f$  est nulle, car  $\langle f, \psi \rangle = \langle g, P^{-1}\psi \rangle = 0$ , puisque  $P^{-1}\psi \in [X_\mu]$  si  $\psi \in P[X_\mu]$ . Par conséquent, pour que  $f \in H_\nu$ , il faut et il suffit que  $\langle f, \psi \rangle = \langle g, P^{-1}\psi \rangle = 0$ , pour tout  $\psi \in V_\nu$ . Ainsi,  $P'_0H_\nu$  est le sous-espace vectoriel de  $H_\mu$ , de codimension finie égale à la dimension de  $V_\nu$  (cf. [1], § 4, th. 1), orthogonal à  $P^{-1}V_\nu$ .

$PK_\mu$  étant orthogonal à  $[Z_\nu]$  (prop. 8.2),  $W$  est le noyau de l'application linéaire  $\beta$  de  $[X_\nu]$  dans  $C^{e_\nu}$ , avec (9.3), qui à  $\varphi \in [X_\nu]$  fait correspondre le vecteur  $\beta\varphi = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z_\nu}$ . On a donc  $\dim W = \dim [X_\nu] - \varrho_\nu$ ,  $\varrho_\nu$  étant le rang de  $\beta$ , c'est-à-dire le rang de la matrice (9.9). D'autre part,  $\dim W = \dim V_\nu + \dim [X_\mu]$ . Comme  $\dim [X_\nu] = n_\nu + n'_\nu$ , on obtient  $\dim V_\nu = n_\nu + n'_\nu - n_\mu - n'_\mu - \varrho_\nu$ . On a donc :

**Proposition 9.3.** *L'image  $P'_0H_\nu$  de l'application  $P'_0 : H_\nu \rightarrow H_\mu$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H_\mu$ , de codimension finie  $e_\nu$  :*

$$e_\nu = \text{codim } P'_0H_\nu = n_\nu + n'_\nu - n_\mu - n'_\mu - \varrho_\nu, \tag{9.10}$$

avec (9.2),  $\varrho_\nu$  étant le rang de la matrice (9.9).

D'après les formules (9.4) à (9.7) et (7.16), on a, si  $j \in N_\mu$ ,

$$\sigma_j \in X_\mu, P\sigma_j = \sum_{\lambda=0}^m a_\lambda \sigma_{j+h+\lambda b} \in [X_\nu],$$

et si  $j \in N'_\mu$ ,

$$\tau_j \in X_\mu, P\tau_j = \sum_{\lambda=0}^m a_\lambda \tau_{j+h+\lambda b} \in [X_\nu],$$

avec  $a_0 \neq 0$ . Par suite, si  $N_\mu \neq \emptyset$ , une partie libre de  $K_\nu$  équivalente à  $\{\sigma_j; j \in N_\nu\}$  est  $\{P\sigma_j; j \in N_\mu\} \cup \{\sigma_j; j \in N_\nu, j - h \notin N_\mu\}$ .

De même, si  $N'_\mu \neq \emptyset$ , une partie libre de  $K_\nu$ , équivalente à  $\{\tau_j; j \in N'_\nu\}$  est  $\{P\tau_j; j \in N'_\mu\} \cup \{\tau_j; j \in N'_\nu, j - h \notin N'_\mu\}$ .

Par conséquent, en vertu des formules (5.8), (5.13) et (8.14), le rang  $\varrho_\nu$  de la matrice (9.9) est égal à celui de la matrice

$$M' = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z'_\nu, \varphi \in X'_\nu}, \tag{9.11}$$

avec

$$Z'_\nu = Z_\nu - Z_\nu^3, \tag{9.12}$$

$$X'_\nu = \{\sigma_j; j \in N_\nu, j - h \notin N_\mu\} \cup \{\tau_j; j \in N'_\nu, j - h \notin N'_\mu\}. \tag{9.13}$$

Comme  $M'$  est de rang  $\rho_v$ , il existe  $\text{card } X'_v - \rho_v = e_v$  éléments linéairement indépendants  $\eta_i, 1 \leq i \leq e_v$ , du sous-espace vectoriel  $[X'_v]$  engendré par  $X'_v$ , tels que  $\langle h, \eta_i \rangle = 0$ , pour tout  $h \in Z_v$ . Les éléments  $\eta_i$  engendrent un supplémentaire  $V_v$  de  $P[X_\mu]$  dans  $PK_\mu \cap [X'_v]$ , donc:

**Proposition 9.4.** *L'image de  $P'_0: H_v \rightarrow H_\mu$  est le sous-espace vectoriel de  $H_\mu$  formé des éléments  $h \in H_\mu$  tels que*

$$\langle h, P^{-1}\eta_i \rangle = 0, i = 1, 2, \dots, e_v, \tag{9.14}$$

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{e_v}$  étant  $e_v$  éléments linéairement indépendants de  $[X'_v]$  (formule (9.13)), contenus dans  $PK_\mu$  (donc tels que  $\langle h, \eta_i \rangle = 0$  pour tout  $h \in Z_v$ ).

Des propositions 6.1, 6.2, 7.3, 9.1, 9.2 et 9.3 on déduit les théorèmes suivants:

**Théorème 9.1.** *Pour tout  $v' \in C, \mu' = v' - 2h - ak - 2bm, \nu = -(v' + n + a), \mu = -(\mu' + n + a)$ , l'opérateur  $D$  défini par (7.6) induit une application linéaire  $D: K_{\nu'} \rightarrow K_{\mu'}$  surjective, dont le noyau est de dimension finie  $c_v$ , avec (9.3), (9.1) et (9.2).*

**Théorème 9.2.** *Avec les notations du théorème 9.1, pour tout  $v' \in C$ , l'application linéaire  $D: H_{\nu'} \rightarrow H_{\mu'}$  a une image de codimension finie  $e_v$  et un noyau de dimension finie  $d_v$ . On a*

$$d_v = d + e_v, \tag{9.15}$$

où  $d$ , donné par (9.1), ne dépend que de  $D$ ;  $e_v$  est donné par (9.10), avec (9.2),  $\rho_v$  étant le rang de la matrice (9.11).

**Remarque.** La valeur minimale de la dimension  $d_v$  du noyau de  $D: H_{\nu'} \rightarrow H_{\mu'}$  est donc  $d$  et est atteinte lorsque  $e_v = 0$ , c'est-à-dire lorsque l'application  $D: H_{\nu'} \rightarrow H_{\mu'}$  est surjective. Cela a lieu en particulier si  $N_v$  et  $N'_v$  sont vides, auquel cas  $H_{\nu'} = K_{\nu'}$  et  $H_{\mu'} = K_{\mu'}$ .

La mesure de DIRAC  $\delta$  appartient à  $H_{\mu'} \subset K_{\mu'}$  pour  $\mu' = -(n + a)$ . En outre,  $F\delta = 1 \in H_0$ . On a  $N_0 = N'_0 = \emptyset$ , donc  $H_0 = K'_0$ . D'après (3.1) et (3.2), si  $\varphi \in K_0, \varphi^+(s)$  et  $\varphi^-(s)$  sont intégrables sur  $R$ , et l'égalité

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int \varphi^+(s) ds + \int \varphi^-(s) ds$$

définit un élément noté  $1$  de  $K'_0$ . En vertu de (2.6), on a  $\langle M'_0 1, \Phi \rangle = \langle 1, M_0 \Phi \rangle = \langle 1, \Phi \rangle$  pour tout  $\Phi \in D(R^{n+1})$ , c'est-à-dire  $M'_0 1 = 1$ . Le théorème 9.1 et les propositions 6.1, 7.3 et 9.2 à 9.4 entraînent donc le résultat suivant:

**Théorème 9.3.** *Soit  $D$  l'opérateur défini par (7.6), et posons  $\nu' = -(n + a) + 2h + ak + 2bm, \mu' = -(n + a), \nu = -(2h + ak + 2bm), \mu = 0$ .*

L'ensemble des solutions élémentaires de  $D$ , contenues dans  $K_v$ , a au moins un élément, et forme une variété linéaire affine de dimension  $c_v$ , avec (9.3).

Pour que  $D$  admette une solution élémentaire dans  $H$ , donc dans  $H_v$ , il faut et il suffit que

$$\langle 1, P^{-1}\eta_i \rangle = \int \frac{\eta_i^+(s)}{P_+(s)} ds + \int \frac{\eta_i^-(s)}{P_-(s)} ds = 0, \quad (9.16)$$

pour  $i = 1, 2, \dots, e_v$ , avec (9.10), les  $\eta_i$  étant les éléments de  $K_v$  considérés dans la proposition 9.4, et  $P_+, P_-$  les polynômes (8.1). Si la condition (9.16) est vérifiée, l'ensemble des solutions élémentaires de  $D$  contenues dans  $H_v$ , forme une variété linéaire affine de dimension  $d_v$ , avec (9.15).

## 10. Exemple

Comme exemple, considérons l'opérateur

$$D = (-\square)^{mb} - z \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{mc}, \quad (10.1)$$

obtenu lorsque  $h = k = 0$ ,  $a_0 = -z \neq 0$ ,  $a_m = 1$ ,  $Q(s) = s^m - z$ ,  $m \geq 1$  (formules (7.6) et (7.4)).

Examinons dans quels cas  $D$  admet une solution élémentaire dans  $H$ , c'est-à-dire dans  $H_v$ , avec  $v' = -(n + a) + 2bm$ . Posons  $\mu' = -(n + a)$ ,  $v = -2bm$ ,  $\mu = 0$ .

D'après (2.18) et (2.19), on a  $N_0 = N'_0 = \emptyset$  et, avec  $\lambda \in N$ ,

$$N_v = \{\lambda b - 1; \lambda \geq 1, \lambda \leq m - 1\}; \quad (10.2)$$

si  $n$  est pair,

$$N'_v = \{\lambda b - 1; \lambda \geq \frac{n}{2b}, \lambda \leq m - 1\}; \quad (10.3)$$

si  $n$  est impair,

$$N'_v = \begin{cases} \emptyset, & \text{si } c \text{ est impair,} \\ \{\lambda b - \frac{b+3}{2}; \lambda \geq \frac{n+b}{2b}, \lambda \leq m\}, & \text{si } c \text{ est pair.} \end{cases} \quad (10.4)$$

D'après (2.16) et (2.17), on a

$$k_v(\lambda b - 1) = (m - \lambda)c - 1; \quad (10.5)$$

$$k'_v(\lambda b - 1) = (m - \lambda)c - 1, \text{ si } n \text{ est pair,} \quad (10.6)$$

$$k'_v\left(\lambda b - \frac{b+3}{2}\right) = \left(m - \lambda + \frac{1}{2}\right)c - 1, \text{ si } n \text{ est impair.} \quad (10.7)$$

En vertu de (8.2) et (8.6), on a  $Z_v^0 = Z_v^2 = \emptyset$ .

Le nombre de zéros réels de  $Q(s)$  est

$$m_0 = \begin{cases} 2, & \text{si } m \text{ est pair, } z > 0, \\ 1, & \text{si } m \text{ est impair, } z \in R, \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

D'après (8.4), on a  $Z_\nu^1 = \emptyset$  si  $m_0 = 0$ . Si  $m_0 = 1$ , soit  $z_1$  le zéro réel de  $Q$ ; on a

$$Z_\nu^1 = \begin{cases} \{\delta_0^+(s - r_1), \delta_0^-(s + r_1)\}, & \text{si } b \text{ et } c \text{ sont impairs,} \\ \{\delta_0^+(s - r_1), \delta_0^-(s - r_1)\}, & \text{si } b \text{ impair et } c \text{ pair,} \\ \{\delta_0^{\text{sgn } z}(s - r_1), \delta_0^{\text{sgn } z}(s + r_1)\}, & \text{si } b \text{ pair et } c \text{ impair,} \end{cases}$$

avec  $r_1 \in R$ ,  $r_1^b = z_1$  si  $b$  est impair, et  $r_1 > 0$ ,  $r_1^b = |z_1|$  si  $b$  est pair. Si  $m_0 = 2$ , soit  $z_1 > 0$  le zéro positif de  $Q$  et soit  $r_1 > 0$  tel que  $r_1^b = z_1$ ; on a

$$Z_\nu^1 = \{\delta_0^+(s - r_1), \delta_0^+(s + r_1), \delta_0^-(s - r_1), \delta_0^-(s + r_1)\}.$$

Comme  $N_\mu = \emptyset$ , la formule (8.10) donne

$$Z_\nu^3 = \{\gamma_j; j \in N_\nu\}.$$

Nous avons à déterminer le rang  $\rho_\nu$  de la matrice

$$M' = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z_\nu', \varphi \in X_\nu},$$

avec  $Z_\nu' = Z_\nu^1 \cup Z_\nu^3$ ,  $X_\nu$  étant donné par (5.4). Le nombre  $e_\nu = n_\nu + n'_\nu - \rho_\nu$ , en résulte (formules (9.2) et (9.10)). Nous devons ensuite former des combinaisons linéaires  $\eta_1, \dots, \eta_{e_\nu}$  des éléments de  $X_\nu$ , de manière que les  $\eta_i$  soient linéairement indépendants et que  $\langle h, \eta_i \rangle = 0$ , pour tout  $h \in Z_\nu'$  (th. 9.3 et prop. 9.4). Les  $\eta_i$  se déduisent des relations linéaires entre les vecteurs colonnes de la matrice  $M'$ . Nous poserons

$$Y = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{e_\nu}\}.$$

Dans le 1<sup>er</sup> cas, d'après (5.7) et (5.12), on a  $\rho_\nu = \rho + n'_\nu$ , avec (9.2),  $\rho$  étant le rang de la matrice

$$M'' = (\langle h, \sigma_j \rangle)_{h \in Z_\nu^1, j \in N_\nu}.$$

Dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cas, (5.7) et (5.12) montrent que  $\rho_\nu$  est le rang de

$$M'' = (\langle h, \sigma_j \rangle \langle h, \tau_{j'} \rangle)_{h \in Z_\nu^1, j \in N_\nu, j' \in N'_\nu}.$$

Pour tout  $t \in R$ , posons  $t_+ = t$  si  $t \geq 0$  et  $t_+ = 0$  si  $t < 0$ . Si  $n_\nu = \text{card } N_\nu > 0$ , soit  $s_\nu = \max N_\nu$  et si  $n'_\nu = \text{card } N'_\nu > 0$ , soit  $s'_\nu = \max N'_\nu$ . Posons

$$\begin{aligned} N_\nu^1 &= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } n_\nu \leq 1, \\ N_\nu - \{s_\nu\}, & \text{si } n_\nu > 1, \end{cases} \\ N_\nu'^1 &= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } n'_\nu \leq 1, \\ N'_\nu - \{s'_\nu\}, & \text{si } n'_\nu > 1, \end{cases} \end{aligned} \tag{10.8}$$

$$\begin{aligned}
N_v^2 &= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } n_v \leq 2, \\ N_v - \{s_v, s_v - b\}, & \text{si } n_v > 2, \end{cases} \\
N_v'^2 &= \begin{cases} \emptyset, & \text{si } n'_v \leq 2, \\ N'_v - \{s'_v, s'_v - b\}, & \text{si } n'_v > 2. \end{cases} \quad (10.9)
\end{aligned}$$

Avec ces notations, l'étude de la matrice  $M''$  conduit aux résultats suivants:

Dans le 1<sup>er</sup> cas,

$$\varrho_v = \min(n_v, m_0) + n'_v, \quad e_v = (n_v - m_0)_+.$$

On peut prendre

$$Y = \begin{cases} \{\sigma_j; j \in N_v\}, & \text{si } m_0 = 0, \\ \{\sigma_{j+b} - z_1 \sigma_j; j \in N_v^1\}, & \text{si } m_0 = 1, \\ \{\sigma_{j+2b} - z_1^2 \sigma_j; j \in N_v^2\}, & \text{si } m_0 = 2. \end{cases}$$

Dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cas,  $\begin{cases} \text{si } m_0 = 0, \\ \text{ou si } m_0 \geq 1 \text{ et } c \text{ impair,} \end{cases}$

dans le 2<sup>e</sup> cas, si  $c$  est pair,  $\frac{c}{2}$  impair,  $m_0 = 1$  et  $z > 0$ ,

$$\varrho_v = \min(n_v, m_0) + \min(n'_v, m_0),$$

$$e_v = (n_v - m_0)_+ + (n'_v - m_0)_+,$$

$$Y = \begin{cases} \{\sigma_j; j \in N_v\} \cup \{\tau_j; j \in N'_v\}, & \text{si } m_0 = 0, \\ \{\sigma_{j+b} - z_1 \sigma_j; j \in N_v^1\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1 \tau_j; j \in N_v'^1\}, & \text{si } m_0 = 1, \\ \{\sigma_{j+2b} - z_1^2 \sigma_j; j \in N_v^2\} \cup \{\tau_{j+2b} - z_1^2 \tau_j; j \in N_v'^2\}, & \text{si } m_0 = 2. \end{cases}$$

Si  $c$  est pair,  $m_0 = 1$ ,  $z > 0$ ,  $\begin{cases} \text{dans le 2<sup>e</sup> cas si } \frac{c}{2} \text{ est pair,} \\ \text{ou dans le 3<sup>e</sup> cas,} \end{cases}$

$$\varrho_v = \min(n_v + n'_v, 1),$$

$$e_v = (n_v + n'_v - 1)_+.$$

$Y$  peut être pris égal à

$$\{\sigma_{j+b} - z_1 \sigma_j; j \in N_v^1\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1 \tau_j; j \in N_v'^1\},$$

augmenté de  $\gamma(r_1)r_1^{s'_v - s_v} \sigma_{s_v} - \tau_{s'_v}$ , si  $n_v$  et  $n'_v$  sont tous deux  $> 0$ .

Si  $c$  est pair,  $m_0 = 1$ ,  $z < 0$ , dans les 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> cas,

$$\varrho_v = \min(n_v, 1), \quad e_v = (n_v - 1)_+ + n'_v,$$

$$Y = \{\sigma_{j+b} - z_1 \sigma_j; j \in N_v^1\} \cup \{\tau_j; j \in N'_v\}.$$

Si  $m_0 = 2$ , et si  $c$  est pair,  $\left\{ \begin{array}{l} \text{dans le 2}^{\text{e}} \text{ cas si } \frac{c}{2} \text{ est pair,} \\ \text{ou dans le 3}^{\text{e}} \text{ cas,} \end{array} \right.$

$$e_\nu = \begin{cases} 2, & \text{si } n_\nu \geq 2, \\ n_\nu + \min(n'_\nu, 1), & \text{si } n_\nu < 2, \end{cases}$$

$$e_\nu = \begin{cases} n_\nu + n'_\nu - 2, & \text{si } n_\nu \geq 2, \\ (n'_\nu - 1)_+, & \text{si } n_\nu < 2. \end{cases}$$

On peut prendre  $Y$  égal à

$$\{\sigma_{j+2b} - z_1^2 \sigma_j; j \in N_\nu^2\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1 \tau_j; j \in N_\nu'^1\},$$

augmenté de  $(r_1^b \sigma_{s_\nu-b} + \sigma_{s_\nu}) \gamma(r_1) r_1^{s'_\nu - s_\nu} - 2 \tau_{s'_\nu}$ , si  $n_\nu \geq 2$  et  $n'_\nu \geq 1$ .

Dans le 2<sup>e</sup> cas, si  $m_0 = 2$ ,  $c$  pair,  $\frac{c}{2}$  impair,

$$e_\nu = \min(n_\nu, 2) + \min(n'_\nu, 1),$$

$$e_\nu = (n_\nu - 2)_+ + (n'_\nu - 1)_+,$$

$$Y = \{\sigma_{j+2b} - z_1^2 \sigma_j; j \in N_\nu^2\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1 \tau_j; j \in N_\nu'^1\}.$$

Lorsque  $e_\nu = 0$ , l'application  $D: H_\nu \rightarrow H_\mu$  est surjective (th. 9.2), donc  $D$  admet une solution élémentaire dans  $H_\nu$ . Si  $e_\nu \geq 1$ , pour que  $D$  admette une solution élémentaire dans  $H_\nu$ , il faut et il suffit que les conditions (9.16) soient vérifiées, donc que  $\langle 1, P^{-1} \eta \rangle = 0$ , pour tout  $\eta \in Y$ . Compte tenu des formules (10.2) à (10.7), on en déduit:

**Proposition 10.1.** *Pour que l'opérateur  $D$  défini par (10.1) admette une solution élémentaire dans  $H_\nu$ , il faut et il suffit qu'une des conditions suivantes soit satisfaite:*

dans le 1<sup>er</sup> cas:

- 1)  $b$  et  $c$  impairs,  $m \leq m_0 + 1$ ,
- 2)  $b$  impair et  $c$  pair,
- 3)  $b$  pair et  $c$  impair;

dans le 2<sup>e</sup> cas:

- 1)  $b$  et  $c$  impairs,  $m \leq m_0 + 1$ ,
- 2)  $b$  impair,  $c$  et  $\frac{c}{2}$  pairs,
- 3)  $b$  impair,  $c$  pair,  $\frac{c}{2}$  impair,  $m < \frac{n}{2b} + \frac{1}{2}$  et  $\begin{cases} m_0 = 0 \\ \text{ou } m_0 = 1, z < 0, \end{cases}$
- 4)  $b$  impair,  $c$  pair,  $\frac{c}{2}$  impair,  $m < \frac{n}{2b} + \frac{3}{2}$  et  $\begin{cases} m_0 = 1, z > 0, \\ \text{ou } m_0 = 2, \end{cases}$
- 5)  $b$  pair et  $c$  impair;

dans le 3<sup>e</sup> cas :

- 1)  $b$  et  $c$  impairs,  $m \leq m_0 + 1$ ,
- 2)  $b$  impair et  $c$  pair,
- 3)  $b$  pair et  $c$  impair,  $m < \frac{n}{2b} + 1 + m_0$ .

Notons que la condition  $m \leq m_0 + 1$  n'est réalisée que pour  $m = 1$  et pour  $m = 2, z > 0$ .

### 11. Application $M_\nu$ (cas euclidien)

Dans le cas euclidien, à partir de l'application  $(x, t) \rightarrow t |x|^{-a}$  de l'ouvert  $|x| \neq 0$  de  $R^{n+1}$  sur  $R$ , on pourrait obtenir une représentation paramétrique de  $H_\nu$  à l'aide du dual d'un espace de fonctions  $C^\infty$  d'une variable réelle. Mais nous suivrons la même voie que dans le cas où  $u$  est non définie.

Avec les notations du § 1, on a  $u = |x|^2$ . L'application  $\mu : (x, t) \rightarrow w = u |t|^{-2/a}$ , de  $\Omega$  sur la demi-droite ouverte  $R_+ = ]0, +\infty[$ , est régulière. Comme au § 1, on en déduit, en identifiant le produit  $D'(R_+) \times D'(R_+) = D'(R_+)^2$  au dual du produit  $D(R_+) \times D(R_+) = D(R_+)^2$ :

**Proposition 11.1.** *A tout élément  $f \in H_\nu(\Omega)$ , on peut associer un couple  $h = (h_+, h_-) \in D'(R_+)^2$ , déterminé de façon unique, tel que  $\langle f, \varphi \rangle = \langle h, M_\nu \varphi \rangle$  pour tout  $\varphi \in D(\Omega)$ ,  $M_\nu$  étant une application linéaire continue de  $D(\Omega)$  sur le produit  $D(R_+)^2 : M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi)$ .*

Pour  $\varphi \in D(\Omega)$ , on a

$$M_\nu^\pm \varphi(s) = s^{\frac{n-2}{2}} N_\nu^\pm \varphi(s), \tag{11.1}$$

avec

$$N_\nu^\pm \varphi(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \varphi_0(st^{\frac{2}{a}}, \pm t) t^{\frac{\nu+n}{a}} dt, \tag{11.2}$$

en désignant par  $\varphi_0(v, t)$  la moyenne

$$\varphi_0(v, t) = \int_{\sigma \in S^{n-1}} \varphi(\sqrt{v}\sigma, t) d\sigma, \tag{11.3}$$

où  $d\sigma$  est l'élément d'aire de la sphère  $S^{n-1} = \{x \in R^n; |x| = 1\}$ .

Si  $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+1})$ , l'intégrale (11.3) conserve un sens et définit une fonction  $\varphi_0(v, t)$  de classe  $C^\infty$  pour  $v \geq 0$  et  $t \in R$ , à décroissance rapide lorsque  $v + |t| \rightarrow \infty$ . On vérifie que

$$D_\nu^j \varphi_0(0, t) = c_j \Delta^j \varphi(0, t), j \in N, \tag{11.4}$$

avec

$$c_j = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{4^j \Gamma\left(\frac{n}{2} + j\right)}, \tag{11.5}$$

en posant  $\square = \Delta$  dans le cas euclidien.

Supposons que  $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+1})$ . L'intégrale (11.2) a donc un sens pour  $R\nu > -(a+n)$  et définit une fonction  $C^\infty$  de  $s \geq 0$ . La dérivée

$$D^j N_\nu^\pm \varphi(0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty D_\nu^j \varphi_0(0, \pm t) t^{\frac{\nu+n+2j}{a}} dt$$

est prolongeable en une fonction méromorphe de  $\nu \in C$ . Nous la définirons pour tout  $\nu \in C$  par prolongement naturel. On a donc, d'après (11.4),

$$D^j N_\nu^\pm \varphi(0) = \frac{c_j}{2} \langle \Delta^j \delta(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+n+2j}{a}}, \varphi \rangle, \quad j \in N.$$

Pour  $R\nu > -(a+n)$  et pour tout  $m \in N$ , on peut écrire

$$N_\nu^\pm \varphi(s) = \sum_{j=0}^{m-1} D^j N_\nu^\pm \varphi(0) \frac{s^j}{j!} + \int_0^s \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^m N_\nu^\pm \varphi(t) dt,$$

où

$$D^m N_\nu^\pm \varphi(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty D_\nu^m \varphi_0(st^{\frac{2}{a}}, \pm t) t^{\frac{\nu+n+2m}{a}} dt,$$

est fonction holomorphe de  $\nu$  dans le demi-plan  $R\nu > -(a+n+2m)$ . Il s'ensuit que  $N_\nu^\pm \varphi(s)$  est fonction méromorphe de  $\nu \in C$  et que ses pôles sont ceux de  $D^j N_\nu^\pm \varphi(0) \frac{s^j}{j!}$ ,  $j \in N$ , à savoir:

$$\nu = -(n+2j+ak+a), \quad k \in N, \quad \text{pôle simple de résidu}$$

$$\frac{ac_j}{2} \frac{(\mp 1)^k}{k!} \langle \Delta^j \delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi \rangle \frac{s^j}{j!}, \quad (11.6)$$

avec (11.5). Définissons  $N_\nu^\pm \varphi(s)$  par prolongement naturel pour tout  $\nu \in C$ . Alors, pour tout  $\nu \in C$ ,  $N_\nu^\pm \varphi(s)$  est de classe  $C^\infty$  pour  $s \geq 0$ . De même, pour tout  $\nu \in C$ , définissons  $M_\nu^\pm \varphi(s)$  par prolongement naturel; la relation (11.1) est donc valable pour tout  $\nu \in C$ .

Lorsque  $s > 0$ , on a, pour  $R\nu > -(a+n)$ ,

$$N_\nu^\pm \varphi(s) = s^{-\frac{\nu+n+a}{2}} T_\nu \varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}),$$

où

$$T_\nu \varphi(s) = \frac{a}{4} \int_0^\infty \varphi_0(v, sv^{\frac{a}{2}}) v^{\frac{\nu+a+n-2}{2}} dv$$

est prolongeable en une fonction méromorphe de  $\nu \in C$ . Définissons  $T_\nu \varphi(s)$  pour tout  $\nu \in C$  par prolongement naturel; avec cette définition,  $T_\nu \varphi(s)$  est une fonction  $C^\infty$  de  $s \in R$ . Par prolongement naturel, compte tenu des

valeurs (11.6), on obtient

$$N_{\nu}^{\pm} \varphi(s) = s^{-\frac{\nu+n+a}{2}} T_{\nu} \varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}) - \\ - \frac{a}{4} \log s \sum \frac{(\mp 1)^k}{k!} c_j \langle \Delta^j \delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi \rangle \frac{s^j}{j!},$$

la somme étant étendue à tous les entiers  $k, j \geq 0$ , tels que  $\nu + n + 2j + a(k+1) = 0$ .

Posons, pour  $s \geq 0$ ,

$$\gamma(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \sqrt{s}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \quad (11.7)$$

Désignons toujours par  $\bar{n}$  la partie entière de  $\frac{n-2}{2}$ . Pour tout  $j \in N$ , posons

$$k'_{\nu}(j) = -\frac{\nu + a + 2j + n - 2\bar{n}}{a}, \quad (11.8)$$

et soit  $N'_{\nu}$  la partie de  $N$  définie par

$$N'_{\nu} = \{j \in N; j \geq \bar{n}, k'_{\nu}(j) \in N\}. \quad (11.9)$$

D'après (11.1), on a alors, pour tout  $\nu \in C$  et pour  $s > 0$ ,

$$M_{\nu}^{\pm} \varphi(s) = s^{-\frac{\nu+a+2}{2}} T_{\nu} \varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}) + \gamma(s) \log s \sum_{j \in N'_{\nu}} (\pm 1)^{k'_{\nu}(j)} c'_j s^j, \quad (11.10)$$

avec

$$c'_j = (-1)^{k+1} \frac{a}{2} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{j-\bar{n}} k! (j-\bar{n})! \Gamma\left(\frac{n}{2} + j - \bar{n}\right)} \langle \Delta^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi \rangle, \\ k = k'_{\nu}(j), j \in N'_{\nu}. \quad (11.11)$$

Désignons par  $K_{\nu}$  l'espace vectoriel sur  $C$  formé des couples  $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-)$  de fonctions d'une variable réelle  $s$ , définies pour  $s > 0$ , ayant les propriétés suivantes:

1°  $\varphi^+(s)$  et  $\varphi^-(s)$  sont  $C^{\infty}$  pour  $s > 0$ .

2° Il existe des fonctions  $\mu^+ \varphi$  et  $\mu^- \varphi$  de classe  $C^{\infty}$  pour  $s \geq 0$ , telles que

$$\varphi^{\pm}(s) = \gamma(s) s^{\bar{n}} \mu^{\pm} \varphi(s), \quad (11.12)$$

avec (11.7).

3° Il existe une fonction  $\chi \varphi$  de classe  $C^{\infty}$  sur  $R$ , et des constantes  $\langle \gamma'_j, \varphi \rangle$ ,  $j \in N'_{\nu}$  telles que

$$\varphi^{\pm}(s) = s^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \chi \varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}) + \\ + \gamma(s) \log s \sum_{j \in N'_{\nu}} (\pm 1)^{k'_{\nu}(j)} \langle \gamma'_j, \varphi \rangle s^j, \quad (11.13)$$

avec (11.7), (11.9) et (11.8).

Munissons  $K_\nu$  des semi-normes

$$p_m^\pm(\varphi) = \sup_{\substack{0 \leq s \leq 1 \\ k \leq m}} |D^k \mu^\pm \varphi(s)|,$$

$$q_m(\varphi) = \sup_{\substack{|s| \leq 1 \\ k \leq m}} |D^k \chi \varphi(s)|,$$

$$q(\varphi) = \sum_{j \in N'_\nu} |\langle \gamma'_j, \varphi \rangle|.$$

On vérifie que  $K_\nu$  est alors un espace de FRÉCHET. On a  $D(R_+)^2 \subset K_\nu$ , l'injection étant continue. Si  $\varphi \in \mathcal{S}(R^{n+1})$ , on a  $M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi) \in K_\nu$  et on démontre facilement le résultat suivant :

**Proposition 11.2.** *L'application  $M_\nu : \mathcal{S}(R^{n+1}) \rightarrow K_\nu$  est linéaire continue et prolonge l'application  $M_\nu : D(\Omega) \rightarrow D(R_+)^2$  de la proposition 11.1.*

Nous noterons également  $M_\nu$  la restriction à  $D(R^{n+1})$  de l'application  $M_\nu : \mathcal{S}(R^{n+1}) \rightarrow K_\nu$ .

**Lemme 11.1.** *Pour tout  $\nu \in C$ , il existe une application linéaire continue  $L_\nu : K_\nu \rightarrow D(R^{n+1})$ , telle que l'application composée  $M_\nu L_\nu$  soit égale à l'identité. De plus, l'image par  $L_\nu$  de  $D(R_+)^2$  est contenue dans  $D(\Omega)$ .*

Soit en effet, pour tout  $j \in N'_\nu$ , une fonction  $\vartheta_j \in D(R^n)$  telle que

$$\langle \Delta^{k-\bar{n}} \delta(x), \vartheta_j \rangle = \delta_{kj}, \quad k \in N'_\nu,$$

et soit  $\varrho(t) \in D(R)$  une fonction dont aucune dérivée n'est nulle à l'origine. D'après (11.10) et (11.11), il existe des constantes  $\lambda_j, j \in N'_\nu$ , telles que, pour tout  $\varphi \in K_\nu$ , la fonction

$$\Phi_3(x, t) = \sum_{j \in N'_\nu} \lambda_j \langle \gamma'_j, \varphi \rangle \vartheta_j(x) \varrho(t) \in D(R^{n+1})$$

vérifie  $\langle \gamma'_j, M_\nu \Phi_3 \rangle = \langle \gamma'_j, \varphi \rangle, j \in N'_\nu$ . Il est clair que l'application  $\varphi \rightarrow \Phi_3$  de  $K_\nu$  dans  $D(R^{n+1})$  est continue.

Soient  $\alpha_1(s)$  et  $\alpha_2(s)$  des fonctions  $C^\infty$  telles que  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ ,  $\alpha_1(s)$  nulle pour  $s > 2$  et  $\alpha_2(s)$  nulle pour  $s < 1$ . Pour tout  $\varphi \in K_\nu$ , les éléments  $\varphi_1 = \alpha_1(\varphi - M_\nu \Phi_3)$  et  $\varphi_2 = \alpha_2(\varphi - M_\nu \Phi_3)$  appartiennent à  $K_\nu$ . Soit  $\alpha(t) \in D(R_+)$  telle que

$$\int_0^\infty \alpha(t) t^{\frac{\nu+n}{a}} dt = 1,$$

et posons, avec (11.12),

$$\Phi_1(x, t) = \frac{2}{s_{n-1}} [\alpha(t) \mu^+ \varphi_1(u | t |^{-\frac{2}{a}}) + \alpha(-t) \mu^- \varphi_1(u | t |^{-\frac{2}{a}})],$$

$s_{n-1}$  étant l'aire de la sphère  $S^{n-1}$ . On a  $\Phi_1 \in D(R^{n+1})$  et, d'après (11.1),  $M_\nu \Phi_1 =$

$= \varphi_1$ . D'autre part, on a  $\langle \gamma'_j, \varphi_2 \rangle = 0$ , pour tout  $j \in N'_\nu$ , de sorte que, d'après (11.13),

$$\varphi_2^\pm(s) = s^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \chi \varphi_2(\pm s^{-\frac{2}{a}}).$$

Soit  $\vartheta(v) \in D(R_+)$  telle que  $\int_0^\infty \vartheta(v^{\frac{2}{a}}) v^{\frac{\nu+n}{a}} dv = 1$ ,

et posons

$$\Phi_2(x, t) = \frac{2}{s_{n-1}} \vartheta(u) \chi \varphi_2(tu^{-\frac{a}{2}}).$$

On a  $\Phi_2 \in D(R^{n+1})$  et  $M_\nu \Phi_2 = \varphi_2$ . De plus, les applications  $\varphi \rightarrow \Phi_1$  et  $\varphi \rightarrow \Phi_2$  de  $K_\nu$  dans  $D(R^{n+1})$  sont continues. L'application  $L_\nu : K_\nu \rightarrow D(R^{n+1})$  définie par  $L_\nu \varphi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$  a les propriétés voulues; en effet,  $L_\nu \varphi \in D(\Omega)$  si  $\varphi \in D(R_+)^2$ , c. q. f. d.

Une conséquence immédiate de ce lemme est:

**Proposition 11.3.** *L'application  $M_\nu : D(R^{n+1}) \rightarrow K_\nu$  est surjective.*

### 12. Représentation paramétrique de $H_\nu$ , espaces $K_\nu$ et $K'_\nu$ (cas euclidien)

Soit  $K'_\nu$  le dual de  $K_\nu$  et soit  $M'_\nu : K'_\nu \rightarrow D'(R^{n+1})$  l'application transposée de  $M_\nu : D(R^{n+1}) \rightarrow K_\nu$ . Les propositions 11.2 et 11.3 entraînent:

**Proposition 12.1.** *L'application linéaire continue  $M'_\nu : K'_\nu \rightarrow D'(R^{n+1})$  est injective. Son image  $K'_\nu = M'_\nu K'_\nu$  est contenue dans  $S'(R^{n+1})$ .*

**Remarque.** Dans le cas euclidien, le lemme 11.1, plus fort que le lemme 3.1, et la proposition 11.2 permettent de montrer sans peine que l'application  $M'_\nu : K'_\nu \rightarrow K'_\nu$  est un homéomorphisme, les topologies induites par  $D'(R^{n+1})$  et  $S'(R^{n+1})$  sur  $K'_\nu$  étant identiques.

Comme au § 5, on montre que  $M'_\nu h$  est une distribution invariante sur  $R^{n+1}$ , pour tout  $h \in K'_\nu$ . En outre, si  $\varphi \in D(R^{n+1})$ , en posant  $\varphi_\lambda(x, t) = \lambda^{-(n+a)} \varphi(\lambda^{-1}x, \lambda^{-a}t)$  pour tout  $\lambda > 0$ , on a

$$M_\nu^\pm \varphi_\lambda(s) = \lambda^\nu [M_\nu^\pm \varphi(s) + \gamma(s) \log s \sum_{j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k_\nu(j)} c''_j s^j],$$

pour tout  $\nu \in C$ , avec  $c''_j = -2c'_j$  et (11.11), (11.7), (11.8), (11.9). On en déduit que, pour tout  $j \in N'_\nu$ ,

$$\tau_j = (\gamma(s) s^j, (-1)^{k_\nu(j)} \gamma(s) s^j) \tag{12.1}$$

est un élément de  $K_\nu$ , et que:

**Proposition 12.2.** Soit  $h \in K'_\nu$ . Pour que  $M'_\nu h \in H_\nu$ , il faut et il suffit que  $h \in H_\nu$ ,  $H_\nu$  étant le sous-espace vectoriel fermé de  $K'_\nu$  défini par les relations

$$\langle h, \varphi \rangle = 0, \text{ pour tout } \varphi \in X_\nu,$$

$$\text{où } X_\nu = \{\tau_j; j \in N'_\nu\}, \quad (12.2)$$

avec (12.1), est une partie libre de  $K'_\nu$ .

$$\text{Posons } n'_\nu = \text{card } N'_\nu. \quad (12.3)$$

$H_\nu$  est donc de codimension  $n'_\nu$  dans  $K'_\nu$ . Remarquons que  $n'_\nu = 0$ , donc  $H_\nu = K'_\nu$ , sauf pour une suite discrète de valeurs négatives de  $\nu$ .

Donnons quelques exemples d'éléments de  $K'_\nu$ . D'après (11.12), si  $\varphi \in K'_\nu$ ,  $\varphi^+$  et  $\varphi^-$  admettent des développements asymptotiques

$$\varphi^\pm(s) \sim \sum_{j=\bar{n}}^{\infty} \langle \beta_j^\pm, \varphi \rangle \gamma(s) s^j,$$

lorsque  $s \rightarrow 0$ . Les coefficients de ces développements définissent des éléments  $\beta_j^+$  et  $\beta_j^-$  de  $K'_\nu$  ( $\bar{n} \leq j \in N$ ). De même, les coefficients de (11.13) définissent des éléments  $\gamma'_j$  ( $j \in N'_\nu$ ) de  $K'_\nu$ . Pour tout  $k \in N$ , on peut considérer l'élément  $\varepsilon_k$  de  $K'_\nu$  défini par  $\langle \varepsilon_k, \varphi \rangle = D^k \chi \varphi(0)$ ,  $\chi \varphi$  étant la fonction qui figure dans (11.13). Pour  $j \in N'_\nu$ , on a

$$\langle \beta_k^\pm, \tau_j \rangle = (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \delta_{kj}, \bar{n} \leq k \in N, \quad (12.4)$$

$$\langle \gamma'_k, \tau_j \rangle = 0, k \in N'_\nu, \quad (12.5)$$

et, puisque  $\chi \tau_j(s) = s^{k'_\nu(j)}$ ,

$$\langle \varepsilon_i, \tau_j \rangle = k! \delta_{ik}, i \in N, k = k'_\nu(j). \quad (12.6)$$

D'après (12.5), on a  $\gamma'_k \in H_\nu$ , ( $k \in N'_\nu$ ). D'après (12.4) et (12.6), on a

$$\begin{aligned} K'_\nu &= H_\nu \oplus [\beta_j^+; j \in N'_\nu] \\ &= H_\nu \oplus [\varepsilon_{k'_\nu(j)}; j \in N'_\nu]. \end{aligned} \quad (12.7)$$

Cherchons à caractériser les éléments de  $H_\nu$  nuls dans  $\Omega$ . Pour cela, considérons la fonction  $u^\nu$ , localement intégrable dans  $R^n$  pour  $R\nu > -\frac{n}{2}$ . En tant que fonction de  $\nu$  à valeurs dans  $D'(R^n)$ ,  $u^\nu$  est prolongeable en une fonction méromorphe sur  $C$ , avec pôles simples  $\nu = -\frac{n}{2} - k, k \in N$  (cf. [4]). Nous définirons  $u^\nu$  pour tout  $\nu \in C$  par prolongement naturel (voir § 2). On a alors, pour  $\lambda > 0$ ,

$$u^\nu(\lambda x) = \begin{cases} \lambda^{2\nu} u^\nu(x), & \text{si } \nu \neq -\frac{n}{2} - k \text{ pour tout } k \in N, \\ \lambda^{2\nu} \left[ u^\nu(x) + \log \lambda \frac{c_k}{k!} \Delta^k \delta(x) \right], & \text{si } \nu = -\frac{n}{2} - k, k \in N, \end{cases}$$

avec (11.5). Comme au § 4, on en déduit le résultat suivant :

**Proposition 12.3.** *Les éléments*

$$\begin{aligned} & \Delta^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \quad j \in N'_\nu, \quad k = k'_\nu(j), \\ & \frac{c_{j-\bar{n}}}{(j-\bar{n})!} \Delta^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes t_\pm^{(k+1)} - a \frac{(\mp 1)^k}{k!} u^{-\left(j+\frac{n-2\bar{n}}{2}\right)} \otimes \delta^{(k)}(t), \\ & \qquad \qquad \qquad \text{avec (11.5), } j \in N'_\nu, \quad k = k'_\nu(j), \\ & u^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \quad k \in N, \quad k \neq k'_\nu(j) \text{ pour tout } j \in N'_\nu, \\ & \Delta^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+n-2\bar{n}}{a}}, \quad \bar{n} \leq j \in N, \quad j \notin N'_\nu, \end{aligned}$$

constituent une base de l'espace vectoriel formé des distributions de  $H_\nu$ , nulles dans  $\Omega$ .

A des facteurs constants non nuls près,  $M'_\nu \beta_j^\pm (j \geq \bar{n})$  est égal à

$$\begin{aligned} & \Delta^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+n-2\bar{n}}{a}}, \\ M'_\nu \gamma'_j (j \in N'_\nu) & \text{ à } \Delta^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \quad k = k'_\nu(j), \\ \text{et } M'_\nu \varepsilon_k (k \in N) & \text{ à } u^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t). \end{aligned}$$

On a donc (prop. 12.2 et 12.3) :

**Proposition 12.4.** *L'espace vectoriel formé des éléments de  $H_\nu$ , nuls dans  $\Omega$  est contenu dans  $M'_\nu H_\nu$ .*

Une démonstration analogue à celle du théorème 5.1, et utilisant les propositions 11.1, 12.1, 12.2, 12.4 et le lemme 11.1, conduit au résultat suivant :

**Théorème 12.1.** *L'application  $M'_\nu$  induit un isomorphisme de  $H_\nu$  sur  $H_\nu$ .*

**Corollaire.** *Les distributions de  $H_\nu$  sont tempérées.*

En effet, les éléments de  $M'_\nu K'_\nu$  sont tempérés (prop. 12.1).

Soit  $K'_\nu = M'_\nu K'_\nu$ . Comme les distributions de  $K'_\nu$  sont tempérées, on peut considérer l'image de FOURIER  $K_{\nu'} = F K'_\nu$ , avec  $\nu' = -(\nu + n + a)$ . De même qu'au § 6, on a  $H_{\nu'} = F H_\nu$ ; par suite, en vertu de (12.7), on a (cf. § 6)

$$K'_\nu = H_\nu \oplus [\Delta^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes t_+^{-(k+1)}; j \in N'_\nu, k = k'_\nu(j)], \quad (12.8)$$

$$K_\nu = H_\nu \oplus [u^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log |t|; j \in N'_{\nu'}, k = k'_{\nu'}(j)], \quad (12.9)$$

$H_\nu, K'_\nu$  et  $K_\nu$  étant des sous-espaces fermés de  $D'(R^{n+1})$  ou de  $S'(R^{n+1})$  (cf. [2], chap. I, § 2, corollaire 4 du th. 2 et prop. 3). De plus :

**Proposition 12.5.** *Pour tout  $\nu \in C, \nu' = -(\nu + n + a)$ , les transformations de FOURIER  $F$  et  $\bar{F}$  induisent des isomorphismes de  $H_\nu$  sur  $H_{\nu'}$ , de  $K'_\nu$  sur  $K_{\nu'}$  et de  $K_\nu$  sur  $K'_{\nu'}$ .*

### 13. Opérateurs différentiels homogènes et invariants (cas euclidien)

Comme au § 7, en posant  $a = 2\frac{b}{c}$  ( $b$  et  $c$  entiers  $> 0$  premiers entre eux), on montre que l'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, le plus général, conservant  $H = \cup_{\nu \in C} H_\nu$  est de la forme

$$D = (-\Delta)^h \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right)^k \sum_{j=0}^m a_j (-\Delta)^{jb} \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{(m-j)c}, \quad (13.1)$$

avec  $h, k, m \in N, a_j \in C, a_0$  et  $a_m \neq 0$ . Soit

$$P(u, t) = u^h t^k \sum_{j=0}^m a_j u^{jb} t^{(m-j)c} \quad (13.2)$$

le polynôme associé à  $D$ , et posons

$$Q(s) = \sum_{j=0}^m a_j s^j. \quad (13.3)$$

Les propositions et théorèmes du § 7 restent valables; en particulier :

**Proposition 13.1.** *Pour tout  $\nu \in C$ , les applications*

$$\begin{aligned} \sigma : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) &\rightarrow \sigma\varphi = (s\varphi^+, s\varphi^-) \\ \eta : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) &\rightarrow \eta\varphi = (\varphi^+, -\varphi^-) \end{aligned}$$

de  $K_{\nu+2}$  dans  $K_\nu$ ,

de  $K_{\nu+a}$  dans  $K_\nu$ , et

$$P = \sigma^h \eta^k \sum_{j=0}^m a_j \sigma^{jb} \eta^{(m-j)c} \quad (13.4)$$

de  $K_\mu$  dans  $K_\nu$ , avec

$$\mu = \nu + 2h + ak + 2bm, \quad (13.5)$$

sont linéaires continues.

La multiplication par le polynôme (13.2) induit une application linéaire continue  $P : K'_\nu \rightarrow K'_\mu$ , telle que  $M'_\mu^{-1} P M'_\nu$  soit égal à la transposée  $P' : K'_\nu \rightarrow K'_\mu$  de  $P$ . L'application  $P'$  induit une application linéaire continue  $P'_0$  de  $H_\nu$  dans  $H_\mu$ .

**Théorème 13.1.** *Pour tout  $\nu' \in C$ , l'opérateur  $D$  donné par (13.1) applique  $H_\nu$  dans  $H_{\mu'}$  et  $K_\nu$  dans  $K_{\mu'}$ , avec  $\mu' = \nu' - 2h - ak - 2bm$ .*

L'image de  $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\mu$  par l'application (13.4) est  $P\varphi = (P_+\varphi^+, P_-\varphi^-)$ , où  $P_+$  et  $P_-$  sont des polynômes non identiquement nuls :

$$P_\pm(s) = (\pm 1)^{k+mc} s^h Q((\pm 1)^c s^b), \quad (13.6)$$

avec (13.3). Posons :

$$Z_\nu^0 = \{\beta_j^+, \beta_j^-; \bar{n} \leq j < \bar{n} + h\}. \quad (13.7)$$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et pour  $r_0 > 0$ , considérons les éléments  $\delta_k^+(s - r_0)$  et  $\delta_k^-(s - r_0)$  de  $K'$ , définis par  $\langle \delta_k^\pm(s - r_0), \varphi \rangle = D^k \varphi^\pm(r_0)$ . Soient  $z_j$ ,  $1 \leq j \leq m'$ , les zéros réels distincts de  $Q(s)$ ,  $z_j$  étant d'ordre  $n_j$ , et supposons que  $z_j$ ,  $1 \leq j \leq m''$ , sont les zéros  $> 0$  de  $Q(s)$ . Si  $c$  est impair, posons

$$Z_\nu^1 = \{\delta_k^{\text{sgn } z_j}(s - r_j); r_j > 0, r_j^b = |z_j|\}, \quad (13.8)$$

où  $j$  prend les valeurs  $1, 2, \dots, m'$  et  $k$  les valeurs  $0, 1, \dots, n_j - 1$ . Si  $c$  est pair, posons

$$Z_\nu^1 = \{\delta_k^+(s - r_j), \delta_k^-(s - r_j); r_j > 0, r_j^b = z_j\}, \quad (13.9)$$

où  $j$  prend les valeurs  $1, 2, \dots, m''$  et  $k$  les valeurs  $0, 1, \dots, n_j - 1$ .

Posons enfin

$$Z_\nu^2 = \{\varepsilon_j; 0 \leq j < k\}, \quad (13.10)$$

et, avec (13.5),

$$Z_\nu^3 = \begin{cases} \{\gamma'_j; j \in N'_\nu\}, & \text{si } N'_\mu = \emptyset, \\ \{\gamma'_j; j \in N'_\nu - \bar{N}'_\nu\} \cup \{L'_1, \dots, L'_m\}, & \text{si } N'_\mu \neq \emptyset, \end{cases} \quad (13.11)$$

la partie  $\bar{N}'_\nu$  de  $N'_\nu$  et les éléments  $L'_1, \dots, L'_m$  de  $K'$ , étant définis par des formules analogues à (8.12) et (8.13). De la même façon qu'au § 8, on obtient :

**Proposition 13.2.** *L'application  $P : K_\mu \rightarrow K_\nu$ , définie par (13.4) est injective et l'application réciproque  $P^{-1} : PK_\mu \rightarrow K_\nu$ , est continue. L'image  $PK_\mu$  de  $P$  est le sous-espace vectoriel fermé de  $K_\nu$ , de codimension finie, formé des  $\psi \in K_\nu$ , tels que  $\langle h, \psi \rangle = 0$ , pour tout  $h \in Z_\nu$ , où  $Z_\nu$  est la partie*

$$Z_\nu = Z_\nu^0 \cup Z_\nu^1 \cup Z_\nu^2 \cup Z_\nu^3 \quad (13.12)$$

de  $K'_\nu$ , avec (13.7) à (13.11).

A l'opérateur (13.1) associons le nombre

$$d = 2h + m_0 + k, \quad (13.13)$$

où  $m_0 = \text{card } Z_\nu^1$  est égal au nombre de zéros réels de  $Q(s)$  si  $c$  est impair, et à deux fois le nombre de zéros  $> 0$  de  $Q(s)$  si  $c$  est pair.

Les éléments de  $Z_\nu$  sont linéairement indépendants et leur nombre  $c_\nu$  est fini :

$$c_\nu = d + n'_\nu - n'_\mu, \quad (13.14)$$

avec (13.13), (12.3) et (13.5). On démontre les propositions suivantes comme au § 9 :

**Proposition 13.3.** *L'application transposée  $P' : K'_\nu \rightarrow K'_\mu$ , avec (13.5), est surjective. Son noyau est le sous-espace vectoriel  $[Z'_\nu]$  de  $K'_\nu$ , de dimension  $c_\nu$ , (formule (13.14)), dont  $Z'_\nu$  est une base (formule (13.12)).*

**Proposition 13.4.** *Le noyau de l'application  $P'_0 : H_\nu \rightarrow H_\mu$  est le sous-espace vectoriel  $H_\nu \cap [Z'_\nu]$  de  $H_\nu$ , de dimension*

$$d_\nu = c_\nu - \rho_\nu, \quad (13.15)$$

avec (13.14),  $\rho_\nu$  étant le rang de la matrice

$$M = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z'_\nu, \varphi \in X_\nu} \quad (13.16)$$

avec (13.12) et (12.2);  $\rho_\nu$  est aussi le rang de la matrice

$$M' = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z'_\nu, \varphi \in X'_\nu} \quad (13.17)$$

avec  $Z'_\nu = Z_\nu - Z_\nu^3$ , et

$$X'_\nu = \{\tau_j; j \in N'_\nu, j - h \notin N'_\mu\}, \quad (13.18)$$

$\tau_j$  étant défini par (12.1).

**Proposition 13.5.** *L'image  $P'_0 H_\nu$  de  $P'_0$  est un sous-espace vectoriel fermé, de codimension finie  $e_\nu$ , de  $H_\mu$ :*

$$e_\nu = n'_\nu - n'_\mu - \rho_\nu, \quad (13.19)$$

avec (12.3),  $\rho_\nu$  étant le rang de la matrice (13.17).  $P'_0 H_\nu$  est le sous-espace vectoriel de  $H_\mu$  formé des éléments  $h \in H_\mu$  tels que

$$\langle h, P^{-1} \eta_i \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, e_\nu, \quad (13.20)$$

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{e_\nu}$  étant des éléments linéairement indépendants de  $[X'_\nu]$  (espace vectoriel engendré par  $X'_\nu$ , avec (13.18)) contenus dans  $PK_\mu$  (donc tels que  $\langle h, \eta_i \rangle = 0$ , pour tout  $h \in Z'_\nu$ ).

Des propositions précédentes et de la proposition 12.5 on déduit:

**Théorème 13.2.** *Pour tout  $\nu' \in C$ ,  $\mu' = \nu' - 2h - ak - 2bm$ ,  $\nu = -(\nu' + n + a)$ ,  $\mu = -(\mu' + n + a)$ , l'opérateur  $D$  défini par (13.1) induit une application linéaire  $D : K_{\nu'} \rightarrow K_{\mu'}$ , surjective, dont le noyau est de dimension finie  $c_{\nu'}$ , avec (13.14).*

**Théorème 13.3.** *Avec les notations du théorème 13.2, l'application linéaire  $D : H_{\nu'} \rightarrow H_{\mu'}$  a une image de codimension finie  $e_{\nu'}$  et un noyau de dimension finie  $d_{\nu'}$ . On a*

$$d_{\nu'} = d + e_{\nu'}, \quad (13.21)$$

avec (13.19), où  $d$ , donné par (13.13), ne dépend que de  $D$ .

Remarquons que  $\delta \in H_{\mu'}$ , avec  $\mu' = -(n + a)$ , et que  $F\delta = 1$  est l'image par  $M'_0$  de l'élément  $1 \in H_0 = K'_0$  défini par

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi^+(s) ds + \int_0^\infty \varphi^-(s) ds,$$

pour  $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in H_0$  (on a  $N'_0 = \emptyset$  et  $\varphi^\pm(s)$  est intégrable). On peut donc énoncer :

**Théorème 13.4.** *Soit  $D$  l'opérateur défini par (13.1), et posons  $\nu' = -(n + a) + 2h + ak + 2bm$ ,  $\mu' = -(n + a)$ ,  $\nu = -(2h + ak + 2bm)$ ,  $\mu = 0$ .*

*L'ensemble des solutions élémentaires de  $D$  contenues dans  $K_\nu$ , n'est pas vide et forme une variété linéaire affine de dimension  $c_\nu$ , avec (13.14).*

*Pour que  $D$  admette une solution élémentaire dans  $H$ , donc dans  $H_{\nu'}$ , il faut et il suffit que*

$$\langle 1, P^{-1}\eta_i \rangle = \int_0^\infty \frac{\eta_i^+(s)}{P_+(s)} ds + \int_0^\infty \frac{\eta_i^-(s)}{P_-(s)} ds = 0, \tag{13.22}$$

*pour  $i = 1, 2, \dots, e_\nu$ , avec (13.19), les  $\eta_i$  étant les éléments de  $K_\nu$  considérés dans la proposition 13.5. Si la condition (13.22) est satisfaite, l'ensemble des solutions élémentaires de  $D$  contenues dans  $H_{\nu'}$  forme une variété linéaire affine de dimension  $d_{\nu'}$ , avec (13.21).*

### 14. Exemple (cas euclidien)

Dans le cas euclidien, considérons l'opérateur

$$D = (-\Delta)^{mb} - z \left( \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t} \right)^{mc},$$

de la forme (13.1) avec  $h = k = 0$ ,  $m \geq 1$ ,  $a_0 = -z \neq 0$ ,  $a_m = 1$ ,  $Q(s) = s^m - z$ . Cherchons dans quels cas l'opérateur  $D$  admet une solution élémentaire contenue dans  $H_{\nu'}$ , avec  $\nu' = -(n + a) + 2bm$ . Posons  $\mu' = -(n + a)$ ,  $\nu = -2bm$ ,  $\mu = 0$ .

D'après (11.9), on a  $N'_0 = \emptyset$  et  $N'_\nu$  est encore donné par (10.3) et (10.4). Les formules (10.6) et (10.7) restent également valables.

D'après (13.7) et (13.10), on a  $Z_\nu^0 = Z_\nu^2 = \emptyset$ .

Si  $c$  est impair, le nombre  $m_0 = \text{card } Z_\nu^1$  est égal à

$$m_0 = \begin{cases} 2, & \text{si } m \text{ est pair et } z > 0, \\ 1, & \text{si } m \text{ est impair et } z \in \mathbb{R}, \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Si  $c$  est pair,

$$m_0 = \begin{cases} 2, & \text{si } z > 0, \\ 0, & \text{si } z \text{ n'est pas } > 0. \end{cases}$$

Si  $m_0 = 0$ , on a  $Z_v^1 = \emptyset$ . Lorsque  $m_0 = 1$ , soit  $z_1$  le zéro réel de  $Q$ ; on a

$$Z_v^1 = \{\delta_0^{\text{sgn } z}(s - r_1)\},$$

avec  $r_1 > 0$ ,  $r_1^b = |z_1|$ . Si  $m_0 = 2$ , soit  $z_1$  le zéro  $> 0$  de  $Q$ , et soit  $r_1 > 0$  tel que  $r_1^b = z_1$ ; on a

$$Z_v^1 = \{\delta_0^+(s - r_1), \delta_0^-(s - r_1)\}.$$

Le nombre  $\rho_v$  est égal au rang de la matrice

$$M' = (\langle h, \tau_j \rangle)_{h \in Z_v^1, j \in N'_v},$$

et, d'après (13.20),  $e_v = n'_v - \rho_v$ , avec  $n'_v = \text{card } N'_v$ . Notons  $Y = \{\eta_1, \dots, \eta_{e_v}\}$  un ensemble d'éléments linéairement indépendants satisfaisant aux conditions énoncées dans la proposition 13.5. Avec les mêmes notations qu'au § 10 (formules (10.8) et (10.9)), on obtient les résultats suivants:

Si  $m_0 \leq 1$ , ou si  $m_0 = 2$  et  $c$  impair,

$$\rho_v = \min(n'_v, m_0), \quad e_v = (n'_v - m_0)_+,$$

$$Y = \begin{cases} \{\tau_j; j \in N'_v\}, & \text{si } m_0 = 0, \\ \{\tau_{j+b} - z_1 \tau_j; j \in N_v'^1\}, & \text{si } m_0 = 1, \\ \{\tau_{j+2b} - z_1^2 \tau_j; j \in N_v'^2\}, & \text{si } m_0 = 2. \end{cases}$$

Si  $m_0 = 2$  et  $c$  pair,

$$\rho_v = \min(n'_v, 1), \quad e_v = (n'_v - 1)_+,$$

$$Y = \{\tau_{j+b} - z_1 \tau_j; j \in N_v'^1\}.$$

Compte tenu du théorème 13.4, on en déduit:

**Proposition 14.1.** *Pour que l'opérateur  $D$  défini par (14.1) admette une solution élémentaire dans  $H$ , donc dans  $H_v$ , il faut et il suffit qu'une des conditions suivantes soit vérifiée:*

si  $n$  est impair:

- 1)  $c$  impair,
- 2)  $c$  et  $\frac{c}{2}$  pairs,
- 3)  $c$  pair,  $\frac{c}{2}$  impair,  $m < \frac{n}{2b} + \frac{1 + m_0}{2}$ ;

si  $n$  est pair:

- 1)  $c$  impair,  $m < \frac{n}{2b} + \frac{1}{2} + m_0$ ,
- 2)  $c$  pair,  $m_0 = 0$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. BOURBAKI, *Algèbre*. Chap. II, algèbre linéaire (2e édition). Paris, HERMANN, 1955.
- [2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*. Paris, HERMANN, 1953 et 1955.
- [3] L. GÅRDING, *Transformation de FOURIER des distributions homogènes*. Bull. Soc. math. France 89 (1961), 381–428.
- [4] I. M. GEL'FAND et G. E. SHILOV, *Fonctions généralisées (en russe)*. t. 1, Moscou, 1958.
- [5] P. JEANQUARTIER, *Solution élémentaire d'un opérateur différentiel généralisant celui de la chaleur*. C. R. Acad. Sc. Paris, 256 (1963), 1427–1428.
- [6] P. JEANQUARTIER, *Solutions élémentaires d'opérateurs différentiels paraboliques hyperboliques*. Comment. Math. Helv. 37 (1963), 296–324.
- [7] P. JEANQUARTIER, *Distributions homogènes et invariantes, opérateurs différentiels associés*. C. R. Acad. Sc. Paris, 258 (1964), 2963–2965.
- [8] P.-D. METHÉE, *Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de LORENTZ*, Comment. Math. Helv. 28 (1954), 225–269.
- [9] P.-D. METHÉE, *Transformées de FOURIER de distributions invariantes liées à la résolution de l'équation des ondes*. Colloques internationaux de CNRS, 71, La théorie des équations aux dérivées partielles, Nancy, 1956, 145–163.
- [10] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*. Paris, HERMANN, 1955.
- [11] G. DE RHAM, *Solution élémentaire d'opérateurs différentiels du second ordre*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 8 (1958), 337–366.
- [12] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. t. 1 (2e édition) et t. 2, Paris, HERMANN, 1957 et 1951.
- [13] A. TENGSTRAND, *Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature*. Math. Scand. 8 (1960), 201–218.

(Reçu le 14 mai 1964)