Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 39 (1964-1965)

Artikel: Distributions et opérateurs différentiels homogènes et invariants.
Autor: Jeanquartier, Pierre
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29883

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.10.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Distributions et opérateurs différentiels homogènes et invariants

par PIERRE JEANQUARTIER, Lausanne

Introduction

L'opérateur de la chaleur (cf. SCHWARTZ [12], t. 1, p. 145) et l'opérateur $\partial/\partial t - \Box$, où

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

est un dalembertien de signature quelconque (cf. [5] ou [6]), admettent chacun une solution élémentaire E, invariante par le groupe G des transformations linéaires de $R^{n+1} \ni (x, t)$ conservant t et la forme quadratique

$$u = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 ,$$

et homogène au sens suivant: lorsque x et t sont changés en λx et $\lambda^2 t (\lambda > 0)$, E est multipliée par λ^{-n}.

Plus généralement, a étant un nombre rationnel > 0 quelconque, nous considérerons l'espace H_ν des distributions f sur R^{n+1}, invariantes par le groupe G, et homogènes de degré ν au sens suivant: $f(\lambda x, \lambda^a t) = \lambda^\nu f(x, t)$ pour tout $\lambda > 0$. Soit H la réunion des H_ν lorsque ν parcourt le corps C des nombres complexes. L'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants le plus général conservant H est de la forme

$$D = \Box^h (\partial/\partial t)^k \sum_{j=0}^{m} a_j \, \Box^{bj} (\partial/\partial t)^{(m-j)c} ,$$

où $a_j \in C$, h, k, m entiers $\geqslant 0$, b et c étant les entiers > 0 premiers entre eux tels que $a = 2b/c$. Pour tout $\nu \in C$, D applique H_ν dans H_μ, avec $\mu = \nu - 2h - ak - 2bm$. Le but du présent travail est de répondre aux questions suivantes: Etant donné $g \in H_\mu$, l'équation $Df = g$ a-t-elle des solutions $f \in H_\nu$? L'opérateur D admet-il une solution élémentaire dans H (donc dans H_ν, avec $\nu = -(n + a) + 2h + ak + 2bm$, puisque la mesure de DIRAC $\delta \in H_\mu$, avec $\mu = -(n + a)$)?

Dans une première partie, on donne une représentation paramétrique de H_ν, à l'aide du dual d'un espace de fonctions d'une variable. La méthode suivie est analogue à celle utilisée par GÅRDING, ROOS et TENGSTRAND dans l'étude des distributions invariantes par un groupe orthogonal de signature quelconque (cf. [13]). Supposons d'abord que la forme quadratique u soit non définie. En

remarquant que l'application $(x, t) \to w = u \mid t \mid^{-2/a}$ est régulière dans l'ouvert Ω de R^{n+1}, défini par $\mid x \mid t \neq 0$, on montre que, pour tout $f \in H_\nu$, il existe deux distributions h_+ et $h_- \in D'(R)$, telles que

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle h_+, M_\nu^+ \varphi \rangle + \langle h_-, M_\nu^- \varphi \rangle ,$$

pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, l'application $M_\nu : \varphi \to (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi)$ étant linéaire continue de $D(\Omega)$ sur le produit $D(R) \times D(R)$. Si h_+ et h_- sont des fonctions, on a

$$f = \mid t \mid^{\nu/a} [Y(t) h_+(w) + Y(-t) h_-(w)]$$

dans Ω, en désignant par $Y(t)$ la fonction d'HEAVISIDE. Il est possible de prolonger M_ν en une application linéaire de $D(R^{n+1})$ sur un espace vectoriel K_ν, formé de couples de fonctions d'une variable s, de classe C^∞ pour $s \neq 0$, et ayant, lorsque s tend vers 0, $-\infty$ ou $+\infty$, des développements asymptotiques de types particuliers (§ 2). On peut alors munir K_ν d'une structure d'espace de FRÉCHET (§ 3), de sorte que l'application $M_\nu : D(R^{n+1}) \to K_\nu$ soit continue, et que sa transposée $M'_\nu : K'_\nu \to D'(R^{n+1})$ ait pour image un sous-espace fermé $\mathsf{K}'_\nu = M'_\nu K'_\nu$ de $D'(R^{n+1})$ contenant H_ν. K'_ν est somme directe topologique de H_ν et d'un espace vectoriel de dimension finie. L'application M'_ν, qui est un isomorphisme vectoriel de K'_ν sur K'_ν, fournit une représentation paramétrique de H_ν au moyen d'un sous-espace H_ν, de codimension finie, de K'_ν (§ 5). En fait, on a $H_\nu = K'_\nu$ et $H_\nu = \mathsf{K}'_\nu$ sauf pour une suite discrète de valeurs négatives de ν.

Les distributions de H_ν et K'_ν sont tempérées et la transformation de FOURIER établit un isomorphisme de H_ν sur $H_{\nu'}$, avec $\nu' = -(\nu + n + a)$. Nous considérerons également l'image de FOURIER $\mathsf{K}_{\nu'}$ de K'_ν : $\mathsf{K}_{\nu'} = \mathsf{F}\mathsf{K}'_\nu$. K_ν est somme directe topologique de H_ν et d'un espace vectoriel de dimension finie; on a $H_\nu = \mathsf{K}_\nu$ sauf pour une suite croissante de valeurs réelles de ν (§ 6).

Dans une deuxième partie, on considère l'opérateur D défini précédemment. D applique K_ν dans K_μ avec $\mu = \nu - 2h - ak - 2bm$. Par transformation de FOURIER, et à l'aide des isomorphismes $M'_{\nu'}$ et $M'_{\mu'}$, l'application $D : \mathsf{K}_\nu \to \mathsf{K}_\mu$ est remplacée par une application $P' : K'_{\nu'} \to K'_{\mu'}$ transposée de $P : K_{\mu'} \to K_{\nu'}$, P étant une application linéaire continue, analogue à la multiplication par un polynôme (§ 7). L'étude de P' (§ 9) conduit aux résultats suivants:

Pour tout $\nu \in C$, l'application $D : \mathsf{K}_\nu \to \mathsf{K}_\mu$ est surjective; son noyau est de dimension finie (th. 9.1). En particulier, D admet toujours une solution élémentaire dans K_ν pour $\nu = -(n + a) + 2h + ak + 2bm$; autrement dit, D admet toujours une solution élémentaire somme d'une distribution invariante et homogène de degré ν, et d'une combinaison linéaire de distributions de la forme

$$u_\pm^j \otimes t^k, \; u_\pm^j \log \mid u \mid \otimes t^k, \; u^j \log^2 \mid u \mid \otimes t^k, \; u^j \otimes t^k \log \mid t \mid ,$$

avec $j \in R$ et $k \in N$ (th. 9.3 et § 6).

Par contre, $D: H_\nu \to H_\mu$ n'est pas surjective dans tous les cas (th. 9.2) et D n'admet pas toujours de solution élémentaire dans H (th. 9.3 et exemple du § 10).

Des résultats analogues sont valables lorsque la forme quadratique u est définie (cas euclidien, §§ 11 à 14).

Les résultats de ce travail ont été annoncés dans la note [7].

1. Distributions homogènes et invariantes

Soit V un ouvert d'un espace numérique R^m. Nous désignerons par $D(V)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes, de classe C^∞, à support compact dans V, et par $D'(V)$ le dual de $D(V)$, c'est-à-dire l'espace des distributions sur V. Si $f \in D'(V)$ et $\varphi \in D(V)$, la valeur de f pour φ sera notée $\langle f, \varphi \rangle$. Nous désignerons par $S(R^m)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide sur R^m, et par $S'(R^m)$ l'espace des distributions tempérées sur R^m (cf. SCHWARTZ [12]). Pour la transformation de FOURIER F et sa conjuguée $\bar{F}$ nous adopterons les définitions suivantes: $F\varphi(y) = \int e^{-ix\cdot y}\varphi(x)dx$ et $\bar{F}\varphi(y) = \int e^{+ix\cdot y}\varphi(x)dx$ pour $\varphi \in S(R^m)$, d'où Ff et $\bar{F}f$ par continuité, pour $f \in S'(R^m)$. Nous utiliserons la notation fonctionnelle $f = f(x)$ pour marquer que f est une distribution sur $R^m \ni x$. Si α est un difféomorphisme de R^m, et si $f(x) \in D'(R^m)$, nous définirons $f(\alpha x) \in D'(R^m)$ par l'égalité $\langle f(\alpha x), \varphi(x) \rangle = \langle f(x), \varphi(\alpha^{-1}x) \mid J(x) \mid \rangle$, pour tout $\varphi \in D(R^m)$, $J(x)$ étant le jacobien de l'application α^{-1}; si $f(x)$ est une fonction, cette définition coïncide avec la définition habituelle.

Dans la suite, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sera toujours un point de l'espace R^n, $\mid x \mid = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. La partie entière de $\dfrac{n-2}{2}$ sera notée $\bar{n}$. Sur R^n, considérons la forme quadratique

$$u = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 ,$$

de signature (p, q), avec $1 \leqslant p \leqslant n$, $q = n - p$. Nous distinguerons quatre cas:

1er cas: p et q impairs $\geqslant 1$,
2e cas: p impair $\geqslant 1$ et q pair $\geqslant 1$,
3e cas: p et q pairs $\geqslant 1$,
4e cas (cas euclidien): $p = n$, $q = 0$.

Le cas p pair et q impair se ramène au 2e cas, et le cas $p = 0$, $q = n$ au 4e cas.

Soit G le groupe des transformations linéaires de R^n qui laissent u invariante. Dans l'espace $R^{n+1} \ni (x, t)$, nous dirons qu'une distribution $f \in D'(R^{n+1})$ est

invariante si $f(Lx, t) = f(x, t)$ pour tout $L \in G$. Si f est invariante, on a

$$\left(\varepsilon_i x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \varepsilon_j x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f = 0\,, \quad i, j = 1, \ldots, n\,, \tag{1.1}$$

avec $\varepsilon_i = 1$ si $i \leqslant p$ et $\varepsilon_i = -1$ si $i > p$ (cf. METHÉE [8] et TENGSTRAND [13]).

Soit a un nombre > 0. ν étant un élément quelconque du corps C des nombres complexes, nous dirons que $f \in D'(R^{n+1})$ est *homogène de degré* ν si $f(\lambda x, \lambda^a t) = \lambda^\nu f(x, t)$, pour tout $\lambda > 0$. Lorsque $a = 1$, f est homogène au sens habituel (cf. [3] et [4]); le cas $a = 2$ a été envisagé dans [6]. Si f est homogène de degré ν, on a la relation d'EULER

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + at \frac{\partial f}{\partial t} = \nu f\,. \tag{1.2}$$

Nous désignerons par H_ν le sous-espace vectoriel fermé de $D'(R^{n+1})$ formé des distributions *invariantes et homogènes de degré* ν. Si U est un ouvert de R^{n+1} invariant par les transformations $(x, t) \to (Lx, t)$, $L \in G$ et $(x, t) \to (\lambda x, \lambda^a t)$, $\lambda > 0$, on peut considérer de façon analogue l'espace $H_\nu(U)$ formé des distributions de $D'(U)$ invariantes et homogènes de degré ν. Des ouverts de ce type sont, par exemple, l'ensemble Ω des points de R^{n+1} tels que $|x|\, t \neq 0$, et les parties Ω_+ et Ω_- de Ω définies respectivement par $t > 0$ et $t < 0$. Dans Ω, nous poserons $w = u\,|t|^{-2/a}$.

Dès maintenant, et jusqu'à la fin du § 10, nous supposerons que la forme quadratique u est non définie (1er, 2e et 3e cas).

L'application $\mu : (x, t) \to w$ de Ω sur R est régulière et a des restrictions $\mu_+ : \Omega_+ \to R$ et $\mu_- : \Omega_- \to R$. Comme μ_+ est une application surjective, on peut lui associer une application linéaire, continue, surjective, $\mu_+ : D(\Omega_+) \to D(R)$, telle que, si $\varphi \in D(\Omega_+)$, $\langle \mu_+ \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \mu_+^* \psi \rangle$, pour tout $\psi \in D(R)$, où $\mu_+^* \psi(x, t) = \psi(w)$ (cf. DE RHAM [10], p. 55—57 ou GÅRDING [3], p. 388—389). L'application transposée $\mu_+' : D'(R) \to D'(\Omega_+)$ est linéaire, continue, injective, et il est clair que $\mu_+' D'(R) \subset H_0(\Omega_+)$. Inversement, si $f \in H_0(\Omega_+)$, les relations (1.1) et (1.2) entraînent $df \wedge dw = 0$, où l'on considère f comme un courant de degré 0. D'autre part, si la sous-variété $w =$ *constante* de Ω_+ n'est pas connexe, il existe un élément $L \in G$ tel que la transformation $(x, t) \to (Lx, t)$ échange ses composantes connexes. Par des méthodes classiques (cf. [8], démonstration du théorème 2, [13], lemme 5.1 ou [6], lemmes 4.1 et 4.2), on en déduit qu'il existe $h \in D'(R)$ tel que $\mu_+' h = f$. De même, on peut associer à μ_- une application linéaire continue $\mu_- : D(\Omega_-) \to D(R)$, dont la transposée $\mu_-' : D'(R) \to D'(\Omega_-)$ soit injective et ait $H_0(\Omega_-)$ pour image.

Soit maintenant $\nu \in C$ quelconque. L'application $f \to |t|^{\nu/a} f$ de $H_0(\Omega)$ sur $H_\nu(\Omega)$ est un isomorphisme. Par suite, si $f \in H_\nu(\Omega)$, il existe deux distributions h_+ et $h_- \in D'(R)$, déterminées de façon unique, telles que $f = |t|^{\nu/a} \mu'_+ h_+$ dans Ω_+ et $f = |t|^{\nu/a} \mu'_- h_-$ dans Ω_-. Si $\varphi \in D(\Omega)$ a des restrictions $\varphi_+ \in D(\Omega_+)$ et $\varphi_- \in D(\Omega_-)$, posons

$$M_\nu^+ \varphi = \mu_+(|t|^{\nu/a} \varphi_+), \quad M_\nu^- \varphi = \mu_-(|t|^{\nu/a} \varphi_-). \tag{1.3}$$

Comme $\langle f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi_+ \rangle + \langle f, \varphi_- \rangle$, on a donc

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle h_+, M_\nu^+ \varphi \rangle + \langle h_-, M_\nu^- \varphi \rangle = \langle h, M_\nu \varphi \rangle,$$

en posant $M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi) \in D(R) \times D(R) = D(R)^2$, et en considérant $h = (h_+, h_-) \in D'(R) \times D'(R) = D'(R)^2$ comme un élément du dual du produit $D(R)^2$. On peut donc énoncer:

Proposition 1.1. *A tout élément $f \in H_\nu(\Omega)$, on peut associer un couple $h = (h_+, h_-) \in D'(R)^2$, déterminé de façon unique, tel que $\langle f, \varphi \rangle = \langle h, M_\nu \varphi \rangle$, pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, M_ν étant une application linéaire continue de $D(\Omega)$ sur le produit $D(R)^2$: $M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi)$, avec* (1.3).

En d'autres termes, l'application transposée M'_ν, de $D'(R)^2$ identifié au dual de $D(R)^2$, dans $D'(\Omega)$, est injective et admet $H_\nu(\Omega)$ pour image.

2. Prolongement de l'application M_ν

Soit $F(\lambda)$ une fonction méromorphe de $\lambda \in C$, à valeurs dans C ou dans un espace de distributions. En un pôle λ_0 de $F(\lambda)$, nous appellerons *prolongement naturel* de $F(\lambda)$ le coefficient c_0 du développement de LAURENT

$$F(\lambda) = \frac{c_{-m}}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{\lambda - \lambda_0} + c_0 + c_1(\lambda - \lambda_0) + \ldots$$

de $F(\lambda)$, et poserons $F(\lambda_0) = c_0$. Par exemple, pour $R\lambda > -1$, les fonctions $t_+^\lambda = Y(t) t^\lambda$ et $t_-^\lambda = Y(-t)|t|^\lambda$ ($Y(t)$, fonction d'HEAVISIDE) sont localement intégrables sur R. Considérées comme fonctions de λ à valeurs dans $D'(R)$, t_+^λ et t_-^λ sont prolongeables en fonctions méromorphes de $\lambda \in C$ ayant les points $\lambda = -1, -2, \ldots$ pour pôles simples. Nous définirons ces distributions pour tout $\lambda \in C$ par prolongement naturel. De manière analogue, pour tout $\lambda \in C$, nous définirons par prolongement naturel, les distributions égales à $t_+^\lambda \log|t| = Y(t) t^\lambda \log t$ et $t_-^\lambda \log|t| = Y(-t)|t|^\lambda \log|t|$ pour $R\lambda > -1$ (cf. [4], chap. I, § 3 et § 4).

Rappelons qu'à toute fonction $\varphi(x) \in D(R^n)$ on peut associer une fonction $\tilde{\varphi}(v)$, d'une variable $v \in R$, de classe C^∞ pour $v \neq 0$, à support compact, telle que

$$\int_{R^n} f(u)\varphi(x)dx = \int_R f(v)\tilde{\varphi}(v)dv\,, \tag{2.1}$$

pour tout $f \in D(R)$ (cf. METHÉE [8], DE RHAM [11] ou TENGSTRAND [13]). Avec les notations de [13]: $\tilde{\varphi} = N\varphi$. Si $\varphi \in S(R^n)$, on peut également lui associer $\tilde{\varphi}(v)$, de classe C^∞ pour $v \neq 0$, telle que (2.1) soit vérifié; au lieu d'être à support compact, $\tilde{\varphi}$ est alors à décroissance rapide. Lorsque $v \to 0$, $\tilde{\varphi}$ admet un développement asymptotique de la forme

$$\tilde{\varphi}(v) = \sum_{j=0}^{m}(\langle A_j, \varphi\rangle + \langle B_j, \varphi\rangle\gamma(v))v^j + R_m(v)\,, \tag{2.2}$$

où $R_m(v) \in C^m$, $R_m^{(k)}(v) = O(v^{m-k+\frac{1}{2}})$ pour $k \leqslant m$, et

$$\gamma(v) = \begin{cases} \log|v| & \text{dans le 1}^{\text{er}}\text{ cas,} \\ Y(v)\sqrt{v} & \text{dans le 2}^{\text{e}}\text{ cas,} \\ Y(v) & \text{dans le 3}^{\text{e}}\text{ cas,} \end{cases} \tag{2.3}$$

$Y(v)$, fonction d'HEAVISIDE. A_j et B_j sont des distributions tempérées sur R^n, invariantes par le groupe G; A_j est à support $u = 0$, $B_j = 0$ si $j < \bar{n}$, et si $j \geqslant \bar{n}$,

$$B_j = \lambda_j \,\Box^{j-\bar{n}}\delta(x)\,, \tag{2.4}$$

où λ_j est une constante non nulle et $\delta(x)$ la mesure de DIRAC (cf. [8], [11] et [13]).

Prenons maintenant $\varphi \in S(R^n)$ fonction d'un paramètre $t \in R$, de sorte que $\varphi(x, t)$ appartienne à $S(R^{n+1})$, et soit $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(v, t)$ la fonction correspondante. En reprenant, par exemple, les calculs de TENGSTRAND ([13], p. 208—212) on obtient les résultats suivants (on pose $D_v = \partial/\partial v$, $D_t = \partial/\partial t$ et on désigne par N l'ensemble des entiers $\geqslant 0$):

Lemme 2.1. *Soit $\varphi \in S(R^{n+1})$. La fonction $\tilde{\varphi}(v, t)$ est de classe C^∞ pour $v \neq 0$. Pour toute fonction $\alpha(v) \in C^\infty$, telle que $\alpha(v) = 0$ au voisinage de 0, $\alpha(v) = 1$ pour $|v|$ assez grand, on a $\alpha\tilde{\varphi} = \alpha(v)\tilde{\varphi}(v, t) \in S(R^2)$, et l'application $\varphi \to \alpha\tilde{\varphi}$ de $S(R^{n+1})$ dans $S(R^2)$ est continue.*

Pour $v \neq 0$, et pour tout $m \in N$, on a

$$\tilde{\varphi}(v, t) = \sum_{j=0}^{m}(\alpha_j(t) + \beta_j(t)\gamma(v))v^j + R_m(v, t)\,, \tag{2.5}$$

avec:

1° $\alpha_j(t) = \langle A_j(x), \varphi(x, t)\rangle\,,\ \beta_j(t) = \langle B_j(x), \varphi(x, t)\rangle\,,$

de sorte que les applications $\varphi \to \alpha_j$ et $\varphi \to \beta_j$ de $S(R^{n+1})$ dans $S(R)$ sont continues.

2° *Toutes les dérivées de* $R_m(v, t)$ *d'ordre* $k \leqslant m$ *en* v, *et d'ordre* $j \in N$ *en* t, *existent et sont continues. Il existe des constantes* $C_{kjr}(\varphi)$ *telles que*

$$|D_v^k D_t^j R_m(v, t)(1 + t^2)^r| \leqslant C_{kjr}(\varphi) \, |v|^{m-k+\frac{1}{2}}$$

pour tout $(v, t) \in R^2$, $k \leqslant m$, $j \in N$, $r \in N$. *Si* $\varphi \to 0$ *dans* $S(R^{n+1})$, $C_{kjr}(\varphi) \to 0$.

Cherchons alors à prolonger l'application $M_\nu : D(\Omega) \to D(R)^2$. D'après (1.3) et la définition de μ_+ et μ_-, on a, pour $\varphi \in D(\Omega)$,

$$M_\nu^\pm \varphi(s) = \int_0^\infty \tilde{\varphi}(s t^{\frac{2}{a}}, \pm t) t^{\frac{\nu+2}{a}} \, dt \, . \tag{2.6}$$

Supposons maintenant que φ appartienne à $S(R^{n+1})$. Pour $s \neq 0$, d'après le lemme 2.1, l'intégrale (2.6) conserve un sens si $R\nu > -(a+2)$, et définit une fonction holomorphe de ν dans ce demi-plan. D'après (2.5) on peut écrire

$$M_\nu^\pm \varphi(s) = \sum_{j=0}^{m} (\langle A_{\nu j}^\pm, \varphi \rangle + \langle B_{\nu j}^\pm, \varphi \rangle \gamma(s)) s^j + F_{\nu m}^\pm(s) \, , \tag{2.7}$$

avec

$$F_{\nu m}^\pm(s) = \int_0^\infty R_m(s t^{\frac{2}{a}}, \pm t) \, t^{\frac{\nu+2}{a}} \, dt \, .$$

Les distributions $A_{\nu j}^\pm$ et $B_{\nu j}^\pm$ sont tempérées; on a

$$A_{\nu j}^\pm = \begin{cases} A_j(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+2}{a}} + \dfrac{2}{a} B_j(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+2}{a}} \log|t| \, , & \text{dans le 1er cas,} \\ A_j(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+2}{a}} \, , & \text{dans les 2e et 3e cas;} \end{cases} \tag{2.8}$$

$$B_{\nu j}^\pm = \begin{cases} B_j(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+2}{a}} \, , & \text{dans les 1er et 3e cas,} \\ B_j(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+3}{a}} \, , & \text{dans le 2e cas.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Comme $t_\pm^\lambda$ et $t_\pm^\lambda \log|t|$ sont fonctions méromorphes de $\lambda \in C$, les distributions $A_{\nu j}^\pm$ et $B_{\nu j}^\pm$ sont fonctions méromorphes de $\nu \in C$, et nous étendrons leur définition pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel. Les égalités (2.8) et (2.9) sont donc valables pour tout $\nu \in C$, et $A_{\nu j}^\pm, B_{\nu j}^\pm \in S'(R^{n+1})$ pour tout $\nu \in C$. Les pôles de $A_{\nu j}^\pm$ et $B_{\nu j}^\pm$ se déduisent de ceux de $t_\pm^\lambda$ et $t_\pm^\lambda \log|t|$ (cf. [4]). $A_{\nu j}^\pm$ a donc un pôle en $\nu = -2(j+1) - a(k+1)$, $k \in N$, de résidu

$$c_{-1} = a \frac{(\mp 1)^k}{k!} A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t) \, . \tag{2.10}$$

Ce pôle est simple, sauf dans le 1er cas si $j \geqslant \bar{n}$; le pôle est alors double et le

coefficient c_{-2} du développement de LAURENT est

$$c_{-2} = -2a\frac{(\mp 1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t) . \tag{2.11}$$

Dans les 1er et 3e cas, $B_{\nu j}^{\pm}$ a un pôle simple en $\nu = -2(j+1) - a(k+1)$, $k \in N$, de résidu

$$c_{-1} = a\frac{(\mp 1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t) . \tag{2.12}$$

Dans le 2e cas, $B_{\nu j}^{\pm}$ a un pôle simple en $\nu = -2j - 3 - a(k+1)$, $k \in N$, dont le résidu est encore donné par (2.12).

D'après le lemme 2.1, pour $s \neq 0$, la fonction $\nu \to F_{\nu m}^{\pm}(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $R\nu > -(a + 2m + 3)$. L'égalité (2.7), avec m arbitrairement grand, entraîne donc que $M_\nu^{\pm}\varphi(s)$ est prolongeable en une fonction méromorphe de $\nu \in C$. *Pour $s \neq 0$ et pour tout $\nu \in C$, nous définirons $M_\nu^{\pm}\varphi(s)$ par prolongement naturel.* Le lemme 2.1 montre aussi que, pour $R\nu > -(a + 2m + 3)$, $F_{\nu m}^{\pm}(s)$ est de classe C^m pour $s \neq 0$, et que, lorsque $s \to 0$

$$D^k F_{\nu m}^{\pm}(s) = O(s^{m-k+\frac{1}{2}}) , \quad k \leqslant m .$$

Grâce à (2.7), on en déduit le résultat suivant:

Lemme 2.2. *Soit $\varphi \in S(R^{n+1})$. Pour tout $\nu \in C$, $M_\nu^{+}\varphi(s)$ et $M_\nu^{-}\varphi(s)$ sont des fonctions de $s \in R$ de classe C^∞ pour $s \neq 0$. Pour tout $m \in N$ on a*

$$M_\nu^{\pm}\varphi(s) = \sum_{j=0}^{m}(\langle A_{\nu j}^{\pm}, \varphi\rangle + \langle B_{\nu j}^{\pm}, \varphi\rangle\gamma(s))s^j + F_{\nu m}^{\pm}(s) ,$$

avec $F_{\nu m}^{\pm}(s) \in C^m$ et, si $0 \leqslant k \leqslant m$,

$$D^k F_{\nu m}^{\pm}(s) = O(s^{m-k+\frac{1}{2}})$$

lorsque $s \to 0$.

Etudions maintenant le comportement de $M_\nu^{\pm}\varphi(s)$ lorsque $|s| \to \infty$. En supposant toujours $\varphi \in S(R^{n+1})$, pour $R\nu > -(a+2)$, on déduit de (2.6)

$$M_\nu^{\pm}\varphi(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} T_\nu^{\operatorname{sgn} s}\varphi(\pm|s|^{-\frac{a}{2}}) , \tag{2.13}$$

avec

$$T_\nu^{\pm}\varphi(s) = \frac{a}{2}\int_0^\infty \tilde{\varphi}(\pm v, sv^{\frac{a}{2}})v^{\frac{\nu+a}{2}}dv .$$

Pour $R\nu > -(a+2)$, $T_\nu^{\pm}\varphi(s)$ est une fonction C^∞ de $s \in R$. On a

$$D^k T_\nu^{\pm}\varphi(s) = \frac{a}{2}\int_0^\infty D_t^k\tilde{\varphi}(\pm v, sv^{\frac{a}{2}})v^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}}dv . \tag{2.14}$$

Le lemme 2.1 permet d'écrire

$$D^k T_\nu^\pm \varphi(0) = \frac{a}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (\pm 1)^j \int_0^1 (\alpha_j^{(k)}(0) + \beta_j^{(k)}(0)\gamma(\pm v)) v^{\frac{\nu+a(k+1)+2j}{2}} dv + F_m(\nu),$$

avec

$$F_m(\nu) = \frac{a}{2} \int_1^\infty D_t^k \tilde{\varphi}(\pm v, 0) v^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} dv + \frac{a}{2} \int_0^1 D_t^k R_m(\pm v, 0) v^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} dv.$$

La fonction $F_m(\nu)$ est holomorphe de ν dans le demi-plan $R\nu > -(a + ak + 2m + 3)$. Il en résulte que $D^k T_\nu^\pm \varphi(0)$ est prolongeable en une fonction méromorphe de $\nu \in C$. On peut alors écrire, pour $R\nu > -(a + 2)$,

$$T_\nu^\pm \varphi(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^k}{k!} D^k T_\nu^\pm \varphi(0) + \int_0^s \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^m T_\nu^\pm \varphi(t) dt, \tag{2.15}$$

où $D^m T_\nu^\pm \varphi(t)$, donné par (2.14), est fonction holomorphe de ν dans $R\nu > -(a + am + 2)$. Par conséquent, $T_\nu^\pm \varphi(s)$ est prolongeable en une fonction méromorphe de $\nu \in C$. Pour tout $\nu \in C$, définissons $T_\nu^\pm \varphi(s)$ par prolongement naturel; avec cette définition, il résulte de (2.15) que $T_\nu^\pm \varphi$ est une fonction C^∞ de $s \in R$, pour tout $\nu \in C$.

Pour tout $j \in N$, posons

$$k_\nu(j) = -\frac{\nu + a + 2j + 2}{a}, \tag{2.16}$$

$$k'_\nu(j) = \begin{cases} k_\nu(j), \text{ dans les } 1^{\text{er}} \text{ et } 3^{\text{e}} \text{ cas}, \\ -\dfrac{\nu + a + 2j + 3}{a}, \quad \text{dans le } 2^{\text{e}} \text{ cas}. \end{cases} \tag{2.17}$$

Soient d'autre part N_ν et N'_ν les parties de l'ensemble N des entiers $\geqslant 0$ définies par

$$N_\nu = \{j \in N;\ k_\nu(j) \in N\}, \tag{2.18}$$

$$N'_\nu = \{j \in N;\ j \geqslant \bar{n},\ k'_\nu(j) \in N\}. \tag{2.19}$$

Pour tout $\nu \in C$, N_ν et N'_ν sont finis. Chacun des ensembles N_ν et N'_ν est vide sauf pour une suite discrète de valeurs négatives de ν.

En tenant compte des égalités (2.10) à (2.12), par prolongement naturel de la relation (2.13), on obtient:

Lemme 2.3. *Soit $\varphi \in S(R^{n+1})$. Pour $s \neq 0$ on a*

$$\begin{aligned} M_\nu^\pm \varphi(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} T_\nu^{\operatorname{sgn} s} \varphi(\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) + \log|s| \sum_{j \in N_\nu} (\pm 1)^{k_\nu(j)} c_j s^j + \\ + \gamma(s) \log|s| \sum_{j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} c'_j s^j, \end{aligned} \tag{2.20}$$

avec

$$c_j = -\frac{a}{2}\frac{(-1)^k}{k!}\langle A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi\rangle, \; k = k_\nu(j), \; j \in N_\nu,$$

$$c'_j = -\frac{a}{\alpha}\frac{(-1)^k}{k!}\langle B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi\rangle, \; k = k'_\nu(j), \; j \in N'_\nu,$$

$\alpha = 4$ *dans le* 1er *cas*, $\alpha = 2$ *dans les* 2e *et* 3e *cas*. $T_\nu^+\varphi$ *et* $T_\nu^-\varphi$ *sont des fonctions* C^∞ *de* $s \in R$.

L'application M_ν qui, à toute fonction $\varphi \in S(R^{n+1})$, fait correspondre le couple $M_\nu\varphi = (M_\nu^+\varphi, M_\nu^-\varphi)$ de fonctions d'une variable s, de classe C^∞ pour $s \neq 0$, est un prolongement de l'application $M_\nu : D(\Omega) \to D(R)^2$. Nous allons montrer que l'image de $D(R^{n+1})$ par M_ν est un espace vectoriel K_ν caractérisé par les propriétés énoncées dans les lemmes 2.2 et 2.3.

3. Espaces K_ν et K'_ν

Désignons par K_ν l'espace vectoriel sur C formé des couples $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-)$ de fonctions d'une variable réelle s, ayant les propriétés suivantes:

1° $\varphi^+(s)$ et $\varphi^-(s)$ sont de classe C^∞ pour $s \neq 0$.

2° Lorsque $s \to 0$, φ^+ et φ^- ont des développements asymptotiques de la forme

$$\varphi^\pm(s) \sim \sum_{j=0}^{\infty} (\langle\alpha_j^\pm, \varphi\rangle + \langle\beta_j^\pm, \varphi\rangle\gamma(s))\, s^j, \tag{3.1}$$

où $\gamma(s)$ est la fonction définie par (2.3), les $\langle\alpha_j^\pm, \varphi\rangle$ et $\langle\beta_j^\pm, \varphi\rangle$ étant des nombres complexes, $\langle\beta_j^\pm, \varphi\rangle = 0$ si $j < \bar{n}$. Les dérivées successives de φ^+ et φ^- admettent les développements déduits de (3.1) par dérivation terme à terme.

3° Pour $s \neq 0$,

$$\varphi^\pm(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \chi^{\operatorname{sgn} s}\varphi(\pm|s|^{-\frac{a}{2}}) + \log|s| \sum_{j\in N_\nu} (\pm 1)^{k_\nu(j)}\langle\gamma_j, \varphi\rangle s^j +$$
$$+ \gamma(s)\log|s| \sum_{j\in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)}\langle\gamma'_j, \varphi\rangle s^j, \tag{3.2}$$

avec les définitions (2.16) à (2.19), $\chi^+\varphi$ et $\chi^-\varphi$ étant des fonctions C^∞ de $s \in R$, $\langle\gamma_j, \varphi\rangle$ et $\langle\gamma'_j, \varphi\rangle \in C$.

Munissons K_ν de la structure d'espace vectoriel topologique définie par les semi-normes

$$p_m^\pm(\varphi) = \sum_{j=0}^{m} |\langle\beta_j^\pm, \varphi\rangle| + \sup_{\substack{|s|\leq 1\\ k\leq m}} |D^k(\varphi^\pm(s) - \gamma(s)\sum_{j=0}^{m}\langle\beta_j^\pm, \varphi\rangle s^j)|,$$

$$q_m^{\pm}(\varphi) = \sup_{\substack{|s|\leqslant 1\\ k\leqslant m}} |D^k \chi^{\pm} \varphi(s)|\,, \quad q(\varphi) = \sum_{j\in N_\nu} |\langle \gamma_j, \varphi\rangle| + \sum_{j\in N'_\nu} |\langle \gamma'_j, \varphi\rangle|\,,$$

où $m \in N$. On vérifie sans peine que K_ν est alors un espace de FRÉCHET (cf. [2]). Il est clair que $D(R)^2 \subset K_\nu$, l'injection étant continue.

D'autre part, d'après les lemmes 2.2 et 2.3, si $\varphi \in S(R^{n+1})$, $M_\nu\varphi = (M_\nu^+\varphi, M_\nu^-\varphi) \in K_\nu$. De plus, en vertu du lemme 2.1, $M_\nu\varphi \to 0$ dans K_ν si $\varphi \to 0$ dans $S(R^{n+1})$. On a donc:

Proposition 3.1. *L'application $M_\nu : D(\Omega) \to D(R)^2$ admet un prolongement linéaire continu $M_\nu : S(R^{n+1}) \to K_\nu$.*

Nous noterons encore M_ν la restriction à $D(R^{n+1})$ de l'application $M_\nu : S(R^{n+1}) \to K_\nu$. Nous aurons besoin du lemme suivant:

Lemme 3.1. *Soit S le sous-espace vectoriel fermé de K_ν formé des éléments φ tels que $\langle \beta_j^+, \varphi\rangle = \langle \beta_j^-, \varphi\rangle = 0$, pour tout entier $j \geqslant \bar{n}$. Il existe une application linéaire continue L_ν de S dans $D(R^{n+1})$ telle que l'application composée $M_\nu L_\nu$ soit égale à l'identité. On a $D(R)^2 \subset S$ et l'image de $D(R)^2$ par L_ν est contenue dans $D(\Omega)$.*

Soit en effet $\varphi \in S$. En vertu de (3.1), on a φ^+ et $\varphi^- \in C^\infty$. D'après TENGSTRAND ([13], lemme 4.3), il existe $\vartheta_j \in D(R^n)$, pour tout $j \in N$, tel que

$$\langle A_k, \vartheta_j\rangle = \delta_{kj}, \langle B_k, \vartheta_j\rangle = 0, k \in N\,,$$

et $\omega_j \in D(R^n)$, pour tout $j \in N$, $j \geqslant \bar{n}$, tel que

$$\langle A_k, \omega_j\rangle = 0\,, \langle B_k, \omega_j\rangle = \delta_{kj}, k \in N\,.$$

Soit $\varrho(t) \in D(R)$ n'ayant aucune dérivée nulle à l'origine. D'après le lemme 2.3, il existe des constantes λ_j, pour $j \in N_\nu$, et μ_j, pour $j \in N'_\nu$, telles que, si

$$\Phi_3(x, t) = \sum_{j\in N_\nu} \lambda_j \langle \gamma_j, \varphi\rangle\, \vartheta_j(x)\varrho(t)$$
$$+ \sum_{j\in N'_\nu} \mu_j \langle \gamma'_j, \varphi\rangle\, \omega_j(x)\varrho(t)\,,$$

on ait $\langle \gamma_j, M_\nu\Phi_3\rangle = \langle \gamma_j, \varphi\rangle$, pour tout $j \in N_\nu$, et $\langle \gamma'_j, M_\nu\Phi_3\rangle = \langle \gamma'_j, \varphi\rangle$, pour tout $j \in N'_\nu$. L'application $\varphi \to \Phi_3$ de S dans $D(R^{n+1})$ est linéaire continue.

Soient $\alpha_1(s)$ et $\alpha_2(s) \in C^\infty$, telles que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1(s)$ nulle pour $|s| > 2$ et $\alpha_2(s)$ nulle pour $|s| < 1$. Les éléments $\varphi_1 = \alpha_1(\varphi - M_\nu\Phi_3)$ et $\varphi_2 = \alpha_2(\varphi - M_\nu\Phi_3)$ appartiennent à K_ν. Soit $\alpha \in D(]0, 1[)$ telle que

$$\int_0^\infty \alpha(t) t^{\frac{\nu+2}{a}}\, dt = 1\,,$$

et soit $\beta(x) \in D(R^n)$, nulle au voisinage de l'origine, telle que $\tilde{\beta}(v) = 1$ pour $|v| < 3$. Posons

$$\Phi_1(x, t) = \beta(x)[\alpha(t)\varphi_1^+(u\,|t|^{-\frac{2}{a}}) + \alpha(-t)\,\varphi_1^-(u\,|t|^{-\frac{2}{a}})]\,.$$

On a $\Phi_1 \in D(R^{n+1})$ et, d'après (2.6), $M_\nu \Phi_1 = \varphi_1$. De plus, l'application $\varphi \to \Phi_1$ est linéaire continue de S dans $D(R^{n+1})$. D'après (3.2), on a

$$\varphi_2^{\pm}(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \psi^{\operatorname{sgn} s}(\pm\,|s|^{-\frac{a}{2}})\,,$$

où ψ^+ et ψ^- appartiennent à $D(R)$. Soit $\vartheta \in D(]0, 1[)$ telle que

$$\int_0^\infty \vartheta(t^{\frac{2}{a}})\, t^{\frac{\nu+2}{a}}\, dt = 1.$$

Posons

$$\Phi_2(x, t) = \beta(x)[\vartheta(u)\psi^+(t\,|u|^{-\frac{a}{2}}) + \vartheta(-u)\psi^-(t\,|u|^{-\frac{a}{2}})]\,.$$

On a $\Phi_2 \in D(R^{n+1})$ et, d'après (2.6), $M_\nu \Phi_2 = \varphi_2$. L'application $\varphi \to \Phi_2$ de S dans $D(R^{n+1})$ est linéaire continue. Posons alors $L_\nu \varphi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$. L'application $L_\nu : S \to D(R^{n+1})$ est donc linéaire continue et l'on a $M_\nu L_\nu \varphi = \varphi$, pour tout $\varphi \in S$. En outre, si $\varphi \in D(R)^2$, on a $\langle \gamma_j, \varphi \rangle = 0$ pour $j \in N_\nu$, $\langle \gamma'_j, \varphi \rangle = 0$ pour $j \in N'_\nu$ et $\psi^{\pm}(s) = 0$ au voisinage de l'origine, de sorte que $L_\nu \varphi \in D(\Omega)$, c. q. f. d.

Proposition 3.2. *L'application* $M_\nu : D(R^{n+1}) \to K_\nu$ *est surjective.*

Soit en effet $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\nu$. D'après (2.9) et (2.4), il résulte d'un théorème classique de BOREL, qu'il existe $\Phi \in D(R^{n+1})$ de la forme

$$\Phi(x, t) = \psi_+(x)\alpha(t) + \psi_-(x)\alpha(-t)\,,$$

avec ψ_+ et $\psi_- \in D(R^n)$, $\alpha \in D(]0, 1[)$, $\alpha(t) \geqslant 0$, telle que $\langle B_{\nu j}^{\pm}, \Phi \rangle = \langle \beta_j^{\pm}, \varphi \rangle$, pour tout $j \geqslant \bar{n}$. En vertu du lemme 2.2, on a donc $\langle \beta_j^{\pm}, M_\nu \Phi \rangle = \langle \beta_j^{\pm}, \varphi \rangle$ pour tout $j \geqslant \bar{n}$, de sorte que $\varphi - M_\nu \Phi = \varphi_1$ appartient au sous-espace S du lemme 3.1. Si $\Phi_1 = L_\nu \varphi_1$ on a $M_\nu(\Phi + \Phi_1) = M_\nu \Phi + \varphi_1 = \varphi$, c. q. f. d.

Soit K'_ν le dual de K_ν. Les coefficients du développement (3.1) définissent des éléments $\alpha_j^+, \alpha_j^- (j \in N)$ et $\beta_k^+, \beta_k^- (\bar{n} \leqslant k \in N)$ de K'_ν. De même les coefficients de (3.2) définissent des éléments $\gamma_j (j \in N_\nu)$ et $\gamma'_j (j \in N'_\nu)$ de K'_ν. Nous considérerons également les éléments ε_j^+ et ε_j^- de K'_ν donnés par $\langle \varepsilon_j^{\pm}, \varphi \rangle = D^j \chi^{\pm} \varphi(0) (j \in N)$, pour $\varphi \in K_\nu$.

Comme l'injection $D(R)^2 \subset K_\nu$ est continue, à tout élément $h \in K'_\nu$, on peut associer deux distributions $h_+, h_- \in D'(R)$ telles que

$$\langle h, \varphi \rangle = \langle h_+, \varphi^+ \rangle + \langle h_-, \varphi^- \rangle\,,$$

pour tout $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in D(R)^2$. Mais $D(R)^2$ n'étant pas dense dans K_ν, h_+ et h_- ne déterminent pas h. On vérifie que si $h_+ = h_- = 0$, h est combinaison linéaire des éléments $\beta_j^+, \beta_j^- (\bar{n} \leqslant j \in N)$, $\gamma_j (j \in N_\nu)$, $\gamma_j' (j \in N_\nu')$, ε_k^+, $\varepsilon_k^- (k \in N)$.

Soit $M_\nu' : K_\nu' \to D'(R^{n+1})$ la transposée de l'application $M_\nu : D(R^{n+1}) \to K_\nu$. Des propositions 3.1 et 3.2 résulte immédiatement:

Proposition 3.3. *L'application linéaire continue* $M_\nu' : K_\nu' \to D'(R^{n+1})$ *est injective. Son image* $M_\nu' K_\nu'$ *est contenue dans* $S'(R^{n+1})$.

4. Eléments de H_ν nuls dans Ω

Dans l'espace R^n, considérons les fonctions localement intégrables $u_+^\nu = Y(u)u^\nu$ et $u_-^\nu = Y(-u)\,|u|^\nu$, pour $R\nu > -1$. Si $\varphi \in D(R^n)$, on a, d'après (2.1),

$$\langle u_\pm^\nu, \varphi \rangle = \int_{R^n} Y(\pm u)\,|u|^\nu \varphi(x)dx = \int_0^\infty v^\nu \tilde{\varphi}(\pm v)dv .$$

Compte tenu du développement (2.2), on en déduit que u_+^ν et u_-^ν sont prolongeables en fonctions méromorphes de $\nu \in C$ à valeurs dans $D'(R^n)$, avec pôles simples ou doubles $\nu = -(k+1)$ et $\nu = -\left(\frac{n}{2} + k\right)$, $k \in N$ (cf. [4], chap. III, § 2); les coefficients c_{-2} et c_{-1} des développements de Laurent s'expriment simplement à l'aide des distributions A_j et B_j. Nous définirons u_+^ν et u_-^ν pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel (voir § 2); ce sont des distributions invariantes par le groupe G. Si ν est un entier de signe quelconque, nous poserons

$$u^\nu = u_+^\nu + (-1)^{|\nu|} u_-^\nu .$$

Pour $\lambda > 0$, on a, lorsque $\nu \neq -1, -2, \ldots$ et $\nu \neq -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots$

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu} u_\pm^\nu(x) . \tag{4.1}$$

Dans le 1er cas, si $\nu = -(k+1)$, $k \in N$,

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu}[u_\pm^\nu(x) + 2\log\lambda(\pm 1)^k A_k(x) - 2\log^2\lambda(\pm 1)^k B_k(x)] . \tag{4.2}$$

Dans le 2e cas, si $\nu = -(k+1)$, $k \in N$,

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu}[u_\pm^\nu(x) + 2\log\lambda(\pm 1)^k A_k(x)] , \tag{4.3}$$

et si $\nu = -\left(\frac{n}{2} + k\right)$, $k \in N$,

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu}[u_\pm^\nu(x) + 2\log\lambda\, Y(\pm 1) B_{\bar{n}+k}(x)] . \tag{4.4}$$

Enfin, dans le 3e cas, si $\nu = -(k+1)$, $k \in N$,

$$u_{\pm}^{\nu}(\lambda x) = \lambda^{2\nu}[u_{\pm}^{\nu}(x) + 2\log\lambda(\pm 1)^k A_k(x) + 2\log\lambda\, Y(\pm 1)\, B_k(x)]\,. \tag{4.5}$$

D'autre part, on vérifie facilement que

$$A_j(\lambda x) = \begin{cases} \lambda^{-2(j+1)}[A_j(x) - 2\log\lambda\, B_j(x)]\,, & \text{dans le 1er cas,} \\ \lambda^{-2(j+1)} A_j(x), & \text{dans les 2e et 3e cas;} \end{cases} \tag{4.6}$$

$$B_j(\lambda x) = \begin{cases} \lambda^{-2(j+1)} B_j(x), & \text{dans les 1er et 3e cas,} \\ \lambda^{-(2j+3)} B_j(x), & \text{dans le 2e cas.} \end{cases} \tag{4.7}$$

Soit alors $f \in H_\nu$, une distribution nulle dans Ω. Dans $|x| \neq 0$, f est à support dans $t = 0$, donc est de la forme $\Sigma g_k(x) \otimes \delta^{(k)}(t)$ (cf. SCHWARTZ [12], t. 1, th. 36, p. 101), avec $g_k(x) \in D'(R^n)$, invariante par G et homogène de degré $\nu + a(k+1)$. Par suite, il existe des constantes c_k^+ et c_k^- telles que

$$g_k(x) = c_k^+ u_+^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} + c_k^- u_-^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} + h_k(x)\,,$$

où $h_k(x)$ est une distribution sur R^n, invariante par le groupe G, nulle dans l'ouvert $u(x) \neq 0$. Il en résulte (cf. [8], [11] et [13]) que $h_k(x)$ est combinaison linéaire des $A_j(x)$ et des $B_j(x)$. En exprimant que $g_k(x)$ est homogène de degré $\nu + a(k+1)$, compte tenu des formules (4.1) à (4.6), on voit que, dans $|x| \neq 0$,

$$g_k(x) = \begin{cases} \alpha_k u_+^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} + \beta_k u_-^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}}, & \text{si } k \neq k_\nu(j) \text{ pour tout } j \in N_\nu, \\ \alpha_k u^{-(j+1)} + \beta_k A_j(x)\,, & \text{si } k = k_\nu(j),\ j \in N_\nu\,, \end{cases} \tag{4.8}$$

α_k et β_k étant des constantes. Ainsi, dans $|x| \neq 0$, f est égale à

$$f_1 = \Sigma g_k(x) \otimes \delta^{(k)}(t)\,, \tag{4.9}$$

où les g_k sont de la forme (4.8), la somme (4.9) ne comportant qu'un nombre fini de termes.

Dans $t \neq 0$, f est à support dans $|x| = 0$, donc est de la forme $\Sigma P_k(\partial/\partial x)\delta(x) \otimes h_k(t)$ (SCHWARTZ, loc. cit.), où P_k est un polynôme homogène de degré k. Comme f est homogène de degré ν, il faut que $h_k(t)$ soit homogène de degré $\dfrac{\nu+n+k}{a}$ au sens habituel, donc que dans $t \neq 0$

$$h_k(t) = a_k^+ t_+^{\frac{\nu+n+k}{a}} + a_k^- t_-^{\frac{\nu+n+k}{a}}\,,$$

avec a_k^+ et $a_k^- \in C$. D'autre part, pour que f soit invariante, il faut que $P_k(\partial/\partial x)$ soit, à un facteur constant près, un dalembertien itéré. D'après les

égalités (2.4) et (2.9), on a donc $f = f_2$ dans $t \neq 0$, avec

$$f_2 = \Sigma a_j^+ B_{\nu j}^+ + \Sigma a_j^- B_{\nu j}^- , \tag{4.10}$$

les sommes étant finies, a_j^+, $a_j^- \in C$. Remarquons que, si $\lambda > 0$,

$$B_{\nu j}^{\pm}(\lambda x, \lambda^a t) - \lambda^\nu B_{\nu j}^{\pm}(x, t) = \begin{cases} 0, \text{ si } j \notin N'_\nu , \\ a\lambda^\nu \log \lambda \dfrac{(\mp 1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \text{ si } j \in N'_\nu, k = k'_\nu(j). \end{cases} \tag{4.11}$$

Posons alors $f_3 = f - f_1 - f_2$, avec (4.9) et (4.10). Il résulte de ce qui précède que f_3 est une distribution invariante, nulle dans le complémentaire de l'origine, donc que f_3 est combinaison linéaire des distributions $B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t)$, $j, k \in N$, $j \geqslant \bar{n}$. Enfin, à l'aide des formules (4.1) à (4.7) et (4.11), en exprimant que f est homogène de degré ν, on obtient le résultat suivant:

Proposition 4.1. *Une base de l'espace vectoriel des distributions de H_ν nulles dans Ω est formée des éléments*

$$B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \; j \in N'_\nu, \; k = k'_\nu(j) ,$$

$$B_{\nu j}^+, \; B_{\nu j}^-, \; \bar{n} \leqslant j \in N, \; j \notin N'_\nu ,$$

et, suivant le cas envisagé, des éléments

1er *cas*:

$$2k!\, B_{\nu j}^{\pm} + a(\mp 1)^k A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \; j \in N'_\nu, \; k = k'_\nu(j),$$

$$u_{\pm}^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \; k \neq k_\nu(j) \quad \textit{pour tout} \quad j \in N_\nu, \; k \in N,$$

$$u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t), \; j \in N_\nu, \; k = k_\nu(j),$$

$$A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \; j \in N_\nu - N'_\nu, \; k = k_\nu(j);$$

2e *cas*:

$$2k!\, B_{\nu j}^{\pm} - a(\mp 1)^k u_+^{-\left(j + \frac{3}{2}\right)} \otimes \delta^{(k)}(t), \; j \in N'_\nu, \; k = k'_\nu(j),$$

$$u_+^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \; N \ni k \neq \begin{cases} k_\nu(j) \textit{ pour tout } j \in N_\nu, \\ k'_\nu(j) \textit{ pour tout } j \in N'_\nu, \end{cases}$$

$$u_-^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \; N \ni k \neq k_\nu(j) \textit{ pour tout } j \in N_\nu,$$

$$u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t), \; j \in N_\nu, \; k = k_\nu(j),$$

$$A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \; j \in N_\nu, \; k = k_\nu(j);$$

3e *cas*:

$$2k!\, B_{\nu j}^{\pm} - a(\mp 1)^k u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t), \; j \in N'_\nu, \; k = k'_\nu(j),$$

$$u_{\pm}^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \; N \ni k \neq k_\nu(j) \textit{ pour tout } j \in N_\nu,$$

$$u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t),\ j \in N_\nu - N'_\nu,\ k = k_\nu(j)\,,$$

$$A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t),\ j \in N_\nu,\ k = k_\nu(j).$$

Des lemmes 2.2 et 2.3 et des relations (2.14), (3.1) et (3.2) on déduit

$$M'_\nu \beta_j^\pm = B_{\nu j}^\pm\,, \tag{4.12}$$

$$M'_\nu \gamma_j = -\frac{a}{2}\frac{(-1)^k}{k!} A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t)\,,\ k = k_\nu(j)\,,$$

$$M'_\nu \gamma'_j = -\frac{a}{\alpha}\frac{(-1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t)\,,\ k = k'_\nu(j)\,,$$

avec $\alpha = 4$ dans le 1er cas, $\alpha = 2$ dans les 2e et 3e cas,

$$M'_\nu \varepsilon_k^\pm = \frac{a}{2}(-1)^k u_\pm^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t)\,. \tag{4.13}$$

Ces égalités et la proposition 4.1 entraînent:

Proposition 4.2. *Les distributions de H_ν nulles dans Ω sont contenues dans $M'_\nu K'_\nu$.*

5. Espace H_ν, représentation paramétrique de H_ν

Cherchons à quelle condition l'image $M'_\nu h$ d'un élément h de K'_ν appartient à H_ν.

Soient $\varphi \in D(R^{n+1})$ et $f \in D'(R^{n+1})$. Si $L \in G$, on a $\langle f(Lx, t), \varphi(x, t)\rangle = \langle f(x, t), \psi_L(x, t)\rangle$, avec $\psi_L(x, t) = \varphi(L^{-1}x, t)$. Or $\tilde{\psi}_L(v, t) = \tilde{\varphi}(v, t)$, de sorte que, d'après la définition de M_ν, $M_\nu \varphi = M_\nu \psi_L$. Si $h \in K'_\nu$ on a donc $\langle M'_\nu h, \varphi\rangle = \langle h, M_\nu \varphi\rangle = \langle h, M_\nu \psi_L\rangle = \langle M'_\nu h, \psi_L\rangle$. Par conséquent, *$M'_\nu h$ est une distribution invariante sur R^{n+1}.*

Si maintenant λ est un nombre > 0, on a $\langle f(\lambda x, \lambda^a t), \varphi(x, t)\rangle = \langle f(x, t), \varphi_\lambda(x, t)\rangle$, avec $\varphi_\lambda(x, t) = \lambda^{-(n+a)}\varphi(\lambda^{-1}x, \lambda^{-a}t)$, et d'après (2.1), $\tilde{\varphi}_\lambda(v, t) = \lambda^{-(2+a)}\tilde{\varphi}(\lambda^{-2}v, \lambda^{-a}t)$. Pour $R\nu > -(a+2)$, la définition (2.6) donne donc $M_\nu \varphi_\lambda = \lambda^\nu M_\nu \varphi$. Par prolongement naturel de cette égalité, en tenant compte des formules (2.7) et (2.10) à (2.12), on obtient, pour tout $\nu \in C$,

$$\begin{aligned} M_\nu^\pm \varphi_\lambda(s) = \lambda^\nu \Big[& M_\nu^\pm \varphi(s) + a \log \lambda \sum_{j \in N_\nu} \frac{(\mp 1)^{k_\nu(j)}}{k_\nu(j)!} \langle A_j(x) \otimes \delta^{(k_\nu(j))}(t), \varphi\rangle s^j + \\ & + (\alpha(\lambda) + \gamma(s))\, a \log \lambda \sum_{j \in N'_\nu} \frac{(\mp 1)^{k'_\nu(j)}}{k'_\nu(j)!} \langle B_j(x) \otimes \delta^{(k'_\nu(j))}(t), \varphi\rangle s^j \Big], \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec $\alpha(\lambda) = -\log \lambda$ dans le 1er cas, $\alpha(\lambda) = 0$ dans les 2e et 3e cas.

Comme les distributions $A_j(x) \otimes \delta^{(k_\nu(j))}(t)$, $j \in N_\nu$ et $B_j(x) \otimes \delta^{(k'_\nu(j))}(t)$, $j \in N'_\nu$ sont linéairement indépendantes (cf. [13]), il résulte d'abord de (5.1) que

$$\sigma_j = (s^j, (-1)^{k_\nu(j)} s^j), \; j \in N_\nu, \tag{5.2}$$

et

$$\tau_j = (\gamma(s) s^j, (-1)^{k'_\nu(j)} \gamma(s) s^j), \; j \in N'_\nu, \tag{5.3}$$

sont des éléments de K_ν. Il est clair que ces éléments sont linéairement indépendants. Soit X_ν leur ensemble:

$$X_\nu = \{\sigma_j ; j \in N_\nu\} \cup \{\tau_j ; j \in N'_\nu\} . \tag{5.4}$$

D'autre part, pour que l'image $M'_\nu h$ de $h \in K'_\nu$ soit homogène de degré ν, il faut et il suffit que

$$\langle M'_\nu h, \varphi_\lambda \rangle = \langle h, M_\nu \varphi_\lambda \rangle = \lambda^\nu \langle h, M_\nu \varphi \rangle$$

pour tout $\varphi \in D(R^{n+1})$ et pour tout $\lambda > 0$; d'après (5.1) on a donc:

Proposition 5.1. *Soit $h \in K'_\nu$. Pour que $M'_\nu h \in H_\nu$, il faut et il suffit que $h \in H_\nu$, H_ν étant le sous-espace vectoriel fermé de K'_ν défini par les relations*

$$\langle h, \varphi \rangle = 0, \quad \textit{pour tout} \quad \varphi \in X_\nu ,$$

avec (5.4).

H_ν est donc de codimension finie dans K'_ν (cf. [1], § 4, th. 1):

$$\operatorname{codim} H_\nu = \operatorname{card} N_\nu + \operatorname{card} N'_\nu .$$

D'après (5.2), on a, pour $j \in N_\nu$,

$$\langle \alpha_k^\pm, \sigma_j \rangle = (\pm 1)^{k_\nu(j)} \delta_{kj}, \; k \in N, \tag{5.5}$$

$$\langle \beta_k^\pm, \sigma_j \rangle = 0, \; \bar{n} \leqslant k \in N. \tag{5.6}$$

On peut écrire, pour $s \neq 0$, $j \in N_\nu$, $k = k_\nu(j)$,

$$\sigma_j^\pm = (\pm 1)^{k_\nu(j)} s^j = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} (\operatorname{sgn} s)^j (\pm |s|^{-\frac{a}{2}})^k .$$

On en déduit $\chi^\pm \varphi(s) = (\pm 1)^j s^k$, et

$$\langle \gamma_i, \sigma_j \rangle = 0, \; i \in N_\nu, \tag{5.7}$$

$$\langle \gamma'_i, \sigma_j \rangle = 0, \; i \in N'_\nu, \tag{5.8}$$

$$\langle \varepsilon_i^\pm, \sigma_j \rangle = (\pm 1)^j k! \, \delta_{ik}, \; k = k_\nu(j), \; i \in N. \tag{5.9}$$

La définition (5.3) donne, pour $j \in N'_\nu$,

$$\langle \alpha_k^\pm, \tau_j \rangle = 0, \; k \in N, \tag{5.10}$$

$$\langle \beta_k^\pm, \tau_j \rangle = (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \delta_{kj}, \; \bar{n} \leqslant k \in N. \tag{5.11}$$

D'autre part, pour $s \neq 0$, on a dans le 1er cas

$$\tau_j^{\pm} = \log |s| (\pm 1)^{k'_\nu(j)} s^j ,$$

et dans les 2e et 3e cas,

$$\tau_j^{\pm} = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} Y(s) (\pm |s|^{-\frac{a}{2}})^{k'_\nu(j)} .$$

On en déduit, d'après (3.2),

$$\langle \gamma_i, \tau_j \rangle = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{dans le 1er cas,} \\ 0, & \text{dans les 2e et 3e cas,} \end{cases} \quad i \in N_\nu , \tag{5.12}$$

$$\langle \gamma'_i, \tau_j \rangle = 0, \ i \in N'_\nu . \tag{5.13}$$

Dans le 1er cas,

$$\langle \varepsilon_i^{\pm}, \tau_j \rangle = 0, \ i \in N ; \tag{5.14}$$

dans les 2e et 3e cas,

$$\langle \varepsilon_i^{\pm}, \tau_j \rangle = Y(\pm 1) k! \, \delta_{ik}, \ k = k'_\nu(j), \ i \in N . \tag{5.15}$$

Dans un espace vectoriel, désignons par $[e_i ; i \in J]$ le sous-espace vectoriel engendré par les éléments e_i, $i \in J$, et notons $\oplus$ une somme directe topologique. Avec ces notations, la proposition 5.1 et les formules (5.5), (5.6), (5.10) et (5.11) entraînent (cf. [2], chap. I, § 2, prop. 3)

$$K'_\nu = H_\nu \oplus [\alpha_j^+ ; j \in N_\nu] \oplus [\beta_j^+ ; j \in N'_\nu] .$$

De même, les formules (5.6), (5.9), (5.11), (5.14) et (5.15) donnent

$$K'_\nu = H_\nu \oplus [\varepsilon^-_{k_\nu(j)} ; j \in N_\nu] \oplus [\beta_j^+ ; j \in N'_\nu] . \tag{5.16}$$

Le théorème suivant montre que l'application $M'_\nu : H_\nu \to \mathsf{H}_\nu$ fournit une représentation paramétrique de H_ν :

Théorème 5.1. *L'application linéaire continue $M'_\nu : K'_\nu \to \mathsf{D}'(R^{n+1})$ induit un isomorphisme vectoriel de H_ν sur H_ν.*

En effet, on sait déjà que M'_ν est injective (prop. 3.3). Montrons que M'_ν est surjective. Soit $f \in \mathsf{H}_\nu$. D'après la proposition 1.1, il existe h_+ et $h_- \in \mathsf{D}'(R)$ tels que $\langle f, \Phi \rangle = \langle h_+, M_\nu^+ \Phi \rangle + \langle h_-, M_\nu^- \Phi \rangle$, pour tout $\Phi \in \mathsf{D}(\Omega)$. Soit h_0 la forme linéaire sur $\mathsf{D}(R)^2$ définie par $\langle h_0, \varphi \rangle = \langle h_+, \varphi^+ \rangle + \langle h_-, \varphi^- \rangle$, pour tout $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in \mathsf{D}(R)^2$. En utilisant l'application L_ν du lemme 3.1, on a $\langle h_0, \varphi \rangle = \langle f, L_\nu \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathsf{D}(R)^2$, d'où il résulte que h_0 est une forme linéaire continue pour la topologie induite par K_ν sur $\mathsf{D}(R)^2$. L'adhérence de $\mathsf{D}(R)^2$ dans K_ν, et X_ν, ont leur intersection égale à $\{0\}$. En effet, les éléments de $\mathsf{D}(R)^2$ annulent les formes linéaires continues β_k^+ et ε_k^+, alors que $\langle \beta_k^+, \sigma_j \rangle = 0$, $\langle \beta_k^+, \tau_j \rangle = \delta_{kj}$, $\langle \varepsilon_k^+, \sigma_j \rangle = k! \, \delta_{k \, k_\nu(j)}$ (formules (5.6), (5.11) et (5.9)). Par conséquent, d'après [2] (chap. I, § 2, prop. 3) et le théo-

rème de HAHN-BANACH ([2], chap. II), il est possible de prolonger h_0 en une forme linéaire continue sur K_ν, nulle sur X_ν, donc en un élément h_1 de H_ν. Soit alors $f_1 = M'_\nu h_1$; on a $f_1 \in H_\nu$ (prop. 5.1), de sorte que $f - f_1 \in H_\nu$. Si $\Phi \in D(\Omega)$, on a $\langle f_1, \Phi\rangle = \langle h_1, M_\nu \Phi\rangle = \langle h_0, M_\nu \Phi\rangle = \langle f, \Phi\rangle$, puisque $M_\nu \Phi \in D(R)^2$. Ainsi $f - f_1$ est un élément de H_ν nul dans Ω. Les propositions 4.2 et 5.1 impliquent que $f - f_1 \in M'_\nu H_\nu$, donc $f \in M'_\nu H_\nu$, c. q. f. d.

En particulier, en vertu de la proposition 3.3, $H_\nu \subset M'_\nu K'_\nu \subset S'(R^{n+1})$, donc:

Corollaire. *Pour tout $\nu \in C$, les éléments de H_ν sont des distributions tempérées.*

6. Transformation de FOURIER. Espaces K'_ν et K_ν

Pour tout $\nu \in C$, nous poserons

$$\nu' = -(\nu + n + a)\,. \tag{6.1}$$

On démontre aisément la proposition suivante (cf. [6], prop. 2.2 et 3.1, voir aussi [3], [9] et [13]):

Proposition 6.1. *Pour tout $\nu \in C$, les transformations de FOURIER F et $\bar{F}$ induisent des isomorphismes de H_ν sur $H_{\nu'}$, avec* (6.1).

Désignons par K'_ν le sous-espace vectoriel de $D'(R^{n+1})$ image de K'_ν par M'_ν: $K'_\nu = M'_\nu K'_\nu$. En vertu de la proposition 3.3, les distributions de K'_ν sont tempérées. D'autre part, d'après (5.16), (4.12), (4.13), (2.9) et (2.4), puisque M'_ν est un isomorphisme vectoriel, on a

$$\begin{aligned} K'_\nu = H_\nu \oplus [u_-^{(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t)\,;\ k = k_\nu(j),\ j \in N_\nu] \\ \oplus [\Box^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes t_+^{-(k+1)}\,;\ k = k'_\nu(j),\ j \in N'_\nu]; \end{aligned} \tag{6.2}$$

d'après [2] (chap. I, § 2, corollaire 4 du th. 2 et prop. 3) K'_ν est un sous-espace fermé de $D'(R^{n+1})$ ou $S'(R^{n+1})$, et le deuxième membre de (6.2) est une somme directe topologique.

Notons K_ν l'image par F de $K'_{\nu'}$, avec (6.1). De (6.2) on déduit

$$\begin{aligned} K_\nu = H_\nu \oplus [F(u_-^{(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t))\,;\ k = k_{\nu'}(j),\ j \in N_{\nu'}] \\ \oplus [F(\Box^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes t_+^{-(k+1)}),\ k = k'_{\nu'}(j),\ j \in N'_{\nu'}]\,, \end{aligned} \tag{6.3}$$

K_ν étant également un sous-espace vectoriel fermé de $D'(R^{n+1})$ ou $S'(R^{n+1})$, et le second membre de (6.3) une somme directe topologique. Nous allons

remplacer les transformées de FOURIER figurant dans (6.3) par des expressions explicites. On a

$$F\delta^{(k)}(t) = (it)^k, \quad F\,\Box^j\delta(x) = (-u)^j .$$

De l'expression de Ft_+^λ lorsque λ n'est pas un pôle de t_+^λ (cf. [4]) on déduit, par prolongement naturel,

$$Ft_+^{-(k+1)} = \frac{(-i)^k}{k!}\left[c_k\, t^k - i\,\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} t\; t^k + t^k \log|t|\right]$$

pour tout $k \in N$, avec $c_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + \Gamma'(1)$.

De la même façon (cf. [4]), on obtient pour $j \in N$, dans le 1er cas,

$$Fu_-^{-(j+1)} = \begin{cases} a_0^j u^{j-\bar{n}} + a_1^j\left(u^{j-\bar{n}}\log|u| + \frac{\pi^2}{2}A_{\bar{n}-j-1}\right), & \text{si } j < \bar{n}, \\ a_0^j u^{j-\bar{n}} + a_1^j u^{j-\bar{n}}\log|u| + a_2^j\left(u^{j-\bar{n}}\log^2|u| - \pi^2(-1)^{j-\bar{n}}u_-^{j-\bar{n}}\right), \\ \text{si } j \geqslant \bar{n}; \end{cases}$$

dans le 2e cas,

$$Fu_-^{-(j+1)} = b_0^j u_-^{j+1-\frac{n}{2}} + b_1^j u_-^{j+1-\frac{n}{2}}\log|u|;$$

et dans le 3e cas,

$$Fu_-^{-(j+1)} = \begin{cases} c_0^j u_-^{j-\bar{n}} + c_1^j A_{\bar{n}-j-1}, & \text{si } j < \bar{n}, \\ c_0^j u_-^{j-\bar{n}} + c_1^j u_-^{j-\bar{n}}\log|u|, & \text{si } j \geqslant \bar{n}; \end{cases}$$

les a_i^j, b_i^j, c_i^j sont des constantes non nulles. Les distributions $u_\pm^\lambda \log|u|$, égale à $Y(\pm u)\,|u|^\lambda \log|u|$ pour $R\lambda > -1$, et $u_\pm^\lambda \log^2|u|$, égale à $Y(\pm u)\,|u|^\lambda \log^2|u|$ pour $R\lambda > -1$, sont définies par prolongement naturel pour tout $\lambda \in C$; on pose, pour λ entier de signe quelconque,

$$u^\lambda \log^k|u| = u_+^\lambda \log^k|u| + (-1)^{|\lambda|}\, u_-^\lambda \log^k|u|, \quad k = 1, 2.$$

Remarquons que les éléments suivants font partie de H_ν (formules (4.1) à (4.6)) :

$$u^{j-\bar{n}} \otimes t^k, \quad u^{j-\bar{n}} \otimes \operatorname{sgn} t\, t^k, \quad k = k'_{\nu'}(j), \quad j \in N'_{\nu'},$$

$$A_{\bar{n}-j-1} \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N_{\nu'}, \quad \text{1er et 3e cas};$$

et, dans le 1er cas,

$$u^{j-\bar{n}} \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N_{\nu'},$$

$$u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad \bar{n} \leqslant j \in N_{\nu'},$$

$$2u^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log|t| - a\,u^{j-\bar{n}}\log|u| \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N'_{\nu'};$$

dans le 2e cas,

$$u_-^{j+1-\frac{n}{2}} \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N_{\nu'};$$

dans le 3e cas,
$$u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k, \; k = k_{\nu'}(j), \; \bar{n} \leqslant j \in N_{\nu'} .$$

De ce qui précède et de (6.3) on déduit, dans le 1er cas:

$$\begin{aligned} K_\nu = H_\nu \oplus & \; [u^{j-\bar{n}} \log |u| \otimes t^k; \; k = k_{\nu'}(j), \; \bar{n} > j \in N_{\nu'}] \\ \oplus & \; [u^{j-\bar{n}} \log^2 |u| \otimes t^k; \; k = k_{\nu'}(j), \; \bar{n} \leqslant j \in N_{\nu'}] \\ \oplus & \; [u^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log |t|; \; k = k'_{\nu'}(j), \; j \in N'_{\nu'}] , \end{aligned} \tag{6.4}$$

dans le 2e cas:

$$\begin{aligned} K_\nu = H_\nu \oplus & \; [u_-^{j+1-\frac{n}{2}} \log |u| \otimes t^k; \; k = k_{\nu'}(j), \; j \in N_{\nu'}] \\ \oplus & \; [u^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log |t|; \; k = k'_{\nu'}(j), \; j \in N'_{\nu'}] , \end{aligned} \tag{6.5}$$

dans le 3e cas:

$$\begin{aligned} K_\nu = H_\nu \oplus & \; [u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k; \; k = k_{\nu'}(j), \; \bar{n} > j \in N_{\nu'}] \\ \oplus & \; [u_-^{j-\bar{n}} \log |u| \otimes t^k; \; k = k_{\nu'}(j), \; \bar{n} \leqslant j \in N_{\nu'}] \\ \oplus & \; [u^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log |t|; \; k = k'_{\nu'}(j), \; j \in N'_{\nu'}] . \end{aligned} \tag{6.6}$$

On a également $K_\nu = \bar{F} K'_{\nu'}$. On peut donc énoncer:

Proposition 6.2. *Pour tout* $\nu \in C$, *les transformations de* Fourier *établissent des isomorphismes* F *et* $\bar{F}$ *de* K_ν *sur* $K'_{\nu'}$ *et de* K'_ν *sur* $K_{\nu'}$, *avec* (6.1), K_ν *et* K'_ν *étant les sous-espaces vectoriels fermés de* $S'(R^{n+1})$ *définis par* (6.4), (6.5), (6.6) *et* (6.2).

7. Opérateurs différentiels homogènes et invariants

Soit $H = \bigcup_{\nu \in C} H_\nu$ le sous-ensemble de $D'(R^{n+1})$ formé de toutes les distributions homogènes et invariantes. Cherchons à déterminer l'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants D, le plus général, qui conserve H. Comme la mesure de Dirac δ appartient à H, il faut que $D\delta \in H$, donc que $FD\delta$ soit un polynôme P de H (prop. 6.1). Par conséquent, P est de la forme

$$P(u, t) = \Sigma A_{jk} u^j t^k .$$

Supposons que P ait au moins deux termes non nuls, $A_{j_1 k_1} \neq 0$, $A_{j_2 k_2} \neq 0$. λ étant le degré d'homogénéité de P, on a

$$\lambda = 2j_1 + ak_1 = 2j_2 + ak_2 , \tag{7.1}$$

d'où l'on déduit $k_1 \neq k_2$ et $a = 2(j_1 - j_2) / (k_2 - k_1)$. Ainsi, pour qu'il existe des opérateurs conservant H ayant plus d'un terme, il faut que a soit

rationnel. Dans la suite, nous supposerons que a est rationnel et poserons

$$a = 2\frac{b}{c}, \tag{7.2}$$

avec b et c entiers > 0 premiers entre eux.

Cela étant, (7.1) entraîne $j_1 - j_2 = \alpha b$ et $k_2 - k_1 = \alpha c$, α entier rationnel $\neq 0$, d'où l'on déduit

$$P(u, t) = u^h t^k \sum_{j=0}^{m} a_j u^{jb} t^{(m-j)c}, \tag{7.3}$$

avec $h, k, m \in N$, $a_j \in C$, a_0 et $a_m \neq 0$. Si P n'a qu'un terme non nul, P est de la forme (7.3) avec $m = 0$. Considérons le polynôme

$$Q(s) = \sum_{j=0}^{m} a_j s^j \tag{7.4}$$

formé avec les coefficients de P. Soient z_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, les zéros de Q. On a

$$Q(s) = a_m \prod_{j=1}^{m} (s - z_j), \tag{7.5}$$

d'où

$$P(u, t) = u^h t^{k+mc} Q(u^b t^{-c}) = a_m u^h t^k \prod_{j=1}^{m} (u^b - z_j t^c).$$

On a donc:

Théorème 7.1. *Tout opérateur différentiel linéaire à coefficients constants conservant H est de la forme*

$$D = (-\Box)^h \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \sum_{j=0}^{m} a_j (-\Box)^{jb} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(m-j)c}, \tag{7.6}$$

avec $h, k, m \in N$, $a_j \in C$, a_0 et $a_m \neq 0$. Pour tout $\nu' \in C$, D applique $H_{\nu'}$ dans $H_{\mu'}$, avec

$$\mu' = \nu' - 2h - ak - 2bm. \tag{7.7}$$

D est produit d'une constante et d'opérateurs des types suivants:

$$\Box, \quad \frac{\partial}{\partial t}, \quad \Box^b - z\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^c,$$

z, nombre complexe non nul.

Par transformation de FOURIER, l'application $D: H_{\nu'} \to H_{\mu'}$, est remplacée par $FDF^{-1} = P: H_\nu \to H_\mu$, avec (6.1), P désignant la multiplication par le polynôme (7.3). Nous allons montrer que $P_0' = M_\mu'^{-1} P M_\nu': H_\nu \to H_\mu$ (théorème 5.1) est la restriction à H_ν de la transposée $P': K_\nu' \to K_\mu'$ d'une application linéaire continue $P: K_\mu \to K_\nu$. Considérons d'abord le cas des opérateurs $\Box$ et $\frac{\partial}{\partial t}$; on a alors les résultats suivants:

Proposition 7.1. *Pour tout* $\nu \in C$, *l'application*

$$\sigma : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \to \sigma\varphi = (s\varphi^+, s\varphi^-), \tag{7.8}$$

de $K_{\nu+2}$ *dans* K_ν *est linéaire continue. Sa transposée* $\sigma' : K'_\nu \to K'_{\nu+2}$ *est une application linéaire continue telle que l'application* $M'_{\nu+2}\sigma' M'^{-1}_\nu : K'_\nu \to K'_{\nu+2}$ *soit égale à la multiplication par* u. σ' *applique* H_ν *dans* $H_{\nu+2}$.

Soit en effet $\Phi \in D(R^{n+1})$. D'après (2.6), pour $R\nu > -(a+2)$, on a $M^\pm_\nu(u\Phi) = sM^\pm_{\nu+2}\Phi$, relation qui reste vraie pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel. Il s'ensuit que l'application (7.8) est linéaire de $K_{\nu+2}$ dans K_ν (prop. 3.2), et que

$$M_\nu(u\Phi) = \sigma M_{\nu+2}\Phi$$

pour tout $\Phi \in D(R^{n+1})$.

Remarquons que si $j \in N_{\nu+2}$, alors $j+1 \in N_\nu$ et $k_{\nu+2}(j) = k_\nu(j+1)$. Inversement, si $j \in N_\nu$, $j \geqslant 1$, alors $j-1 \in N_{\nu+2}$. De même, si $j \in N'_{\nu+2}$, alors $j+1 \in N'_\nu$ et $k'_{\nu+2}(j) = k'_\nu(j+1)$; si $j \in N'_\nu$, $j \geqslant \bar{n}+1$, alors $j-1 \in N'_{\nu+2}$ (formules (2.16) à (2.19)). D'après (3.2) et la remarque précédente, si $\varphi \in K_{\nu+2}$, $\psi = \sigma\varphi$, on a

$$\psi^\pm(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \operatorname{sgn} s\, \chi^{\operatorname{sgn} s}\, \varphi(\pm|s|^{-\frac{a}{2}}) + \log|s| \sum_{1 \leqslant j \in N_\nu} (\pm 1)^{k_\nu(j)} \langle \gamma_{j-1}, \varphi\rangle s^j +$$

$$+ \gamma(s) \log|s| \sum_{\bar{n}+1 \leqslant j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \langle \gamma'_{j-1}, \varphi\rangle s^j,$$

d'où

$$\chi^\pm(\sigma\varphi) = \pm\chi^\pm\varphi, \tag{7.9}$$

$$\langle \gamma_j, \sigma\varphi\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } j = 0, \\ \langle \gamma_{j-1}, \varphi\rangle, & \text{si } j \geqslant 1, \end{cases} \quad j \in N_\nu, \tag{7.10}$$

$$\langle \gamma'_j, \sigma\varphi\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } j = \bar{n}, \\ \langle \gamma'_{j-1}, \varphi\rangle, & \text{si } j \geqslant \bar{n}+1. \end{cases} \quad j \in N'_\nu, \tag{7.11}$$

Il s'ensuit que $\sigma : K_{\nu+2} \to K_\nu$ est continue.

Soit $f = M'_\nu h \in K'_\nu$, avec $h \in K'_\nu$. On a $\langle uf, \Phi\rangle = \langle M'_\nu h, u\Phi\rangle = \langle h, M_\nu(u\Phi)\rangle = \langle h, \sigma M_{\nu+2}\Phi\rangle = \langle M'_{\nu+2}\sigma' h, \Phi\rangle$, pour tout $\Phi \in D(R^{n+1})$. Grâce à la proposition 3.3, il en résulte que $M'_{\nu+2}\sigma' M'^{-1}_\nu = u$. Comme la multiplication par u applique H_ν dans $H_{\nu+2}$, on en déduit que $\sigma' H_\nu \subset H_{\nu+2}$ (théorème 5.1), c. q. f. d.

Proposition 7.2. *Pour tout* $\nu \in C$, *l'application*

$$\eta : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \to \eta\varphi = (\varphi^+, -\varphi^-), \tag{7.12}$$

de $K_{\nu+a}$ *dans* K_ν *est linéaire continue. Sa transposée* $\eta' : K'_\nu \to K'_{\nu+a}$ *est une*

application linéaire continue telle que $M'_{\nu+a}\eta' M'^{-1}_{\nu} : K'_{\nu} \to K'_{\nu+a}$ *soit égale à la multiplication par* t. η' *applique* H_{ν} *dans* $H_{\nu+a}$.

En effet, pour $\Phi \in D(R^{n+1})$ et pour $R\nu > -(a+2)$, on a, d'après (2.6), $M^{\pm}_{\nu}(t\Phi) = \pm M^{\pm}_{\nu+a}\Phi$, relation qui reste vraie, par prolongement naturel, pour tout $\nu \in C$. Il s'ensuit que l'application (7.12) est linéaire de $K_{\nu+a}$ dans K_{ν} (prop. 3.2), et que

$$M_{\nu}(t\Phi) = \eta M_{\nu+a}\Phi ,$$

pour tout $\Phi \in D(R^{n+1})$.

D'autre part, on a $N_{\nu+a} \subset N_{\nu}$ et, si $j \in N_{\nu+a}$, $k_{\nu}(j) = k_{\nu+a}(j) + 1$. Inversement, si $j \in N_{\nu}$ et $k_{\nu}(j) \geqslant 1$, on a $j \in N_{\nu+a}$. De même, $j \in N'_{\nu+a}$ si et seulement si $j \in N'_{\nu}$ et $k'_{\nu}(j) \geqslant 1$; on a alors $k'_{\nu}(j) = k'_{\nu+a}(j) + 1$ (formules (2.16) à (2.19)). Il en résulte, en vertu de (3.2), que si $\varphi \in K_{\nu+a}$, $\psi = \eta\varphi$,

$$\psi^{\pm}(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} (\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) \chi^{\operatorname{sgn} s} \varphi(\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) +$$

$$+ \log|s| \sum_{\substack{j \in N_{\nu} \\ k_{\nu}(j) \geqslant 1}} (\pm 1)^{k_{\nu}(j)} \langle \gamma_j, \varphi \rangle s^j + \gamma(s) \log|s| \sum_{\substack{j \in N'_{\nu} \\ k'_{\nu}(j) \geqslant 1}} (\pm 1)^{k'_{\nu}(j)} \langle \gamma'_j, \varphi \rangle s^j .$$

On a donc

$$\chi^{\pm}(\eta\varphi)(s) = s\,\chi^{\pm}\varphi(s) , \tag{7.13}$$

$$\langle \gamma_j, \eta\varphi \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } k_{\nu}(j) = 0, \\ \langle \gamma_j, \varphi \rangle, & \text{si } k_{\nu}(j) \geqslant 1, \end{cases} \quad j \in N_{\nu}, \tag{7.14}$$

$$\langle \gamma'_j, \eta\varphi \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } k'_{\nu}(j) = 0, \\ \langle \gamma'_j, \varphi \rangle, & \text{si } k'_{\nu}(j) \geqslant 1. \end{cases} \quad j \in N'_{\nu}, \tag{7.15}$$

On en déduit que $\eta : K_{\nu+a} \to K_{\nu}$ est continue.

Si $f = M'_{\nu}h \in K'_{\nu}$, $h \in K'_{\nu}$, on a $\langle tf, \Phi \rangle = \langle M'_{\nu}h, t\Phi \rangle = \langle h, M_{\nu}(t\Phi) \rangle = \langle h, \eta M_{\nu+a}\Phi \rangle = \langle M'_{\nu+a}\eta' h, \Phi \rangle$, pour tout $\Phi \in D(R^{n+1})$, d'où (prop. 3.3) $M'_{\nu+a}\eta' M'^{-1}_{\nu} = t$. Comme la multiplication par t applique H_{ν} dans $H_{\nu+a}$, il en résulte que $\eta' H_{\nu} \subset H_{\nu+a}$ (th. 5.1), c. q. f. d.

Soit alors D un opérateur différentiel de la forme (7.6), le polynôme associé étant donné par (7.3). Des propositions 7.1 et 7.2 on déduit:

Proposition 7.3. *Pour tout* $\nu \in C$, σ *et* η *étant les applications linéaires définies par* (7.8) *et* (7.12),

$$P = \sigma^h \eta^k \sum_{j=0}^{m} a_j \sigma^{jb} \eta^{(m-j)c} \tag{7.16}$$

est une application linéaire continue de K_{μ} *dans* K_{ν}, *avec*

$$\mu = \nu + 2h + ak + 2bm . \tag{7.17}$$

La multiplication par le polynôme $P(u, t)$ *induit une application linéaire*

continue $\mathsf{P}: \mathsf{K}'_\nu \to \mathsf{K}'_\mu$, *avec* (7.17), *telle que* $M'^{-1}_\mu \mathsf{P} M'_\nu$ *soit égale à la transposée* $P': K'_\nu \to K'_\mu$ *de* $P: K_\mu \to K_\nu$. *L'application* P' *induit une application linéaire continue* P'_0 *de* H_ν *dans* H_μ.

Enfin, grâce à la proposition 6.2, on a:

Théorème 7.2. *Pour tout* $\nu' \in C$, *l'opérateur* D *donné par* (7.6) *applique* $\mathsf{K}_{\nu'}$ *dans* $\mathsf{K}_{\mu'}$ *avec* (7.7).

8. Application P

Soit $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\mu$. D'après (7.8) et (7.12), l'image de φ par l'application (7.16) est $P\varphi = (P_+\varphi^+, P_-\varphi^-)$, avec

$$P_\pm(s) = (\pm 1)^{k+mc} s^h Q((\pm 1)^c s^b) , \tag{8.1}$$

Q étant donné par (7.4). Les polynômes P_+ et P_- ne sont pas identiquement nuls (on suppose a_0 et $a_m \neq 0$); par suite:

Proposition 8.1. *L'application linéaire continue* $P: K_\mu \to K_\nu$, *avec* (7.17), *est injective.*

Cherchons à déterminer l'image PK_μ de P. Soient $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\mu$ et $\psi = P\varphi = (\psi^+, \psi^-) \in K_\nu$.

On a $P_\pm(s) = s^h Q_\pm(s)$, $Q_\pm(s)$ étant un polynôme $\neq 0$ pour $s = 0$. Par conséquent, en considérant la partie

$$Z^0_\nu = \{\alpha^+_j, \alpha^-_j; 0 \leqslant j < h\} \cup \{\beta^+_j, \beta^-_j; \bar{n} \leqslant j < \bar{n} + h\} \tag{8.2}$$

de K'_ν, on a

$$\langle h, \psi \rangle = 0, \text{ pour tout } h \in Z^0_\nu . \tag{8.3}$$

Soit r_0 un zéro réel d'ordre n_0 de $Q_\pm(s)$. De l'égalité $\psi^\pm(s) = s^h Q_\pm(s) \varphi^\pm(s)$, on déduit que $\langle \delta^\pm_k(s - r_0), \psi \rangle = 0$, pour tout $k < n_0$, où $\delta^+_k(s - r_0)$ et $\delta^-_k(s - r_0)$ sont les éléments de K'_ν définis par

$$\langle \delta^\pm_k(s - r_0), \psi \rangle = D^k \psi^\pm(r_0), \; k \in N, \; \psi \in K_\nu .$$

Soient alors z_j, $1 \leqslant j \leqslant m'$, les zéros réels distincts de $Q(s)$, z_j étant d'ordre n_j. D'après (8.1), les zéros réels r_0 de $Q_\pm(s)$ sont les nombres tels que $(\pm 1)^c r_0^b = z_j$, pour un entier $j \geqslant 1$, $j \leqslant m'$. Considérons la partie Z^1_ν de K'_ν définie de la façon suivante:

$$Z^1_\nu = \begin{cases} \{\delta^+_k(s - r_j), \delta^-_k(s + r_j); r_j \in R, r_j^b = z_j\}, & \text{si } b \text{ et } c \text{ sont impairs,} \\ \{\delta^+_k(s - r_j), \delta^-_k(s - r_j); r_j \in R, r_j^b = z_j\}, & \text{si } b \text{ est impair et } c \text{ pair,} \\ \{\delta^{\operatorname{sgn} z_j}_k(s - r_j), \delta^{\operatorname{sgn} z_j}_k(s + r_j); r_j > 0, r_j^b = |z_j|\}, & \text{si } b \text{ est pair et } c \text{ impair,} \end{cases} \tag{8.4}$$

l'entier j prenant les valeurs $1, 2, \ldots, m'$ et k les valeurs $0, 1, \ldots, n_j - 1$; $Z_\nu^1 = \varnothing$ si Q n'a pas de zéro réel. Avec ces notations, on a donc

$$\langle h, \psi \rangle = 0, \text{ pour tout } h \in Z_\nu^1 . \tag{8.5}$$

Les formules (7.9) et (7.13) entraînent

$$\chi^\pm \psi(s) = (\pm 1)^h s^k \sum_{j=0}^{m} a_j (\pm 1)^{jb} s^{(m-j)c} \chi^\pm \varphi(s) .$$

Par suite, en posant

$$Z_\nu^2 = \{\varepsilon_j^+, \varepsilon_j^- ; 0 \leqslant j < k\} , \tag{8.6}$$

on a

$$\langle h, \psi \rangle = 0, \text{ pour tout } h \in Z_\nu^2 . \tag{8.7}$$

D'après (7.10) et (7.14), si $j \in N_\nu$ et $0 \leqslant \lambda \leqslant m$,

$$\langle \gamma_j, \sigma^{h+\lambda b} \eta^{k+(m-\lambda)c} \varphi \rangle$$

est égal à $\langle \gamma_{j-h-\lambda b}, \varphi \rangle$ si $j \geqslant h + \lambda b$ et $k_\nu(j) \geqslant k + (m - \lambda)c$, et est nul dans les autres cas. Soit $\bar{N}_\nu$ l'ensemble des $j \in N_\nu$ pour lesquels existe un entier λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant m$, tel que $j \geqslant h + \lambda b$ et $k_\nu(j) \geqslant k + (m - \lambda)c$. On a

$$\bar{N}_\nu = \{i + h + \lambda b ; i \in N_\mu, 0 \leqslant \lambda \leqslant m\} .$$

$\bar{N}_\nu$ est vide si et seulement si N_μ l'est. Si $j \in N_\nu - \bar{N}_\nu$, on a $\langle \gamma_j, \psi \rangle = 0$, et si $j \in \bar{N}_\nu$,

$$\langle \gamma_j, \psi \rangle = \Sigma a_\lambda \langle \gamma_i, \varphi \rangle ,$$

la somme étant étendue à tous les entiers λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant m$, et $i \in N_\mu$, tels que $i + h + \lambda b = j$.

Supposons que $N_\mu \neq \varnothing$, donc $\bar{N}_\nu \neq \varnothing$, et posons

$$n_\mu = \operatorname{card} N_\mu, \; i_\mu = \min N_\mu, \; s_\mu = \max N_\mu .$$

On a

$$N_\mu = \{i_\mu, i_\mu + b, i_\mu + 2b, \ldots, s_\mu\} ,$$

$$\bar{N}_\nu = \{i + h ; i \in N_\mu\} \cup \{s_\mu + h + \lambda b ; 1 \leqslant \lambda \leqslant m\} , \tag{8.8}$$

de sorte que card $\bar{N}_\nu = n_\mu + m$. Les n_μ nombres $\langle \gamma_i, \varphi \rangle$, $i \in N_\mu$, sont liés par les $n_\mu + m$ relations linéaires

$$\begin{array}{lcl}
\langle \gamma_{i_\mu+h}, \psi \rangle & = & a_0 \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi \rangle \\
\langle \gamma_{i_\mu+h+b}, \psi \rangle & = & a_1 \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi \rangle + a_0 \langle \gamma_{i_\mu+b}, \varphi \rangle \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\
\langle \gamma_{s_\mu+h}, \psi \rangle & = & a_{n_\mu-1} \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi \rangle + \ldots + a_0 \langle \gamma_{s_\mu}, \varphi \rangle \\
\langle \gamma_{s_\mu+h+b}, \psi \rangle & = & a_{n_\mu} \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi \rangle + \ldots + a_1 \langle \gamma_{s_\mu}, \varphi \rangle \\
\ldots\ldots & & \ldots\ldots \\
\langle \gamma_{s_\mu+h+mb}, \psi \rangle & = & a_m \langle \gamma_{s_\mu}, \varphi \rangle .
\end{array}$$

où l'on pose $a_\lambda = 0$ si $\lambda > m$. Le déterminant des coefficients des $\langle \gamma_i, \varphi \rangle$ dans les n_μ premières relations vaut $a_0^{n_\mu} \neq 0$. On a donc m relations de compatibilité $\langle L_\lambda, \psi \rangle = 0$, $1 \leqslant \lambda \leqslant m$, où les L_λ sont m éléments de K'_ν, linéairement indépendants:

$$L_\lambda = \gamma_{s_\mu + h + \lambda b} + a_0^{-n_\mu} \sum_{i \in N_\mu} A_\lambda^i \gamma_{i+h}, \; 1 \leqslant \lambda \leqslant m, \tag{8.9}$$

A_λ^i étant le mineur de X_i dans la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & X_{i_\mu} & X_{i_\mu + b} & \cdots & X_{s_\mu} \\ a_{\lambda + n_\mu - 1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n_\mu - 1} \\ a_{\lambda + n_\mu - 2} & 0 & a_0 & \cdots & a_{n_\mu - 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_\lambda & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$Z_\nu^3 = \begin{cases} \{\gamma_j ; j \in N_\nu\}, \text{ si } N_\mu = \varnothing, \\ \{\gamma_j ; j \in N_\nu - \bar{N}_\nu\} \cup \{L_1, \ldots, L_m\}, \text{ si } N_\mu \neq \varnothing. \end{cases} \tag{8.10}$$

Avec ces notations, on a

$$\langle h, \psi \rangle = 0, \text{ pour tout } h \in Z_\nu^3. \tag{8.11}$$

De même, soit $\bar{N}'_\nu$ l'ensemble des $j \in N'_\nu$ pour lesquels existe un entier λ, $0 \leqslant \lambda \leqslant m$, tel que $j \geqslant \bar{n} + h + \lambda b$, $k'_\nu(j) \geqslant k + (m - \lambda)c$. $\bar{N}'_\nu$ est vide si et seulement si N'_μ l'est.

Si $N'_\mu \neq \varnothing$, posons

$$n'_\mu = \operatorname{card} N'_\mu, \; i'_\mu = \min N'_\mu, \; s'_\mu = \max N'_\mu.$$

On a

$$N'_\mu = \{i'_\mu, i'_\mu + b, i'_\mu + 2b, \ldots, s'_\mu\},$$

$$\bar{N}'_\nu = \{i + h ; i \in N'_\mu\} \cup \{s'_\mu + h + \lambda b ; 1 \leqslant \lambda \leqslant m\}. \tag{8.12}$$

Soient $L'_1, \ldots, L'_m$ les éléments de K'_ν définis par

$$L'_\lambda = \gamma'_{s'_\mu + h + \lambda b} + a_0^{-n'_\mu} \sum_{i \in N'_\mu} A'^i_\lambda \gamma'_{i+h}, \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant m, \tag{8.13}$$

A'^i_λ étant le mineur de X_i dans la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & X_{i'_\mu} & X_{i'_\mu + b} & \cdots & X_{s'_\mu} \\ a_{\lambda + n'_\mu - 1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n'_\mu - 1} \\ a_{\lambda + n'_\mu - 2} & 0 & a_0 & \cdots & a_{n'_\mu - 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_\lambda & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Considérons la partie $Z_\nu'^3$ de K_ν' définie par

$$Z_\nu'^3 = \begin{cases} \{\gamma_j'; j \in N_\nu'\}, & \text{si } N_\mu' = \varnothing , \\ \{\gamma_j'; j \in N_\nu' - \bar{N}_\nu'\} \cup \{L_1', \ldots, L_m'\}, & \text{si } N_\mu' \neq \varnothing . \end{cases} \tag{8.14}$$

Comme précédemment, (7.11) et (7.15) entraînent

$$\langle h, \psi \rangle = 0 \text{ pour tout } h \in Z_\nu'^3 . \tag{8.15}$$

Inversement, si $\psi \in K_\nu$ vérifie (8.3), (8.5), (8.7), (8.11) et (8.15), il existe $\varphi \in K_\mu$ tel que $\psi = P\varphi$. On a donc:

Proposition 8.2. *L'image PK_μ de l'application $P: K_\mu \to K_\nu$ est le sous-espace vectoriel fermé de K_ν, de codimension finie, formé des $\psi \in K_\nu$ tels que $\langle h, \psi \rangle = 0$, pour tout $h \in Z_\nu$, où Z_ν est la partie*

$$Z_\nu = Z_\nu^0 \cup Z_\nu^1 \cup Z_\nu^2 \cup Z_\nu^3 \cup Z_\nu'^3 \tag{8.16}$$

de K_ν', avec (8.2), (8.4), (8.6), (8.10) *et* (8.14).

Enfin, on vérifie que si $\psi = P\varphi \to 0$ dans K_ν, alors $\varphi \to 0$ dans K_μ (cf. TENGSTRAND [13], lemme 8.1 et SCHWARTZ [12], t. 1, p. 123). Par suite:

Proposition 8.3. *L'application réciproque $P^{-1}: PK_\mu \to K_\mu$ est continue.*

9. Applications P' et P_0', opérateur D

A tout opérateur D de la forme (7.6), associons le nombre

$$d = 2(2h + m_0 + k) , \tag{9.1}$$

m_0 étant le nombre de zéros réels du polynôme $Q(s)$ donné par (7.4) (dans [7], la valeur de d indiquée est inexacte).

Pour tout $\nu \in C$, posons

$$n_\nu = \operatorname{card} N_\nu, \; n_\nu' = \operatorname{card} N_\nu' , \tag{9.2}$$

avec (2.18) et (2.19).

Il est clair que les éléments de la partie Z_ν de K_ν' définie par (8.16) sont linéairement indépendants, et que leur nombre c_ν est fini:

$$c_\nu = \operatorname{card} Z_\nu = d + n_\nu - n_\mu + n_\nu' - n_\mu' . \tag{9.3}$$

D'après la proposition 8.2, PK_μ est orthogonal à Z_ν, donc est un sous-espace fermé de codimension c_ν dans K_ν ([1], § 4, n° 6). Par suite ([2], chap. I, § 2, prop. 3), K_ν est somme directe topologique de PK_μ et d'un sous-espace de dimension c_ν. Compte tenu de la proposition 8.3, il en résulte que la trans-

posée $P' : K'_\nu \to K'_\mu$ est surjective. D'autre part, les éléments f de K'_ν tels que $P'f = 0$ sont ceux qui s'annulent sur PK_μ; ce sont donc les éléments du sous-espace vectoriel $[Z_\nu]$ engendré par Z_ν([1], loc. cit.). On a ainsi montré:

Proposition 9.1. *L'application transposée $P' : K'_\nu \to K'_\mu$ est surjective. Son noyau est le sous-espace vectoriel $[Z_\nu]$ de K'_ν, de dimension c_ν (formule* (9.3)), *dont Z_ν (formule* (8.16)) *est une base.*

Cherchons à déterminer le noyau et l'image de l'application $P'_0 : H_\nu \to H_\mu$ induite par P'. Rappelons d'abord que, pour tout $\nu \in C$, H_ν est le sous-espace vectoriel fermé de K'_ν, de codimension $n_\nu + n'_\nu$, orthogonal à la partie libre X_ν de K_ν (prop. 5.1). Nous désignerons par $[X_\nu]$ le sous-espace vectoriel engendré par X_ν. Si $j \in N_{\nu+2}$, on a $\sigma_j \in X_{\nu+2}$ et (prop. 7.1)

$$\sigma\sigma_j = \sigma_{j+1} \in X_\nu; \tag{9.4}$$

si $j \in N'_{\nu+2}$, on a $\tau_j \in X_{\nu+2}$ et (prop. 7.1)

$$\sigma\tau_j = \tau_{j+1} \in X_\nu; \tag{9.5}$$

si $j \in N_{\nu+a}$, on a $\sigma_j \in X_{\nu+a}$ et (prop. 7.2)

$$\eta\sigma_j = \sigma_j \in X_\nu; \tag{9.6}$$

si $j \in N'_{\nu+a}$, on a $\tau_j \in X_{\nu+a}$ et (prop. 7.2)

$$\eta\tau_j = \tau_j \in X_\nu. \tag{9.7}$$

D'après (7.16), les relations (9.4) à (9.7) montrent que

$$PX_\mu \subset [X_\nu]. \tag{9.8}$$

Le noyau de $P' : K'_\nu \to K'_\mu$ étant $[Z_\nu]$, celui de P'_0 est $P'^{-1}_0(0) = [Z_\nu] \cap H_\nu$. Mais $P'^{-1}_0(0)$ est aussi le noyau de l'application linéaire α de $[Z_\nu]$ dans $C^{n_\nu+n'_\nu}$, qui à $h \in [Z_\nu]$ fait correspondre le vecteur $\alpha h = (\langle h, \varphi\rangle)_{\varphi \in X_\nu}$ (prop. 5.1). Soit ϱ_ν le rang de α, c'est-à-dire le rang de la matrice

$$M = (\langle h, \varphi\rangle)_{h \in Z_\nu,\ \varphi \in X_\nu}. \tag{9.9}$$

On a $\dim [Z_\nu] = c_\nu = \varrho_\nu + d_\nu$, en posant $d_\nu = \dim P'^{-1}_0(0)$; donc $d_\nu = c_\nu - \varrho_\nu$, et:

Proposition 9.2. *Le noyau de $P'_0 : H_\nu \to H_\mu$ est le sous-espace vectoriel $H_\nu \cap [Z_\nu]$ de H_ν, de dimension $d_\nu = c_\nu - \varrho_\nu$, avec* (9.3), *$\varrho_\nu$ étant le rang de la matrice* (9.9).

Soit $W = [X_\nu] \cap PK_\mu$. D'après (9.8), on a $P[X_\mu] \subset [X_\nu]$, donc $P[X_\mu] \subset W$. Soit V_ν un supplémentaire de $P[X_\mu]$ dans W: $W = P[X_\mu] \oplus V_\nu$. Soient enfin Y_0 un supplémentaire de W dans $[X_\nu]$ et Y_1 un supplémentaire

de $PK_\mu \oplus Y_0$ dans $K_\nu : [X_\nu] = P[X_\mu] \oplus V_\nu \oplus Y_0$, $K_\nu = PK_\mu \oplus Y_0 \oplus Y_1$ (cf. [2], chap. I, § 2, th. 2 et prop. 3).

Soit $g \in H_\mu$. Il existe $f \in K'_\nu$ tel que $g = P'f$ (prop. 9.1). Si $\psi \in PK_\mu$, on a $\langle f, \psi \rangle = \langle f, PP^{-1}\psi \rangle = \langle g, P^{-1}\psi \rangle$; sur $Y_0 \oplus Y_1$, f est arbitraire. Pour que $f \in H_\nu$, il faut et il suffit que f s'annule sur $[X_\nu]$ (prop. 5.1). On peut toujours supposer que f est nulle sur Y_0. Sur $P[X_\mu]$, f est nulle, car $\langle f, \psi \rangle = \langle g, P^{-1}\psi \rangle = 0$, puisque $P^{-1}\psi \in [X_\mu]$ si $\psi \in P[X_\mu]$. Par conséquent, pour que $f \in H_\nu$, il faut et il suffit que $\langle f, \psi \rangle = \langle g, P^{-1}\psi \rangle = 0$, pour tout $\psi \in V_\nu$. Ainsi, $P'_0 H_\nu$ est le sous-espace vectoriel de H_μ, de codimension finie égale à la dimension de V_ν (cf. [1], § 4, th. 1), orthogonal à $P^{-1}V_\nu$.

PK_μ étant orthogonal à $[Z_\nu]$ (prop. 8.2), W est le noyau de l'application linéaire β de $[X_\nu]$ dans C^{c_ν}, avec (9.3), qui à $\varphi \in [X_\nu]$ fait correspondre le vecteur $\beta\varphi = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z_\nu}$. On a donc $\dim W = \dim [X_\nu] - \varrho_\nu$, ϱ_ν étant le rang de β, c'est-à-dire le rang de la matrice (9.9). D'autre part, $\dim W = \dim V_\nu + \dim [X_\mu]$. Comme $\dim [X_\nu] = n_\nu + n'_\nu$, on obtient $\dim V_\nu = n_\nu + n'_\nu - n_\mu - n'_\mu - \varrho_\nu$. On a donc:

Proposition 9.3. *L'image $P'_0 H_\nu$ de l'application $P'_0 : H_\nu \to H_\mu$ est un sous-espace vectoriel fermé de H_μ, de codimension finie e_ν:*

$$e_\nu = \operatorname{codim} P'_0 H_\nu = n_\nu + n'_\nu - n_\mu - n'_\mu - \varrho_\nu , \tag{9.10}$$

avec (9.2), ϱ_ν *étant le rang de la matrice* (9.9).

D'après les formules (9.4) à (9.7) et (7.16), on a, si $j \in N_\mu$,

$$\sigma_j \in X_\mu, \; P\sigma_j = \sum_{\lambda=0}^{m} a_\lambda \sigma_{j+h+\lambda b} \in [X_\nu] ,$$

et si $j \in N'_\mu$,

$$\tau_j \in X_\mu, \; P\tau_j = \sum_{\lambda=0}^{m} a_\lambda \tau_{j+h+\lambda b} \in [X_\nu] ,$$

avec $a_0 \neq 0$. Par suite, si $N_\mu \neq \varnothing$, une partie libre de K_ν équivalente à $\{\sigma_j ; j \in N_\nu\}$ est

$$\{P\sigma_j ; j \in N_\mu\} \cup \{\sigma_j ; j \in N_\nu, j - h \notin N_\mu\} .$$

De même, si $N'_\mu \neq \varnothing$, une partie libre de K_ν, équivalente à $\{\tau_j ; j \in N'_\nu\}$ est

$$\{P\tau_j ; j \in N'_\mu\} \cup \{\tau_j ; j \in N'_\nu, j - h \notin N'_\mu\} .$$

Par conséquent, en vertu des formules (5.8), (5.13) et (8.14), le rang ϱ_ν de la matrice (9.9) est égal à celui de la matrice

$$M' = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z'_\nu, \, \varphi \in X'_\nu} , \tag{9.11}$$

avec

$$Z'_\nu = Z_\nu - Z'^3_\nu , \tag{9.12}$$

$$X'_\nu = \{\sigma_j ; j \in N_\nu, j - h \notin N_\mu\} \cup \{\tau_j ; j \in N'_\nu, j - h \notin N'_\mu\} . \tag{9.13}$$

Comme M' est de rang ϱ_ν, il existe card $X'_\nu - \varrho_\nu = e_\nu$ éléments linéairement indépendants η_i, $1 \leqslant i \leqslant e_\nu$, du sous-espace vectoriel $[X'_\nu]$ engendré par X'_ν, tels que $\langle h, \eta_i \rangle = 0$, pour tout $h \in Z_\nu$. Les éléments η_i engendrent un supplémentaire V_ν de $P[X_\mu]$ dans $PK_\mu \cap [X_\nu]$, donc:

Proposition 9.4. *L'image de $P'_0 : H_\nu \to H_\mu$ est le sous-espace vectoriel de H_μ formé des éléments $h \in H_\mu$ tels que*

$$\langle h, P^{-1}\eta_i \rangle = 0, \; i = 1, 2, \ldots, e_\nu, \tag{9.14}$$

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e_\nu}$ étant e_ν éléments linéairement indépendants de $[X'_\nu]$ (formule (9.13)), contenus dans PK_μ (donc tels que $\langle h, \eta_i \rangle = 0$ pour tout $h \in Z_\nu$).

Des propositions 6.1, 6.2, 7.3, 9.1, 9.2 et 9.3 on déduit les théorèmes suivants:

Théorème 9.1. *Pour tout $\nu' \in C$, $\mu' = \nu' - 2h - ak - 2bm$, $\nu = -(\nu' + n + a)$, $\mu = -(\mu' + n + a)$, l'opérateur D défini par (7.6) induit une application linéaire $D : K_{\nu'} \to K_{\mu'}$ surjective, dont le noyau est de dimension finie c_ν, avec (9.3), (9.1) et (9.2).*

Théorème 9.2. *Avec les notations du théorème 9.1, pour tout $\nu' \in C$, l'application linéaire $D : H_{\nu'} \to H_{\mu'}$ a une image de codimension finie e_ν et un noyau de dimension finie d_ν. On a*

$$d_\nu = d + e_\nu, \tag{9.15}$$

où d, donné par (9.1), ne dépend que de D; e_ν est donné par (9.10), avec (9.2), ϱ_ν étant le rang de la matrice (9.11).

Remarque. La valeur minimale de la dimension d_ν du noyau de $D : H_{\nu'} \to H_{\mu'}$ est donc d et est atteinte lorsque $e_\nu = 0$, c'est-à-dire lorsque l'application $D : H_{\nu'} \to H_{\mu'}$ est surjective. Cela a lieu en particulier si N_ν et N'_ν sont vides, auquel cas $H_{\nu'} = K_{\nu'}$ et $H_{\mu'} = K_{\mu'}$.

La mesure de Dirac δ appartient à $H_{\mu'} \subset K_{\mu'}$ pour $\mu' = -(n + a)$. En outre, $F\delta = 1 \in H_0$. On a $N_0 = N'_0 = \varnothing$, donc $H_0 = K'_0$. D'après (3.1) et (3.2), si $\varphi \in K_0$, $\varphi^+(s)$ et $\varphi^-(s)$ sont intégrables sur R, et l'égalité

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int \varphi^+(s)ds + \int \varphi^-(s)ds$$

définit un élément noté 1 de K'_0. En vertu de (2.6), on a $\langle M'_0 1, \Phi \rangle = \langle 1, M_0\Phi \rangle = \langle 1, \Phi \rangle$ pour tout $\Phi \in D(R^{n+1})$, c'est-à-dire $M'_0 1 = 1$. Le théorème 9.1 et les propositions 6.1, 7.3 et 9.2 à 9.4 entraînent donc le résultat suivant:

Théorème 9.3. *Soit D l'opérateur défini par (7.6), et posons $\nu' = -(n + a) + 2h + ak + 2bm$, $\mu' = -(n + a)$, $\nu = -(2h + ak + 2bm)$, $\mu = 0$.*

L'ensemble des solutions élémentaires de D, contenues dans $K_{\nu'}$, a au moins un élément, et forme une variété linéaire affine de dimension c_ν, avec (9.3).

Pour que D admette une solution élémentaire dans H, donc dans $H_{\nu'}$, il faut et il suffit que

$$\langle 1\,,\, P^{-1}\eta_i\rangle = \int \frac{\eta_i^+(s)}{P_+(s)}\,ds + \int \frac{\eta_i^-(s)}{P_-(s)}\,ds = 0\,, \tag{9.16}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, e_\nu$, avec (9.10), *les η_i étant les éléments de K_ν considérés dans la proposition* 9.4, *et P_+, P_- les polynômes* (8.1). *Si la condition* (9.16) *est vérifiée, l'ensemble des solutions élémentaires de D contenues dans $H_{\nu'}$ forme une variété linéaire affine de dimension d_ν, avec* (9.15).

10. Exemple

Comme exemple, considérons l'opérateur

$$D = (-\,\square)^{mb} - z\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{mc}, \tag{10.1}$$

obtenu lorsque $h = k = 0$, $a_0 = -z \neq 0$, $a_m = 1$, $Q(s) = s^m - z$, $m \geqslant 1$ (formules (7.6) et (7.4)).

Examinons dans quels cas D admet une solution élémentaire dans H, c'est-à-dire dans $H_{\nu'}$, avec $\nu' = -(n+a) + 2bm$. Posons $\mu' = -(n+a)$, $\nu = -2bm$, $\mu = 0$.

D'après (2.18) et (2.19), on a $N_0 = N_0' = \varnothing$ et, avec $\lambda \in N$,

$$N_\nu = \{\lambda b - 1\,;\ \lambda \geqslant 1,\ \lambda \leqslant m-1\}\,; \tag{10.2}$$

si n est pair,

$$N_\nu' = \{\lambda b - 1\,;\ \lambda \geqslant \frac{n}{2b}\,,\ \lambda \leqslant m-1\}\,; \tag{10.3}$$

si n est impair,

$$N_\nu' = \begin{cases} \varnothing\,, & \text{si } c \text{ est impair,} \\ \{\lambda b - \dfrac{b+3}{2}\,;\ \lambda \geqslant \dfrac{n+b}{2b}\,,\ \lambda \leqslant m\}\,, & \text{si } c \text{ est pair.} \end{cases} \tag{10.4}$$

D'après (2.16) et (2.17), on a

$$k_\nu(\lambda b - 1) = (m-\lambda)c - 1\,; \tag{10.5}$$

$$k_\nu'(\lambda b - 1) = (m-\lambda)c - 1\,, \quad \text{si } n \text{ est pair,} \tag{10.6}$$

$$k_\nu'\left(\lambda b - \frac{b+3}{2}\right) = \left(m - \lambda + \frac{1}{2}\right)c - 1\,, \quad \text{si } n \text{ est impair.} \tag{10.7}$$

En vertu de (8.2) et (8.6), on a $Z_\nu^0 = Z_\nu^2 = \varnothing$.

Le nombre de zéros réels de $Q(s)$ est

$$m_0 = \begin{cases} 2, \text{ si } m \text{ est pair, } z > 0, \\ 1, \text{ si } m \text{ est impair, } z \in R, \\ 0, \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

D'après (8.4), on a $Z_\nu^1 = \varnothing$ si $m_0 = 0$. Si $m_0 = 1$, soit z_1 le zéro réel de Q; on a

$$Z_\nu^1 = \begin{cases} \{\delta_0^+(s - r_1), \delta_0^-(s + r_1)\}, & \text{si } b \text{ et } c \text{ sont impairs,} \\ \{\delta_0^+(s - r_1), \delta_0^-(s - r_1)\}, & \text{si } b \text{ impair et } c \text{ pair,} \\ \{\delta_0^{\operatorname{sgn} z}(s - r_1), \delta_0^{\operatorname{sgn} z}(s + r_1)\}, & \text{si } b \text{ pair et } c \text{ impair,} \end{cases}$$

avec $r_1 \in R$, $r_1^b = z_1$ si b est impair, et $r_1 > 0$, $r_1^b = |z_1|$ si b est pair. Si $m_0 = 2$, soit $z_1 > 0$ le zéro positif de Q et soit $r_1 > 0$ tel que $r_1^b = z_1$; on a

$$Z_\nu^1 = \{\delta_0^+(s - r_1), \delta_0^+(s + r_1), \delta_0^-(s - r_1), \delta_0^-(s + r_1)\}.$$

Comme $N_\mu = \varnothing$, la formule (8.10) donne

$$Z_\nu^3 = \{\gamma_j ; j \in N_\nu\}.$$

Nous avons à déterminer le rang ϱ_ν de la matrice

$$M' = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z'_\nu, \varphi \in X_\nu},$$

avec $Z'_\nu = Z_\nu^1 \cup Z_\nu^3$, X_ν étant donné par (5.4). Le nombre $e_\nu = n_\nu + n'_\nu - \varrho_\nu$ en résulte (formules (9.2) et (9.10)). Nous devons ensuite former des combinaisons linéaires $\eta_1, \ldots, \eta_{e_\nu}$ des éléments de X_ν, de manière que les η_i soient linéairement indépendants et que $\langle h, \eta_i \rangle = 0$, pour tout $h \in Z'_\nu$ (th. 9.3 et prop. 9.4). Les η_i se déduisent des relations linéaires entre les vecteurs colonnes de la matrice M'. Nous poserons

$$Y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e_\nu}\}.$$

Dans le 1er cas, d'après (5.7) et (5.12), on a $\varrho_\nu = \varrho + n'_\nu$, avec (9.2), ϱ étant le rang de la matrice

$$M'' = (\langle h, \sigma_j \rangle)_{h \in Z_\nu^1, j \in N_\nu}.$$

Dans les 2e et 3e cas, (5.7) et (5.12) montrent que ϱ_ν est le rang de

$$M'' = (\langle h, \sigma_j \rangle \langle h, \tau_{j'} \rangle)_{h \in Z_\nu^1, j \in N_\nu, j' \in N'_\nu}.$$

Pour tout $t \in R$, posons $t_+ = t$ si $t \geqslant 0$ et $t_+ = 0$ si $t < 0$. Si $n_\nu = \operatorname{card} N_\nu > 0$, soit $s_\nu = \max N_\nu$ et si $n'_\nu = \operatorname{card} N'_\nu > 0$, soit $s'_\nu = \max N'_\nu$. Posons

$$N_\nu^1 = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } n_\nu \leqslant 1, \\ N_\nu - \{s_\nu\}, \text{ si } n_\nu > 1, \end{cases}$$

$$N_\nu'^1 = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } n'_\nu \leqslant 1, \\ N'_\nu - \{s'_\nu\}, \text{ si } n'_\nu > 1, \end{cases} \tag{10.8}$$

$$N_\nu^2 = \begin{cases} \varnothing\ , & \text{si } n_\nu \leqslant 2\ , \\ N_\nu - \{s_\nu\ , s_\nu - b\}\ , & \text{si } n_\nu > 2\ , \end{cases}$$

$$N_\nu'^2 = \begin{cases} \varnothing\ , & \text{si } n_\nu' \leqslant 2\ , \\ N_\nu' - \{s_\nu', s_\nu' - b\}\ , & \text{si } n_\nu' > 2\ . \end{cases} \tag{10.9}$$

Avec ces notations, l'étude de la matrice M'' conduit aux résultats suivants:

Dans le 1er cas,

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu, m_0) + n_\nu', \ e_\nu = (n_\nu - m_0)_+ .$$

On peut prendre

$$Y = \begin{cases} \{\sigma_j\ ;\ j \in N_\nu\}\ , & \text{si } m_0 = 0\ , \\ \{\sigma_{j+b} - z_1\sigma_j\ ;\ j \in N_\nu^1\}\ , & \text{si } m_0 = 1\ , \\ \{\sigma_{j+2b} - z_1^2\sigma_j\ ;\ j \in N_\nu^2\}\ , & \text{si } m_0 = 2\ . \end{cases}$$

Dans les 2e et 3e cas, $\begin{cases} \text{si } m_0 = 0, \\ \text{ou si } m_0 \geqslant 1 \text{ et } c \text{ impair,} \end{cases}$

dans le 2e cas, si c est pair, $\frac{c}{2}$ impair, $m_0 = 1$ et $z > 0$,

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu, m_0) + \min(n_\nu', m_0)\ ,$$

$$e_\nu = (n_\nu - m_0)_+ + (n_\nu' - m_0)_+\ ,$$

$$Y = \begin{cases} \{\sigma_j\ ;\ j \in N_\nu\} \cup \{\tau_j\ ;\ j \in N_\nu'\}\ , & \text{si } m_0 = 0\ , \\ \{\sigma_{j+b} - z_1\sigma_j\ ;\ j \in N_\nu^1\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1\tau_j\ ;\ j \in N_\nu'^1\}\ , & \text{si } m_0 = 1\ , \\ \{\sigma_{j+2b} - z_1^2\sigma_j\ ;\ j \in N_\nu^2\} \cup \{\tau_{j+2b} - z_1^2\tau_j\ ;\ j \in N_\nu'^2\}\ , & \text{si } m_0 = 2\ . \end{cases}$$

Si c est pair, $m_0 = 1$, $z > 0$, $\begin{cases} \text{dans le 2e cas si } \frac{c}{2} \text{ est pair,} \\ \text{ou dans le 3e cas,} \end{cases}$

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu + n_\nu', 1)\ ,$$

$$e_\nu = (n_\nu + n_\nu' - 1)_+ .$$

Y peut être pris égal à

$$\{\sigma_{j+b} - z_1\sigma_j\ ;\ j \in N_\nu^1\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1\tau_j\ ;\ j \in N_\nu'^1\}\ ,$$

augmenté de $\gamma(r_1) r_1^{s_\nu' - s_\nu} \sigma_{s_\nu} - \tau_{s_\nu'}$, si n_ν et n_ν' sont tous deux > 0.

Si c est pair, $m_0 = 1$, $z < 0$, dans les 2e et 3e cas,

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu, 1),\ e_\nu = (n_\nu - 1)_+ + n_\nu'\ ,$$

$$Y = \{\sigma_{j+b} - z_1\sigma_j\ ;\ j \in N_\nu^1\} \cup \{\tau_j\ ;\ j \in N_\nu'\}\ .$$

Si $m_0 = 2$, et si c est pair, $\begin{cases} \text{dans le } 2^{\text{e}} \text{ cas si } \dfrac{c}{2} \text{ est pair,} \\ \text{ou dans le } 3^{\text{e}} \text{ cas,} \end{cases}$

$$\varrho_\nu = \begin{cases} 2, \text{ si } n_\nu \geqslant 2, \\ n_\nu + \min(n'_\nu, 1), \text{ si } n_\nu < 2, \end{cases}$$

$$e_\nu = \begin{cases} n_\nu + n'_\nu - 2, \text{ si } n_\nu \geqslant 2, \\ (n'_\nu - 1)_+ \text{ si } n_\nu < 2. \end{cases}$$

On peut prendre Y égal à

$$\{\sigma_{j+2b} - z_1^2 \sigma_j ; j \in N_\nu^2\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1 \tau_j ; j \in N_\nu'^1\},$$

augmenté de $(r_1^b \sigma_{s_\nu - b} + \sigma_{s_\nu}) \gamma(r_1) r_1^{s'_\nu - s_\nu} - 2\tau_{s'_\nu}$, si $n_\nu \geqslant 2$ et $n'_\nu \geqslant 1$.

Dans le 2e cas, si $m_0 = 2$, c pair, $\dfrac{c}{2}$ impair,

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu, 2) + \min(n'_\nu, 1),$$

$$e_\nu = (n_\nu - 2)_+ + (n'_\nu - 1)_+,$$

$$Y = \{\sigma_{j+2b} - z_1^2 \sigma_j ; j \in N_\nu^2\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1 \tau_j ; j \in N_\nu'^1\}.$$

Lorsque $e_\nu = 0$, l'application $D : H_{\nu'} \to H_{\mu'}$ est surjective (th. 9.2), donc D admet une solution élémentaire dans $H_{\nu'}$. Si $e_\nu \geqslant 1$, pour que D admette une solution élémentaire dans $H_{\nu'}$, il faut et il suffit que les conditions (9.16) soient vérifiées, donc que $\langle 1, P^{-1}\eta \rangle = 0$, pour tout $\eta \in Y$. Compte tenu des formules (10.2) à (10.7), on en déduit:

Proposition 10.1. *Pour que l'opérateur D défini par* (10.1) *admette une solution élémentaire dans $H_{\nu'}$, il faut et il suffit qu'une des conditions suivantes soit satisfaite*:

dans le 1er *cas*:

1) *b et c impairs, $m \leqslant m_0 + 1$,*
2) *b impair et c pair,*
3) *b pair et c impair;*

dans le 2e *cas*:

1) *b et c impairs, $m \leqslant m_0 + 1$,*
2) *b impair, c et $\dfrac{c}{2}$ pairs,*
3) *b impair, c pair, $\dfrac{c}{2}$ impair, $m < \dfrac{n}{2b} + \dfrac{1}{2}$ et $\begin{cases} m_0 = 0 \\ \text{ou } m_0 = 1, z < 0, \end{cases}$*
4) *b impair, c pair, $\dfrac{c}{2}$ impair, $m < \dfrac{n}{2b} + \dfrac{3}{2}$ et $\begin{cases} m_0 = 1, z > 0, \\ \text{ou } m_0 = 2, \end{cases}$*
5) *b pair et c impair;*

dans le 3e *cas*:

1) b *et* c *impairs*, $m \leqslant m_0 + 1$,
2) b *impair et* c *pair*,
3) b *pair et* c *impair*, $m < \frac{n}{2b} + 1 + m_0$.

Notons que la condition $m \leqslant m_0 + 1$ n'est réalisée que pour $m = 1$ et pour $m = 2, z > 0$.

11. Application M_ν (cas euclidien)

Dans le cas euclidien, à partir de l'application $(x, t) \to t \mid x \mid^{-a}$ de l'ouvert $\mid x \mid \neq 0$ de R^{n+1} sur R, on pourrait obtenir une représentation paramétrique de H_ν à l'aide du dual d'un espace de fonctions C^∞ d'une variable réelle. Mais nous suivrons la même voie que dans le cas où u est non définie.

Avec les notations du § 1, on a $u = \mid x \mid^2$. L'application $\mu : (x, t) \to w = u \mid t \mid^{-2/a}$, de Ω sur la demi-droite ouverte $R_+ =]0, +\infty[$, est régulière. Comme au § 1, on en déduit, en identifiant le produit $D'(R_+) \times D'(R_+) = D'(R_+)^2$ au dual du produit $D(R_+) \times D(R_+) = D(R_+)^2$:

Proposition 11.1. *A tout élément* $f \in H_\nu(\Omega)$, *on peut associer un couple* $h = (h_+, h_-) \in D'(R_+)^2$, *déterminé de façon unique, tel que* $\langle f, \varphi \rangle = \langle h, M_\nu \varphi \rangle$ *pour tout* $\varphi \in D(\Omega)$, M_ν *étant une application linéaire continue de* $D(\Omega)$ *sur le produit* $D(R_+)^2 : M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi)$.

Pour $\varphi \in D(\Omega)$, on a

$$M_\nu^\pm \varphi(s) = s^{\frac{n-2}{2}} N_\nu^\pm \varphi(s), \tag{11.1}$$

avec

$$N_\nu^\pm \varphi(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \varphi_0(s t^{\frac{2}{a}}, \pm t)\, t^{\frac{\nu+n}{a}}\, dt, \tag{11.2}$$

en désignant par $\varphi_0(v, t)$ la moyenne

$$\varphi_0(v, t) = \int_{\sigma \in S^{n-1}} \varphi(\sqrt{v}\,\sigma, t) d\sigma, \tag{11.3}$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire de la sphère $S^{n-1} = \{x \in R^n ; \mid x \mid = 1\}$.

Si $\varphi \in S(R^{n+1})$, l'intégrale (11.3) conserve un sens et définit une fonction $\varphi_0(v, t)$ de classe C^∞ pour $v \geqslant 0$ et $t \in R$, à décroissance rapide lorsque $v + \mid t \mid \to \infty$. On vérifie que

$$D_v^j \varphi_0(0, t) = c_j \Delta^j \varphi(0, t), \; j \in N, \tag{11.4}$$

avec

$$c_j = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{4^j \Gamma\left(\frac{n}{2} + j\right)}, \tag{11.5}$$

en posant $\square = \Delta$ dans le cas euclidien.

Supposons que $\varphi \in S(R^{n+1})$. L'intégrale (11.2) a donc un sens pour $R\nu > -(a+n)$ et définit une fonction C^∞ de $s \geqslant 0$. La dérivée

$$D^j N_\nu^\pm \varphi(0) = \frac{1}{2}\int_0^\infty D_v^j \varphi_0(0, \pm t)\, t^{\frac{\nu+n+2j}{a}}\, dt$$

est prolongeable en une fonction méromorphe de $\nu \in C$. Nous la définirons pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel. On a donc, d'après (11.4),

$$D^j N_\nu^\pm \varphi(0) = \frac{c_j}{2}\langle \Delta^j \delta(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+n+2j}{a}}, \varphi\rangle, \quad j \in N.$$

Pour $R\nu > -(a+n)$ et pour tout $m \in N$, on peut écrire

$$N_\nu^\pm \varphi(s) = \sum_{j=0}^{m-1} D^j N_\nu^\pm \varphi(0)\frac{s^j}{j!} + \int_0^s \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^m N_\nu^\pm \varphi(t)\, dt,$$

où

$$D^m N_\nu^\pm \varphi(s) = \frac{1}{2}\int_0^\infty D_v^m \varphi_0(s t^{\frac{2}{a}}, \pm t)\, t^{\frac{\nu+n+2m}{a}}\, dt,$$

est fonction holomorphe de ν dans le demi-plan $R\nu > -(a+n+2m)$. Il s'ensuit que $N_\nu^\pm \varphi(s)$ est fonction méromorphe de $\nu \in C$ et que ses pôles sont ceux de $D^j N_\nu^\pm \varphi(0)\frac{s^j}{j!}$, $j \in N$, à savoir:

$$\nu = -(n + 2j + ak + a),\ k \in N, \text{ pôle simple de résidu}$$

$$\frac{a c_j}{2}\frac{(\mp 1)^k}{k!}\langle \Delta^j \delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi\rangle \frac{s^j}{j!}, \tag{11.6}$$

avec (11.5). Définissons $N_\nu^\pm \varphi(s)$ par prolongement naturel pour tout $\nu \in C$. Alors, pour tout $\nu \in C$, $N_\nu^\pm \varphi(s)$ est de classe C^∞ pour $s \geqslant 0$. De même, pour tout $\nu \in C$, définissons $M_\nu^\pm \varphi(s)$ par prolongement naturel; la relation (11.1) est donc valable pour tout $\nu \in C$.

Lorsque $s > 0$, on a, pour $R\nu > -(a+n)$,

$$N_\nu^\pm \varphi(s) = s^{-\frac{\nu+n+a}{2}} T_\nu \varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}),$$

où

$$T_\nu \varphi(s) = \frac{a}{4}\int_0^\infty \varphi_0(v, s v^{\frac{a}{2}})\, v^{\frac{\nu+a+n-2}{2}}\, dv$$

est prolongeable en une fonction méromorphe de $\nu \in C$. Définissons $T_\nu \varphi(s)$ pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel; avec cette définition, $T_\nu \varphi(s)$ est une fonction C^∞ de $s \in R$. Par prolongement naturel, compte tenu des

valeurs (11.6), on obtient

$$N_\nu^\pm \varphi(s) = s^{-\frac{\nu+n+a}{2}} T_\nu \varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}) -$$

$$-\frac{a}{4}\log s \; \Sigma \frac{(\mp 1)^k}{k!} c_j \langle \Delta^j \delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi\rangle \frac{s^j}{j!},$$

la somme étant étendue à tous les entiers $k, j \geqslant 0$, tels que $\nu + n + 2j + + a(k+1) = 0$.

Posons, pour $s \geqslant 0$,

$$\gamma(s) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \sqrt{s}, & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \tag{11.7}$$

Désignons toujours par $\bar{n}$ la partie entière de $\frac{n-2}{2}$. Pour tout $j \in N$, posons

$$k'_\nu(j) = -\frac{\nu + a + 2j + n - 2\bar{n}}{a}, \tag{11.8}$$

et soit N'_ν la partie de N définie par

$$N'_\nu = \{j \in N \,;\, j \geqslant \bar{n},\, k'_\nu(j) \in N\}. \tag{11.9}$$

D'après (11.1), on a alors, pour tout $\nu \in C$ et pour $s > 0$,

$$M_\nu^\pm \varphi(s) = s^{-\frac{\nu+a+2}{2}} T_\nu \varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}) + \gamma(s) \log s \sum_{j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} c'_j s^j, \tag{11.10}$$

avec

$$c'_j = (-1)^{k+1} \frac{a}{2} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{j-\bar{n}} k!\,(j-\bar{n})!\,\Gamma\left(\frac{n}{2} + j - \bar{n}\right)} \langle \Delta^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi\rangle,$$

$$k = k'_\nu(j),\, j \in N'_\nu. \tag{11.11}$$

Désignons par K_ν l'espace vectoriel sur C formé des couples $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-)$ de fonctions d'une variable réelle s, définies pour $s > 0$, ayant les propriétés suivantes:

1° $\varphi^+(s)$ et $\varphi^-(s)$ sont C^∞ pour $s > 0$.

2° Il existe des fonctions $\mu^+\varphi$ et $\mu^-\varphi$ de classe C^∞ pour $s \geqslant 0$, telles que

$$\varphi^\pm(s) = \gamma(s) s^{\bar{n}} \mu^\pm \varphi(s), \tag{11.12}$$

avec (11.7).

3° Il existe une fonction $\chi\varphi$ de classe C^∞ sur R, et des constantes $\langle \gamma'_j, \varphi\rangle$, $j \in N'_\nu$ telles que

$$\varphi^\pm(s) = s^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \chi\varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}) + \\ + \gamma(s) \log s \sum_{j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \langle \gamma'_j, \varphi\rangle s^j, \tag{11.13}$$

avec (11.7), (11.9) et (11.8).

Munissons K_ν des semi-normes

$$p_m^{\pm}(\varphi) = \sup_{\substack{0 \leqslant s \leqslant 1 \\ k \leqslant m}} |D^k \mu^{\pm} \varphi(s)| ,$$

$$q_m(\varphi) = \sup_{\substack{|s| \leqslant 1 \\ k \leqslant m}} |D^k \chi \varphi(s)| ,$$

$$q(\varphi) = \sum_{j \in N'_\nu} |\langle \gamma'_j, \varphi \rangle| .$$

On vérifie que K_ν est alors un espace de FRÉCHET. On a $D(R_+)^2 \subset K_\nu$, l'injection étant continue. Si $\varphi \in S(R^{n+1})$, on a $M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi) \in K_\nu$ et on démontre facilement le résultat suivant:

Proposition 11.2. *L'application* $M_\nu : S(R^{n+1}) \to K_\nu$ *est linéaire continue et prolonge l'application* $M_\nu : D(\Omega) \to D(R_+)^2$ *de la proposition* 11.1.

Nous noterons également M_ν la restriction à $D(R^{n+1})$ de l'application $M_\nu : S(R^{n+1}) \to K_\nu$.

Lemme 11.1. *Pour tout* $\nu \in C$, *il existe une application linéaire continue* $L_\nu : K_\nu \to D(R^{n+1})$, *telle que l'application composée* $M_\nu L_\nu$ *soit égale à l'identité. De plus, l'image par* L_ν *de* $D(R_+)^2$ *est contenue dans* $D(\Omega)$.

Soit en effet, pour tout $j \in N'_\nu$, une fonction $\vartheta_j \in D(R^n)$ telle que

$$\langle \Delta^{k-\bar{n}} \delta(x), \vartheta_j \rangle = \delta_{kj}, \; k \in N'_\nu ,$$

et soit $\varrho(t) \in D(R)$ une fonction dont aucune dérivée n'est nulle à l'origine. D'après (11.10) et (11.11), il existe des constantes λ_j, $j \in N'_\nu$, telles que, pour tout $\varphi \in K_\nu$, la fonction

$$\Phi_3(x, t) = \sum_{j \in N'_\nu} \lambda_j \langle \gamma'_j, \varphi \rangle \vartheta_j(x) \varrho(t) \in D(R^{n+1})$$

vérifie $\langle \gamma'_j, M_\nu \Phi_3 \rangle = \langle \gamma'_j, \varphi \rangle$, $j \in N'_\nu$. Il est clair que l'application $\varphi \to \Phi_3$ de K_ν dans $D(R^{n+1})$ est continue.

Soient $\alpha_1(s)$ et $\alpha_2(s)$ des fonctions C^∞ telles que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1(s)$ nulle pour $s > 2$ et $\alpha_2(s)$ nulle pour $s < 1$. Pour tout $\varphi \in K_\nu$, les éléments $\varphi_1 = \alpha_1(\varphi - M_\nu \Phi_3)$ et $\varphi_2 = \alpha_2(\varphi - M_\nu \Phi_3)$ appartiennent à K_ν. Soit $\alpha(t) \in D(R_+)$ telle que

$$\int_0^\infty \alpha(t)\, t^{\frac{\nu+n}{a}} dt = 1 ,$$

et posons, avec (11.12),

$$\Phi_1(x, t) = \frac{2}{s_{n-1}} [\alpha(t) \mu^+ \varphi_1(u\, |t|^{-\frac{2}{a}}) + \alpha(-t) \mu^- \varphi_1(u\, |t|^{-\frac{2}{a}})] ,$$

s_{n-1} étant l'aire de la sphère S^{n-1}. On a $\Phi_1 \in D(R^{n+1})$ et, d'après (11.1), $M_\nu \Phi_1 =$

$= \varphi_1$. D'autre part, on a $\langle \gamma'_j, \varphi_2 \rangle = 0$, pour tout $j \in N'_\nu$, de sorte que, d'après (11.13),

$$\varphi_2^{\pm}(s) = s^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \chi \varphi_2 (\pm s^{-\frac{2}{a}}) .$$

Soit $\vartheta(v) \in D(R_+)$ telle que

$$\int_0^\infty \vartheta(v^{\frac{2}{a}}) v^{\frac{\nu+n}{a}} dv = 1 ,$$

et posons

$$\Phi_2(x, t) = \frac{2}{s_{n-1}} \vartheta(u) \chi \varphi_2 (t u^{-\frac{a}{2}}) .$$

On a $\Phi_2 \in D(R^{n+1})$ et $M_\nu \Phi_2 = \varphi_2$. De plus, les applications $\varphi \to \Phi_1$ et $\varphi \to \Phi_2$ de K_ν dans $D(R^{n+1})$ sont continues. L'application $L_\nu : K_\nu \to D(R^{n+1})$ définie par $L_\nu \varphi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ a les propriétés voulues; en effet, $L_\nu \varphi \in D(\Omega)$ si $\varphi \in D(R_+)^2$, c. q. f. d.

Une conséquence immédiate de ce lemme est:

Proposition 11.3. *L'application $M_\nu : D(R^{n+1}) \to K_\nu$ est surjective.*

12. Représentation paramétrique de H_ν, espaces K_ν et K'_ν (cas euclidien)

Soit K'_ν le dual de K_ν et soit $M'_\nu : K'_\nu \to D'(R^{n+1})$ l'application transposée de $M_\nu : D(R^{n+1}) \to K_\nu$. Les propositions 11.2 et 11.3 entraînent:

Proposition 12.1. *L'application linéaire continue $M'_\nu : K'_\nu \to D'(R^{n+1})$ est injective. Son image $K'_\nu = M'_\nu K'_\nu$ est contenue dans $S'(R^{n+1})$.*

Remarque. Dans le cas euclidien, le lemme 11.1, plus fort que le lemme 3.1, et la proposition 11.2 permettent de montrer sans peine que l'application $M'_\nu : K'_\nu \to K'_\nu$ est un homéomorphisme, les topologies induites par $D'(R^{n+1})$ et $S'(R^{n+1})$ sur K'_ν étant identiques.

Comme au § 5, on montre que $M'_\nu h$ est une distribution invariante sur R^{n+1}, pour tout $h \in K'_\nu$. En outre, si $\varphi \in D(R^{n+1})$, en posant $\varphi_\lambda(x, t) = \lambda^{-(n+a)} \varphi(\lambda^{-1} x, \lambda^{-a} t)$ pour tout $\lambda > 0$, on a

$$M_\nu^{\pm} \varphi_\lambda(s) = \lambda^\nu [M_\nu^{\pm} \varphi(s) + \gamma(s) \log s \sum_{j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} c''_j s^j] ,$$

pour tout $\nu \in C$, avec $c''_j = -2c'_j$ et (11.11), (11.7), (11.8), (11.9). On en déduit que, pour tout $j \in N'_\nu$,

$$\tau_j = (\gamma(s) s^j, (-1)^{k'_\nu(j)} \gamma(s) s^j) \tag{12.1}$$

est un élément de K_ν, et que:

Proposition 12.2. *Soit* $h \in K'_\nu$. *Pour que* $M'_\nu h \in H_\nu$, *il faut et il suffit que* $h \in H_\nu$, H_ν *étant le sous-espace vectoriel fermé de* K'_ν *défini par les relations*

$$\langle h, \varphi \rangle = 0, \quad \textit{pour tout} \quad \varphi \in X_\nu,$$

où

$$X_\nu = \{\tau_j ; j \in N'_\nu\}, \tag{12.2}$$

avec (12.1), *est une partie libre de* K_ν.

Posons

$$n'_\nu = \operatorname{card} N'_\nu . \tag{12.3}$$

H_ν est donc de codimension n'_ν dans K'_ν. Remarquons que $n'_\nu = 0$, donc $H_\nu = K'_\nu$, sauf pour une suite discrète de valeurs négatives de ν.

Donnons quelques exemples d'éléments de K'_ν. D'après (11.12), si $\varphi \in K_\nu$, φ^+ et φ^- admettent des développements asymptotiques

$$\varphi^\pm(s) \sim \sum_{j=\bar{n}}^{\infty} \langle \beta_j^\pm, \varphi \rangle \gamma(s) s^j ,$$

lorsque $s \to 0$. Les coefficients de ces développements définissent des éléments β_j^+ et β_j^- de K'_ν $(\bar{n} \leqslant j \in N)$. De même, les coefficients de (11.13) définissent des éléments $\gamma'_j (j \in N'_\nu)$ de K'_ν. Pour tout $k \in N$, on peut considérer l'élément ε_k de K'_ν défini par $\langle \varepsilon_k, \varphi \rangle = D^k \chi \varphi(0)$, $\chi\varphi$ étant la fonction qui figure dans (11.13). Pour $j \in N'_\nu$, on a

$$\langle \beta_k^\pm, \tau_j \rangle = (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \delta_{kj}, \ \bar{n} \leqslant k \in N , \tag{12.4}$$

$$\langle \gamma'_k, \tau_j \rangle = 0, \ k \in N'_\nu , \tag{12.5}$$

et, puisque $\chi \tau_j(s) = s^{k'_\nu(j)}$,

$$\langle \varepsilon_i, \tau_j \rangle = k! \, \delta_{ik}, \ i \in N, \ k = k'_\nu(j) . \tag{12.6}$$

D'après (12.5), on a $\gamma'_k \in H_\nu$, $(k \in N'_\nu)$. D'après (12.4) et (12.6), on a

$$\begin{aligned} K'_\nu &= H_\nu \oplus [\beta_j^+ ; j \in N'_\nu] \\ &= H_\nu \oplus [\varepsilon_{k'_\nu(j)} ; j \in N'_\nu] . \end{aligned} \tag{12.7}$$

Cherchons à caractériser les éléments de H_ν nuls dans Ω. Pour cela, considérons la fonction u^ν, localement intégrable dans R^n pour $R\nu > -\frac{n}{2}$. En tant que fonction de ν à valeurs dans $D'(R^n)$, u^ν est prolongeable en une fonction méromorphe sur C, avec pôles simples $\nu = -\frac{n}{2} - k, k \in N$ (cf. [4]). Nous définirons u^ν pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel (voir § 2). On a alors, pour $\lambda > 0$,

$$u^\nu(\lambda x) = \begin{cases} \lambda^{2\nu} u^\nu(x), \text{ si } \nu \neq -\dfrac{n}{2} - k \text{ pour tout } k \in N, \\ \lambda^{2\nu}\left[u^\nu(x) + \log\lambda \dfrac{c_k}{k!} \Delta^k \delta(x)\right], \text{ si } \nu = -\dfrac{n}{2} - k,\ k \in N, \end{cases}$$

avec (11.5). Comme au § 4, on en déduit le résultat suivant:

Proposition 12.3. *Les éléments*

$$\Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t),\ j \in N'_\nu,\ k = k'_\nu(j),$$

$$\frac{c_{j-\bar{n}}}{(j-\bar{n})!}\Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes t_\pm^{-(k+1)} - a\frac{(\mp 1)^k}{k!} u^{-\left(j+\frac{n-2\bar{n}}{2}\right)} \otimes \delta^{(k)}(t),$$

avec (11.5), $j \in N'_\nu$, $k = k'_\nu(j)$,

$$u^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t),\ k \in N,\ k \neq k'_\nu(j) \text{ pour tout } j \in N'_\nu,$$

$$\Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+n-2\bar{n}}{a}},\ \bar{n} \leqslant j \in N,\ j \notin N'_\nu,$$

constituent une base de l'espace vectoriel formé des distributions de H_ν *nulles dans* Ω.

A des facteurs constants non nuls près, $M'_\nu\beta_j^\pm$ $(j \geqslant \bar{n})$ est égal à

$$\Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu+2j+n-2\bar{n}}{a}},$$

$M'_\nu\gamma'_j(j \in N'_\nu)$ à

$$\Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t),\ k = k'_\nu(j),$$

et $M'_\nu\varepsilon_k(k \in N)$ à

$$u^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t).$$

On a donc (prop. 12.2 et 12.3):

Proposition 12.4. *L'espace vectoriel formé des éléments de* H_ν *nuls dans* Ω *est contenu dans* $M'_\nu H_\nu$.

Une démonstration analogue à celle du théorème 5.1, et utilisant les propositions 11.1, 12.1, 12.2, 12.4 et le lemme 11.1, conduit au résultat suivant:

Théorème 12.1. *L'application* M'_ν *induit un isomorphisme de* H_ν *sur* H_ν.

Corollaire. *Les distributions de* H_ν *sont tempérées.*
En effet, les éléments de $M'_\nu K'_\nu$ sont tempérés (prop. 12.1).

Soit $K'_\nu = M'_\nu K'_\nu$. Comme les distributions de K'_ν sont tempérées, on peut considérer l'image de FOURIER $K_{\nu'} = FK'_\nu$, avec $\nu' = -(\nu + n + a)$. De même qu'au § 6, on a $H_{\nu'} = FH_\nu$; par suite, en vertu de (12.7), on a (cf. § 6)

$$K'_\nu = H_\nu \oplus [\Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes t_+^{-(k+1)};\ j \in N'_\nu,\ k = k'_\nu(j)], \tag{12.8}$$

$$K_\nu = H_\nu \oplus [u^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log|t| \,;\, j \in N'_{\nu'},\, k = k'_{\nu'}(j)]\,, \tag{12.9}$$

H_ν, K'_ν et K_ν étant des sous-espaces fermés de $D'(R^{n+1})$ ou de $S'(R^{n+1})$ (cf. [2], chap. I, § 2, corollaire 4 du th. 2 et prop. 3). De plus:

Proposition 12.5. *Pour tout $\nu \in C, \nu' = -(\nu + n + a)$, les transformations de* Fourier *F et $\bar{F}$ induisent des isomorphismes de H_ν sur $H_{\nu'}$, de K'_ν sur $K_{\nu'}$ et de K_ν sur $K'_{\nu'}$.*

13. Opérateurs différentiels homogènes et invariants (cas euclidien)

Comme au § 7, en posant $a = 2\frac{b}{c}$ (b et c entiers > 0 premiers entre eux), on montre que l'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, le plus général, conservant $H = \bigcup_{\nu \in C} H_\nu$ est de la forme

$$D = (-\Delta)^h \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \sum_{j=0}^{m} a_j (-\Delta)^{jb} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(m-j)c}, \tag{13.1}$$

avec $h, k, m \in N$, $a_j \in C$, a_0 et $a_m \neq 0$. Soit

$$P(u, t) = u^h t^k \sum_{j=0}^{m} a_j u^{jb} t^{(m-j)c} \tag{13.2}$$

le polynôme associé à D, et posons

$$Q(s) = \sum_{j=0}^{m} a_j s^j. \tag{13.3}$$

Les propositions et théorèmes du § 7 restent valables; en particulier:

Proposition 13.1. *Pour tout $\nu \in C$, les applications*

$$\sigma : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \to \sigma\varphi = (s\varphi^+, s\varphi^-)$$

de $K_{\nu+2}$ dans K_ν,

$$\eta : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \to \eta\varphi = (\varphi^+, -\varphi^-)$$

de $K_{\nu+a}$ dans K_ν, et

$$P = \sigma^h \eta^k \sum_{j=0}^{m} a_j \sigma^{jb} \eta^{(m-j)c} \tag{13.4}$$

de K_μ dans K_ν, avec

$$\mu = \nu + 2h + ak + 2bm, \tag{13.5}$$

sont linéaires continues.

La multiplication par le polynôme (13.2) *induit une application linéaire continue $P : K'_\nu \to K'_\mu$, telle que $M'^{-1}_\mu P M'_\nu$ soit égal à la transposée $P' : K'_\nu \to K'_\mu$ de P. L'application P' induit une application linéaire continue P'_0 de H_ν dans H_μ.*

Théorème 13.1. *Pour tout $\nu' \in C$, l'opérateur D donné par* (13.1) *applique $H_{\nu'}$ dans $H_{\mu'}$ et $K_{\nu'}$ dans $K_{\mu'}$, avec $\mu' = \nu' - 2h - ak - 2bm$.*

L'image de $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\mu$ par l'application (13.4) est $P\varphi = (P_+\varphi^+, P_-\varphi^-)$, où P_+ et P_- sont des polynômes non identiquement nuls:

$$P_\pm(s) = (\pm 1)^{k+mc} s^h Q((\pm 1)^c s^b) , \tag{13.6}$$

avec (13.3). Posons:

$$Z_\nu^0 = \{\beta_j^+, \beta_j^- ; \bar{n} \leqslant j < \bar{n} + h\} . \tag{13.7}$$

Pour tout $k \in N$ et pour $r_0 > 0$, considérons les éléments $\delta_k^+(s - r_0)$ et $\delta_k^-(s - r_0)$ de K'_ν définis par $\langle \delta_k^\pm(s - r_0), \varphi \rangle = D^k \varphi^\pm(r_0)$. Soient z_j, $1 \leqslant j \leqslant m'$, les zéros réels distincts de $Q(s)$, z_j étant d'ordre n_j, et supposons que z_j, $1 \leqslant j \leqslant m''$, sont les zéros > 0 de $Q(s)$. Si c est impair, posons

$$Z_\nu^1 = \{\delta_k^{\operatorname{sgn} z_j}(s - r_j) ; r_j > 0, r_j^b = |z_j|\} , \tag{13.8}$$

où j prend les valeurs $1, 2, \ldots, m'$ et k les valeurs $0, 1, \ldots, n_j - 1$. Si c est pair, posons

$$Z_\nu^1 = \{\delta_k^+(s - r_j), \delta_k^-(s - r_j) ; r_j > 0, r_j^b = z_j\} , \tag{13.9}$$

où j prend les valeurs $1, 2, \ldots, m''$ et k les valeurs $0, 1, \ldots, n_j - 1$.

Posons enfin

$$Z_\nu^2 = \{\varepsilon_j ; 0 \leqslant j < k\} , \tag{13.10}$$

et, avec (13.5),

$$Z_\nu'^3 = \begin{cases} \{\gamma_j' ; j \in N_\nu'\}, & \text{si } N_\mu' = \varnothing , \\ \{\gamma_j' ; j \in N_\nu' - \bar{N}_\nu'\} \cup \{L_1', \ldots, L_m'\} , & \text{si } N_\mu' \neq \varnothing , \end{cases} \tag{13.11}$$

la partie $\bar{N}_\nu'$ de N_ν' et les éléments $L_1', \ldots, L_m'$ de K'_ν étant définis par des formules analogues à (8.12) et (8.13). De la même façon qu'au § 8, on obtient:

Proposition 13.2. *L'application $P : K_\mu \to K_\nu$ définie par* (13.4) *est injective et l'application réciproque $P^{-1} : PK_\mu \to K_\nu$ est continue. L'image PK_μ de P est le sous-espace vectoriel fermé de K_ν, de codimension finie, formé des $\psi \in K_\nu$ tels que $\langle h, \psi \rangle = 0$, pour tout $h \in Z_\nu$, où Z_ν est la partie*

$$Z_\nu = Z_\nu^0 \cup Z_\nu^1 \cup Z_\nu^2 \cup Z_\nu'^3 \tag{13.12}$$

de K'_ν, avec (13.7) *à* (13.11).

A l'opérateur (13.1) associons le nombre

$$d = 2h + m_0 + k , \tag{13.13}$$

où $m_0 = \operatorname{card} Z_\nu^1$ est égal au nombre de zéros réels de $Q(s)$ si c est impair, et à deux fois le nombre de zéros > 0 de $Q(s)$ si c est pair.

Les éléments de Z_ν sont linéairement indépendants et leur nombre c_ν est fini:

$$c_\nu = d + n_\nu' - n_\mu' , \tag{13.14}$$

avec (13.13), (12.3) et (13.5). On démontre les propositions suivantes comme au § 9:

Proposition 13.3. *L'application transposée* $P' : K'_\nu \to K'_\mu$, *avec* (13.5), *est surjective. Son noyau est le sous-espace vectoriel* $[Z_\nu]$ *de* K'_ν, *de dimension* c_ν (*formule* (13.14)), *dont* Z_ν *est une base* (*formule* (13.12)).

Proposition 13.4. *Le noyau de l'application* $P'_0 : H_\nu \to H_\mu$ *est le sous-espace vectoriel* $H_\nu \cap [Z_\nu]$ *de* H_ν, *de dimension*

$$d_\nu = c_\nu - \varrho_\nu , \tag{13.15}$$

avec (13.14), ϱ_ν *étant le rang de la matrice*

$$M = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z_\nu, \varphi \in X_\nu} \tag{13.16}$$

avec (13.12) *et* (12.2); ϱ_ν *est aussi le rang de la matrice*

$$M' = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z'_\nu, \varphi \in X'_\nu} \tag{13.17}$$

avec $Z'_\nu = Z_\nu - Z'^3_\nu$, *et*

$$X'_\nu = \{\tau_j ; j \in N'_\nu, j - h \notin N'_\mu\} , \tag{13.18}$$

τ_j *étant défini par* (12.1).

Proposition 13.5. *L'image* $P'_0 H_\nu$ *de* P'_0 *est un sous-espace vectoriel fermé, de codimension finie* e_ν, *de* H_μ :

$$e_\nu = n'_\nu - n'_\mu - \varrho_\nu , \tag{13.19}$$

avec (12.3), ϱ_ν *étant le rang de la matrice* (13.17). $P'_0 H_\nu$ *est le sous-espace vectoriel de* H_μ *formé des éléments* $h \in H_\mu$ *tels que*

$$\langle h, P^{-1}\eta_i \rangle = 0, i = 1, 2, \ldots, e_\nu , \tag{13.20}$$

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e_\nu}$ *étant des éléments linéairement indépendants de* $[X'_\nu]$ (*espace vectoriel engendré par* X'_ν, *avec* (13.18)) *contenus dans* PK_μ (*donc tels que* $\langle h, \eta_i \rangle = 0$, *pour tout* $h \in Z_\nu$).

Des propositions précédentes et de la proposition 12.5 on déduit:

Théorème 13.2. *Pour tout* $\nu' \in C$, $\mu' = \nu' - 2h - ak - 2bm$, $\nu = -(\nu' + n + a)$, $\mu = -(\mu' + n + a)$, *l'opérateur* D *défini par* (13.1) *induit une application linéaire* $D : K_{\nu'} \to K_{\mu'}$ *surjective, dont le noyau est de dimension finie* c_ν, *avec* (13.14).

Théorème 13.3. *Avec les notations du théorème* 13.2, *l'application linéaire* $D : H_{\nu'} \to H_{\mu'}$ *a une image de codimension finie* e_ν *et un noyau de dimension finie* d_ν. *On a*

$$d_\nu = d + e_\nu , \tag{13.21}$$

avec (13.19), *où* d, *donné par* (13.13), *ne dépend que de* D.

Remarquons que $\delta \in H_{\mu'}$, avec $\mu' = -(n+a)$, et que $F\delta = 1$ est l'image par M_0' de l'élément $1 \in H_0 = K_0'$ défini par

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int_0^\infty \varphi^+(s)ds + \int_0^\infty \varphi^-(s)ds ,$$

pour $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in H_0$ (on a $N_0' = \varnothing$ et $\varphi^\pm(s)$ est intégrable). On peut donc énoncer:

Théorème 13.4. *Soit D l'opérateur défini par* (13.1), *et posons* $\nu' = -(n+a) + 2h + ak + 2bm$, $\mu' = -(n+a)$, $\nu = -(2h + ak + 2bm)$, $\mu = 0$.

L'ensemble des solutions élémentaires de D contenues dans $K_{\nu'}$ n'est pas vide et forme une variété linéaire affine de dimension c_ν, avec (13.14).

Pour que D admette une solution élémentaire dans H, donc dans $H_{\nu'}$, il faut et il suffit que

$$\langle 1, P^{-1}\eta_i \rangle = \int_0^\infty \frac{\eta_i^+(s)}{P_+(s)} ds + \int_0^\infty \frac{\eta_i^-(s)}{P_-(s)} ds = 0 , \tag{13.22}$$

pour $i = 1, 2, \ldots, e_\nu$, avec (13.19), *les η_i étant les éléments de K_ν considérés dans la proposition* 13.5. *Si la condition* (13.22) *est satisfaite, l'ensemble des solutions élémentaires de D contenues dans $H_{\nu'}$ forme une variété linéaire affine de dimension d_ν, avec* (13.21).

14. Exemple (cas euclidien)

Dans le cas euclidien, considérons l'opérateur

$$D = (-\Delta)^{mb} - z\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{mc},$$

de la forme (13.1) avec $h = k = 0$, $m \geqslant 1$, $a_0 = -z \neq 0$, $a_m = 1$, $Q(s) = s^m - z$. Cherchons dans quels cas l'opérateur D admet une solution élémentaire contenue dans $H_{\nu'}$, avec $\nu' = -(n+a) + 2bm$. Posons $\mu' = -(n+a)$, $\nu = -2bm$, $\mu = 0$.

D'après (11.9), on a $N_0' = \varnothing$ et N_ν' est encore donné par (10.3) et (10.4). Les formules (10.6) et (10.7) restent également valables.

D'après (13.7) et (13.10), on a $Z_\nu^0 = Z_\nu^2 = \varnothing$.

Si c est impair, le nombre $m_0 = \operatorname{card} Z_\nu^1$ est égal à

$$m_0 = \begin{cases} 2, & \text{si } m \text{ est pair et } z > 0, \\ 1, & \text{si } m \text{ est impair et } z \in R, \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Si c est pair,

$$m_0 = \begin{cases} 2, & \text{si } z > 0, \\ 0, & \text{si } z \text{ n'est pas} > 0. \end{cases}$$

Si $m_0 = 0$, on a $Z_\nu^1 = \varnothing$. Lorsque $m_0 = 1$, soit z_1 le zéro réel de Q; on a

$$Z_\nu^1 = \{\delta_0^{\operatorname{sgn} z}(s - r_1)\},$$

avec $r_1 > 0$, $r_1^b = |z_1|$. Si $m_0 = 2$, soit z_1 le zéro > 0 de Q, et soit $r_1 > 0$ tel que $r_1^b = z_1$; on a

$$Z_\nu^1 = \{\delta_0^+(s - r_1), \delta_0^-(s - r_1)\}.$$

Le nombre ϱ_ν est égal au rang de la matrice

$$M' = (\langle h, \tau_j \rangle)_{h \in Z_\nu^1,\, j \in N'_\nu},$$

et, d'après (13.20), $e_\nu = n'_\nu - \varrho_\nu$, avec $n'_\nu = \operatorname{card} N'_\nu$. Notons $Y = \{\eta_1, \ldots, \eta_{e_\nu}\}$ un ensemble d'éléments linéairement indépendants satisfaisant aux conditions énoncées dans la proposition 13.5. Avec les mêmes notations qu'au § 10 (formules (10.8) et (10.9)), on obtient les résultats suivants:

Si $m_0 \leqslant 1$, ou si $m_0 = 2$ et c impair,

$$\varrho_\nu = \min(n'_\nu, m_0), \quad e_\nu = (n'_\nu - m_0)_+,$$

$$Y = \begin{cases} \{\tau_j;\, j \in N'_\nu\}, & \text{si } m_0 = 0, \\ \{\tau_{j+b} - z_1 \tau_j;\, j \in N_\nu'^1\}, & \text{si } m_0 = 1, \\ \{\tau_{j+2b} - z_1^2 \tau_j;\, j \in N_\nu'^2\}, & \text{si } m_0 = 2. \end{cases}$$

Si $m_0 = 2$ et c pair,

$$\varrho_\nu = \min(n'_\nu, 1), \quad e_\nu = (n'_\nu - 1)_+,$$

$$Y = \{\tau_{j+b} - z_1 \tau_j;\, j \in N_\nu'^1\}.$$

Compte tenu du théorème 13.4, on en déduit:

Proposition 14.1. *Pour que l'opérateur D défini par* (14.1) *admette une solution élémentaire dans H, donc dans $H_{\nu'}$, il faut et il suffit qu'une des conditions suivantes soit vérifiée*:

si n est impair:

1) *c impair*,

2) *c et $\frac{c}{2}$ pairs*,

3) *c pair, $\frac{c}{2}$ impair, $m < \frac{n}{2b} + \frac{1 + m_0}{2}$*;

si n est pair:

1) *c impair, $m < \frac{n}{2b} + \frac{1}{2} + m_0$*,

2) *c pair, $m_0 = 0$*.

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre*. Chap. II, algèbre linéaire (2e édition). Paris, HERMANN, 1955.

[2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*. Paris, HERMANN, 1953 et 1955.

[3] L. GÅRDING, *Transformation de* FOURIER *des distributions homogènes*. Bull. Soc. math. France 89 (1961), 381–428.

[4] I. M. GEL'FAND et G. E. SHILOV, *Fonctions généralisées (en russe)*. t. 1, Moscou, 1958.

[5] P. JEANQUARTIER, *Solution élémentaire d'un opérateur différentiel généralisant celui de la chaleur*. C. R. Acad. Sc. Paris, 256 (1963), 1427–1428.

[6] P. JEANQUARTIER, *Solutions élémentaires d'opérateurs différentiels paraboliques hyperboliques*. Comment. Math. Helv. 37 (1963), 296–324.

[7] P. JEANQUARTIER, *Distributions homogènes et invariantes, opérateurs différentiels associés*. C. R. Acad. Sc. Paris, 258 (1964), 2963–2965.

[8] P.-D. METHÉE, *Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de* LORENTZ, Comment. Math. Helv. 28 (1954), 225–269.

[9] P.-D. METHÉE, *Transformées de* FOURIER *de distributions invariantes liées à la résolution de l'équation des ondes*. Colloques internationaux de CNRS, 71, La théorie des équations aux dérivées partielles, Nancy, 1956, 145–163.

[10] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*. Paris, HERMANN, 1955.

[11] G. DE RHAM, *Solution élémentaire d'opérateurs différentiels du second ordre*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 8 (1958), 337–366.

[12] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. t. 1 (2e édition) et t. 2, Paris, HERMANN, 1957 et 1951.

[13] A. TENGSTRAND, *Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature*. Math. Scand. 8 (1960), 201–218.

(Reçu le 14 mai 1964)