**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici

**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft

**Band:** 39 (1964-1965)

**Artikel:** Distributions et opérateurs différentiels homogènes et invariants.

**Autor:** Jeanquartier, Pierre

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-29883

# Distributions et opérateurs différentiels homogènes et invariants

par PIERRE JEANQUARTIER, Lausanne

## Introduction

L'opérateur de la chaleur (cf. SCHWARTZ [12], t. 1, p. 145) et l'opérateur $\partial/\partial t - \square$, où

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2}{\partial x_p^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{p+1}^2} - \ldots - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

est un dalembertien de signature quelconque (cf. [5] ou [6]), admettent chacun une solution élémentaire $E$, invariante par le groupe $G$ des transformations linéaires de $R^{n+1} \ni (x, t)$ conservant $t$ et la forme quadratique

$$u = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 ,$$

et homogène au sens suivant: lorsque $x$ et $t$ sont changés en $\lambda x$ et $\lambda^2 t (\lambda > 0)$, $E$ est multipliée par $\lambda^{-n}$.

Plus généralement, $a$ étant un nombre rationnel $> 0$ quelconque, nous considérerons l'espace $H_\nu$ des distributions $f$ sur $R^{n+1}$, invariantes par le groupe $G$, et homogènes de degré $\nu$ au sens suivant: $f(\lambda x, \lambda^a t) = \lambda^\nu f(x, t)$ pour tout $\lambda > 0$. Soit $H$ la réunion des $H_\nu$ lorsque $\nu$ parcourt le corps $C$ des nombres complexes. L'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants le plus général conservant $H$ est de la forme

$$D = \square^h (\partial/\partial t)^k \sum_{j=0}^{m} a_j \square^{bj} (\partial/\partial t)^{(m-j)c} ,$$

où $a_j \in C, h, k, m$ entiers $\geqslant 0$, $b$ et $c$ étant les entiers $> 0$ premiers entre eux tels que $a = 2b/c$. Pour tout $\nu \in C, D$ applique $H_\nu$ dans $H_\mu$, avec $\mu = \nu - 2h - ak - 2bm$. Le but du présent travail est de répondre aux questions suivantes: Etant donné $g \in H_\mu$, l'équation $Df = g$ a-t-elle des solutions $f \in H_\nu$? L'opérateur $D$ admet-il une solution élémentaire dans $H$ (donc dans $H_\nu$, avec $\nu = -(n + a) + 2h + ak + 2bm$, puisque la mesure de DIRAC $\delta \in H_\mu$, avec $\mu = -(n + a)$)?

Dans une première partie, on donne une représentation paramétrique de $H_\nu$, à l'aide du dual d'un espace de fonctions d'une variable. La méthode suivie est analogue à celle utilisée par GÅRDING, ROOS et TENGSTRAND dans l'étude des distributions invariantes par un groupe orthogonal de signature quelconque (cf. [13]). Supposons d'abord que la forme quadratique $u$ soit non définie. En remarquant que l'application $(x, t) \to w = u \mid t \mid^{-2/a}$ est régulière dans l'ouvert $\Omega$ de $R^{n+1}$, défini par $\mid x \mid t \neq 0$, on montre que, pour tout $f \in H_\nu$, il existe deux distributions $h_+$ et $h_- \in D'(R)$, telles que

$$\langle f, \varphi \rangle = \langle h_+, M_\nu^+ \varphi \rangle + \langle h_-, M_\nu^- \varphi \rangle ,$$

pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, l'application $M_\nu : \varphi \to (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi)$ étant linéaire continue de $D(\Omega)$ sur le produit $D(R) \times D(R)$. Si $h_+$ et $h_-$ sont des fonctions, on a

$$f = \mid t \mid^{\nu/a} [Y(t) h_+(w) + Y(-t) h_-(w)]$$

dans $\Omega$, en désignant par $Y(t)$ la fonction d'HEAVISIDE. Il est possible de prolonger $M_\nu$ en une application linéaire de $D(R^{n+1})$ sur un espace vectoriel $K_\nu$, formé de couples de fonctions d'une variable $s$, de classe $C^\infty$ pour $s \neq 0$, et ayant, lorsque $s$ tend vers $0$, $-\infty$ ou $+\infty$, des développements asymptotiques de types particuliers (§2). On peut alors munir $K_\nu$ d'une structure d'espace de FRÉCHET (§3), de sorte que l'application $M_\nu : D(R^{n+1}) \to K_\nu$ soit continue, et que sa transposée $M'_\nu : K'_\nu \to D'(R^{n+1})$ ait pour image un sous-espace fermé $\mathcal{K}'_\nu = M'_\nu K'_\nu$ de $D'(R^{n+1})$ contenant $\mathcal{H}_\nu$. $\mathcal{K}'_\nu$ est somme directe topologique de $\mathcal{H}_\nu$ et d'un espace vectoriel de dimension finie. L'application $M'_\nu$, qui est un isomorphisme vectoriel de $K'_\nu$ sur $\mathcal{K}'_\nu$, fournit une représentation paramétrique de $\mathcal{H}_\nu$ au moyen d'un sous-espace $H_\nu$, de codimension finie, de $K'_\nu$ (§5). En fait, on a $H_\nu = K'_\nu$ et $\mathcal{H}_\nu = \mathcal{K}'_\nu$ sauf pour une suite discrète de valeurs négatives de $\nu$.

Les distributions de $\mathcal{H}_\nu$ et $\mathcal{K}'_\nu$ sont tempérées et la transformation de FOURIER établit un isomorphisme de $\mathcal{H}_\nu$ sur $\mathcal{H}_{\nu'}$, avec $\nu' = -(\nu + n + a)$. Nous considérerons également l'image de FOURIER $\mathcal{K}_{\nu'}$ de $\mathcal{K}'_\nu$: $\mathcal{K}_{\nu'} = F\mathcal{K}'_\nu$. $\mathcal{K}_\nu$ est somme directe topologique de $\mathcal{H}_\nu$ et d'un espace vectoriel de dimension finie; on a $\mathcal{H}_\nu = \mathcal{K}_\nu$ sauf pour une suite croissante de valeurs réelles de $\nu$ (§6).

Dans une deuxième partie, on considère l'opérateur $D$ défini précédemment. $D$ applique $\mathcal{K}_\nu$ dans $\mathcal{K}_\mu$ avec $\mu = \nu - 2h - ak - 2bm$. Par transformation de FOURIER, et à l'aide des isomorphismes $M'_{\nu'}$ et $M'_{\mu'}$, l'application $D : \mathcal{K}_\nu \to \mathcal{K}_\mu$ est remplacée par une application $P' : K'_{\nu'} \to K'_{\mu'}$ transposée de $P : K_{\mu'} \to K_{\nu'}$, $P$ étant une application linéaire continue, analogue à la multiplication par un polynôme (§7). L'étude de $P'$ (§9) conduit aux résultats suivants:

Pour tout $\nu \in C$, l'application $D : \mathcal{K}_\nu \to \mathcal{K}_\mu$ est surjective; son noyau est de dimension finie (th. 9.1). En particulier, $D$ admet toujours une solution élémentaire dans $\mathcal{K}_\nu$ pour $\nu = -(n + a) + 2h + ak + 2bm$; autrement dit, $D$ admet toujours une solution élémentaire somme d'une distribution invariante et homogène de degré $\nu$, et d'une combinaison linéaire de distributions de la forme

$$u_\pm^j \otimes t^k, \; u_\pm^j \log \mid u \mid \otimes t^k, \; u^j \log^2 \mid u \mid \otimes t^k, \; u^j \otimes t^k \log \mid t \mid ,$$

avec $j \in R$ et $k \in N$ (th. 9.3 et §6).

Par contre, $D: H_\nu \to H_\mu$ n'est pas surjective dans tous les cas (th. 9.2) et $D$ n'admet pas toujours de solution élémentaire dans $H$ (th. 9.3 et exemple du § 10).

Des résultats analogues sont valables lorsque la forme quadratique $u$ est définie (cas euclidien, §§ 11 à 14).

Les résultats de ce travail ont été annoncés dans la note [7].

## 1. Distributions homogènes et invariantes

Soit $V$ un ouvert d'un espace numérique $R^m$. Nous désignerons par $D(V)$ l'espace des fonctions à valeurs complexes, de classe $C^\infty$, à support compact dans $V$, et par $D'(V)$ le dual de $D(V)$, c'est-à-dire l'espace des distributions sur $V$. Si $f \in D'(V)$ et $\varphi \in D(V)$, la valeur de $f$ pour $\varphi$ sera notée $\langle f, \varphi \rangle$. Nous désignerons par $S(R^m)$ l'espace des fonctions à décroissance rapide sur $R^m$, et par $S'(R^m)$ l'espace des distributions tempérées sur $R^m$ (cf. Schwartz [12]). Pour la transformation de Fourier $F$ et sa conjuguée $\overline{F}$ nous adopterons les définitions suivantes: $F\varphi(y) = \int e^{-ix\cdot y} \varphi(x)dx$ et $\overline{F}\varphi(y) = \int e^{+ix\cdot y}\varphi(x)dx$ pour $\varphi \in S(R^m)$, d'où $Ff$ et $\overline{F}f$ par continuité, pour $f \in S'(R^m)$. Nous utiliserons la notation fonctionnelle $f = f(x)$ pour marquer que $f$ est une distribution sur $R^m \ni x$. Si $\alpha$ est un difféomorphisme de $R^m$, et si $f(x) \in D'(R^m)$, nous définirons $f(\alpha x) \in D'(R^m)$ par l'égalité $\langle f(\alpha x), \varphi(x)\rangle = \langle f(x), \varphi(\alpha^{-1}x) \mid J(x) \mid \rangle$, pour tout $\varphi \in D(R^m)$, $J(x)$ étant le jacobien de l'application $\alpha^{-1}$; si $f(x)$ est une fonction, cette définition coïncide avec la définition habituelle.

Dans la suite, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ sera toujours un point de l'espace $R^n$, $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$. La partie entière de $\dfrac{n-2}{2}$ sera notée $\overline{n}$. Sur $R^n$, considérons la forme quadratique

$$u = x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_n^2 ,$$

de signature $(p, q)$, avec $1 \leqslant p \leqslant n$, $q = n - p$. Nous distinguerons quatre cas:

1er cas: $p$ et $q$ impairs $\geqslant 1$,
2e cas: $p$ impair $\geqslant 1$ et $q$ pair $\geqslant 1$,
3e cas: $p$ et $q$ pairs $\geqslant 1$,
4e cas (cas euclidien): $p = n$, $q = 0$.

Le cas $p$ pair et $q$ impair se ramène au 2e cas, et le cas $p = 0$, $q = n$ au 4e cas.

Soit $G$ le groupe des transformations linéaires de $R^n$ qui laissent $u$ invariante. Dans l'espace $R^{n+1} \ni (x, t)$, nous dirons qu'une distribution $f \in D'(R^{n+1})$ est *invariante* si $f(Lx, t) = f(x, t)$ pour tout $L \in G$. Si $f$ est invariante, on a

$$\left(\varepsilon_i x_i \frac{\partial}{\partial x_j} - \varepsilon_j x_j \frac{\partial}{\partial x_i}\right) f = 0 , \quad i, j = 1, \ldots, n , \tag{1.1}$$

avec $\varepsilon_i = 1$ si $i \leqslant p$ et $\varepsilon_i = -1$ si $i > p$ (cf. METHÉE [8] et TENGSTRAND [13]).

Soit $a$ un nombre $> 0$. $\nu$ étant un élément quelconque du corps $C$ des nombres complexes, nous dirons que $f \in D'(R^{n+1})$ est *homogène de degré* $\nu$ si $f(\lambda x, \lambda^a t) = \lambda^\nu f(x, t)$, pour tout $\lambda > 0$. Lorsque $a = 1$, $f$ est homogène au sens habituel (cf. [3] et [4]) ; le cas $a = 2$ a été envisagé dans [6]. Si $f$ est homogène de degré $\nu$, on a la relation d'EULER

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + at \frac{\partial f}{\partial t} = \nu f . \tag{1.2}$$

Nous désignerons par $H_\nu$ le sous-espace vectoriel fermé de $D'(R^{n+1})$ formé des distributions *invariantes et homogènes de degré* $\nu$. Si $U$ est un ouvert de $R^{n+1}$ invariant par les transformations $(x, t) \to (Lx, t)$, $L \in G$ et $(x, t) \to (\lambda x, \lambda^a t)$, $\lambda > 0$, on peut considérer de façon analogue l'espace $H_\nu(U)$ formé des distributions de $D'(U)$ invariantes et homogènes de degré $\nu$. Des ouverts de ce type sont, par exemple, l'ensemble $\Omega$ des points de $R^{n+1}$ tels que $|x| t \neq 0$, et les parties $\Omega_+$ et $\Omega_-$ de $\Omega$ définies respectivement par $t > 0$ et $t < 0$. Dans $\Omega$, nous poserons $w = u\, |t|^{-2/a}$.

Dès maintenant, et jusqu'à la fin du §10, nous supposerons que la forme quadratique $u$ est non définie (1er, 2e et 3e cas).

L'application $\mu : (x, t) \to w$ de $\Omega$ sur $R$ est régulière et a des restrictions $\mu_+ : \Omega_+ \to R$ et $\mu_- : \Omega_- \to R$. Comme $\mu_+$ est une application surjective, on peut lui associer une application linéaire, continue, surjective, $\mu_+ : D(\Omega_+) \to D(R)$, telle que, si $\varphi \in D(\Omega_+)$, $\langle \mu_+ \varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \mu_+^* \psi \rangle$, pour tout $\psi \in D(R)$, où $\mu_+^* \psi(x, t) = \psi(w)$ (cf. DE RHAM [10], p. 55—57 ou GÅRDING [3], p. 388—389). L'application transposée $\mu_+' : D'(R) \to D'(\Omega_+)$ est linéaire, continue, injective, et il est clair que $\mu_+' D'(R) \subset H_0(\Omega_+)$. Inversement, si $f \in H_0(\Omega_+)$, les relations (1.1) et (1.2) entraînent $df \wedge dw = 0$, où l'on considère $f$ comme un courant de degré 0. D'autre part, si la sous-variété $w =$ *constante* de $\Omega_+$ n'est pas connexe, il existe un élément $L \in G$ tel que la transformation $(x, t) \to (Lx, t)$ échange ses composantes connexes. Par des méthodes classiques (cf. [8], démonstration du théorème 2, [13], lemme 5.1 ou [6], lemmes 4.1 et 4.2), on en déduit qu'il existe $h \in D'(R)$ tel que $\mu_+' h = f$. De même, on peut associer à $\mu_-$ une application linéaire continue $\mu_- : D(\Omega_-) \to D(R)$, dont la transposée $\mu_-' : D'(R) \to D'(\Omega_-)$ soit injective et ait $H_0(\Omega_-)$ pour image.

Soit maintenant $\nu \in C$ quelconque. L'application $f \to |t|^{\nu/a} f$ de $H_0(\Omega)$ sur $H_\nu(\Omega)$ est un isomorphisme. Par suite, si $f \in H_\nu(\Omega)$, il existe deux distributions $h_+$ et $h_- \in D'(R)$, déterminées de façon unique, telles que $f = |t|^{\nu/a} \mu'_+ h_+$ dans $\Omega_+$ et $f = |t|^{\nu/a} \mu'_- h_-$ dans $\Omega_-$. Si $\varphi \in D(\Omega)$ a des restrictions $\varphi_+ \in D(\Omega_+)$ et $\varphi_- \in D(\Omega_-)$, posons

$$M_\nu^+ \varphi = \mu_+(|t|^{\nu/a} \varphi_+), \quad M_\nu^- \varphi = \mu_-(|t|^{\nu/a} \varphi_-). \tag{1.3}$$

Comme $\langle f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi_+\rangle + \langle f, \varphi_-\rangle$, on a donc

$$\langle f, \varphi\rangle = \langle h_+, M_\nu^+ \varphi\rangle + \langle h_-, M_\nu^- \varphi\rangle = \langle h, M_\nu \varphi\rangle,$$

en posant $M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi) \in D(R) \times D(R) = D(R)^2$, et en considérant $h = (h_+, h_-) \in D'(R) \times D'(R) = D'(R)^2$ comme un élément du dual du produit $D(R)^2$. On peut donc énoncer:

**Proposition 1.1.** *A tout élément $f \in H_\nu(\Omega)$, on peut associer un couple $h = (h_+, h_-) \in D'(R)^2$, déterminé de façon unique, tel que $\langle f, \varphi\rangle = \langle h, M_\nu \varphi\rangle$, pour tout $\varphi \in D(\Omega)$, $M_\nu$ étant une application linéaire continue de $D(\Omega)$ sur le produit $D(R)^2$: $M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi)$, avec (1.3).*

En d'autres termes, l'application transposée $M'_\nu$, de $D'(R)^2$ identifié au dual de $D(R)^2$, dans $D'(\Omega)$, est injective et admet $H_\nu(\Omega)$ pour image.

## 2. Prolongement de l'application $M_\nu$

Soit $F(\lambda)$ une fonction méromorphe de $\lambda \in C$, à valeurs dans $C$ ou dans un espace de distributions. En un pôle $\lambda_0$ de $F(\lambda)$, nous appellerons *prolongement naturel* de $F(\lambda)$ le coefficient $c_0$ du développement de LAURENT

$$F(\lambda) = \frac{c_{-m}}{(\lambda - \lambda_0)^m} + \ldots + \frac{c_{-1}}{\lambda - \lambda_0} + c_0 + c_1(\lambda - \lambda_0) + \ldots$$

de $F(\lambda)$, et poserons $F(\lambda_0) = c_0$. Par exemple, pour $R\lambda > -1$, les fonctions $t_+^\lambda = Y(t) t^\lambda$ et $t_-^\lambda = Y(-t)|t|^\lambda$ ($Y(t)$, fonction d'HEAVISIDE) sont localement intégrables sur $R$. Considérées comme fonctions de $\lambda$ à valeurs dans $D'(R)$, $t_+^\lambda$ et $t_-^\lambda$ sont prolongeables en fonctions méromorphes de $\lambda \in C$ ayant les points $\lambda = -1, -2, \ldots$ pour pôles simples. Nous définirons ces distributions pour tout $\lambda \in C$ par prolongement naturel. De manière analogue, pour tout $\lambda \in C$, nous définirons par prolongement naturel, les distributions égales à $t_+^\lambda \log|t| = Y(t) t^\lambda \log t$ et $t_-^\lambda \log|t| = Y(-t)|t|^\lambda \log|t|$ pour $R\lambda > -1$ (cf. [4], chap. I, § 3 et § 4).

Rappelons qu'à toute fonction $\varphi(x) \in D(R^n)$ on peut associer une fonction $\tilde{\varphi}(v)$, d'une variable $v \in R$, de classe $C^\infty$ pour $v \neq 0$, à support compact, telle que

$$\int_{R^n} f(u)\varphi(x)dx = \int_R f(v)\tilde{\varphi}(v)dv \,, \tag{2.1}$$

pour tout $f \in D(R)$ (cf. METHÉE [8], DE RHAM [11] ou TENGSTRAND [13]). Avec les notations de [13]: $\tilde{\varphi} = N\varphi$. Si $\varphi \in S(R^n)$, on peut également lui associer $\tilde{\varphi}(v)$, de classe $C^\infty$ pour $v \neq 0$, telle que (2.1) soit vérifié; au lieu d'être à support compact, $\tilde{\varphi}$ est alors à décroissance rapide. Lorsque $v \to 0$, $\tilde{\varphi}$ admet un développement asymptotique de la forme

$$\tilde{\varphi}(v) = \sum_{j=0}^{m}(\langle A_j, \varphi\rangle + \langle B_j, \varphi\rangle\gamma(v))\, v^j + R_m(v) \,, \tag{2.2}$$

où $R_m(v) \in C^m$, $R_m^{(k)}(v) = O(v^{m-k+\frac{1}{2}})$ pour $k \leqslant m$, et

$$\gamma(v) = \begin{cases} \log|v| & \text{dans le 1}^{\text{er}} \text{ cas,} \\ Y(v)\sqrt{v} & \text{dans le 2}^{\text{e}} \text{ cas,} \\ Y(v) & \text{dans le 3}^{\text{e}} \text{ cas,} \end{cases} \tag{2.3}$$

$Y(v)$, fonction d'HEAVISIDE. $A_j$ et $B_j$ sont des distributions tempérées sur $R^n$, invariantes par le groupe $G$; $A_j$ est à support $u = 0$, $B_j = 0$ si $j < \bar{n}$, et si $j \geqslant \bar{n}$,

$$B_j = \lambda_j \,\Box^{j-\bar{n}}\delta(x) \,, \tag{2.4}$$

où $\lambda_j$ est une constante non nulle et $\delta(x)$ la mesure de DIRAC (cf. [8], [11] et [13]).

Prenons maintenant $\varphi \in S(R^n)$ fonction d'un paramètre $t \in R$, de sorte que $\varphi(x, t)$ appartienne à $S(R^{n+1})$, et soit $\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(v, t)$ la fonction correspondante. En reprenant, par exemple, les calculs de TENGSTRAND ([13], p. 208—212) on obtient les résultats suivants (on pose $D_v = \partial/\partial v$, $D_t = \partial/\partial t$ et on désigne par $N$ l'ensemble des entiers $\geqslant 0$) :

**Lemme 2.1.** *Soit $\varphi \in S(R^{n+1})$. La fonction $\tilde{\varphi}(v, t)$ est de classe $C^\infty$ pour $v \neq 0$. Pour toute fonction $\alpha(v) \in C^\infty$, telle que $\alpha(v) = 0$ au voisinage de $0$, $\alpha(v) = 1$ pour $|v|$ assez grand, on a $\alpha\tilde{\varphi} = \alpha(v)\tilde{\varphi}(v, t) \in S(R^2)$, et l'application $\varphi \to \alpha\tilde{\varphi}$ de $S(R^{n+1})$ dans $S(R^2)$ est continue.*

*Pour $v \neq 0$, et pour tout $m \in N$, on a*

$$\tilde{\varphi}(v, t) = \sum_{j=0}^{m}(\alpha_j(t) + \beta_j(t)\gamma(v))\, v^j + R_m(v, t) \,, \tag{2.5}$$

*avec:*

1° $$\alpha_j(t) = \langle A_j(x), \varphi(x, t)\rangle \,, \quad \beta_j(t) = \langle B_j(x), \varphi(x, t)\rangle \,,$$

*de sorte que les applications $\varphi \to \alpha_j$ et $\varphi \to \beta_j$ de $S(R^{n+1})$ dans $S(R)$ sont continues.*

2° *Toutes les dérivées de* $R_m(v, t)$ *d'ordre* $k \leqslant m$ *en* $v$, *et d'ordre* $j \in N$ *en* $t$, *existent et sont continues. Il existe des constantes* $C_{kjr}(\varphi)$ *telles que*

$$|D_v^k D_t^j R_m(v, t)(1 + t^2)^r| \leqslant C_{kjr}(\varphi) \mid v \mid^{m-k+\frac{1}{2}}$$

*pour tout* $(v, t) \in R^2$, $k \leqslant m$, $j \in N$, $r \in N$. *Si* $\varphi \to 0$ *dans* $S(R^{n+1})$, $C_{kjr}(\varphi) \to 0$.

Cherchons alors à prolonger l'application $M_\nu : D(\Omega) \to D(R)^2$. D'après (1.3) et la définition de $\mu_+$ et $\mu_-$, on a, pour $\varphi \in D(\Omega)$,

$$M_\nu^{\pm} \varphi(s) = \int_0^\infty \tilde{\varphi}(s t^{\frac{2}{a}}, \pm t) t^{\frac{\nu+2}{a}} dt . \tag{2.6}$$

Supposons maintenant que $\varphi$ appartienne à $S(R^{n+1})$. Pour $s \neq 0$, d'après le lemme 2.1, l'intégrale (2.6) conserve un sens si $R\nu > -(a + 2)$, et définit une fonction holomorphe de $\nu$ dans ce demi-plan. D'après (2.5) on peut écrire

$$M_\nu^{\pm} \varphi(s) = \sum_{j=0}^{m} (\langle A_{\nu j}^{\pm}, \varphi\rangle + \langle B_{\nu j}^{\pm}, \varphi\rangle \gamma(s)) s^j + F_{\nu m}^{\pm}(s) , \tag{2.7}$$

avec

$$F_{\nu m}^{\pm}(s) = \int_0^\infty R_m(s t^{\frac{2}{a}}, \pm t)\, t^{\frac{\nu+2}{a}} dt .$$

Les distributions $A_{\nu j}^{\pm}$ et $B_{\nu j}^{\pm}$ sont tempérées; on a

$$A_{\nu j}^{\pm} = \begin{cases} A_j(x) \otimes t_{\pm}^{\frac{\nu+2j+2}{a}} + \dfrac{2}{a} B_j(x) \otimes t_{\pm}^{\frac{\nu+2j+2}{a}} \log |t| , & \text{dans le 1}^{\text{er}} \text{ cas,} \\ A_j(x) \otimes t_{\pm}^{\frac{\nu+2j+2}{a}} , & \text{dans les 2}^{\text{e}} \text{ et 3}^{\text{e}} \text{ cas;} \end{cases} \tag{2.8}$$

$$B_{\nu j}^{\pm} = \begin{cases} B_j(x) \otimes t_{\pm}^{\frac{\nu+2j+2}{a}} , & \text{dans les 1}^{\text{er}} \text{ et 3}^{\text{e}} \text{ cas,} \\ B_j(x) \otimes t_{\pm}^{\frac{\nu+2j+3}{a}} , & \text{dans le 2}^{\text{e}} \text{ cas.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Comme $t_{\pm}^{\lambda}$ et $t_{\pm}^{\lambda} \log |t|$ sont fonctions méromorphes de $\lambda \in C$, les distributions $A_{\nu j}^{\pm}$ et $B_{\nu j}^{\pm}$ sont fonctions méromorphes de $\nu \in C$, et nous étendrons leur définition pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel. Les égalités (2.8) et (2.9) sont donc valables pour tout $\nu \in C$, et $A_{\nu j}^{\pm}, B_{\nu j}^{\pm} \in S'(R^{n+1})$ pour tout $\nu \in C$. Les pôles de $A_{\nu j}^{\pm}$ et $B_{\nu j}^{\pm}$ se déduisent de ceux de $t_{\pm}^{\lambda}$ et $t_{\pm}^{\lambda} \log |t|$ (cf. [4]). $A_{\nu j}^{\pm}$ a donc un pôle en $\nu = -2(j + 1) - a(k + 1)$, $k \in N$, de résidu

$$c_{-1} = a \frac{(\mp 1)^k}{k!} A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t) . \tag{2.10}$$

Ce pôle est simple, sauf dans le 1er cas si $j \geqslant \bar{n}$; le pôle est alors double et le coefficient $c_{-2}$ du développement de LAURENT est

$$c_{-2} = -2a\frac{(\mp 1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t) . \qquad (2.11)$$

Dans les 1er et 3e cas, $B_{\nu j}^{\pm}$ a un pôle simple en $\nu = -2(j+1) - a(k+1)$, $k \in N$, de résidu

$$c_{-1} = a\frac{(\mp 1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t) . \qquad (2.12)$$

Dans le 2e cas, $B_{\nu j}^{\pm}$ a un pôle simple en $\nu = -2j - 3 - a(k+1)$, $k \in N$, dont le résidu est encore donné par (2.12).

D'après le lemme 2.1, pour $s \neq 0$, la fonction $\nu \to F_{\nu m}^{\pm}(s)$ est holomorphe dans le demi-plan $R\nu > -(a + 2m + 3)$. L'égalité (2.7), avec $m$ arbitrairement grand, entraîne donc que $M_\nu^{\pm}\varphi(s)$ est prolongeable en une fonction méromorphe de $\nu \in C$. *Pour* $s \neq 0$ *et pour tout* $\nu \in C$, *nous définirons* $M_\nu^{\pm}\varphi(s)$ *par prolongement naturel.* Le lemme 2.1 montre aussi que, pour $R\nu > -$ $-(a + 2m + 3)$, $F_{\nu m}^{\pm}(s)$ est de classe $C^m$ pour $s \neq 0$, et que, lorsque $s \to 0$

$$D^k F_{\nu m}^{\pm}(s) = O(s^{m-k+\frac{1}{2}}) , \; k \leqslant m .$$

Grâce à (2.7), on en déduit le résultat suivant:

**Lemme 2.2.** *Soit* $\varphi \in S(R^{n+1})$. *Pour tout* $\nu \in C$, $M_\nu^{+}\varphi(s)$ *et* $M_\nu^{-}\varphi(s)$ *sont des fonctions de* $s \in R$ *de classe* $C^\infty$ *pour* $s \neq 0$. *Pour tout* $m \in N$ *on a*

$$M_\nu^{\pm}\varphi(s) = \sum_{j=0}^{m}(\langle A_{\nu j}^{\pm}, \varphi\rangle + \langle B_{\nu j}^{\pm}, \varphi\rangle\gamma(s))s^j + F_{\nu m}^{\pm}(s) ,$$

*avec* $F_{\nu m}^{\pm}(s) \in C^m$ *et, si* $0 \leqslant k \leqslant m$ ,

$$D^k F_{\nu m}^{\pm}(s) = O(s^{m-k+\frac{1}{2}})$$

*lorsque* $s \to 0$.

Etudions maintenant le comportement de $M_\nu^{\pm}\varphi(s)$ lorsque $|s| \to \infty$. En supposant toujours $\varphi \in S(R^{n+1})$, pour $R\nu > -(a+2)$, on déduit de (2.6)

$$M_\nu^{\pm}\varphi(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} T_\nu^{\operatorname{sgn} s}\varphi(\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) , \qquad (2.13)$$

avec

$$T_\nu^{\pm}\varphi(s) = \frac{a}{2}\int_0^\infty \tilde{\varphi}(\pm v, sv^{\frac{a}{2}}) v^{\frac{\nu+a}{2}} dv .$$

Pour $R\nu > -(a+2)$, $T_\nu^{\pm}\varphi(s)$ est une fonction $C^\infty$ de $s \in R$. On a

$$D^k T_\nu^{\pm}\varphi(s) = \frac{a}{2}\int_0^\infty D_t^k \tilde{\varphi}(\pm v, sv^{\frac{a}{2}}) v^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} dv . \qquad (2.14)$$

Le lemme 2.1 permet d'écrire

$$D^k T_\nu^\pm \varphi(0) = \frac{a}{2} \sum_{j=0}^{\infty} (\pm 1)^j \int_0^1 (\alpha_j^{(k)}(0) + \beta_j^{(k)}(0)\gamma(\pm v))\, v^{\frac{\nu + a(k+1)+2j}{2}} dv + F_m(\nu),$$

avec

$$F_m(\nu) = \frac{a}{2} \int_1^\infty D_t^k \tilde{\varphi}(\pm v, 0)\, v^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} dv + \frac{a}{2} \int_0^1 D_t^k R_m(\pm v, 0) v^{\frac{\nu+a(k+1)}{2}} dv .$$

La fonction $F_m(\nu)$ est holomorphe de $\nu$ dans le demi-plan $R\nu > -(a + ak + 2m + 3)$. Il en résulte que $D^k T_\nu^\pm \varphi(0)$ est prolongeable en une fonction méromorphe de $\nu \in C$. On peut alors écrire, pour $R\nu > -(a + 2)$,

$$T_\nu^\pm \varphi(s) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{s^k}{k!} D^k T_\nu^\pm \varphi(0) + \int_0^s \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^m T_\nu^\pm \varphi(t) dt , \qquad (2.15)$$

où $D^m T_\nu^\pm \varphi(t)$, donné par (2.14), est fonction holomorphe de $\nu$ dans $R\nu > -(a + am + 2)$. Par conséquent, $T_\nu^\pm \varphi(s)$ est prolongeable en une fonction méromorphe de $\nu \in C$. Pour tout $\nu \in C$, définissons $T_\nu^\pm \varphi(s)$ par prolongement naturel; avec cette définition, il résulte de (2.15) que $T_\nu^\pm \varphi$ est une fonction $C^\infty$ de $s \in R$, pour tout $\nu \in C$.

Pour tout $j \in N$, posons

$$k_\nu(j) = -\frac{\nu + a + 2j + 2}{a}, \qquad (2.16)$$

$$k'_\nu(j) = \begin{cases} k_\nu(j), \text{ dans les } 1^{\text{er}} \text{ et } 3^{\text{e}} \text{ cas,} \\ -\dfrac{\nu + a + 2j + 3}{a}, \quad \text{dans le } 2^{\text{e}} \text{ cas.} \end{cases} \qquad (2.17)$$

Soient d'autre part $N_\nu$ et $N'_\nu$ les parties de l'ensemble $N$ des entiers $\geqslant 0$ définies par

$$N_\nu = \{j \in N;\ k_\nu(j) \in N\}, \qquad (2.18)$$

$$N'_\nu = \{j \in N;\ j \geqslant \bar{n},\ k'_\nu(j) \in N\}. \qquad (2.19)$$

Pour tout $\nu \in C, N_\nu$ et $N'_\nu$ sont finis. Chacun des ensembles $N_\nu$ et $N'_\nu$ est vide sauf pour une suite discrète de valeurs négatives de $\nu$.

En tenant compte des égalités (2.10) à (2.12), par prolongement naturel de la relation (2.13), on obtient:

**Lemme 2.3.** *Soit* $\varphi \in S(R^{n+1})$. *Pour* $s \neq 0$ *on a*

$$M_\nu^\pm \varphi(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} T_\nu^{\operatorname{sgn} s} \varphi(\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) + \log|s| \sum_{j \in N_\nu} (\pm 1)^{k_\nu(j)} c_j s^j + \gamma(s) \log|s| \sum_{j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} c'_j s^j , \qquad (2.20)$$

*avec*
$$c_j = -\frac{a}{2}\frac{(-1)^k}{k!}\langle A_j(x)\otimes\delta^{(k)}(t),\varphi\rangle\,,\ k=k_\nu(j)\,,\ j\in N_\nu\,,$$
$$c'_j = -\frac{a}{\alpha}\frac{(-1)^k}{k!}\langle B_j(x)\otimes\delta^{(k)}(t),\varphi\rangle,\ k=k'_\nu(j)\,,\ j\in N'_\nu\,,$$
$\alpha = 4$ *dans le* 1er *cas*, $\alpha = 2$ *dans les* 2e *et* 3e *cas.* $T^+_\nu\varphi$ *et* $T^-_\nu\varphi$ *sont des fonctions* $C^\infty$ *de* $s\in R$.

L'application $M_\nu$ qui, à toute fonction $\varphi\in S(R^{n+1})$, fait correspondre le couple $M_\nu\varphi = (M^+_\nu\varphi, M^-_\nu\varphi)$ de fonctions d'une variable $s$, de classe $C^\infty$ pour $s\neq 0$, est un prolongement de l'application $M_\nu\colon D(\Omega)\to D(R)^2$. Nous allons montrer que l'image de $D(R^{n+1})$ par $M_\nu$ est un espace vectoriel $K_\nu$ caractérisé par les propriétés énoncées dans les lemmes 2.2 et 2.3.

## 3. Espaces $K_\nu$ et $K'_\nu$

Désignons par $K_\nu$ l'espace vectoriel sur $C$ formé des couples $\varphi = (\varphi^+,\varphi^-)$ de fonctions d'une variable réelle $s$, ayant les propriétés suivantes:

1° $\varphi^+(s)$ et $\varphi^-(s)$ sont de classe $C^\infty$ pour $s\neq 0$.

2° Lorsque $s\to 0$, $\varphi^+$ et $\varphi^-$ ont des développements asymptotiques de la forme
$$\varphi^\pm(s)\sim\sum_{j=0}^{\infty}(\langle\alpha^\pm_j,\varphi\rangle+\langle\beta^\pm_j,\varphi\rangle\gamma(s))s^j\,, \tag{3.1}$$
où $\gamma(s)$ est la fonction définie par (2.3), les $\langle\alpha^\pm_j,\varphi\rangle$ et $\langle\beta^\pm_j,\varphi\rangle$ étant des nombres complexes, $\langle\beta^\pm_j,\varphi\rangle = 0$ si $j<\bar{n}$. Les dérivées successives de $\varphi^+$ et $\varphi^-$ admettent les développements déduits de (3.1) par dérivation terme à terme.

3° Pour $s\neq 0$,
$$\varphi^\pm(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}}\chi^{\operatorname{sgn} s}\varphi(\pm|s|^{-\frac{a}{2}}) + \log|s|\sum_{j\in N_\nu}(\pm 1)^{k_\nu(j)}\langle\gamma_j,\varphi\rangle s^j +$$
$$+\gamma(s)\log|s|\sum_{j\in N'_\nu}(\pm 1)^{k'_\nu(j)}\langle\gamma'_j,\varphi\rangle s^j\,, \tag{3.2}$$
avec les définitions (2.16) à (2.19), $\chi^+\varphi$ et $\chi^-\varphi$ étant des fonctions $C^\infty$ de $s\in R$, $\langle\gamma_j,\varphi\rangle$ et $\langle\gamma'_j,\varphi\rangle\in C$.

Munissons $K_\nu$ de la structure d'espace vectoriel topologique définie par les semi-normes
$$p^\pm_m(\varphi) = \sum_{j=0}^{m}|\langle\beta^\pm_j,\varphi\rangle| + \sup_{\substack{|s|\leq 1\\ k\leq m}}|D^k(\varphi^\pm(s)-\gamma(s)\sum_{j=0}^{m}\langle\beta^\pm_j,\varphi\rangle s^j)|\,,$$

$$q_m^{\pm}(\varphi) = \sup_{\substack{|s|\leq 1\\ k\leq m}} |D^k \chi^{\pm} \varphi(s)| \,, \quad q(\varphi) = \sum_{j\in N_\nu} |\langle \gamma_j, \varphi\rangle| + \sum_{j\in N'_\nu} |\langle \gamma'_j, \varphi\rangle| \,,$$

où $m \in N$. On vérifie sans peine que $K_\nu$ est alors un espace de Fréchet (cf. [2]). Il est clair que $D(R)^2 \subset K_\nu$, l'injection étant continue.

D'autre part, d'après les lemmes 2.2 et 2.3, si $\varphi \in S(R^{n+1})$, $M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi) \in K_\nu$. De plus, en vertu du lemme 2.1, $M_\nu \varphi \to 0$ dans $K_\nu$ si $\varphi \to 0$ dans $S(R^{n+1})$. On a donc:

**Proposition 3.1.** *L'application* $M_\nu: D(\Omega) \to D(R)^2$ *admet un prolongement linéaire continu* $M_\nu: S(R^{n+1}) \to K_\nu$.

Nous noterons encore $M_\nu$ la restriction à $D(R^{n+1})$ de l'application $M_\nu: S(R^{n+1}) \to K_\nu$. Nous aurons besoin du lemme suivant:

**Lemme 3.1.** *Soit $S$ le sous-espace vectoriel fermé de $K_\nu$ formé des éléments $\varphi$ tels que $\langle \beta_j^+, \varphi\rangle = \langle \beta_j^-, \varphi\rangle = 0$, pour tout entier $j \geqslant \bar{n}$. Il existe une application linéaire continue $L_\nu$ de $S$ dans $D(R^{n+1})$ telle que l'application composée $M_\nu L_\nu$ soit égale à l'identité. On a $D(R)^2 \subset S$ et l'image de $D(R)^2$ par $L_\nu$ est contenue dans $D(\Omega)$.*

Soit en effet $\varphi \in S$. En vertu de (3.1), on a $\varphi^+$ et $\varphi^- \in C^\infty$. D'après Tengstrand ([13], lemme 4.3), il existe $\vartheta_j \in D(R^n)$, pour tout $j \in N$, tel que

$$\langle A_k, \vartheta_j\rangle = \delta_{kj}, \langle B_k, \vartheta_j\rangle = 0, \, k \in N \,,$$

et $\omega_j \in D(R^n)$, pour tout $j \in N, j \geqslant \bar{n}$, tel que

$$\langle A_k, \omega_j\rangle = 0 \,, \langle B_k, \omega_j\rangle = \delta_{kj}, \, k \in N \,.$$

Soit $\varrho(t) \in D(R)$ n'ayant aucune dérivée nulle à l'origine. D'après le lemme 2.3, il existe des constantes $\lambda_j$, pour $j \in N_\nu$, et $\mu_j$, pour $j \in N'_\nu$, telles que, si

$$\Phi_3(x, t) = \sum_{j\in N_\nu} \lambda_j \langle \gamma_j, \varphi\rangle \, \vartheta_j(x)\varrho(t) + \sum_{j\in N'_\nu} \mu_j \langle \gamma'_j, \varphi\rangle \, \omega_j(x)\varrho(t) \,,$$

on ait $\langle \gamma_j, M_\nu \Phi_3\rangle = \langle \gamma_j, \varphi\rangle$, pour tout $j \in N_\nu$, et $\langle \gamma'_j, M_\nu \Phi_3\rangle = \langle \gamma'_j, \varphi\rangle$, pour tout $j \in N'_\nu$. L'application $\varphi \to \Phi_3$ de $S$ dans $D(R^{n+1})$ est linéaire continue.

Soient $\alpha_1(s)$ et $\alpha_2(s) \in C^\infty$, telles que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1(s)$ nulle pour $|s| > 2$ et $\alpha_2(s)$ nulle pour $|s| < 1$. Les éléments $\varphi_1 = \alpha_1(\varphi - M_\nu \Phi_3)$ et $\varphi_2 = \alpha_2(\varphi - M_\nu \Phi_3)$ appartiennent à $K_\nu$. Soit $\alpha \in D(]\,0, 1\,[)$ telle que

$$\int_0^\infty \alpha(t) t^{\frac{\nu+2}{a}} dt = 1 \,,$$

et soit $\beta(x) \in D(R^n)$, nulle au voisinage de l'origine, telle que $\tilde{\beta}(v) = 1$ pour $|v| < 3$. Posons

$$\Phi_1(x, t) = \beta(x)[\alpha(t)\varphi_1^+(u\,|t|^{-\frac{2}{a}}) + \alpha(-t)\,\varphi_1^-(u\,|t|^{-\frac{2}{a}})]\,.$$

On a $\Phi_1 \in D(R^{n+1})$ et, d'après (2.6), $M_\nu \Phi_1 = \varphi_1$. De plus, l'application $\varphi \to \Phi_1$ est linéaire continue de $S$ dans $D(R^{n+1})$. D'après (3.2), on a

$$\varphi_2^\pm(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}}\,\psi^{\operatorname{sgn} s}(\pm\,|s|^{-\frac{a}{2}})\,,$$

où $\psi^+$ et $\psi^-$ appartiennent à $D(R)$. Soit $\vartheta \in D(]0, 1[)$ telle que

$$\int_0^\infty \vartheta(t^{\frac{2}{a}})\,t^{\frac{\nu+2}{a}}\,dt = 1.$$

Posons

$$\Phi_2(x, t) = \beta(x)[\vartheta(u)\psi^+(t\,|u|^{-\frac{a}{2}}) + \vartheta(-u)\psi^-(t\,|u|^{-\frac{a}{2}})]\,.$$

On a $\Phi_2 \in D(R^{n+1})$ et, d'après (2.6), $M_\nu \Phi_2 = \varphi_2$. L'application $\varphi \to \Phi_2$ de $S$ dans $D(R^{n+1})$ est linéaire continue. Posons alors $L_\nu\varphi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$. L'application $L_\nu : S \to D(R^{n+1})$ est donc linéaire continue et l'on a $M_\nu L_\nu \varphi = \varphi$, pour tout $\varphi \in S$. En outre, si $\varphi \in D(R)^2$, on a $\langle \gamma_j, \varphi\rangle = 0$ pour $j \in N_\nu$, $\langle \gamma'_j, \varphi\rangle = 0$ pour $j \in N'_\nu$ et $\psi^\pm(s) = 0$ au voisinage de l'origine, de sorte que $L_\nu\varphi \in D(\Omega)$, c. q. f. d.

**Proposition 3.2.** *L'application* $M_\nu : D(R^{n+1}) \to K_\nu$ *est surjective.*

Soit en effet $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\nu$. D'après (2.9) et (2.4), il résulte d'un théorème classique de BOREL, qu'il existe $\Phi \in D(R^{n+1})$ de la forme

$$\Phi(x, t) = \psi_+(x)\alpha(t) + \psi_-(x)\alpha(-t)\,,$$

avec $\psi_+$ et $\psi_- \in D(R^n)$, $\alpha \in D(]\,0, 1[)$, $\alpha(t) \geqslant 0$, telle que $\langle B^\pm_{\nu j}, \Phi\rangle = \langle \beta^\pm_j, \varphi\rangle$, pour tout $j \geqslant \bar{n}$. En vertu du lemme 2.2, on a donc $\langle \beta^\pm_j, M_\nu\Phi\rangle = \langle \beta^\pm_j, \varphi\rangle$ pour tout $j \geqslant \bar{n}$, de sorte que $\varphi - M_\nu\Phi = \varphi_1$ appartient au sous-espace $S$ du lemme 3.1. Si $\Phi_1 = L_\nu\varphi_1$ on a $M_\nu(\Phi + \Phi_1) = M_\nu\Phi + \varphi_1 = \varphi$, c. q. f. d.

Soit $K'_\nu$ le dual de $K_\nu$. Les coefficients du développement (3.1) définissent des éléments $\alpha^+_j$, $\alpha^-_j$ $(j \in N)$ et $\beta^+_k$, $\beta^-_k$ $(\bar{n} \leqslant k \in N)$ de $K'_\nu$. De même les coefficients de (3.2) définissent des éléments $\gamma_j (j \in N_\nu)$ et $\gamma'_j (j \in N'_\nu)$ de $K'_\nu$. Nous considérerons également les éléments $\varepsilon^+_j$ et $\varepsilon^-_j$ de $K'_\nu$ donnés par $\langle \varepsilon^\pm_j, \varphi\rangle = D^j\chi^\pm\varphi(0) (j \in N)$, pour $\varphi \in K_\nu$.

Comme l'injection $D(R)^2 \subset K_\nu$ est continue, à tout élément $h \in K'_\nu$, on peut associer deux distributions $h_+, h_- \in D'(R)$ telles que

$$\langle h, \varphi\rangle = \langle h_+, \varphi^+\rangle + \langle h_-, \varphi^-\rangle\,,$$

pour tout $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in D(R)^2$. Mais $D(R)^2$ n'étant pas dense dans $K_\nu$, $h_+$ et $h_-$ ne déterminent pas $h$. On vérifie que si $h_+ = h_- = 0$, $h$ est combinaison linéaire des éléments $\beta_j^+$, $\beta_j^-$ $(\bar{n} \leqslant j \in N)$, $\gamma_j (j \in N_\nu)$, $\gamma'_j (j \in N'_\nu)$, $\varepsilon_k^+$, $\varepsilon_k^-$ $(k \in N)$.

Soit $M'_\nu : K'_\nu \to D'(R^{n+1})$ la transposée de l'application $M_\nu : D(R^{n+1}) \to K_\nu$. Des propositions 3.1 et 3.2 résulte immédiatement:

**Proposition 3.3.** *L'application linéaire continue $M'_\nu : K'_\nu \to D'(R^{n+1})$ est injective. Son image $M'_\nu K'_\nu$ est contenue dans $S'(R^{n+1})$.*

## 4. Eléments de $H_\nu$ nuls dans $\Omega$

Dans l'espace $R^n$, considérons les fonctions localement intégrables $u_+^\nu = Y(u) u^\nu$ et $u_-^\nu = Y(-u) |u|^\nu$, pour $R\nu > -1$. Si $\varphi \in D(R^n)$, on a, d'après (2.1),

$$\langle u_\pm^\nu, \varphi \rangle = \int_{R^n} Y(\pm u) \mid u \mid^\nu \varphi(x) dx = \int_0^\infty v^\nu \tilde{\varphi}(\pm v) dv .$$

Compte tenu du développement (2.2), on en déduit que $u_+^\nu$ et $u_-^\nu$ sont prolongeables en fonctions méromorphes de $\nu \in C$ à valeurs dans $D'(R^n)$, avec pôles simples ou doubles $\nu = -(k+1)$ et $\nu = -\left(\frac{n}{2} + k\right)$, $k \in N$ (cf. [4], chap. III, § 2); les coefficients $c_{-2}$ et $c_{-1}$ des développements de Laurent s'expriment simplement à l'aide des distributions $A_j$ et $B_j$. Nous définirons $u_+^\nu$ et $u_-^\nu$ pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel (voir § 2); ce sont des distributions invariantes par le groupe $G$. Si $\nu$ est un entier de signe quelconque, nous poserons

$$u^\nu = u_+^\nu + (-1)^{|\nu|} u_-^\nu .$$

Pour $\lambda > 0$, on a, lorsque $\nu \neq -1, -2, \ldots$ et $\nu \neq -\frac{n}{2}, -\frac{n}{2} - 1, \ldots$

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu} u_\pm^\nu(x) . \tag{4.1}$$

Dans le 1<sup></sup>er cas, si $\nu = -(k+1)$, $k \in N$,

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu}[u_\pm^\nu(x) + 2 \log \lambda (\pm 1)^k A_k(x) - 2 \log^2 \lambda (\pm 1)^k B_k(x)] . \tag{4.2}$$

Dans le 2e cas, si $\nu = -(k+1)$, $k \in N$,

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu}[u_\pm^\nu(x) + 2 \log \lambda (\pm 1)^k A_k(x)] , \tag{4.3}$$

et si $\nu = -\left(\frac{n}{2} + k\right)$, $k \in N$,

$$u_\pm^\nu(\lambda x) = \lambda^{2\nu}[u_\pm^\nu(x) + 2 \log \lambda \, Y(\pm 1) B_{\bar{n}+k}(x)] . \tag{4.4}$$

Enfin, dans le 3e cas, si $\nu = -(k+1)$, $k \in N$,

$$u_{\pm}^{\nu}(\lambda x) = \lambda^{2\nu}[u_{\pm}^{\nu}(x) + 2 \log \lambda (\pm 1)^k A_k(x) + 2 \log \lambda Y(\pm 1) B_k(x)]. \tag{4.5}$$

D'autre part, on vérifie facilement que

$$A_j(\lambda x) = \begin{cases} \lambda^{-2(j+1)}[A_j(x) - 2 \log \lambda B_j(x)], & \text{dans le 1}^{\text{er}} \text{ cas}, \\ \lambda^{-2(j+1)} A_j(x), & \text{dans les 2}^{\text{e}} \text{ et 3}^{\text{e}} \text{ cas}; \end{cases} \tag{4.6}$$

$$B_j(\lambda x) = \begin{cases} \lambda^{-2(j+1)} B_j(x), & \text{dans les 1}^{\text{er}} \text{ et 3}^{\text{e}} \text{ cas}, \\ \lambda^{-(2j+3)} B_j(x), & \text{dans le 2}^{\text{e}} \text{ cas}. \end{cases} \tag{4.7}$$

Soit alors $f \in H_\nu$, une distribution nulle dans $\Omega$. Dans $|x| \neq 0$, $f$ est à support dans $t = 0$, donc est de la forme $\Sigma g_k(x) \otimes \delta^{(k)}(t)$ (cf. SCHWARTZ [12], t. 1, th. 36, p. 101), avec $g_k(x) \in D'(R^n)$, invariante par $G$ et homogène de degré $\nu + a(k+1)$. Par suite, il existe des constantes $c_k^+$ et $c_k^-$ telles que

$$g_k(x) = c_k^+ u_+^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} + c_k^- u_-^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} + h_k(x),$$

où $h_k(x)$ est une distribution sur $R^n$, invariante par le groupe $G$, nulle dans l'ouvert $u(x) \neq 0$. Il en résulte (cf. [8], [11] et [13]) que $h_k(x)$ est combinaison linéaire des $A_j(x)$ et des $B_j(x)$. En exprimant que $g_k(x)$ est homogène de degré $\nu + a(k+1)$, compte tenu des formules (4.1) à (4.6), on voit que, dans $|x| \neq 0$,

$$g_k(x) = \begin{cases} \alpha_k u_+^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} + \beta_k u_-^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}}, & \text{si } k \neq k_\nu(j) \text{ pour tout } j \in N_\nu, \\ \alpha_k u^{-(j+1)} + \beta_k A_j(x), & \text{si } k = k_\nu(j), j \in N_\nu, \end{cases} \tag{4.8}$$

$\alpha_k$ et $\beta_k$ étant des constantes. Ainsi, dans $|x| \neq 0$, $f$ est égale à

$$f_1 = \Sigma g_k(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \tag{4.9}$$

où les $g_k$ sont de la forme (4.8), la somme (4.9) ne comportant qu'un nombre fini de termes.

Dans $t \neq 0$, $f$ est à support dans $|x| = 0$, donc est de la forme $\Sigma P_k(\partial/\partial x)\delta(x) \otimes h_k(t)$ (SCHWARTZ, loc. cit.), où $P_k$ est un polynôme homogène de degré $k$. Comme $f$ est homogène de degré $\nu$, il faut que $h_k(t)$ soit homogène de degré $\dfrac{\nu + n + k}{a}$ au sens habituel, donc que dans $t \neq 0$

$$h_k(t) = a_k^+ t_+^{\frac{\nu + n + k}{a}} + a_k^- t_-^{\frac{\nu + n + k}{a}},$$

avec $a_k^+$ et $a_k^- \in C$. D'autre part, pour que $f$ soit invariante, il faut que $P_k(\partial/\partial x)$ soit, à un facteur constant près, un dalembertien itéré. D'après les égalités (2.4) et (2.9), on a donc $f = f_2$ dans $t \neq 0$, avec

$$f_2 = \Sigma a_j^+ B_{\nu j}^+ + \Sigma a_j^- B_{\nu j}^- , \tag{4.10}$$

les sommes étant finies, $a_j^+, a_j^- \in C$. Remarquons que, si $\lambda > 0$,

$$B_{\nu j}^{\pm}(\lambda x, \lambda^a t) - \lambda^\nu B_{\nu j}^{\pm}(x, t) = \begin{cases} 0, \text{ si } j \notin N_\nu', \\ a\lambda^\nu \log \lambda \dfrac{(\mp 1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \text{ si } j \in N_\nu', \ k = k_\nu'(j). \end{cases} \tag{4.11}$$

Posons alors $f_3 = f - f_1 - f_2$, avec (4.9) et (4.10). Il résulte de ce qui précède que $f_3$ est une distribution invariante, nulle dans le complémentaire de l'origine, donc que $f_3$ est combinaison linéaire des distributions $B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t)$, $j, k \in N$, $j \geqslant \bar{n}$. Enfin, à l'aide des formules (4.1) à (4.7) et (4.11), en exprimant que $f$ est homogène de degré $\nu$, on obtient le résultat suivant:

**Proposition 4.1.** *Une base de l'espace vectoriel des distributions de $H_\nu$ nulles dans $\Omega$ est formée des éléments*

$$B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \ j \in N_\nu', \ k = k_\nu'(j),$$

$$B_{\nu j}^+, \ B_{\nu j}^-, \ \bar{n} \leqslant j \in N, \ j \notin N_\nu',$$

*et, suivant le cas envisagé, des éléments*

1$^{er}$ *cas:*

$$2k! B_{\nu j}^{\pm} + a(\mp 1)^k A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \ j \in N_\nu', \ k = k_\nu'(j),$$

$$u_{\pm}^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \ k \neq k_\nu(j) \ \textit{pour tout} \ j \in N_\nu, \ k \in N,$$

$$u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t), \ j \in N_\nu, \ k = k_\nu(j),$$

$$A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \ j \in N_\nu - N_\nu', \ k = k_\nu(j);$$

2$^e$ *cas:*

$$2k! B_{\nu j}^{\pm} - a(\mp 1)^k u_+^{-\left(j + \frac{3}{2}\right)} \otimes \delta^{(k)}(t), \ j \in N_\nu', \ k = k_\nu'(j),$$

$$u_+^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \ N \ni k \neq \begin{cases} k_\nu(j) \ \textit{pour tout} \ j \in N_\nu, \\ k_\nu'(j) \ \textit{pour tout} \ j \in N_\nu', \end{cases}$$

$$u_-^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \ N \ni k \neq k_\nu(j) \ \textit{pour tout} \ j \in N_\nu,$$

$$u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t), \ j \in N_\nu, \ k = k_\nu(j),$$

$$A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \ j \in N_\nu, \ k = k_\nu(j);$$

3$^e$ *cas:*

$$2k! B_{\nu j}^{\pm} - a(\mp 1)^k u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t), \ j \in N_\nu', \ k = k_\nu'(j),$$

$$u_{\pm}^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t), \ N \ni k \neq k_\nu(j) \ \textit{pour tout} \ j \in N_\nu,$$

$$u^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t),\ j \in N_\nu - N'_\nu,\ k = k_\nu(j)\,,$$

$$A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t),\ j \in N_\nu,\ k = k_\nu(j).$$

Des lemmes 2.2 et 2.3 et des relations (2.14), (3.1) et (3.2) on déduit

$$M'_\nu \beta_j^\pm = B_{\nu j}^\pm\,, \tag{4.12}$$

$$M'_\nu \gamma_j = -\frac{a}{2}\frac{(-1)^k}{k!} A_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t)\,,\ k = k_\nu(j)\,,$$

$$M'_\nu \gamma'_j = -\frac{a}{\alpha}\frac{(-1)^k}{k!} B_j(x) \otimes \delta^{(k)}(t)\,,\ k = k'_\nu(j)\,,$$

avec $\alpha = 4$ dans le 1er cas, $\alpha = 2$ dans les 2e et 3e cas,

$$M'_\nu \varepsilon_k^\pm = \frac{a}{2}(-1)^k u_\pm^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t)\,. \tag{4.13}$$

Ces égalités et la proposition 4.1 entraînent:

**Proposition 4.2.** *Les distributions de $H_\nu$ nulles dans $\Omega$ sont contenues dans $M'_\nu K'_\nu$.*

## 5. Espace $H_\nu$, représentation paramétrique de $H_\nu$

Cherchons à quelle condition l'image $M'_\nu h$ d'un élément $h$ de $K'_\nu$ appartient à $H_\nu$.

Soient $\varphi \in D(R^{n+1})$ et $f \in D'(R^{n+1})$. Si $L \in G$, on a $\langle f(Lx, t), \varphi(x, t)\rangle = \langle f(x, t), \psi_L(x, t)\rangle$, avec $\psi_L(x, t) = \varphi(L^{-1}x, t)$. Or $\tilde{\psi}_L(v, t) = \tilde{\varphi}(v, t)$, de sorte que, d'après la définition de $M_\nu$, $M_\nu\varphi = M_\nu\psi_L$. Si $h \in K'_\nu$ on a donc $\langle M'_\nu h, \varphi\rangle = \langle h, M_\nu\varphi\rangle = \langle h, M_\nu\psi_L\rangle = \langle M'_\nu h, \psi_L\rangle$. Par conséquent, $M'_\nu h$ *est une distribution invariante sur* $R^{n+1}$.

Si maintenant $\lambda$ est un nombre $> 0$, on a $\langle f(\lambda x, \lambda^a t), \varphi(x, t)\rangle = \langle f(x, t), \varphi_\lambda(x, t)\rangle$, avec $\varphi_\lambda(x, t) = \lambda^{-(n+a)}\varphi(\lambda^{-1}x, \lambda^{-a}t)$, et d'après (2.1), $\tilde{\varphi}_\lambda(v, t) = \lambda^{-(2+a)}\tilde{\varphi}(\lambda^{-2}v, \lambda^{-a}t)$. Pour $\mathcal{R}\nu > -(a+2)$, la définition (2.6) donne donc $M_\nu\varphi_\lambda = \lambda^\nu M_\nu\varphi$. Par prolongement naturel de cette égalité, en tenant compte des formules (2.7) et (2.10) à (2.12), on obtient, pour tout $\nu \in C$,

$$\begin{aligned} M_\nu^\pm\varphi_\lambda(s) = \lambda^\nu\Bigg[ & M_\nu^\pm\varphi(s) + a\log\lambda \sum_{j\in N_\nu}\frac{(\mp 1)^{k_\nu(j)}}{k_\nu(j)!}\langle A_j(x)\otimes\delta^{(k_\nu(j))}(t), \varphi\rangle s^j + \\ & + (\alpha(\lambda) + \gamma(s))\,a\log\lambda \sum_{j\in N'_\nu}\frac{(\mp 1)^{k'_\nu(j)}}{k'_\nu(j)!}\langle B_j(x)\otimes\delta^{(k'_\nu(j))}(t), \varphi\rangle s^j\Bigg], \end{aligned} \tag{5.1}$$

avec $\alpha(\lambda) = -\log\lambda$ dans le 1er cas, $\alpha(\lambda) = 0$ dans les 2e et 3e cas.

Comme les distributions $A_j(x) \otimes \delta^{(k_\nu(j))}(t)$, $j \in N_\nu$ et $B_j(x) \otimes \delta^{(k'_\nu(j))}(t)$, $j \in N'_\nu$ sont linéairement indépendantes (cf. [13]), il résulte d'abord de (5.1) que

$$\sigma_j = \left(s^j, (-1)^{k_\nu(j)} s^j\right), j \in N_\nu, \tag{5.2}$$

et

$$\tau_j = \left(\gamma(s) s^j, (-1)^{k'_\nu(j)} \gamma(s) s^j\right), j \in N'_\nu, \tag{5.3}$$

sont des éléments de $K_\nu$. Il est clair que ces éléments sont linéairement indépendants. Soit $X_\nu$ leur ensemble:

$$X_\nu = \{\sigma_j ; j \in N_\nu\} \cup \{\tau_j ; j \in N'_\nu\} . \tag{5.4}$$

D'autre part, pour que l'image $M'_\nu h$ de $h \in K'_\nu$ soit homogène de degré $\nu$, il faut et il suffit que

$$\langle M'_\nu h, \varphi_\lambda\rangle = \langle h, M_\nu \varphi_\lambda\rangle = \lambda^\nu \langle h, M_\nu \varphi\rangle$$

pour tout $\varphi \in D(R^{n+1})$ et pour tout $\lambda > 0$; d'après (5.1) on a donc:

**Proposition 5.1.** *Soit $h \in K'_\nu$. Pour que $M'_\nu h \in H_\nu$, il faut et il suffit que $h \in H_\nu$, $H_\nu$ étant le sous-espace vectoriel fermé de $K'_\nu$ défini par les relations*

$$\langle h, \varphi\rangle = 0, \quad \textit{pour tout} \quad \varphi \in X_\nu ,$$

*avec* (5.4).

$H_\nu$ est donc de codimension finie dans $K'_\nu$ (cf. [1], § 4, th. 1):

$$\operatorname{codim} H_\nu = \operatorname{card} N_\nu + \operatorname{card} N'_\nu .$$

D'après (5.2), on a, pour $j \in N_\nu$,

$$\langle \alpha_k^\pm , \sigma_j\rangle = (\pm 1)^{k_\nu(j)} \delta_{kj}, \ k \in N, \tag{5.5}$$

$$\langle \beta_k^\pm , \sigma_j\rangle = 0, \ \bar{n} \leqslant k \in N. \tag{5.6}$$

On peut écrire, pour $s \neq 0$, $j \in N_\nu$, $k = k_\nu(j)$,

$$\sigma_j^\pm = (\pm 1)^{k_\nu(j)} s^j = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} (\operatorname{sgn} s)^j (\pm |s|^{-\frac{a}{2}})^k .$$

On en déduit $\chi^\pm \varphi(s) = (\pm 1)^j s^k$, et

$$\langle \gamma_i, \sigma_j\rangle = 0, \ i \in N_\nu, \tag{5.7}$$

$$\langle \gamma'_i, \sigma_j\rangle = 0, \ i \in N'_\nu, \tag{5.8}$$

$$\langle \varepsilon_i^\pm , \sigma_j\rangle = (\pm 1)^j k! \, \delta_{ik}, \ k = k_\nu(j), \ i \in N. \tag{5.9}$$

La définition (5.3) donne, pour $j \in N'_\nu$,

$$\langle \alpha_k^\pm , \tau_j\rangle = 0, \ k \in N, \tag{5.10}$$

$$\langle \beta_k^\pm , \tau_j\rangle = (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \delta_{kj}, \ \bar{n} \leqslant k \in N. \tag{5.11}$$

D'autre part, pour $s \neq 0$, on a dans le 1er cas

$$\tau_j^{\pm} = \log |s| (\pm 1)^{k'_\nu(j)} s^j ,$$

et dans les 2e et 3e cas,

$$\tau_j^{\pm} = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} Y(s)(\pm |s|^{-\frac{a}{2}})^{k'_\nu(j)} .$$

On en déduit, d'après (3.2),

$$\langle \gamma_i, \tau_j \rangle = \begin{cases} \delta_{ij}, & \text{dans le 1}^{\text{er}} \text{ cas,} \\ 0, & \text{dans les 2}^{\text{e}} \text{ et 3}^{\text{e}} \text{ cas,} \end{cases} \quad i \in N_\nu, \tag{5.12}$$

$$\langle \gamma'_i, \tau_j \rangle = 0, \ i \in N'_\nu. \tag{5.13}$$

Dans le 1er cas,

$$\langle \varepsilon_i^{\pm}, \tau_j \rangle = 0, \ i \in N; \tag{5.14}$$

dans les 2e et 3e cas,

$$\langle \varepsilon_i^{\pm}, \tau_j \rangle = Y(\pm 1) k! \, \delta_{ik}, \ k = k'_\nu(j), \ i \in N . \tag{5.15}$$

Dans un espace vectoriel, désignons par $[e_i; i \in J]$ le sous-espace vectoriel engendré par les éléments $e_i$, $i \in J$, et notons $\oplus$ une somme directe topologique. Avec ces notations, la proposition 5.1 et les formules (5.5), (5.6), (5.10) et (5.11) entraînent (cf. [2], chap. I, § 2, prop. 3)

$$K'_\nu = H_\nu \oplus [\alpha_j^+ ; j \in N_\nu] \oplus [\beta_j^+ ; j \in N'_\nu] .$$

De même, les formules (5.6), (5.9), (5.11), (5.14) et (5.15) donnent

$$K'_\nu = H_\nu \oplus [\varepsilon^-_{k_\nu(j)} ; j \in N_\nu] \oplus [\beta_j^+ ; j \in N'_\nu] . \tag{5.16}$$

Le théorème suivant montre que l'application $M'_\nu : H_\nu \to \mathsf{H}_\nu$ fournit une représentation paramétrique de $\mathsf{H}_\nu$ :

**Théorème 5.1.** *L'application linéaire continue $M'_\nu : K'_\nu \to \mathsf{D}'(R^{n+1})$ induit un isomorphisme vectoriel de $H_\nu$ sur $\mathsf{H}_\nu$.*

En effet, on sait déjà que $M'_\nu$ est injective (prop. 3.3). Montrons que $M'_\nu$ est surjective. Soit $f \in \mathsf{H}_\nu$. D'après la proposition 1.1, il existe $h_+$ et $h_- \in \mathsf{D}'(R)$ tels que $\langle f, \Phi \rangle = \langle h_+, M_\nu^+ \Phi \rangle + \langle h_-, M_\nu^- \Phi \rangle$, pour tout $\Phi \in \mathsf{D}(\Omega)$. Soit $h_0$ la forme linéaire sur $\mathsf{D}(R)^2$ définie par $\langle h_0, \varphi \rangle = \langle h_+, \varphi^+ \rangle + \langle h_-, \varphi^- \rangle$, pour tout $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in \mathsf{D}(R)^2$. En utilisant l'application $L_\nu$ du lemme 3.1, on a $\langle h_0, \varphi \rangle = \langle f, L_\nu \varphi \rangle$ pour tout $\varphi \in \mathsf{D}(R)^2$, d'où il résulte que $h_0$ est une forme linéaire continue pour la topologie induite par $K_\nu$ sur $\mathsf{D}(R)^2$. L'adhérence de $\mathsf{D}(R)^2$ dans $K_\nu$, et $X_\nu$, ont leur intersection égale à $\{0\}$. En effet, les éléments de $\mathsf{D}(R)^2$ annulent les formes linéaires continues $\beta_k^+$ et $\varepsilon_k^+$, alors que $\langle \beta_k^+, \sigma_j \rangle = 0$, $\langle \beta_k^+, \tau_j \rangle = \delta_{kj}$, $\langle \varepsilon_k^+, \sigma_j \rangle = k! \, \delta_{k \, k_\nu(j)}$ (formules (5.6), (5.11) et (5.9)). Par conséquent, d'après [2] (chap. I, § 2, prop. 3) et le théorème de HAHN-BANACH ([2], chap. II), il est possible de prolonger $h_0$ en une forme linéaire continue sur $K_\nu$, nulle sur $X_\nu$, donc en un élément $h_1$ de $H_\nu$. Soit alors $f_1 = M'_\nu h_1$; on a $f_1 \in H_\nu$ (prop. 5.1), de sorte que $f - f_1 \in H_\nu$. Si $\Phi \in D(\Omega)$, on a $\langle f_1, \Phi\rangle = \langle h_1, M_\nu \Phi\rangle = \langle h_0, M_\nu \Phi\rangle = \langle f, \Phi\rangle$, puisque $M_\nu \Phi \in D(R)^2$. Ainsi $f - f_1$ est un élément de $H_\nu$ nul dans $\Omega$. Les propositions 4.2 et 5.1 impliquent que $f - f_1 \in M'_\nu H_\nu$, donc $f \in M'_\nu H_\nu$, c. q. f. d.

En particulier, en vertu de la proposition 3.3, $H_\nu \subset M'_\nu K'_\nu \subset S'(R^{n+1})$, donc:

**Corollaire.** *Pour tout $\nu \in C$, les éléments de $H_\nu$ sont des distributions tempérées.*

## 6. Transformation de FOURIER. Espaces $K'_\nu$ et $K_\nu$

Pour tout $\nu \in C$, nous poserons

$$\nu' = -(\nu + n + a). \tag{6.1}$$

On démontre aisément la proposition suivante (cf. [6], prop. 2.2 et 3.1, voir aussi [3], [9] et [13]):

**Proposition 6.1.** *Pour tout $\nu \in C$, les transformations de* FOURIER $F$ *et* $\bar{F}$ *induisent des isomorphismes de $H_\nu$ sur $H_{\nu'}$, avec* (6.1).

Désignons par $K'_\nu$ le sous-espace vectoriel de $D'(R^{n+1})$ image de $K'_\nu$ par $M'_\nu$: $K'_\nu = M'_\nu K'_\nu$. En vertu de la proposition 3.3, les distributions de $K'_\nu$ sont tempérées. D'autre part, d'après (5.16), (4.12), (4.13), (2.9) et (2.4), puisque $M'_\nu$ est un isomorphisme vectoriel, on a

$$\begin{aligned} K'_\nu = H_\nu &\oplus [u_-^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t);\ k = k_\nu(j),\ j \in N_\nu] \\ &\oplus [\square^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes t_+^{-(k+1)};\ k = k'_\nu(j),\ j \in N'_\nu]; \end{aligned} \tag{6.2}$$

d'après [2] (chap. I, § 2, corollaire 4 du th. 2 et prop. 3) $K'_\nu$ est un sous-espace fermé de $D'(R^{n+1})$ ou $S'(R^{n+1})$, et le deuxième membre de (6.2) est une somme directe topologique.

Notons $K_\nu$ l'image par $F$ de $K'_{\nu'}$, avec (6.1). De (6.2) on déduit

$$\begin{aligned} K_\nu = H_\nu &\oplus [F(u_-^{-(j+1)} \otimes \delta^{(k)}(t));\ k = k_{\nu'}(j),\ j \in N_{\nu'}] \\ &\oplus [F(\square^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes t_+^{-(k+1)}),\ k = k'_{\nu'}(j),\ j \in N'_{\nu'}], \end{aligned} \tag{6.3}$$

$K_\nu$ étant également un sous-espace vectoriel fermé de $D'(R^{n+1})$ ou $S'(R^{n+1})$, et le second membre de (6.3) une somme directe topologique. Nous allons remplacer les transformées de FOURIER figurant dans (6.3) par des expressions explicites. On a

$$F\,\delta^{(k)}(t) = (it)^k, \quad F\,\Box^j\,\delta(x) = (-u)^j\,.$$

De l'expression de $F t_+^\lambda$ lorsque $\lambda$ n'est pas un pôle de $t_+^\lambda$ (cf. [4]) on déduit, par prolongement naturel,

$$F t_+^{-(k+1)} = \frac{(-i)^k}{k!}\left[c_k\, t^k - i\frac{\pi}{2}\operatorname{sgn} t\; t^k + t^k \log|\,t\,|\right]$$

pour tout $k \in N$, avec $c_k = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + \Gamma'(1)\,.$

De la même façon (cf. [4]), on obtient pour $j \in N$, dans le 1er cas,

$$F u_-^{-(j+1)} = \begin{cases} a_0^j u^{j-\bar{n}} + a_1^j\left(u^{j-\bar{n}} \log|\,u\,| + \frac{\pi^2}{2} A_{\bar{n}-j-1}\right), \quad \text{si } j < \bar{n}\,, \\ a_0^j u^{j-\bar{n}} + a_1^j u^{j-\bar{n}} \log|\,u\,| + a_2^j\left(u^{j-\bar{n}} \log^2|\,u\,| - \pi^2 (-1)^{j-\bar{n}} u_-^{j-\bar{n}}\right), \\ \text{si } j \geqslant \bar{n}\,; \end{cases}$$

dans le 2e cas,

$$F u_-^{-(j+1)} = b_0^j u_-^{j+1-\frac{n}{2}} + b_1^j u_-^{j+1-\frac{n}{2}} \log|\,u\,|\,;$$

et dans le 3e cas,

$$F u_-^{-(j+1)} = \begin{cases} c_0^j u_-^{j-\bar{n}} + c_1^j A_{\bar{n}-j-1}, \quad \text{si } j < \bar{n}\,, \\ c_0^j u_-^{j-\bar{n}} + c_1^j u_-^{j-\bar{n}} \log|\,u\,|, \quad \text{si } j \geqslant \bar{n}\,; \end{cases}$$

les $a_i^j$, $b_i^j$, $c_i^j$ sont des constantes non nulles. Les distributions $u_\pm^\lambda \log|u|$, égale à $Y(\pm u)\,|\,u\,|^\lambda \log|\,u\,|$ pour $R\lambda > -1$, et $u_\pm^\lambda \log^2|\,u\,|$, égale à $Y(\pm u)\,|\,u\,|^\lambda \log^2|\,u\,|$ pour $R\lambda > -1$, sont définies par prolongement naturel pour tout $\lambda \in C$; on pose, pour $\lambda$ entier de signe quelconque,

$$u^\lambda \log^k|\,u\,| = u_+^\lambda \log^k|\,u\,| + (-1)^{|\lambda|}\, u_-^\lambda \log^k|\,u\,|, \quad k = 1, 2\,.$$

Remarquons que les éléments suivants font partie de $H_\nu$ (formules (4.1) à (4.6)) :

$$u^{j-\bar{n}} \otimes t^k, \quad u^{j-\bar{n}} \otimes \operatorname{sgn} t\, t^k, \quad k = k'_{\nu'}(j), \quad j \in N'_{\nu'}\,,$$

$$A_{\bar{n}-j-1} \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N_{\nu'}, \quad \text{1}^{\text{er}} \text{ et } 3^{\text{e}} \text{ cas;}$$

et, dans le 1er cas,

$$u^{j-\bar{n}} \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N_{\nu'}\,,$$

$$u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad \bar{n} \leqslant j \in N_{\nu'}\,,$$

$$2u^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log|t| - a u^{j-\bar{n}} \log|\,u\,| \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N'_{\nu'}\,;$$

dans le 2e cas,

$$u_-^{j+1-\frac{n}{2}} \otimes t^k, \quad k = k_{\nu'}(j), \quad j \in N_{\nu'}\,;$$

dans le 3e cas, $$u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k,\ k = k_{\nu'}(j),\ \bar{n} \leqslant j \in N_{\nu'}\,.$$

De ce qui précède et de (6.3) on déduit, dans le 1er cas:

$$\begin{aligned} K_\nu = H_\nu &\oplus [u^{j-\bar{n}} \log |u| \otimes t^k;\ k = k_{\nu'}(j),\ \bar{n} > j \in N_{\nu'}] \\ &\oplus [u^{j-\bar{n}} \log^2 |u| \otimes t^k;\ k = k_{\nu'}(j),\ \bar{n} \leqslant j \in N_{\nu'}] \\ &\oplus [u^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log |t|;\ k = k'_{\nu'}(j),\ j \in N'_{\nu'}]\,, \end{aligned} \tag{6.4}$$

dans le 2e cas:

$$\begin{aligned} K_\nu = H_\nu &\oplus [u_-^{j+1-\frac{n}{2}} \log |u| \otimes t^k;\ k = k_{\nu'}(j),\ j \in N_{\nu'}] \\ &\oplus [u^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log |t|;\ k = k'_{\nu'}(j),\ j \in N'_{\nu'}]\,, \end{aligned} \tag{6.5}$$

dans le 3e cas:

$$\begin{aligned} K_\nu = H_\nu &\oplus [u_-^{j-\bar{n}} \otimes t^k;\ k = k_{\nu'}(j),\ \bar{n} > j \in N_{\nu'}] \\ &\oplus [u_-^{j-\bar{n}} \log |u| \otimes t^k;\ k = k_{\nu'}(j),\ \bar{n} \leqslant j \in N_{\nu'}] \\ &\oplus [u^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log |t|;\ k = k'_{\nu'}(j),\ j \in N'_{\nu'}]\,. \end{aligned} \tag{6.6}$$

On a également $K_\nu = \bar{F} K'_{\nu'}$. On peut donc énoncer:

**Proposition 6.2.** *Pour tout $\nu \in C$, les transformations de* Fourier *établissent des isomorphismes $F$ et $\bar{F}$ de $K_\nu$ sur $K'_{\nu'}$ et de $K'_\nu$ sur $K_{\nu'}$, avec* (6.1), *$K_\nu$ et $K'_\nu$ étant les sous-espaces vectoriels fermés de $S'(R^{n+1})$ définis par* (6.4), (6.5), (6.6) *et* (6.2).

## 7. Opérateurs différentiels homogènes et invariants

Soit $H = \bigcup_{\nu \in C} H_\nu$ le sous-ensemble de $D'(R^{n+1})$ formé de toutes les distributions homogènes et invariantes. Cherchons à déterminer l'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants $D$, le plus général, qui conserve $H$. Comme la mesure de Dirac $\delta$ appartient à $H$, il faut que $D\delta \in H$, donc que $FD\delta$ soit un polynôme $P$ de $H$ (prop. 6.1). Par conséquent, $P$ est de la forme

$$P(u, t) = \Sigma A_{jk} u^j t^k\,.$$

Supposons que $P$ ait au moins deux termes non nuls, $A_{j_1 k_1} \neq 0$, $A_{j_2 k_2} \neq 0$. $\lambda$ étant le degré d'homogénéité de $P$, on a

$$\lambda = 2j_1 + ak_1 = 2j_2 + ak_2\,, \tag{7.1}$$

d'où l'on déduit $k_1 \neq k_2$ et $a = 2(j_1 - j_2) / (k_2 - k_1)$. Ainsi, pour qu'il existe des opérateurs conservant $H$ ayant plus d'un terme, il faut que $a$ soit rationnel. Dans la suite, nous supposerons que $a$ est rationnel et poserons

$$a = 2\frac{b}{c}, \tag{7.2}$$

avec $b$ et $c$ entiers $> 0$ premiers entre eux.

Cela étant, (7.1) entraîne $j_1 - j_2 = \alpha b$ et $k_2 - k_1 = \alpha c$, $\alpha$ entier rationnel $\neq 0$, d'où l'on déduit

$$P(u, t) = u^h t^k \sum_{j=0}^{m} a_j u^{jb} t^{(m-j)c}, \tag{7.3}$$

avec $h, k, m \in N$, $a_j \in C$, $a_0$ et $a_m \neq 0$. Si $P$ n'a qu'un terme non nul, $P$ est de la forme (7.3) avec $m = 0$. Considérons le polynôme

$$Q(s) = \sum_{j=0}^{m} a_j s^j \tag{7.4}$$

formé avec les coefficients de $P$. Soient $z_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, les zéros de $Q$. On a

$$Q(s) = a_m \prod_{j=1}^{m} (s - z_j), \tag{7.5}$$

d'où

$$P(u, t) = u^h t^{k+mc} Q(u^b t^{-c}) = a_m u^h t^k \prod_{j=1}^{m} (u^b - z_j t^c).$$

On a donc:

**Théorème 7.1.** *Tout opérateur différentiel linéaire à coefficients constants conservant $H$ est de la forme*

$$D = (-\square)^h \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \sum_{j=0}^{m} a_j (-\square)^{jb} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(m-j)c}, \tag{7.6}$$

*avec $h, k, m \in N$, $a_j \in C$, $a_0$ et $a_m \neq 0$. Pour tout $\nu' \in C$, $D$ applique $H_{\nu'}$ dans $H_{\mu'}$, avec*

$$\mu' = \nu' - 2h - ak - 2bm. \tag{7.7}$$

*$D$ est produit d'une constante et d'opérateurs des types suivants:*

$$\square, \quad \frac{\partial}{\partial t}, \quad \square^b - z\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^c,$$

*$z$, nombre complexe non nul.*

Par transformation de Fourier, l'application $D : H_{\nu'} \to H_{\mu'}$, est remplacée par $FDF^{-1} = P : H_\nu \to H_\mu$, avec (6.1), $P$ désignant la multiplication par le polynôme (7.3). Nous allons montrer que $P_0' = M_\mu'^{-1} P M_\nu' : H_\nu \to H_\mu$ (théorème 5.1) est la restriction à $H_\nu$ de la transposée $P' : K_\nu' \to K_\mu'$ d'une application linéaire continue $P : K_\mu \to K_\nu$. Considérons d'abord le cas des opérateurs $\square$ et $\frac{\partial}{\partial t}$; on a alors les résultats suivants:

**Proposition 7.1.** *Pour tout $\nu \in C$, l'application*

$$\sigma : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \to \sigma\varphi = (s\varphi^+, s\varphi^-), \tag{7.8}$$

*de $K_{\nu+2}$ dans $K_\nu$ est linéaire continue. Sa transposée $\sigma' : K'_\nu \to K'_{\nu+2}$ est une application linéaire continue telle que l'application $M'_{\nu+2}\sigma' M'^{-1}_\nu : K'_\nu \to K'_{\nu+2}$ soit égale à la multiplication par $u$. $\sigma'$ applique $H_\nu$ dans $H_{\nu+2}$.*

Soit en effet $\Phi \in D(R^{n+1})$. D'après (2.6), pour $R\nu > -(a+2)$, on a $M^\pm_\nu(u\Phi) = sM^\pm_{\nu+2}\Phi$, relation qui reste vraie pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel. Il s'ensuit que l'application (7.8) est linéaire de $K_{\nu+2}$ dans $K_\nu$ (prop. 3.2), et que

$$M_\nu(u\Phi) = \sigma M_{\nu+2}\Phi$$

pour tout $\Phi \in D(R^{n+1})$.

Remarquons que si $j \in N_{\nu+2}$, alors $j+1 \in N_\nu$ et $k_{\nu+2}(j) = k_\nu(j+1)$. Inversement, si $j \in N_\nu$, $j \geqslant 1$, alors $j-1 \in N_{\nu+2}$. De même, si $j \in N'_{\nu+2}$, alors $j+1 \in N'_\nu$ et $k'_{\nu+2}(j) = k'_\nu(j+1)$; si $j \in N'_\nu$, $j \geqslant \bar{n}+1$, alors $j-1 \in N'_{\nu+2}$ (formules (2.16) à (2.19)). D'après (3.2) et la remarque précédente, si $\varphi \in K_{\nu+2}$, $\psi = \sigma\varphi$, on a

$$\psi^\pm(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \operatorname{sgn} s\, \chi^{\operatorname{sgn} s}\varphi(\pm|s|^{-\frac{a}{2}}) + \log|s| \sum_{1 \leqslant j \in N_\nu} (\pm 1)^{k_\nu(j)} \langle \gamma_{j-1}, \varphi\rangle s^j +$$
$$+ \gamma(s)\log|s| \sum_{\bar{n}+1 \leqslant j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \langle \gamma'_{j-1}, \varphi\rangle s^j,$$

d'où

$$\chi^\pm(\sigma\varphi) = \pm\chi^\pm\varphi, \tag{7.9}$$

$$\langle \gamma_j, \sigma\varphi\rangle = \begin{cases} 0, \text{ si } j = 0, \\ \langle \gamma_{j-1}, \varphi\rangle, \text{ si } j \geqslant 1, \end{cases} \quad j \in N_\nu, \tag{7.10}$$

$$\langle \gamma'_j, \sigma\varphi\rangle = \begin{cases} 0, \text{ si } j = \bar{n}, \\ \langle \gamma'_{j-1}, \varphi\rangle, \text{ si } j \geqslant \bar{n}+1. \end{cases} \quad j \in N'_\nu, \tag{7.11}$$

Il s'ensuit que $\sigma : K_{\nu+2} \to K_\nu$ est continue.

Soit $f = M'_\nu h \in K'_\nu$, avec $h \in K'_\nu$. On a $\langle uf, \Phi\rangle = \langle M'_\nu h, u\Phi\rangle = \langle h, M_\nu(u\Phi)\rangle = \langle h, \sigma M_{\nu+2}\Phi\rangle = \langle M'_{\nu+2}\sigma' h, \Phi\rangle$, pour tout $\Phi \in D(R^{n+1})$. Grâce à la proposition 3.3, il en résulte que $M'_{\nu+2}\sigma' M'^{-1}_\nu = u$. Comme la multiplication par $u$ applique $H_\nu$ dans $H_{\nu+2}$, on en déduit que $\sigma' H_\nu \subset H_{\nu+2}$ (théorème 5.1), c. q. f. d.

**Proposition 7.2.** *Pour tout $\nu \in C$, l'application*

$$\eta : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \to \eta\varphi = (\varphi^+, -\varphi^-), \tag{7.12}$$

*de $K_{\nu+a}$ dans $K_\nu$ est linéaire continue. Sa transposée $\eta' : K'_\nu \to K'_{\nu+a}$ est une* *application linéaire continue telle que* $M'_{\nu+a}\eta' M'^{-1}_{\nu}: K'_\nu \to K'_{\nu+a}$ *soit égale à la multiplication par* $t$. $\eta'$ *applique* $H_\nu$ *dans* $H_{\nu+a}$.

En effet, pour $\Phi \in D(R^{n+1})$ et pour $R\nu > -(a+2)$, on a, d'après (2.6), $M^\pm_\nu(t\Phi) = \pm M^\pm_{\nu+a}\Phi$, relation qui reste vraie, par prolongement naturel, pour tout $\nu \in C$. Il s'ensuit que l'application (7.12) est linéaire de $K_{\nu+a}$ dans $K_\nu$ (prop. 3.2), et que

$$M_\nu(t\Phi) = \eta M_{\nu+a}\Phi ,$$

pour tout $\Phi \in D(R^{n+1})$.

D'autre part, on a $N_{\nu+a} \subset N_\nu$ et, si $j \in N_{\nu+a}$, $k_\nu(j) = k_{\nu+a}(j) + 1$. Inversement, si $j \in N_\nu$ et $k_\nu(j) \geqslant 1$, on a $j \in N_{\nu+a}$. De même, $j \in N'_{\nu+a}$ si et seulement si $j \in N'_\nu$ et $k'_\nu(j) \geqslant 1$; on a alors $k'_\nu(j) = k'_{\nu+a}(j) + 1$ (formules (2.16) à (2.19)). Il en résulte, en vertu de (3.2), que si $\varphi \in K_{\nu+a}$, $\psi = \eta\varphi$,

$$\psi^\pm(s) = |s|^{-\frac{\nu+a+2}{2}} (\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) \chi^{\operatorname{sgn} s}\varphi(\pm |s|^{-\frac{a}{2}}) +$$

$$+ \log|s| \sum_{\substack{j\in N_\nu\\ k_\nu(j)\geqslant 1}} (\pm 1)^{k_\nu(j)} \langle \gamma_j, \varphi\rangle s^j + \gamma(s)\log|s| \sum_{\substack{j\in N'_\nu\\ k'_\nu(j)\geqslant 1}} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \langle \gamma'_j, \varphi\rangle s^j .$$

On a donc

$$\chi^\pm(\eta\varphi)(s) = s\,\chi^\pm\varphi(s) , \tag{7.13}$$

$$\langle \gamma_j, \eta\varphi\rangle = \begin{cases} 0, \text{ si } k_\nu(j) = 0, \\ \langle \gamma_j, \varphi\rangle, \text{ si } k_\nu(j) \geqslant 1, \end{cases} \quad j \in N_\nu, \tag{7.14}$$

$$\langle \gamma'_j, \eta\varphi\rangle = \begin{cases} 0, \text{ si } k'_\nu(j) = 0, \\ \langle \gamma'_j, \varphi\rangle, \text{ si } k'_\nu(j) \geqslant 1. \end{cases} \quad j \in N'_\nu, \tag{7.15}$$

On en déduit que $\eta: K_{\nu+a} \to K_\nu$ est continue.

Si $f = M'_\nu h \in K'_\nu$, $h \in K'_\nu$, on a $\langle tf, \Phi\rangle = \langle M'_\nu h, t\Phi\rangle = \langle h, M_\nu(t\Phi)\rangle = \langle h, \eta M_{\nu+a}\Phi\rangle = \langle M'_{\nu+a}\eta' h, \Phi\rangle$, pour tout $\Phi \in D(R^{n+1})$, d'où (prop. 3.3) $M'_{\nu+a}\eta' M'^{-1}_\nu = t$. Comme la multiplication par $t$ applique $H_\nu$ dans $H_{\nu+a}$, il en résulte que $\eta' H_\nu \subset H_{\nu+a}$ (th. 5.1), c. q. f. d.

Soit alors $D$ un opérateur différentiel de la forme (7.6), le polynôme associé étant donné par (7.3). Des propositions 7.1 et 7.2 on déduit:

**Proposition 7.3.** *Pour tout* $\nu \in C$, $\sigma$ *et* $\eta$ *étant les applications linéaires définies par* (7.8) *et* (7.12),

$$P = \sigma^h \eta^k \sum_{j=0}^{m} a_j \sigma^{jb}\, \eta^{(m-j)c} \tag{7.16}$$

*est une application linéaire continue de* $K_\mu$ *dans* $K_\nu$, *avec*

$$\mu = \nu + 2h + ak + 2bm . \tag{7.17}$$

*La multiplication par le polynôme* $P(u, t)$ *induit une application linéaire* *continue* $P: K'_\nu \to K'_\mu$, *avec* (7.17), *telle que* $M'^{-1}_\mu P M'_\nu$ *soit égale à la transposée* $P': K'_\nu \to K'_\mu$ *de* $P: K_\mu \to K_\nu$. *L'application* $P'$ *induit une application linéaire continue* $P'_0$ *de* $H_\nu$ *dans* $H_\mu$.

Enfin, grâce à la proposition 6.2, on a:

**Théorème 7.2.** *Pour tout* $\nu' \in C$, *l'opérateur* $D$ *donné par* (7.6) *applique* $K_{\nu'}$ *dans* $K_{\mu'}$ *avec* (7.7).

## 8. Application $P$

Soit $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\mu$. D'après (7.8) et (7.12), l'image de $\varphi$ par l'application (7.16) est $P\varphi = (P_+\varphi^+, P_-\varphi^-)$, avec

$$P_\pm(s) = (\pm 1)^{k+mc} s^h Q((\pm 1)^c s^b), \tag{8.1}$$

$Q$ étant donné par (7.4). Les polynômes $P_+$ et $P_-$ ne sont pas identiquement nuls (on suppose $a_0$ et $a_m \neq 0$); par suite:

**Proposition 8.1.** *L'application linéaire continue* $P: K_\mu \to K_\nu$, *avec* (7.17), *est injective.*

Cherchons à déterminer l'image $PK_\mu$ de $P$. Soient $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\mu$ et $\psi = P\varphi = (\psi^+, \psi^-) \in K_\nu$.

On a $P_\pm(s) = s^h Q_\pm(s)$, $Q_\pm(s)$ étant un polynôme $\neq 0$ pour $s = 0$. Par conséquent, en considérant la partie

$$Z^0_\nu = \{\alpha_j^+, \alpha_j^-; 0 \leqslant j < h\} \cup \{\beta_j^+, \beta_j^-; \bar{n} \leqslant j < \bar{n} + h\} \tag{8.2}$$

de $K'_\nu$, on a

$$\langle h, \psi \rangle = 0, \quad \text{pour tout } h \in Z^0_\nu. \tag{8.3}$$

Soit $r_0$ un zéro réel d'ordre $n_0$ de $Q_\pm(s)$. De l'égalité $\psi^\pm(s) = s^h Q_\pm(s)\varphi^\pm(s)$, on déduit que $\langle \delta_k^\pm(s - r_0), \psi \rangle = 0$, pour tout $k < n_0$, où $\delta_k^+(s - r_0)$ et $\delta_k^-(s - r_0)$ sont les éléments de $K'_\nu$ définis par

$$\langle \delta_k^\pm(s - r_0), \psi \rangle = D^k \psi^\pm(r_0), \; k \in N, \; \psi \in K_\nu.$$

Soient alors $z_j$, $1 \leqslant j \leqslant m'$, les zéros réels distincts de $Q(s)$, $z_j$ étant d'ordre $n_j$. D'après (8.1), les zéros réels $r_0$ de $Q_\pm(s)$ sont les nombres tels que $(\pm 1)^c r_0^b = z_j$, pour un entier $j \geqslant 1$, $j \leqslant m'$. Considérons la partie $Z^1_\nu$ de $K'_\nu$ définie de la façon suivante:

$$Z^1_\nu = \begin{cases} \{\delta_k^+(s - r_j), \delta_k^-(s + r_j); r_j \in R, r_j^b = z_j\}, & \text{si } b \text{ et } c \text{ sont impairs,} \\ \{\delta_k^+(s - r_j), \delta_k^-(s - r_j); r_j \in R, r_j^b = z_j\}, & \text{si } b \text{ est impair et } c \text{ pair,} \\ \{\delta_k^{\operatorname{sgn} z_j}(s - r_j), \delta_k^{\operatorname{sgn} z_j}(s + r_j); r_j > 0, r_j^b = |z_j|\}, & \text{si } b \text{ est pair et } c \text{ impair,} \end{cases} \tag{8.4}$$

l'entier $j$ prenant les valeurs $1, 2, \ldots, m'$ et $k$ les valeurs $0, 1, \ldots, n_j - 1$; $Z^1_\nu = \varnothing$ si $Q$ n'a pas de zéro réel. Avec ces notations, on a donc

$$\langle h, \psi\rangle = 0, \text{ pour tout } h \in Z^1_\nu . \tag{8.5}$$

Les formules (7.9) et (7.13) entraînent

$$\chi^{\pm}\psi(s) = (\pm 1)^h s^k \sum_{j=0}^{m} a_j (\pm 1)^{jb} s^{(m-j)c} \chi^{\pm}\varphi(s) .$$

Par suite, en posant

$$Z^2_\nu = \{\varepsilon^+_j, \varepsilon^-_j ; 0 \leqslant j < k\} , \tag{8.6}$$

on a

$$\langle h, \psi\rangle = 0, \text{ pour tout } h \in Z^2_\nu . \tag{8.7}$$

D'après (7.10) et (7.14), si $j \in N_\nu$ et $0 \leqslant \lambda \leqslant m$,

$$\langle \gamma_j , \sigma^{h+\lambda b}\eta^{k+(m-\lambda)c}\varphi\rangle$$

est égal à $\langle \gamma_{j-h-\lambda b}, \varphi\rangle$ si $j \geqslant h + \lambda b$ et $k_\nu(j) \geqslant k + (m - \lambda)c$, et est nul dans les autres cas. Soit $\bar{N}_\nu$ l'ensemble des $j \in N_\nu$ pour lesquels existe un entier $\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant m$, tel que $j \geqslant h + \lambda b$ et $k_\nu(j) \geqslant k + (m - \lambda)c$. On a

$$\bar{N}_\nu = \{i + h + \lambda b ; i \in N_\mu , 0 \leqslant \lambda \leqslant m\} .$$

$\bar{N}_\nu$ est vide si et seulement si $N_\mu$ l'est. Si $j \in N_\nu - \bar{N}_\nu$, on a $\langle \gamma_j, \psi\rangle = 0$, et si $j \in \bar{N}_\nu$,

$$\langle \gamma_j, \psi\rangle = \Sigma a_\lambda \langle \gamma_i, \varphi\rangle ,$$

la somme étant étendue à tous les entiers $\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant m$, et $i \in N_\mu$, tels que $i + h + \lambda b = j$.

Supposons que $N_\mu \neq \varnothing$, donc $\bar{N}_\nu \neq \varnothing$, et posons

$$n_\mu = \operatorname{card} N_\mu , \; i_\mu = \min N_\mu , \; s_\mu = \max N_\mu .$$

On a

$$N_\mu = \{i_\mu , i_\mu + b, i_\mu + 2b, \ldots, s_\mu\} ,$$

$$\bar{N}_\nu = \{i + h ; i \in N_\mu\} \cup \{s_\mu + h + \lambda b ; 1 \leqslant \lambda \leqslant m\} , \tag{8.8}$$

de sorte que card $\bar{N}_\nu = n_\mu + m$. Les $n_\mu$ nombres $\langle \gamma_i, \varphi\rangle$, $i \in N_\mu$, sont liés par les $n_\mu + m$ relations linéaires

$$\begin{array}{lcl}
\langle \gamma_{i_\mu + h}, \psi\rangle & = & a_0 \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi\rangle \\
\langle \gamma_{i_\mu + h + b}, \psi\rangle & = & a_1 \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi\rangle + a_0 \langle \gamma_{i_\mu + b}, \varphi\rangle \\
\ldots & & \ldots \\
\langle \gamma_{s_\mu + h}, \psi\rangle & = & a_{n_\mu - 1} \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi\rangle + \ldots + a_0 \langle \gamma_{s_\mu}, \varphi\rangle \\
\langle \gamma_{s_\mu + h + b}, \psi\rangle & = & a_{n_\mu} \langle \gamma_{i_\mu}, \varphi\rangle + \ldots + a_1 \langle \gamma_{s_\mu}, \varphi\rangle \\
\ldots & & \ldots \\
\langle \gamma_{s_\mu + h + mb}, \psi\rangle & = & \qquad\qquad a_m \langle \gamma_{s_\mu}, \varphi\rangle .
\end{array}$$

où l'on pose $a_\lambda = 0$ si $\lambda > m$. Le déterminant des coefficients des $\langle \gamma_i, \varphi \rangle$ dans les $n_\mu$ premières relations vaut $a_0^{n_\mu} \neq 0$. On a donc $m$ relations de compatibilité $\langle L_\lambda, \psi \rangle = 0$, $1 \leqslant \lambda \leqslant m$, où les $L_\lambda$ sont $m$ éléments de $K'_\nu$, linéairement indépendants:

$$L_\lambda = \gamma_{s_\mu + h + \lambda b} + a_0^{-n_\mu} \sum_{i \in N_\mu} A^i_\lambda \gamma_{i+h}, \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant m\,, \tag{8.9}$$

$A^i_\lambda$ étant le mineur de $X_i$ dans la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & X_{i_\mu} & X_{i_\mu + b} & \cdots & X_{s_\mu} \\ a_{\lambda + n_\mu - 1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n_\mu - 1} \\ a_{\lambda + n_\mu - 2} & 0 & a_0 & \cdots & a_{n_\mu - 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_\lambda & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Posons

$$Z^3_\nu = \begin{cases} \{\gamma_j\,;\, j \in N_\nu\}, & \text{si } N_\mu = \varnothing\,, \\ \{\gamma_j\,;\, j \in N_\nu - \overline{N}_\nu\} \cup \{L_1, \ldots, L_m\}, & \text{si } N_\mu \neq \varnothing\,. \end{cases} \tag{8.10}$$

Avec ces notations, on a

$$\langle h, \psi \rangle = 0, \quad \text{pour tout } h \in Z^3_\nu\,. \tag{8.11}$$

De même, soit $\overline{N}'_\nu$ l'ensemble des $j \in N'_\nu$ pour lesquels existe un entier $\lambda$, $0 \leqslant \lambda \leqslant m$, tel que $j \geqslant \overline{n} + h + \lambda b$, $k'_\nu(j) \geqslant k + (m - \lambda)c$. $\overline{N}'_\nu$ est vide si et seulement si $N'_\mu$ l'est.

Si $N'_\mu \neq \varnothing$, posons

$$n'_\mu = \operatorname{card} N'_\mu,\; i'_\mu = \min N'_\mu,\; s'_\mu = \max N'_\mu\,.$$

On a

$$N'_\mu = \{i'_\mu, i'_\mu + b, i'_\mu + 2b, \ldots, s'_\mu\}\,,$$

$$\overline{N}'_\nu = \{i + h\,;\, i \in N'_\mu\} \cup \{s'_\mu + h + \lambda b\,;\, 1 \leqslant \lambda \leqslant m\}\,. \tag{8.12}$$

Soient $L'_1, \ldots, L'_m$ les éléments de $K'_\nu$ définis par

$$L'_\lambda = \gamma'_{s'_\mu + h + \lambda b} + a_0^{-n'_\mu} \sum_{i \in N'_\mu} A'^i_\lambda \gamma'_{i+h}, \quad 1 \leqslant \lambda \leqslant m\,, \tag{8.13}$$

$A'^i_\lambda$ étant le mineur de $X_i$ dans la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & X_{i'_\mu} & X_{i'_\mu + b} & \cdots & X_{s'_\mu} \\ a_{\lambda + n'_\mu - 1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n'_\mu - 1} \\ a_{\lambda + n'_\mu - 2} & 0 & a_0 & \cdots & a_{n'_\mu - 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_\lambda & 0 & 0 & \cdots & a_0 \end{pmatrix}.$$

Considérons la partie $Z_\nu'^3$ de $K_\nu'$ définie par

$$Z_\nu'^3 = \begin{cases} \{\gamma_j';\ j \in N_\nu'\}, & \text{si } N_\mu' = \varnothing\,, \\ \{\gamma_j';\ j \in N_\nu' - \bar{N}_\nu'\} \cup \{L_1', \ldots, L_m'\}, & \text{si } N_\mu' \neq \varnothing\,. \end{cases} \tag{8.14}$$

Comme précédemment, (7.11) et (7.15) entraînent

$$\langle h, \psi \rangle = 0 \quad \text{pour tout} \quad h \in Z_\nu'^3\,. \tag{8.15}$$

Inversement, si $\psi \in K_\nu$ vérifie (8.3), (8.5), (8.7), (8.11) et (8.15), il existe $\varphi \in K_\mu$ tel que $\psi = P\varphi$. On a donc:

**Proposition 8.2.** *L'image $PK_\mu$ de l'application $P: K_\mu \to K_\nu$ est le sous-espace vectoriel fermé de $K_\nu$, de codimension finie, formé des $\psi \in K_\nu$ tels que $\langle h, \psi \rangle = 0$, pour tout $h \in Z_\nu$, où $Z_\nu$ est la partie*

$$Z_\nu = Z_\nu^0 \cup Z_\nu^1 \cup Z_\nu^2 \cup Z_\nu^3 \cup Z_\nu'^3 \tag{8.16}$$

*de $K_\nu'$, avec* (8.2), (8.4), (8.6), (8.10) *et* (8.14).

Enfin, on vérifie que si $\psi = P\varphi \to 0$ dans $K_\nu$, alors $\varphi \to 0$ dans $K_\mu$ (cf. TENGSTRAND [13], lemme 8.1 et SCHWARTZ [12], t. 1, p. 123). Par suite:

**Proposition 8.3.** *L'application réciproque $P^{-1}: PK_\mu \to K_\mu$ est continue.*

## 9. Applications $P'$ et $P_0'$, opérateur $D$

A tout opérateur $D$ de la forme (7.6), associons le nombre

$$d = 2(2h + m_0 + k)\,, \tag{9.1}$$

$m_0$ étant le nombre de zéros réels du polynôme $Q(s)$ donné par (7.4) (dans [7], la valeur de $d$ indiquée est inexacte).

Pour tout $\nu \in C$, posons

$$n_\nu = \operatorname{card} N_\nu,\ n_\nu' = \operatorname{card} N_\nu'\,, \tag{9.2}$$

avec (2.18) et (2.19).

Il est clair que les éléments de la partie $Z_\nu$ de $K_\nu'$ définie par (8.16) sont linéairement indépendants, et que leur nombre $c_\nu$ est fini:

$$c_\nu = \operatorname{card} Z_\nu = d + n_\nu - n_\mu + n_\nu' - n_\mu'\,. \tag{9.3}$$

D'après la proposition 8.2, $PK_\mu$ est orthogonal à $Z_\nu$, donc est un sous-espace fermé de codimension $c_\nu$ dans $K_\nu$ ([1], § 4, n° 6). Par suite ([2], chap. I, § 2, prop. 3), $K_\nu$ est somme directe topologique de $PK_\mu$ et d'un sous-espace de dimension $c_\nu$. Compte tenu de la proposition 8.3, il en résulte que la transposée $P' : K'_\nu \to K'_\mu$ est surjective. D'autre part, les éléments $f$ de $K'_\nu$ tels que $P'f = 0$ sont ceux qui s'annulent sur $PK_\mu$ ; ce sont donc les éléments du sous-espace vectoriel $[Z_\nu]$ engendré par $Z_\nu$([1], loc. cit.). On a ainsi montré:

**Proposition 9.1.** *L'application transposée* $P' : K'_\nu \to K'_\mu$ *est surjective. Son noyau est le sous-espace vectoriel* $[Z_\nu]$ *de* $K'_\nu$, *de dimension* $c_\nu$ (*formule* (9.3)), *dont* $Z_\nu$ (*formule* (8.16)) *est une base.*

Cherchons à déterminer le noyau et l'image de l'application $P'_0 : H_\nu \to H_\mu$ induite par $P'$. Rappelons d'abord que, pour tout $\nu \in C$, $H_\nu$ est le sous-espace vectoriel fermé de $K'_\nu$, de codimension $n_\nu + n'_\nu$, orthogonal à la partie libre $X_\nu$ de $K_\nu$ (prop. 5.1). Nous désignerons par $[X_\nu]$ le sous-espace vectoriel engendré par $X_\nu$. Si $j \in N_{\nu+2}$, on a $\sigma_j \in X_{\nu+2}$ et (prop. 7.1)

$$\sigma\sigma_j = \sigma_{j+1} \in X_\nu ; \tag{9.4}$$

si $j \in N'_{\nu+2}$, on a $\tau_j \in X_{\nu+2}$ et (prop. 7.1)

$$\sigma\tau_j = \tau_{j+1} \in X_\nu ; \tag{9.5}$$

si $j \in N_{\nu+a}$, on a $\sigma_j \in X_{\nu+a}$ et (prop. 7.2)

$$\eta\sigma_j = \sigma_j \in X_\nu ; \tag{9.6}$$

si $j \in N'_{\nu+a}$, on a $\tau_j \in X_{\nu+a}$ et (prop. 7.2)

$$\eta\tau_j = \tau_j \in X_\nu . \tag{9.7}$$

D'après (7.16), les relations (9.4) à (9.7) montrent que

$$PX_\mu \subset [X_\nu] . \tag{9.8}$$

Le noyau de $P' : K'_\nu \to K'_\mu$ étant $[Z_\nu]$, celui de $P'_0$ est $P'^{-1}_0(0) = [Z_\nu] \cap H_\nu$. Mais $P'^{-1}_0(0)$ est aussi le noyau de l'application linéaire $\alpha$ de $[Z_\nu]$ dans $C^{n_\nu+n'_\nu}$, qui à $h \in [Z_\nu]$ fait correspondre le vecteur $\alpha h = (\langle h, \varphi\rangle)_{\varphi\in X_\nu}$ (prop. 5.1). Soit $\varrho_\nu$ le rang de $\alpha$, c'est-à-dire le rang de la matrice

$$M = (\langle h, \varphi\rangle)_{h\in Z_\nu,\, \varphi\in X_\nu} . \tag{9.9}$$

On a $\dim [Z_\nu] = c_\nu = \varrho_\nu + d_\nu$, en posant $d_\nu = \dim P'^{-1}_0(0)$ ; donc $d_\nu = c_\nu - \varrho_\nu$, et:

**Proposition 9.2.** *Le noyau de* $P'_0 : H_\nu \to H_\mu$ *est le sous-espace vectoriel* $H_\nu \cap [Z_\nu]$ *de* $H_\nu$, *de dimension* $d_\nu = c_\nu - \varrho_\nu$, *avec* (9.3), $\varrho_\nu$ *étant le rang de la matrice* (9.9).

Soit $W = [X_\nu] \cap PK_\mu$. D'après (9.8), on a $P[X_\mu] \subset [X_\nu]$, donc $P[X_\mu] \subset W$. Soit $V_\nu$ un supplémentaire de $P[X_\mu]$ dans $W$: $W = P[X_\mu] \oplus V_\nu$. Soient enfin $Y_0$ un supplémentaire de $W$ dans $[X_\nu]$ et $Y_1$ un supplémentaire de $PK_\mu \oplus Y_0$ dans $K_\nu : [X_\nu] = P[X_\mu] \oplus V_\nu \oplus Y_0, K_\nu = PK_\mu \oplus Y_0 \oplus Y_1$ (cf. [2], chap. I, § 2, th. 2 et prop. 3).

Soit $g \in H_\mu$. Il existe $f \in K'_\nu$ tel que $g = P'f$ (prop. 9.1). Si $\psi \in PK_\mu$, on a $\langle f, \psi\rangle = \langle f, PP^{-1}\psi\rangle = \langle g, P^{-1}\psi\rangle$; sur $Y_0 \oplus Y_1$, $f$ est arbitraire. Pour que $f \in H_\nu$, il faut et il suffit que $f$ s'annule sur $[X_\nu]$ (prop. 5.1). On peut toujours supposer que $f$ est nulle sur $Y_0$. Sur $P[X_\mu]$, $f$ est nulle, car $\langle f, \psi\rangle = \langle g, P^{-1}\psi\rangle = 0$, puisque $P^{-1}\psi \in [X_\mu]$ si $\psi \in P[X_\mu]$. Par conséquent, pour que $f \in H_\nu$, il faut et il suffit que $\langle f, \psi\rangle = \langle g, P^{-1}\psi\rangle = 0$, pour tout $\psi \in V_\nu$. Ainsi, $P'_0 H_\nu$ est le sous-espace vectoriel de $H_\mu$, de codimension finie égale à la dimension de $V_\nu$ (cf. [1], § 4, th. 1), orthogonal à $P^{-1} V_\nu$.

$PK_\mu$ étant orthogonal à $[Z_\nu]$ (prop. 8.2), $W$ est le noyau de l'application linéaire $\beta$ de $[X_\nu]$ dans $C^{c_\nu}$, avec (9.3), qui à $\varphi \in [X_\nu]$ fait correspondre le vecteur $\beta\varphi = (\langle h, \varphi\rangle)_{h \in Z_\nu}$. On a donc $\dim W = \dim [X_\nu] - \varrho_\nu$, $\varrho_\nu$ étant le rang de $\beta$, c'est-à-dire le rang de la matrice (9.9). D'autre part, $\dim W = \dim V_\nu + \dim [X_\mu]$. Comme $\dim [X_\nu] = n_\nu + n'_\nu$, on obtient $\dim V_\nu = n_\nu + n'_\nu - n_\mu - n'_\mu - \varrho_\nu$. On a donc:

**Proposition 9.3.** *L'image* $P'_0 H_\nu$ *de l'application* $P'_0 : H_\nu \to H_\mu$ *est un sous-espace vectoriel fermé de* $H_\mu$, *de codimension finie* $e_\nu$:

$$e_\nu = \operatorname{codim} P'_0 H_\nu = n_\nu + n'_\nu - n_\mu - n'_\mu - \varrho_\nu , \tag{9.10}$$

*avec* (9.2), $\varrho_\nu$ *étant le rang de la matrice* (9.9).

D'après les formules (9.4) à (9.7) et (7.16), on a, si $j \in N_\mu$,

$$\sigma_j \in X_\mu, P\sigma_j = \sum_{\lambda=0}^{m} a_\lambda \sigma_{j+h+\lambda b} \in [X_\nu] ,$$

et si $j \in N'_\mu$,

$$\tau_j \in X_\mu, P\tau_j = \sum_{\lambda=0}^{m} a_\lambda \tau_{j+h+\lambda b} \in [X_\nu] ,$$

avec $a_0 \neq 0$. Par suite, si $N_\mu \neq \varnothing$, une partie libre de $K_\nu$ équivalente à $\{\sigma_j ; j \in N_\nu\}$ est

$$\{P\sigma_j ; j \in N_\mu\} \cup \{\sigma_j ; j \in N_\nu, j - h \notin N_\mu\} .$$

De même, si $N'_\mu \neq \varnothing$, une partie libre de $K_\nu$, équivalente à $\{\tau_j ; j \in N'_\nu\}$ est

$$\{P\tau_j ; j \in N'_\mu\} \cup \{\tau_j ; j \in N'_\nu, j - h \notin N'_\mu\} .$$

Par conséquent, en vertu des formules (5.8), (5.13) et (8.14), le rang $\varrho_\nu$ de la matrice (9.9) est égal à celui de la matrice

$$M' = (\langle h, \varphi\rangle)_{h \in Z'_\nu,\, \varphi \in X'_\nu} , \tag{9.11}$$

avec

$$Z'_\nu = Z_\nu - Z'^3_\nu , \tag{9.12}$$

$$X'_\nu = \{\sigma_j ; j \in N_\nu, j - h \notin N_\mu\} \cup \{\tau_j ; j \in N'_\nu, j - h \notin N'_\mu\} . \tag{9.13}$$

Comme $M'$ est de rang $\varrho_\nu$, il existe $\operatorname{card} X'_\nu - \varrho_\nu = e_\nu$ éléments linéairement indépendants $\eta_i$, $1 \leqslant i \leqslant e_\nu$, du sous-espace vectoriel $[X'_\nu]$ engendré par $X'_\nu$, tels que $\langle h, \eta_i \rangle = 0$, pour tout $h \in Z_\nu$. Les éléments $\eta_i$ engendrent un supplémentaire $V_\nu$ de $P[X_\mu]$ dans $PK_\mu \cap [X_\nu]$, donc:

**Proposition 9.4.** *L'image de $P'_0 : H_\nu \to H_\mu$ est le sous-espace vectoriel de $H_\mu$ formé des éléments $h \in H_\mu$ tels que*

$$\langle h, P^{-1}\eta_i \rangle = 0, \, i = 1, 2, \ldots, e_\nu \,, \tag{9.14}$$

*$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e_\nu}$ étant $e_\nu$ éléments linéairement indépendants de $[X'_\nu]$ (formule* (9.13)), *contenus dans $PK_\mu$ (donc tels que $\langle h, \eta_i \rangle = 0$ pour tout $h \in Z_\nu$).*

Des propositions 6.1, 6.2, 7.3, 9.1, 9.2 et 9.3 on déduit les théorèmes suivants:

**Théorème 9.1.** *Pour tout $\nu' \in C$, $\mu' = \nu' - 2h - ak - 2bm$, $\nu = -(\nu' + n + a)$, $\mu = -(\mu' + n + a)$, l'opérateur $D$ défini par* (7.6) *induit une application linéaire $D : K_{\nu'} \to K_{\mu'}$ surjective, dont le noyau est de dimension finie $c_\nu$, avec* (9.3), (9.1) et (9.2).

**Théorème 9.2.** *Avec les notations du théorème* 9.1, *pour tout $\nu' \in C$, l'application linéaire $D : H_{\nu'} \to H_{\mu'}$ a une image de codimension finie $e_\nu$ et un noyau de dimension finie $d_\nu$. On a*

$$d_\nu = d + e_\nu \,, \tag{9.15}$$

*où $d$, donné par* (9.1), *ne dépend que de $D$; $e_\nu$ est donné par* (9.10), *avec* (9.2), *$\varrho_\nu$ étant le rang de la matrice* (9.11).

**Remarque.** La valeur minimale de la dimension $d_\nu$ du noyau de $D : H_{\nu'} \to H_{\mu'}$ est donc $d$ et est atteinte lorsque $e_\nu = 0$, c'est-à-dire lorsque l'application $D : H_{\nu'} \to H_{\mu'}$ est surjective. Cela a lieu en particulier si $N_\nu$ et $N'_\nu$ sont vides, auquel cas $H_{\nu'} = K_{\nu'}$ et $H_{\mu'} = K_{\mu'}$.

La mesure de Dirac $\delta$ appartient à $H_{\mu'} \subset K_{\mu'}$ pour $\mu' = -(n + a)$. En outre, $F\delta = 1 \in H_0$. On a $N_0 = N'_0 = \varnothing$, donc $H_0 = K'_0$. D'après (3.1) et (3.2), si $\varphi \in K_0$, $\varphi^+(s)$ et $\varphi^-(s)$ sont intégrables sur $R$, et l'égalité

$$\langle 1, \varphi \rangle = \int \varphi^+(s)\,ds + \int \varphi^-(s)\,ds$$

définit un élément noté 1 de $K'_0$. En vertu de (2.6), on a $\langle M'_0 1, \Phi \rangle = \langle 1, M_0 \Phi \rangle = \langle 1, \Phi \rangle$ pour tout $\Phi \in D(R^{n+1})$, c'est-à-dire $M'_0 1 = 1$. Le théorème 9.1 et les propositions 6.1, 7.3 et 9.2 à 9.4 entraînent donc le résultat suivant:

**Théorème 9.3.** *Soit $D$ l'opérateur défini par* (7.6), *et posons $\nu' = -(n + a) + 2h + ak + 2bm$, $\mu' = -(n + a)$, $\nu = -(2h + ak + 2bm)$, $\mu = 0$.*

*L'ensemble des solutions élémentaires de* $D$, *contenues dans* $K_{\nu'}$, *a au moins un élément, et forme une variété linéaire affine de dimension* $c_\nu$, *avec* (9.3).

*Pour que* $D$ *admette une solution élémentaire dans* $H$, *donc dans* $H_{\nu'}$, *il faut et il suffit que*

$$\langle 1 , P^{-1}\eta_i\rangle = \int \frac{\eta_i^+(s)}{P_+(s)}\, ds + \int \frac{\eta_i^-(s)}{P_-(s)}\, ds = 0 , \tag{9.16}$$

*pour* $i = 1, 2, \ldots, e_\nu$, *avec* (9.10), *les* $\eta_i$ *étant les éléments de* $K_\nu$ *considérés dans la proposition* 9.4, *et* $P_+$, $P_-$ *les polynômes* (8.1). *Si la condition* (9.16) *est vérifiée, l'ensemble des solutions élémentaires de* $D$ *contenues dans* $H_{\nu'}$ *forme une variété linéaire affine de dimension* $d_\nu$, *avec* (9.15).

## 10. Exemple

Comme exemple, considérons l'opérateur

$$D = (-\square)^{mb} - z\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{mc}, \tag{10.1}$$

obtenu lorsque $h = k = 0$, $a_0 = -z \neq 0$, $a_m = 1$, $Q(s) = s^m - z$, $m \geqslant 1$ (formules (7.6) et (7.4)).

Examinons dans quels cas $D$ admet une solution élémentaire dans $H$, c'est-à-dire dans $H_{\nu'}$, avec $\nu' = -(n + a) + 2bm$. Posons $\mu' = -(n + a)$, $\nu = -2bm$, $\mu = 0$.

D'après (2.18) et (2.19), on a $N_0 = N_0' = \varnothing$ et, avec $\lambda \in N$,

$$N_\nu = \{\lambda b - 1 ;\ \lambda \geqslant 1,\ \lambda \leqslant m - 1\} ; \tag{10.2}$$

si $n$ est pair,

$$N_\nu' = \{\lambda b - 1 ;\ \lambda \geqslant \frac{n}{2b},\ \lambda \leqslant m - 1\} ; \tag{10.3}$$

si $n$ est impair,

$$N_\nu' = \begin{cases} \varnothing, & \text{si } c \text{ est impair,} \\ \{\lambda b - \frac{b + 3}{2} ;\ \lambda \geqslant \frac{n + b}{2b},\ \lambda \leqslant m\}, & \text{si } c \text{ est pair.} \end{cases} \tag{10.4}$$

D'après (2.16) et (2.17), on a

$$k_\nu(\lambda b - 1) = (m - \lambda)c - 1 ; \tag{10.5}$$

$$k_\nu'(\lambda b - 1) = (m - \lambda)c - 1, \quad \text{si } n \text{ est pair,} \tag{10.6}$$

$$k_\nu'\left(\lambda b - \frac{b + 3}{2}\right) = \left(m - \lambda + \frac{1}{2}\right)c - 1, \quad \text{si } n \text{ est impair.} \tag{10.7}$$

En vertu de (8.2) et (8.6), on a $Z_\nu^0 = Z_\nu^2 = \varnothing$.

Le nombre de zéros réels de $Q(s)$ est

$$m_0 = \begin{cases} 2, \text{ si } m \text{ est pair, } z > 0, \\ 1, \text{ si } m \text{ est impair, } z \in R, \\ 0, \text{ dans les autres cas.} \end{cases}$$

D'après (8.4), on a $Z^1_\nu = \varnothing$ si $m_0 = 0$. Si $m_0 = 1$, soit $z_1$ le zéro réel de $Q$; on a

$$Z^1_\nu = \begin{cases} \{\delta_0^+(s - r_1),\ \delta_0^-(s + r_1)\}, & \text{si } b \text{ et } c \text{ sont impairs,} \\ \{\delta_0^+(s - r_1),\ \delta_0^-(s - r_1)\}, & \text{si } b \text{ impair et } c \text{ pair,} \\ \{\delta_0^{\operatorname{sgn} z}(s - r_1),\ \delta_0^{\operatorname{sgn} z}(s + r_1)\}, & \text{si } b \text{ pair et } c \text{ impair,} \end{cases}$$

avec $r_1 \in R$, $r_1^b = z_1$ si $b$ est impair, et $r_1 > 0$, $r_1^b = |z_1|$ si $b$ est pair. Si $m_0 = 2$, soit $z_1 > 0$ le zéro positif de $Q$ et soit $r_1 > 0$ tel que $r_1^b = z_1$; on a

$$Z^1_\nu = \{\delta_0^+(s - r_1),\ \delta_0^+(s + r_1),\ \delta_0^-(s - r_1),\ \delta_0^-(s + r_1)\}.$$

Comme $N_\mu = \varnothing$, la formule (8.10) donne

$$Z^3_\nu = \{\gamma_j;\ j \in N_\nu\}.$$

Nous avons à déterminer le rang $\varrho_\nu$ de la matrice

$$M' = (\langle h, \varphi\rangle)_{h \in Z'_\nu, \varphi \in X_\nu},$$

avec $Z'_\nu = Z^1_\nu \cup Z^3_\nu$, $X_\nu$ étant donné par (5.4). Le nombre $e_\nu = n_\nu + n'_\nu - \varrho_\nu$ en résulte (formules (9.2) et (9.10)). Nous devons ensuite former des combinaisons linéaires $\eta_1, \ldots, \eta_{e_\nu}$ des éléments de $X_\nu$, de manière que les $\eta_i$ soient linéairement indépendants et que $\langle h, \eta_i\rangle = 0$, pour tout $h \in Z'_\nu$ (th. 9.3 et prop. 9.4). Les $\eta_i$ se déduisent des relations linéaires entre les vecteurs colonnes de la matrice $M'$. Nous poserons

$$Y = \{\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e_\nu}\}.$$

Dans le 1er cas, d'après (5.7) et (5.12), on a $\varrho_\nu = \varrho + n'_\nu$, avec (9.2), $\varrho$ étant le rang de la matrice

$$M'' = (\langle h, \sigma_j\rangle)_{h \in Z^1_\nu,\ j \in N_\nu}.$$

Dans les 2e et 3e cas, (5.7) et (5.12) montrent que $\varrho_\nu$ est le rang de

$$M'' = (\langle h, \sigma_j\rangle\ \langle h, \tau_{j'}\rangle)_{h \in Z^1_\nu,\ j \in N_\nu,\ j' \in N'_\nu}.$$

Pour tout $t \in R$, posons $t_+ = t$ si $t \geqslant 0$ et $t_+ = 0$ si $t < 0$. Si $n_\nu = \operatorname{card} N_\nu > 0$, soit $s_\nu = \max N_\nu$ et si $n'_\nu = \operatorname{card} N'_\nu > 0$, soit $s'_\nu = \max N'_\nu$. Posons

$$N^1_\nu = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } n_\nu \leqslant 1, \\ N_\nu - \{s_\nu\}, \text{ si } n_\nu > 1, \end{cases}$$

$$N'^1_\nu = \begin{cases} \varnothing, \text{ si } n'_\nu \leqslant 1, \\ N'_\nu - \{s'_\nu\}, \text{ si } n'_\nu > 1, \end{cases} \tag{10.8}$$

$$N_\nu^2 = \begin{cases} \varnothing\,, & \text{si } n_\nu \leqslant 2\,, \\ N_\nu - \{s_\nu\,, s_\nu - b\}\,, & \text{si } n_\nu > 2\,, \end{cases}$$

$$N_\nu'^2 = \begin{cases} \varnothing\,, & \text{si } n_\nu' \leqslant 2\,, \\ N_\nu' - \{s_\nu', s_\nu' - b\}\,, & \text{si } n_\nu' > 2\,. \end{cases} \tag{10.9}$$

Avec ces notations, l'étude de la matrice $M''$ conduit aux résultats suivants:

Dans le 1er cas,

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu, m_0) + n_\nu',\ e_\nu = (n_\nu - m_0)_+\,.$$

On peut prendre

$$Y = \begin{cases} \{\sigma_j\,;\ j \in N_\nu\}\,, & \text{si } m_0 = 0\,, \\ \{\sigma_{j+b} - z_1\sigma_j\,;\ j \in N_\nu^1\}\,, & \text{si } m_0 = 1\,, \\ \{\sigma_{j+2b} - z_1^2\sigma_j\,;\ j \in N_\nu^2\}\,, & \text{si } m_0 = 2\,. \end{cases}$$

Dans les 2e et 3e cas, $\begin{cases} \text{si } m_0 = 0, \\ \text{ou si } m_0 \geqslant 1 \text{ et } c \text{ impair,} \end{cases}$

dans le 2e cas, si $c$ est pair, $\dfrac{c}{2}$ impair, $m_0 = 1$ et $z > 0$,

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu, m_0) + \min(n_\nu', m_0)\,,$$

$$e_\nu = (n_\nu - m_0)_+ + (n_\nu' - m_0)_+\,,$$

$$Y = \begin{cases} \{\sigma_j\,;\ j \in N_\nu\} \cup \{\tau_j\,;\ j \in N_\nu'\}\,, & \text{si } m_0 = 0\,, \\ \{\sigma_{j+b} - z_1\sigma_j\,;\ j \in N_\nu^1\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1\tau_j\,;\ j \in N_\nu'^1\}\,, & \text{si } m_0 = 1\,, \\ \{\sigma_{j+2b} - z_1^2\sigma_j\,;\ j \in N_\nu^2\} \cup \{\tau_{j+2b} - z_1^2\tau_j\,;\ j \in N_\nu'^2\}\,, & \text{si } m_0 = 2\,. \end{cases}$$

Si $c$ est pair, $m_0 = 1$, $z > 0$, $\begin{cases} \text{dans le 2e cas si } \dfrac{c}{2} \text{ est pair,} \\ \text{ou dans le 3e cas,} \end{cases}$

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu + n_\nu', 1)\,,$$

$$e_\nu = (n_\nu + n_\nu' - 1)_+\,.$$

$Y$ peut être pris égal à

$$\{\sigma_{j+b} - z_1\sigma_j\,;\ j \in N_\nu^1\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1\tau_j\,;\ j \in N_\nu'^1\}\,,$$

augmenté de $\gamma(r_1) r_1^{s_\nu' - s_\nu} \sigma_{s_\nu} - \tau_{s_\nu'}$, si $n_\nu$ et $n_\nu'$ sont tous deux $> 0$.

Si $c$ est pair, $m_0 = 1$, $z < 0$, dans les 2e et 3e cas,

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu, 1),\ e_\nu = (n_\nu - 1)_+ + n_\nu'\,,$$

$$Y = \{\sigma_{j+b} - z_1\sigma_j\,;\ j \in N_\nu^1\} \cup \{\tau_j\,;\ j \in N_\nu'\}\,.$$

Si $m_0 = 2$, et si $c$ est pair, $\left\{\begin{array}{l}\text{dans le } 2^{\text{e}} \text{ cas si } \dfrac{c}{2} \text{ est pair,}\\ \text{ou dans le } 3^{\text{e}} \text{ cas,}\end{array}\right.$

$$\varrho_\nu = \begin{cases} 2, \text{ si } n_\nu \geqslant 2, \\ n_\nu + \min(n'_\nu, 1), \text{ si } n_\nu < 2, \end{cases}$$

$$e_\nu = \begin{cases} n_\nu + n'_\nu - 2, \text{ si } n_\nu \geqslant 2, \\ (n'_\nu - 1)_+ \text{ si } n_\nu < 2. \end{cases}$$

On peut prendre $Y$ égal à

$$\{\sigma_{j+2b} - z_1^2\sigma_j\,;\, j \in N_\nu^2\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1\tau_j\,;\, j \in N_\nu'^1\},$$

augmenté de $(r_1^b\sigma_{s_\nu - b} + \sigma_{s_\nu})\gamma(r_1)r_1^{s'_\nu - s_\nu} - 2\tau_{s'_\nu}$, si $n_\nu \geqslant 2$ et $n'_\nu \geqslant 1$.

Dans le $2^{\text{e}}$ cas, si $m_0 = 2$, $c$ pair, $\dfrac{c}{2}$ impair,

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu, 2) + \min(n'_\nu, 1),$$

$$e_\nu = (n_\nu - 2)_+ + (n'_\nu - 1)_+,$$

$$Y = \{\sigma_{j+2b} - z_1^2\sigma_j\,;\, j \in N_\nu^2\} \cup \{\tau_{j+b} - z_1\tau_j\,;\, j \in N_\nu'^1\}.$$

Lorsque $e_\nu = 0$, l'application $D: H_{\nu'} \to H_{\mu'}$ est surjective (th. 9.2), donc $D$ admet une solution élémentaire dans $H_{\nu'}$. Si $e_\nu \geqslant 1$, pour que $D$ admette une solution élémentaire dans $H_{\nu'}$, il faut et il suffit que les conditions (9.16) soient vérifiées, donc que $\langle 1, P^{-1}\eta\rangle = 0$, pour tout $\eta \in Y$. Compte tenu des formules (10.2) à (10.7), on en déduit:

**Proposition 10.1.** *Pour que l'opérateur $D$ défini par* (10.1) *admette une solution élémentaire dans $H_{\nu'}$, il faut et il suffit qu'une des conditions suivantes soit satisfaite:*

*dans le* $1^{\text{er}}$ *cas:*

1) *$b$ et $c$ impairs, $m \leqslant m_0 + 1$,*
2) *$b$ impair et $c$ pair,*
3) *$b$ pair et $c$ impair;*

*dans le* $2^{\text{e}}$ *cas:*

1) *$b$ et $c$ impairs, $m \leqslant m_0 + 1$,*
2) *$b$ impair, $c$ et $\dfrac{c}{2}$ pairs,*
3) *$b$ impair, $c$ pair, $\dfrac{c}{2}$ impair, $m < \dfrac{n}{2b} + \dfrac{1}{2}$ et $\left\{\begin{array}{l} m_0 = 0 \\ ou\ m_0 = 1, z < 0,\end{array}\right.$*
4) *$b$ impair, $c$ pair, $\dfrac{c}{2}$ impair, $m < \dfrac{n}{2b} + \dfrac{3}{2}$ et $\left\{\begin{array}{l} m_0 = 1,\ z > 0, \\ ou\ m_0 = 2,\end{array}\right.$*
5) *$b$ pair et $c$ impair;*

*dans le $3^e$ cas:*

1) *b et c impairs*, $m \leqslant m_0 + 1$,
2) *b impair et c pair*,
3) *b pair et c impair*, $m < \frac{n}{2b} + 1 + m_0$.

Notons que la condition $m \leqslant m_0 + 1$ n'est réalisée que pour $m = 1$ et pour $m = 2, z > 0$.

## 11. Application $M_\nu$ (cas euclidien)

Dans le cas euclidien, à partir de l'application $(x, t) \to t \mid x \mid^{-a}$ de l'ouvert $\mid x \mid \neq 0$ de $R^{n+1}$ sur $R$, on pourrait obtenir une représentation paramétrique de $H_\nu$ à l'aide du dual d'un espace de fonctions $C^\infty$ d'une variable réelle. Mais nous suivrons la même voie que dans le cas où $u$ est non définie.

Avec les notations du § 1, on a $u = \mid x \mid^2$. L'application $\mu : (x, t) \to w = u \mid t \mid^{-2/a}$, de $\Omega$ sur la demi-droite ouverte $R_+ = ]0, + \infty[$, est régulière. Comme au § 1, on en déduit, en identifiant le produit $D'(R_+) \times D'(R_+) = D'(R_+)^2$ au dual du produit $D(R_+) \times D(R_+) = D(R_+)^2$:

**Proposition 11.1.** *A tout élément* $f \in H_\nu(\Omega)$, *on peut associer un couple* $h = (h_+, h_-) \in D'(R_+)^2$, *déterminé de façon unique, tel que* $\langle f, \varphi \rangle = \langle h, M_\nu \varphi \rangle$ *pour tout* $\varphi \in D(\Omega)$, $M_\nu$ *étant une application linéaire continue de* $D(\Omega)$ *sur le produit* $D(R_+)^2 : M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi)$.

Pour $\varphi \in D(\Omega)$, on a

$$M_\nu^\pm \varphi(s) = s^{\frac{n-2}{2}} N_\nu^\pm \varphi(s), \tag{11.1}$$

avec

$$N_\nu^\pm \varphi(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \varphi_0(s t^{\frac{2}{a}}, \pm t) \, t^{\frac{\nu+n}{a}} dt, \tag{11.2}$$

en désignant par $\varphi_0(v, t)$ la moyenne

$$\varphi_0(v, t) = \int_{\sigma \in S^{n-1}} \varphi(\sqrt{v}\,\sigma, t) d\sigma, \tag{11.3}$$

où $d\sigma$ est l'élément d'aire de la sphère $S^{n-1} = \{x \in R^n ; \mid x \mid = 1\}$.

Si $\varphi \in S(R^{n+1})$, l'intégrale (11.3) conserve un sens et définit une fonction $\varphi_0(v, t)$ de classe $C^\infty$ pour $v \geqslant 0$ et $t \in R$, à décroissance rapide lorsque $v + \mid t \mid \to \infty$. On vérifie que

$$D_v^j \varphi_0(0, t) = c_j \Delta^j \varphi(0, t), \; j \in N, \tag{11.4}$$

avec

$$c_j = \frac{2 \pi^{\frac{n}{2}}}{4^j \Gamma\left(\frac{n}{2} + j\right)}, \tag{11.5}$$

en posant $\square = \Delta$ dans le cas euclidien.

Supposons que $\varphi \in S(R^{n+1})$. L'intégrale (11.2) a donc un sens pour $R\nu > -(a+n)$ et définit une fonction $C^\infty$ de $s \geqslant 0$. La dérivée

$$D^j N_\nu^{\pm} \varphi(0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty D_\nu^j \varphi_0(0, \pm t) t^{\frac{\nu+n+2j}{a}} dt$$

est prolongeable en une fonction méromorphe de $\nu \in C$. Nous la définirons pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel. On a donc, d'après (11.4),

$$D^j N_\nu^{\pm} \varphi(0) = \frac{c_j}{2} \langle \Delta^j \delta(x) \otimes t_{\pm}^{\frac{\nu+n+2j}{a}}, \varphi \rangle, \; j \in N.$$

Pour $R\nu > -(a+n)$ et pour tout $m \in N$, on peut écrire

$$N_\nu^{\pm} \varphi(s) = \sum_{j=0}^{m-1} D^j N_\nu^{\pm} \varphi(0) \frac{s^j}{j!} + \int_0^s \frac{(s-t)^{m-1}}{(m-1)!} D^m N_\nu^{\pm} \varphi(t) dt,$$

où

$$D^m N_\nu^{\pm} \varphi(s) = \frac{1}{2} \int_0^\infty D_\nu^m \varphi_0(s t^{\frac{2}{a}}, \pm t) t^{\frac{\nu+n+2m}{a}} dt,$$

est fonction holomorphe de $\nu$ dans le demi-plan $R\nu > -(a+n+2m)$. Il s'ensuit que $N_\nu^{\pm} \varphi(s)$ est fonction méromorphe de $\nu \in C$ et que ses pôles sont ceux de $D^j N_\nu^{\pm} \varphi(0) \frac{s^j}{j!}$, $j \in N$, à savoir:

$\nu = -(n + 2j + ak + a)$, $k \in N$, pôle simple de résidu

$$\frac{a c_j}{2} \frac{(\mp 1)^k}{k!} \langle \Delta^j \delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi \rangle \frac{s^j}{j!}, \tag{11.6}$$

avec (11.5). Définissons $N_\nu^{\pm} \varphi(s)$ par prolongement naturel pour tout $\nu \in C$. Alors, pour tout $\nu \in C$, $N_\nu^{\pm} \varphi(s)$ est de classe $C^\infty$ pour $s \geqslant 0$. De même, pour tout $\nu \in C$, définissons $M_\nu^{\pm} \varphi(s)$ par prolongement naturel; la relation (11.1) est donc valable pour tout $\nu \in C$.

Lorsque $s > 0$, on a, pour $R\nu > -(a+n)$,

$$N_\nu^{\pm} \varphi(s) = s^{-\frac{\nu+n+a}{2}} T_\nu \varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}),$$

où

$$T_\nu \varphi(s) = \frac{a}{4} \int_0^\infty \varphi_0(v, s v^{\frac{a}{2}}) v^{\frac{\nu+a+n-2}{2}} dv$$

est prolongeable en une fonction méromorphe de $\nu \in C$. Définissons $T_\nu \varphi(s)$ pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel; avec cette définition, $T_\nu \varphi(s)$ est une fonction $C^\infty$ de $s \in R$. Par prolongement naturel, compte tenu des valeurs (11.6), on obtient

$$N_\nu^\pm \varphi(s) = s^{-\frac{\nu+n+a}{2}} T_\nu \varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}) -$$
$$-\frac{a}{4} \log s \, \Sigma \frac{(\mp 1)^k}{k!} c_j \langle \Delta^j \delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi \rangle \frac{s^j}{j!},$$

la somme étant étendue à tous les entiers $k, j \geqslant 0$, tels que $\nu + n + 2j + a(k+1) = 0$.

Posons, pour $s \geqslant 0$,

$$\gamma(s) = \begin{cases} 1, \text{ si } n \text{ est pair}, \\ \sqrt{s}, \text{ si } n \text{ est impair}. \end{cases} \tag{11.7}$$

Désignons toujours par $\bar{n}$ la partie entière de $\frac{n-2}{2}$. Pour tout $j \in N$, posons

$$k'_\nu(j) = -\frac{\nu + a + 2j + n - 2\bar{n}}{a}, \tag{11.8}$$

et soit $N'_\nu$ la partie de $N$ définie par

$$N'_\nu = \{j \in N ; j \geqslant \bar{n}, k'_\nu(j) \in N\}. \tag{11.9}$$

D'après (11.1), on a alors, pour tout $\nu \in C$ et pour $s > 0$,

$$M_\nu^\pm \varphi(s) = s^{-\frac{\nu+a+2}{2}} T_\nu \varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}) + \gamma(s) \log s \sum_{j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} c'_j s^j, \tag{11.10}$$

avec

$$c'_j = (-1)^{k+1} \frac{a}{2} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{4^{j-\bar{n}} k! (j-\bar{n})! \Gamma\left(\frac{n}{2} + j - \bar{n}\right)} \langle \Delta^{j-\bar{n}} \delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t), \varphi \rangle,$$
$$k = k'_\nu(j), j \in N'_\nu. \tag{11.11}$$

Désignons par $K_\nu$ l'espace vectoriel sur $C$ formé des couples $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-)$ de fonctions d'une variable réelle $s$, définies pour $s > 0$, ayant les propriétés suivantes:

1° $\varphi^+(s)$ et $\varphi^-(s)$ sont $C^\infty$ pour $s > 0$.

2° Il existe des fonctions $\mu^+\varphi$ et $\mu^-\varphi$ de classe $C^\infty$ pour $s \geqslant 0$, telles que

$$\varphi^\pm(s) = \gamma(s) s^{\bar{n}} \mu^\pm \varphi(s), \tag{11.12}$$

avec (11.7).

3° Il existe une fonction $\chi\varphi$ de classe $C^\infty$ sur $R$, et des constantes $\langle \gamma'_j, \varphi \rangle$, $j \in N'_\nu$ telles que

$$\varphi^\pm(s) = s^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \chi\varphi(\pm s^{-\frac{a}{2}}) +$$
$$+ \gamma(s) \log s \sum_{j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \langle \gamma'_j, \varphi \rangle s^j, \tag{11.13}$$

avec (11.7), (11.9) et (11.8).

Munissons $K_\nu$ des semi-normes

$$p_m^{\pm}(\varphi) = \sup_{\substack{0\leqslant s\leqslant 1\\ k\leqslant m}} |D^k \mu^{\pm} \varphi(s)| ,$$

$$q_m(\varphi) = \sup_{\substack{|s|\leqslant 1\\ k\leqslant m}} | D^k \chi \varphi(s) | ,$$

$$q(\varphi) = \sum_{j\in N'_\nu} | \langle \gamma'_j, \varphi \rangle | .$$

On vérifie que $K_\nu$ est alors un espace de Fréchet. On a $D(R_+)^2 \subset K_\nu$, l'injection étant continue. Si $\varphi \in S(R^{n+1})$, on a $M_\nu \varphi = (M_\nu^+ \varphi, M_\nu^- \varphi) \in K_\nu$ et on démontre facilement le résultat suivant:

**Proposition 11.2.** *L'application* $M_\nu : S(R^{n+1}) \to K_\nu$ *est linéaire continue et prolonge l'application* $M_\nu : D(\Omega) \to D(R_+)^2$ *de la proposition* 11.1.

Nous noterons également $M_\nu$ la restriction à $D(R^{n+1})$ de l'application $M_\nu : S(R^{n+1}) \to K_\nu$.

**Lemme 11.1.** *Pour tout* $\nu \in C$, *il existe une application linéaire continue* $L_\nu : K_\nu \to D(R^{n+1})$, *telle que l'application composée* $M_\nu L_\nu$ *soit égale à l'identité. De plus, l'image par* $L_\nu$ *de* $D(R_+)^2$ *est contenue dans* $D(\Omega)$.

Soit en effet, pour tout $j \in N'_\nu$, une fonction $\vartheta_j \in D(R^n)$ telle que

$$\langle \bar{\Delta}^{k-n} \delta(x), \vartheta_j \rangle = \delta_{kj}, \; k \in N'_\nu ,$$

et soit $\varrho(t) \in D(R)$ une fonction dont aucune dérivée n'est nulle à l'origine. D'après (11.10) et (11.11), il existe des constantes $\lambda_j$, $j \in N'_\nu$, telles que, pour tout $\varphi \in K_\nu$, la fonction

$$\Phi_3(x, t) = \sum_{j\in N'_\nu} \lambda_j \langle \gamma'_j, \varphi \rangle \vartheta_j(x) \varrho(t) \in D(R^{n+1})$$

vérifie $\langle \gamma'_j, M_\nu \Phi_3 \rangle = \langle \gamma'_j, \varphi \rangle$, $j \in N'_\nu$. Il est clair que l'application $\varphi \to \Phi_3$ de $K_\nu$ dans $D(R^{n+1})$ est continue.

Soient $\alpha_1(s)$ et $\alpha_2(s)$ des fonctions $C^\infty$ telles que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$, $\alpha_1(s)$ nulle pour $s > 2$ et $\alpha_2(s)$ nulle pour $s < 1$. Pour tout $\varphi \in K_\nu$, les éléments $\varphi_1 = \alpha_1(\varphi - M_\nu \Phi_3)$ et $\varphi_2 = \alpha_2(\varphi - M_\nu \Phi_3)$ appartiennent à $K_\nu$. Soit $\alpha(t) \in D(R_+)$ telle que

$$\int_0^\infty \alpha(t)\, t^{\frac{\nu+n}{a}}\, dt = 1 ,$$

et posons, avec (11.12),

$$\Phi_1(x, t) = \frac{2}{s_{n-1}} [\alpha(t) \mu^+ \varphi_1(u \,|\, t\,|^{-\frac{2}{a}}) + \alpha(-t) \mu^- \varphi_1(u\,|\,t\,|^{-\frac{2}{a}})] ,$$

$s_{n-1}$ étant l'aire de la sphère $S^{n-1}$. On a $\Phi_1 \in D(R^{n+1})$ et, d'après (11.1), $M_\nu \Phi_1 =$

$= \varphi_1$. D'autre part, on a $\langle \gamma'_j, \varphi_2 \rangle = 0$, pour tout $j \in N'_\nu$, de sorte que, d'après (11.13),

$$\varphi_2^{\pm}(s) = s^{-\frac{\nu+a+2}{2}} \chi\varphi_2(\pm s^{-\frac{2}{a}}) .$$

Soit $\vartheta(v) \in D(R_+)$ telle que

$$\int_0^\infty \vartheta(v^{\frac{2}{a}}) v^{\frac{\nu+n}{a}} dv = 1 ,$$

et posons

$$\Phi_2(x, t) = \frac{2}{s_{n-1}} \vartheta(u) \chi\varphi_2(tu^{-\frac{a}{2}}) .$$

On a $\Phi_2 \in D(R^{n+1})$ et $M_\nu \Phi_2 = \varphi_2$. De plus, les applications $\varphi \to \Phi_1$ et $\varphi \to \Phi_2$ de $K_\nu$ dans $D(R^{n+1})$ sont continues. L'application $L_\nu : K_\nu \to D(R^{n+1})$ définie par $L_\nu \varphi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ a les propriétés voulues; en effet, $L_\nu \varphi \in D(\Omega)$ si $\varphi \in D(R_+)^2$, c. q. f. d.

Une conséquence immédiate de ce lemme est:

**Proposition 11.3.** *L'application* $M_\nu : D(R^{n+1}) \to K_\nu$ *est surjective.*

## 12. Représentation paramétrique de $H_\nu$, espaces $K_\nu$ et $K'_\nu$ (cas euclidien)

Soit $K'_\nu$ le dual de $K_\nu$ et soit $M'_\nu : K'_\nu \to D'(R^{n+1})$ l'application transposée de $M_\nu : D(R^{n+1}) \to K_\nu$. Les propositions 11.2 et 11.3 entraînent:

**Proposition 12.1.** *L'application linéaire continue* $M'_\nu : K'_\nu \to D'(R^{n+1})$ *est injective. Son image* $K'_\nu = M'_\nu K'_\nu$ *est contenue dans* $S'(R^{n+1})$.

**Remarque.** Dans le cas euclidien, le lemme 11.1, plus fort que le lemme 3.1, et la proposition 11.2 permettent de montrer sans peine que l'application $M'_\nu : K'_\nu \to K'_\nu$ est un homéomorphisme, les topologies induites par $D'(R^{n+1})$ et $S'(R^{n+1})$ sur $K'_\nu$ étant identiques.

Comme au § 5, on montre que $M'_\nu h$ est une distribution invariante sur $R^{n+1}$, pour tout $h \in K'_\nu$. En outre, si $\varphi \in D(R^{n+1})$, en posant $\varphi_\lambda(x, t) = \lambda^{-(n+a)}\varphi(\lambda^{-1}x, \lambda^{-a}t)$ pour tout $\lambda > 0$, on a

$$M_\nu^{\pm} \varphi_\lambda(s) = \lambda^\nu [M_\nu^{\pm} \varphi(s) + \gamma(s) \log s \sum_{j \in N'_\nu} (\pm 1)^{k'_\nu(j)} c''_j s^j] ,$$

pour tout $\nu \in C$, avec $c''_j = -2c'_j$ et (11.11), (11.7), (11.8), (11.9). On en déduit que, pour tout $j \in N'_\nu$,

$$\tau_j = (\gamma(s)s^j, (-1)^{k'_\nu(j)} \gamma(s)s^j) \tag{12.1}$$

est un élément de $K_\nu$, et que:

**Proposition 12.2.** *Soit* $h \in K'_\nu$. *Pour que* $M'_\nu h \in H_\nu$, *il faut et il suffit que* $h \in H_\nu$, $H_\nu$ *étant le sous-espace vectoriel fermé de* $K'_\nu$ *défini par les relations*

$$\langle h, \varphi \rangle = 0, \text{ pour tout } \varphi \in X_\nu,$$

*où*

$$X_\nu = \{\tau_j ; j \in N'_\nu\}, \tag{12.2}$$

*avec* (12.1), *est une partie libre de* $K_\nu$.

Posons

$$n'_\nu = \text{card } N'_\nu. \tag{12.3}$$

$H_\nu$ est donc de codimension $n'_\nu$ dans $K'_\nu$. Remarquons que $n'_\nu = 0$, donc $H_\nu = K'_\nu$, sauf pour une suite discrète de valeurs négatives de $\nu$.

Donnons quelques exemples d'éléments de $K'_\nu$. D'après (11.12), si $\varphi \in K_\nu$, $\varphi^+$ et $\varphi^-$ admettent des développements asymptotiques

$$\varphi^\pm(s) \sim \sum_{j=\bar{n}}^{\infty} \langle \beta_j^\pm, \varphi \rangle \gamma(s) s^j,$$

lorsque $s \to 0$. Les coefficients de ces développements définissent des éléments $\beta_j^+$ et $\beta_j^-$ de $K'_\nu$ $(\bar{n} \leqslant j \in N)$. De même, les coefficients de (11.13) définissent des éléments $\gamma'_j (j \in N'_\nu)$ de $K'_\nu$. Pour tout $k \in N$, on peut considérer l'élément $\varepsilon_k$ de $K'_\nu$ défini par $\langle \varepsilon_k, \varphi \rangle = D^k \chi\varphi(0)$, $\chi\varphi$ étant la fonction qui figure dans (11.13). Pour $j \in N'_\nu$, on a

$$\langle \beta_k^\pm, \tau_j \rangle = (\pm 1)^{k'_\nu(j)} \delta_{kj}, \bar{n} \leqslant k \in N, \tag{12.4}$$

$$\langle \gamma'_k, \tau_j \rangle = 0, k \in N'_\nu, \tag{12.5}$$

et, puisque $\chi\tau_j(s) = s^{k'_\nu(j)}$,

$$\langle \varepsilon_i, \tau_j \rangle = k! \, \delta_{ik}, i \in N, k = k'_\nu(j). \tag{12.6}$$

D'après (12.5), on a $\gamma'_k \in H_\nu$, $(k \in N'_\nu)$. D'après (12.4) et (12.6), on a

$$\begin{aligned} K'_\nu &= H_\nu \oplus [\beta_j^+ ; j \in N'_\nu] \\ &= H_\nu \oplus [\varepsilon_{k'_\nu(j)} ; j \in N'_\nu]. \end{aligned} \tag{12.7}$$

Cherchons à caractériser les éléments de $H_\nu$ nuls dans $\Omega$. Pour cela, considérons la fonction $u^\nu$, localement intégrable dans $R^n$ pour $R\nu > -\frac{n}{2}$. En tant que fonction de $\nu$ à valeurs dans $D'(R^n)$, $u^\nu$ est prolongeable en une fonction méromorphe sur $C$, avec pôles simples $\nu = -\frac{n}{2} - k, k \in N$ (cf. [4]). Nous définirons $u^\nu$ pour tout $\nu \in C$ par prolongement naturel (voir § 2). On a alors, pour $\lambda > 0$,

$$u^\nu(\lambda x) = \begin{cases} \lambda^{2\nu} u^\nu(x), & \text{si } \nu \neq -\frac{n}{2} - k \text{ pour tout } k \in N, \\ \lambda^{2\nu}\left[u^\nu(x) + \log\lambda \frac{c_k}{k!} \Delta^k \delta(x)\right], & \text{si } \nu = -\frac{n}{2} - k,\ k \in N, \end{cases}$$

avec (11.5). Comme au § 4, on en déduit le résultat suivant:

**Proposition 12.3.** *Les éléments*

$$\Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t),\ j \in N'_\nu,\ k = k'_\nu(j),$$

$$\frac{c_{j-\bar{n}}}{(j-\bar{n})!} \Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes t_\pm^{-(k+1)} - a \frac{(\mp 1)^k}{k!} u^{-\left(j + \frac{n-2\bar{n}}{2}\right)} \otimes \delta^{(k)}(t),$$

$$\textit{avec } (11.5),\ j \in N'_\nu,\ k = k'_\nu(j),$$

$$u^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t),\ k \in N,\ k \neq k'_\nu(j) \textit{ pour tout } j \in N'_\nu,$$

$$\Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu + 2j + n - 2\bar{n}}{a}},\ \bar{n} \leqslant j \in N,\ j \notin N'_\nu,$$

*constituent une base de l'espace vectoriel formé des distributions de $H_\nu$ nulles dans $\Omega$.*

A des facteurs constants non nuls près, $M'_\nu \beta_j^\pm\ (j \geqslant \bar{n})$ est égal à

$$\Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes t_\pm^{\frac{\nu + 2j + n - 2\bar{n}}{a}},$$

$M'_\nu \gamma'_j (j \in N'_\nu)$ à
$$\Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes \delta^{(k)}(t),\ k = k'_\nu(j),$$

et $M'_\nu \varepsilon_k (k \in N)$ à
$$u^{\frac{\nu + a(k+1)}{2}} \otimes \delta^{(k)}(t).$$

On a donc (prop. 12.2 et 12.3):

**Proposition 12.4.** *L'espace vectoriel formé des éléments de $H_\nu$ nuls dans $\Omega$ est contenu dans $M'_\nu H_\nu$.*

Une démonstration analogue à celle du théorème 5.1, et utilisant les propositions 11.1, 12.1, 12.2, 12.4 et le lemme 11.1, conduit au résultat suivant:

**Théorème 12.1.** *L'application $M'_\nu$ induit un isomorphisme de $H_\nu$ sur $H_\nu$.*

**Corollaire.** *Les distributions de $H_\nu$ sont tempérées.*
En effet, les éléments de $M'_\nu K'_\nu$ sont tempérés (prop. 12.1).

Soit $K'_\nu = M'_\nu K'_\nu$. Comme les distributions de $K'_\nu$ sont tempérées, on peut considérer l'image de FOURIER $K_{\nu'} = F K'_\nu$, avec $\nu' = -(\nu + n + a)$. De même qu'au § 6, on a $H_{\nu'} = F H_\nu$; par suite, en vertu de (12.7), on a (cf. § 6)

$$K'_\nu = H_\nu \oplus [\Delta^{j-\bar{n}}\delta(x) \otimes t_\mp^{-(k+1)};\ j \in N'_\nu,\ k = k'_\nu(j)], \tag{12.8}$$

$$K_\nu = H_\nu \oplus [u^{j-\bar{n}} \otimes t^k \log|t|\, ; j \in N'_{\nu'},\, k = k'_{\nu'}(j)]\,, \tag{12.9}$$

$H_\nu$, $K'_\nu$ et $K_\nu$ étant des sous-espaces fermés de $D'(R^{n+1})$ ou de $S'(R^{n+1})$ (cf. [2], chap. I, § 2, corollaire 4 du th. 2 et prop. 3). De plus:

**Proposition 12.5.** *Pour tout* $\nu \in C, \nu' = -(\nu + n + a)$, *les transformations de* FOURIER $F$ *et* $\bar{F}$ *induisent des isomorphismes de* $H_\nu$ *sur* $H_{\nu'}$, *de* $K'_\nu$ *sur* $K_{\nu'}$ *et de* $K_\nu$ *sur* $K'_{\nu'}$.

## 13. Opérateurs différentiels homogènes et invariants (cas euclidien)

Comme au § 7, en posant $a = 2\dfrac{b}{c}$ ($b$ et $c$ entiers $> 0$ premiers entre eux), on montre que l'opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, le plus général, conservant $H = \bigcup\limits_{\nu \in C} H_\nu$ est de la forme

$$D = (-\Delta)^h \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^k \sum_{j=0}^{m} a_j (-\Delta)^{jb} \left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{(m-j)c}, \tag{13.1}$$

avec $h, k, m \in N$, $a_j \in C$, $a_0$ et $a_m \neq 0$. Soit

$$P(u, t) = u^h t^k \sum_{j=0}^{m} a_j u^{jb} t^{(m-j)c} \tag{13.2}$$

le polynôme associé à $D$, et posons

$$Q(s) = \sum_{j=0}^{m} a_j s^j. \tag{13.3}$$

Les propositions et théorèmes du § 7 restent valables; en particulier:

**Proposition 13.1.** *Pour tout* $\nu \in C$, *les applications*

$$\sigma : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \to \sigma\varphi = (s\varphi^+, s\varphi^-)$$

*de* $K_{\nu+2}$ *dans* $K_\nu$,

$$\eta : \varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \to \eta\varphi = (\varphi^+, -\varphi^-)$$

*de* $K_{\nu+a}$ *dans* $K_\nu$, *et*

$$P = \sigma^h \eta^k \sum_{j=0}^{m} a_j \sigma^{jb} \eta^{(m-j)c} \tag{13.4}$$

*de* $K_\mu$ *dans* $K_\nu$, *avec*

$$\mu = \nu + 2h + ak + 2bm, \tag{13.5}$$

*sont linéaires continues.*

*La multiplication par le polynôme* (13.2) *induit une application linéaire continue* $P : K'_\nu \to K'_\mu$, *telle que* $M'^{-1}_\mu P M'_\nu$ *soit égal à la transposée* $P' : K'_\nu \to K'_\mu$ *de* $P$. *L'application* $P'$ *induit une application linéaire continue* $P'_0$ *de* $H_\nu$ *dans* $H_\mu$.

**Théorème 13.1.** *Pour tout* $\nu' \in C$, *l'opérateur* $D$ *donné par* (13.1) *applique* $H_{\nu'}$ *dans* $H_{\mu'}$ *et* $K_{\nu'}$ *dans* $K_{\mu'}$, *avec* $\mu' = \nu' - 2h - ak - 2bm$.

L'image de $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in K_\mu$ par l'application (13.4) est $P\varphi = (P_+\varphi^+, P_-\varphi^-)$, où $P_+$ et $P_-$ sont des polynômes non identiquement nuls:

$$P_\pm(s) = (\pm 1)^{k+mc} s^h Q((\pm 1)^c s^b) , \tag{13.6}$$

avec (13.3). Posons:

$$Z_\nu^0 = \{\beta_j^+, \beta_j^- ; \bar{n} \leqslant j < \bar{n} + h\} . \tag{13.7}$$

Pour tout $k \in N$ et pour $r_0 > 0$, considérons les éléments $\delta_k^+(s - r_0)$ et $\delta_k^-(s - r_0)$ de $K_\nu'$ définis par $\langle \delta_k^\pm(s - r_0), \varphi \rangle = D^k \varphi^\pm(r_0)$. Soient $z_j$, $1 \leqslant j \leqslant m'$, les zéros réels distincts de $Q(s)$, $z_j$ étant d'ordre $n_j$, et supposons que $z_j$, $1 \leqslant j \leqslant m''$, sont les zéros $> 0$ de $Q(s)$. Si $c$ est impair, posons

$$Z_\nu^1 = \{\delta_k^{\operatorname{sgn} z_j}(s - r_j) ; r_j > 0, r_j^b = |z_j|\} , \tag{13.8}$$

où $j$ prend les valeurs $1, 2, \ldots, m'$ et $k$ les valeurs $0, 1, \ldots, n_j - 1$. Si $c$ est pair, posons

$$Z_\nu^1 = \{\delta_k^+(s - r_j), \delta_k^-(s - r_j) ; r_j > 0, r_j^b = z_j\} , \tag{13.9}$$

où $j$ prend les valeurs $1, 2, \ldots, m''$ et $k$ les valeurs $0, 1, \ldots, n_j - 1$.

Posons enfin

$$Z_\nu^2 = \{\varepsilon_j ; 0 \leqslant j < k\} , \tag{13.10}$$

et, avec (13.5),

$$Z_\nu'^3 = \begin{cases} \{\gamma_j' ; j \in N_\nu'\}, \text{ si } N_\mu' = \varnothing , \\ \{\gamma_j' ; j \in N_\nu' - \bar{N}_\nu'\} \cup \{L_1', \ldots, L_m'\} , \text{ si } N_\mu' \neq \varnothing , \end{cases} \tag{13.11}$$

la partie $\bar{N}_\nu'$ de $N_\nu'$ et les éléments $L_1', \ldots, L_m'$ de $K_\nu'$ étant définis par des formules analogues à (8.12) et (8.13). De la même façon qu'au § 8, on obtient:

**Proposition 13.2.** *L'application $P : K_\mu \to K_\nu$ définie par* (13.4) *est injective et l'application réciproque $P^{-1} : PK_\mu \to K_\nu$ est continue. L'image $PK_\mu$ de $P$ est le sous-espace vectoriel fermé de $K_\nu$, de codimension finie, formé des $\psi \in K_\nu$ tels que $\langle h, \psi \rangle = 0$, pour tout $h \in Z_\nu$, où $Z_\nu$ est la partie*

$$Z_\nu = Z_\nu^0 \cup Z_\nu^1 \cup Z_\nu^2 \cup Z_\nu'^3 \tag{13.12}$$

*de $K_\nu'$, avec* (13.7) *à* (13.11).

A l'opérateur (13.1) associons le nombre

$$d = 2h + m_0 + k , \tag{13.13}$$

où $m_0 = \operatorname{card} Z_\nu^1$ est égal au nombre de zéros réels de $Q(s)$ si $c$ est impair, et à deux fois le nombre de zéros $> 0$ de $Q(s)$ si $c$ est pair.

Les éléments de $Z_\nu$ sont linéairement indépendants et leur nombre $c_\nu$ est fini:

$$c_\nu = d + n_\nu' - n_\mu' , \tag{13.14}$$

avec (13.13), (12.3) et (13.5). On démontre les propositions suivantes comme au § 9:

**Proposition 13.3.** *L'application transposée* $P' : K'_\nu \to K'_\mu$, *avec* (13.5), *est surjective. Son noyau est le sous-espace vectoriel* $[Z_\nu]$ *de* $K'_\nu$, *de dimension* $c_\nu$ (*formule* (13.14)), *dont* $Z_\nu$ *est une base* (*formule* (13.12)).

**Proposition 13.4.** *Le noyau de l'application* $P'_0 : H_\nu \to H_\mu$ *est le sous-espace vectoriel* $H_\nu \cap [Z_\nu]$ *de* $H_\nu$, *de dimension*

$$d_\nu = c_\nu - \varrho_\nu\,, \tag{13.15}$$

*avec* (13.14), $\varrho_\nu$ *étant le rang de la matrice*

$$M = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z_\nu, \varphi \in X_\nu} \tag{13.16}$$

*avec* (13.12) *et* (12.2); $\varrho_\nu$ *est aussi le rang de la matrice*

$$M' = (\langle h, \varphi \rangle)_{h \in Z'_\nu, \varphi \in X'_\nu} \tag{13.17}$$

*avec* $Z'_\nu = Z_\nu - Z'^3_\nu$, *et*

$$X'_\nu = \{\tau_j\,;\, j \in N'_\nu,\, j - h \notin N'_\mu\}\,, \tag{13.18}$$

$\tau_j$ *étant défini par* (12.1).

**Proposition 13.5.** *L'image* $P'_0 H_\nu$ *de* $P'_0$ *est un sous-espace vectoriel fermé, de codimension finie* $e_\nu$, *de* $H_\mu$:

$$e_\nu = n'_\nu - n'_\mu - \varrho_\nu\,, \tag{13.19}$$

*avec* (12.3), $\varrho_\nu$ *étant le rang de la matrice* (13.17). $P'_0 H_\nu$ *est le sous-espace vectoriel de* $H_\mu$ *formé des éléments* $h \in H_\mu$ *tels que*

$$\langle h, P^{-1}\eta_i \rangle = 0,\; i = 1, 2, \ldots, e_\nu\,, \tag{13.20}$$

$\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{e_\nu}$ *étant des éléments linéairement indépendants de* $[X'_\nu]$ (*espace vectoriel engendré par* $X'_\nu$, *avec* (13.18)) *contenus dans* $PK_\mu$ (*donc tels que* $\langle h, \eta_i \rangle = 0$, *pour tout* $h \in Z_\nu$).

Des propositions précédentes et de la proposition 12.5 on déduit:

**Théorème 13.2.** *Pour tout* $\nu' \in C$, $\mu' = \nu' - 2h - ak - 2bm$, $\nu = -(\nu' + n + a)$, $\mu = -(\mu' + n + a)$, *l'opérateur* $D$ *défini par* (13.1) *induit une application linéaire* $D : K_{\nu'} \to K_{\mu'}$ *surjective, dont le noyau est de dimension finie* $c_\nu$, *avec* (13.14).

**Théorème 13.3.** *Avec les notations du théorème* 13.2, *l'application linéaire* $D : H_{\nu'} \to H_{\mu'}$ *a une image de codimension finie* $e_\nu$ *et un noyau de dimension finie* $d_\nu$. *On a*

$$d_\nu = d + e_\nu\,, \tag{13.21}$$

*avec* (13.19), *où* $d$, *donné par* (13.13), *ne dépend que de* $D$.

Remarquons que $\delta \in H_{\mu'}$, avec $\mu' = -(n+a)$, et que $F\delta = 1$ est l'image par $M_0'$ de l'élément $1 \in H_0 = K_0'$ défini par

$$\langle 1, \varphi\rangle = \int_0^\infty \varphi^+(s)ds + \int_0^\infty \varphi^-(s)ds ,$$

pour $\varphi = (\varphi^+, \varphi^-) \in H_0$ (on a $N_0' = \varnothing$ et $\varphi^\pm(s)$ est intégrable). On peut donc énoncer:

**Théorème 13.4.** *Soit $D$ l'opérateur défini par* (13.1), *et posons* $\nu' = -(n+a) + 2h + ak + 2bm$, $\mu' = -(n+a)$, $\nu = -(2h+ak+2bm)$, $\mu = 0$.

*L'ensemble des solutions élémentaires de $D$ contenues dans $K_{\nu'}$ n'est pas vide et forme une variété linéaire affine de dimension $c_\nu$, avec* (13.14).

*Pour que $D$ admette une solution élémentaire dans $H$, donc dans $H_{\nu'}$, il faut et il suffit que*

$$\langle 1, P^{-1}\eta_i\rangle = \int_0^\infty \frac{\eta_i^+(s)}{P_+(s)}ds + \int_0^\infty \frac{\eta_i^-(s)}{P_-(s)}ds = 0 , \tag{13.22}$$

*pour* $i = 1, 2, \ldots, e_\nu$, *avec* (13.19), *les $\eta_i$ étant les éléments de $K_\nu$ considérés dans la proposition* 13.5. *Si la condition* (13.22) *est satisfaite, l'ensemble des solutions élémentaires de $D$ contenues dans $H_{\nu'}$ forme une variété linéaire affine de dimension $d_\nu$, avec* (13.21).

## 14. Exemple (cas euclidien)

Dans le cas euclidien, considérons l'opérateur

$$D = (-\Delta)^{mb} - z\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right)^{mc},$$

de la forme (13.1) avec $h = k = 0$, $m \geqslant 1$, $a_0 = -z \neq 0$, $a_m = 1$, $Q(s) = s^m - z$. Cherchons dans quels cas l'opérateur $D$ admet une solution élémentaire contenue dans $H_{\nu'}$, avec $\nu' = -(n+a) + 2bm$. Posons $\mu' = -(n+a)$, $\nu = -2bm$, $\mu = 0$.

D'après (11.9), on a $N_0' = \varnothing$ et $N_\nu'$ est encore donné par (10.3) et (10.4). Les formules (10.6) et (10.7) restent également valables.

D'après (13.7) et (13.10), on a $Z_\nu^0 = Z_\nu^2 = \varnothing$.

Si $c$ est impair, le nombre $m_0 = \operatorname{card} Z_\nu^1$ est égal à

$$m_0 = \begin{cases} 2, & \text{si } m \text{ est pair et } z > 0, \\ 1, & \text{si } m \text{ est impair et } z \in R, \\ 0, & \text{dans les autres cas.} \end{cases}$$

Si $c$ est pair,

$$m_0 = \begin{cases} 2, & \text{si } z > 0, \\ 0, & \text{si } z \text{ n'est pas } > 0. \end{cases}$$

Si $m_0 = 0$, on a $Z_\nu^1 = \varnothing$. Lorsque $m_0 = 1$, soit $z_1$ le zéro réel de $Q$; on a

$$Z_\nu^1 = \{\delta_0^{\operatorname{sgn} z}(s - r_1)\},$$

avec $r_1 > 0$, $r_1^b = |z_1|$. Si $m_0 = 2$, soit $z_1$ le zéro $> 0$ de $Q$, et soit $r_1 > 0$ tel que $r_1^b = z_1$; on a

$$Z_\nu^1 = \{\delta_0^+(s - r_1), \delta_0^-(s - r_1)\}.$$

Le nombre $\varrho_\nu$ est égal au rang de la matrice

$$M' = (\langle h, \tau_j\rangle)_{h \in Z_\nu^1,\, j \in N_\nu'},$$

et, d'après (13.20), $e_\nu = n_\nu' - \varrho_\nu$, avec $n_\nu' = \operatorname{card} N_\nu'$. Notons $Y = \{\eta_1, \ldots, \eta_{e_\nu}\}$ un ensemble d'éléments linéairement indépendants satisfaisant aux conditions énoncées dans la proposition 13.5. Avec les mêmes notations qu'au § 10 (formules (10.8) et (10.9)), on obtient les résultats suivants:

Si $m_0 \leqslant 1$, ou si $m_0 = 2$ et $c$ impair,

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu', m_0), \quad e_\nu = (n_\nu' - m_0)_+,$$

$$Y = \begin{cases} \{\tau_j;\, j \in N_\nu'\}, & \text{si } m_0 = 0, \\ \{\tau_{j+b} - z_1\tau_j;\, j \in N_\nu'^1\}, & \text{si } m_0 = 1, \\ \{\tau_{j+2b} - z_1^2\tau_j;\, j \in N_\nu'^2\}, & \text{si } m_0 = 2. \end{cases}$$

Si $m_0 = 2$ et $c$ pair,

$$\varrho_\nu = \min(n_\nu', 1), \; e_\nu = (n_\nu' - 1)_+,$$

$$Y = \{\tau_{j+b} - z_1\tau_j;\, j \in N_\nu'^1\}.$$

Compte tenu du théorème 13.4, on en déduit:

**Proposition 14.1.** *Pour que l'opérateur $D$ défini par* (14.1) *admette une solution élémentaire dans $H$, donc dans $H_{\nu'}$, il faut et il suffit qu'une des conditions suivantes soit vérifiée:*

*si $n$ est impair:*

1) *$c$ impair,*

2) *$c$ et $\frac{c}{2}$ pairs,*

3) *$c$ pair, $\frac{c}{2}$ impair, $m < \frac{n}{2b} + \frac{1 + m_0}{2}$;*

*si $n$ est pair:*

1) *$c$ impair, $m < \frac{n}{2b} + \frac{1}{2} + m_0$,*

2) *$c$ pair, $m_0 = 0$.*

BIBLIOGRAPHIE

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre*. Chap. II, algèbre linéaire (2e édition). Paris, HERMANN, 1955.

[2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques*. Paris, HERMANN, 1953 et 1955.

[3] L. GÅRDING, *Transformation de* FOURIER *des distributions homogènes*. Bull. Soc. math. France 89 (1961), 381–428.

[4] I. M. GEL'FAND et G. E. SHILOV, *Fonctions généralisées (en russe)*. t. 1, Moscou, 1958.

[5] P. JEANQUARTIER, *Solution élémentaire d'un opérateur différentiel généralisant celui de la chaleur*. C. R. Acad. Sc. Paris, 256 (1963), 1427–1428.

[6] P. JEANQUARTIER, *Solutions élémentaires d'opérateurs différentiels paraboliques hyperboliques*. Comment. Math. Helv. 37 (1963), 296–324.

[7] P. JEANQUARTIER, *Distributions homogènes et invariantes, opérateurs différentiels associés*. C. R. Acad. Sc. Paris, 258 (1964), 2963–2965.

[8] P.-D. METHÉE, *Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de* LORENTZ, Comment. Math. Helv. 28 (1954), 225–269.

[9] P.-D. METHÉE, *Transformées de* FOURIER *de distributions invariantes liées à la résolution de l'équation des ondes*. Colloques internationaux de CNRS, 71, La théorie des équations aux dérivées partielles, Nancy, 1956, 145–163.

[10] G. DE RHAM, *Variétés différentiables*. Paris, HERMANN, 1955.

[11] G. DE RHAM, *Solution élémentaire d'opérateurs différentiels du second ordre*. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 8 (1958), 337–366.

[12] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. t. 1 (2e édition) et t. 2, Paris, HERMANN, 1957 et 1951.

[13] A. TENGSTRAND, *Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature*. Math. Scand. 8 (1960), 201–218.

(Reçu le 14 mai 1964)