Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 38 (1963-1964)

Artikel: Fast-komplexe Strukturen auf einer LIEschen Gruppe.

Autor: Tondeur, Philippe

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29434

Fast-komplexe Strukturen auf einer Lieschen Gruppe

von Philippe Tondeur in Zürich[1])

Herrn Prof. B. L. van der Waerden zum 60. Geburtstag

Einleitung. Sei G eine zusammenhängende Liesche Gruppe. Eine fast-komplexe Struktur J auf G ist ein $(1, 1)$-Tensorfeld auf G mit $J(x)^2 = -$ Identität des Tangentialraumes T_x von G für jedes $x \in G$. Ist G von gerader Dimension, so gibt es natürlich eine rechtsinvariante fast-komplexe Struktur J auf G. J heißt biinvariant, falls J sowohl rechts- als auch linksinvariant ist. Der Tangentialraum T_e von G im Einselement $e \in G$ werde in kanonischer Weise identifiziert mit der Lie-Algebra $\underline{G}$ von G – der Lie-Algebra der rechtsinvarianten Vektorfelder auf G.

Satz 1 gibt eine notwendige und hinreichende Bedingung an für die Existenz einer biinvarianten fast-komplexen Struktur J auf G: die Existenz einer linearen Abbildung $J(e): T_e \to T_e$ mit $J(e)^2 = -$Identität von T_e, welche mit der adjungierten Darstellung von G vertauschbar ist. Die differentielle Form dieses Kriteriums ist die Vertauschbarkeit der Abbildung $J(e)$ mit der adjungierten Darstellung der Lie-Algebra von G (Satz 1′, Bedingung ii′). Diese beiden Aussagen erhält man als einfache Folgerungen aus Sätzen von A. Frölicher [2]. Als Anwendung ergibt sich die Integrabilität einer biinvarianten fast-komplexen Struktur auf G (Satz 2) und hieraus eine Charakterisierung der komplexen Lieschen Gruppen unter den reellen Lieschen Gruppen.

Wir nennen eine Lie-Algebra E, auf welcher eine mit der adjungierten Darstellung vertauschbare lineare Abbildung $J: E \to E$ mit $J^2 = -$Identität existiert, eine J-Algebra. Satz 3 gibt eine einfache Beziehung zwischen J und der Killingschen Form von E. Die derivierte Algebra E' und das Zentrum Z von E sind ebenfalls J-Algebren (Satz 4). Als Anwendung ergibt sich für eine komplexe Liesche Gruppe G, daß die von $\underline{G}'$ und $\underline{Z}$ erzeugten Untergruppen in natürlicher Weise komplex sind. Ferner erhält man einen elementaren Beweis für folgenden Satz: Eine zusammenhängende komplexe Liesche Gruppe ist notwendig abelsch, falls auf der Lie-Algebra eine bezüglich der adjungierten Darstellung invariante euklidische Metrik existiert.

Die Torsion T einer rechtsinvarianten fast-komplexen Struktur J auf einer Lieschen Gruppe G ist ein Tensorfeld desselben Typus wie der Strukturtensor S von G. Satz 6 gibt ein Kriterium an für die Gleichheit von T und S, welches einige Anwendungen gestattet.

(Zusatz am 21.5.63. Wie K. Nomizu in den Mathematical Reviews vom März 1963, # 2537 bemerkt, ist Satz 2 dieser Arbeit bekannt. Für einen anderen

---

[1]) Stipendiat des Schweiz. Nationalfonds.

Beweis sei auch hingewiesen auf das «Séminaire de Topologie et de Géométrie Différentielle» von Ch. Ehresmann Paris, Februar 1963 (vgl. den Abschnitt 8 im Exposé des Titels: «Connexions naturelles d'un groupe de Lie et applications»). Ferner werden im Korollar zu Satz 2 unter den reellen Lieschen Gruppen die komplexen gekennzeichnet. Vgl. hiezu auch den Hinweis im Buch von S. Helgason: «Differential Geometry and Symmetric Spaces», Academic Press 1962, p. 323, 2.)

1. G bezeichne eine zusammenhängende Liesche Gruppe. In unseren Betrachtungen wird G stets notwendigerweise von gerader Dimension sein. Wir benutzen den Ableitungsoperator

$$\mathrm{A}(x, y) = \frac{\partial}{x}(xy) \tag{1}$$

der Rechtstranslation $x \to xy$, welcher für $(x, y) \in G \times G$ einen Isomorphismus $T_x \to T_{xy}$ definiert. Es werden hier die Bezeichnungen von W. Graeub in [3] verwendet. Wir setzen $\mathrm{A}(x, e) = \mathrm{A}(x)$. A^{-1} ist dann eine 1-Form auf G mit Werten in der Lie-Algebra T_e — die Rechts-Maurer-Cartan-Form von G. Es bezeichne $\mathrm{ad}: G \to GL(T_e)$ die adjungierte Darstellung von G.

Satz 1. *Eine biinvariante fast-komplexe Struktur J auf G definiert eine lineare Abbildung $J(e): T_e \to T_e$, welche den Beziehungen genügt:*

$$J(e)^2 = -\textit{Identität von } T_e\,, \tag{i}$$

$$J(e) \circ \mathrm{ad}\, x = \mathrm{ad}\, x \circ J(e) \quad \text{für jedes } x \in G. \tag{ii}$$

Umgekehrt gibt es zu einer linearen Abbildung $J(e): T_e \to T_e$ mit den Eigenschaften (i) *und* (ii) *genau eine biinvariante fast-komplexe Struktur J auf G, welche in $e \in G$ mit $J(e)$ übereinstimmt*[2]).

Beweis. Die Produktgruppe $P = G \times G$ operiert vermöge der Definition

$$(x_1, x_2) \circ x = x_1\, x\, x_2^{-1} \qquad (x_1, x_2) \in P,\ x \in G$$

transitiv auf G. Die Isotropiegruppe H in $e \in G$ ist die Diagonale von P: $H = \Delta(G \times G)$. Die lineare Isotropiegruppe $\tilde{H}$ ist demnach isomorph zur adjungierten Gruppe $\mathrm{ad}\, G$.

Die Biinvarianz eines Tensorfeldes auf G ist äquivalent mit der Invarianz unter der Wirkung von P auf G. Ein biinvariantes Tensorfeld F auf G definiert demnach auf T_e einen Tensor $F(e)$, welcher unter $\tilde{H}$ invariant bleibt. Umgekehrt definiert ein unter $\tilde{H}$ invarianter Tensor $F(e)$ von T_e genau ein unter der Wirkung von P invariantes Tensorfeld F auf G, welches in e mit $F(e)$ übereinstimmt, also auch genau ein biinvariantes Tensorfeld auf G mit letzterer

[2]) Vgl. [2], § 18, Satz 1.

Eigenschaft. Für einen $(1,1)$-Tensor $J(e)$ in T_e bedeutet die Invarianz unter $\tilde{H} \cong \operatorname{ad} G$ aber die Identität

$$J(e) \circ \operatorname{ad} x = \operatorname{ad} x \circ J(e) \qquad x \in G .$$

Somit bleibt noch zu zeigen, daß ein biinvarianter $(1,1)$-Tensor J auf G, welcher den Bedingungen (i) und (ii) des Satzes genügt, auch die Beziehung $J(x)^2 =$ —Identität von T_x befriedigt. Die Rechtsinvarianz von J bedeutet nun die Identität

$$\langle k^*, J(x)h\rangle_x = \langle \mathrm{A}^*(x)k^*, J(e)\,\mathrm{A}^{-1}(x)h\rangle_e \tag{2}$$

für $h \in T_x$, $k^* \in T_x^*$. Hierbei bezeichnet T_x^* den Dualraum von T_x, $\langle\, ,\rangle_x$: $T_x^* \times T_x \to \mathbf{R}$ die kanonische Bilinearform der Dualität zwischen T_x^* und T_x, und $\mathrm{A}^*(x)$ die zu $\mathrm{A}(x)$ duale Abbildung. (A^* ist eine kontravariante 1-Form auf G mit Werten in T_e^*.) Man erhält durch zweimalige Anwendung von (2)

$$\begin{aligned}\langle k^*, J(x)^2 h\rangle_x &= \langle \mathrm{A}^*(x)\,(\mathrm{A}^*(x)k^*\,J(e)\,\mathrm{A}^{-1}(x)),\ J(e)\,\mathrm{A}^{-1}(x)h\rangle_e\\ &= \langle \mathrm{A}^*(x)k^*,\ J(e)^2\,\mathrm{A}^{-1}(x)h\rangle_e = -\ \langle k^*, h\rangle_x\end{aligned}$$

da $J(e)^2 =$ —Identität von T_e. Somit ist $J(x)^2 =$ —Identität von T_x und Satz 1 ist bewiesen.

Das in Satz 1 angegebene Kriterium für die Existenz einer biinvarianten fast-komplexen Struktur auf G ist in einer differentiellen Form besser anwendbar. Wir meinen damit die Ersetzung der Bedingung (ii) der Vertauschbarkeit von $J(e)$ mit der adjungierten Darstellung von G durch die Bedingung der Vertauschbarkeit mit der adjungierten Darstellung der LIE-Algebra von G. Dies ist der Inhalt von

Satz 1'. *Die Aussage von Satz* 1 *bleibt gültig, wenn man* (ii) *durch eine der beiden äquivalenten Indentitäten ersetzt*

$$\text{(ii}'\text{)}\ J(e)[h,k] = [h, J(e)k], \qquad \text{(ii}''\text{)}\ J(e)\,[h,k] = [J(e)h, k]$$

wo $h, k \in T_e$ *und* $[\,,\,]: T_e \times T_e \to T_e$ *das LIE-Produkt in* T_e *bezeichnet*[3]).

Beweis. Die Äquivalenz von (ii') und (ii'') ist unmittelbar, denn jede dieser Bedingungen impliziert (in geeigneter Reihenfolge) die folgende Kette von Gleichungen

$$J(e)\,[h,k] = -\,J(e)\,[k,h] = -\,[k,\ J(e)h] = [J(e)h, k]\,.$$

(ii)$\Rightarrow$(ii'). Zu $h \in T_e$ betrachten wir die einparametrige Untergruppe $\varkappa: \mathbf{R} \to G$, $\varkappa(\tau) = \exp(\tau h)$ für $\tau \in \mathbf{R}$. Nach Voraussetzung ist für beliebiges $k \in T_e$

$$(J(e) \circ \operatorname{ad} \exp(\tau h))\ k = (\operatorname{ad} \exp(\tau h) \circ J(e))\ k\,.$$

---

[3]) Vgl. [2], § 18, Satz 3.

Differenziert man hier nach τ und setzt $\tau = 0$, so erhält man (vgl. CHEVALLEY [1], p. 124)

$$J(e)[h, k] = [h, J(e)k] .$$

Da h beliebig war, so ist damit (ii′) bewiesen.

(ii′) ⇒ (ii). Wir betrachten wiederum die von einem festen $h \in T_e$ erzeugte einparametrige Untergruppe $\varkappa : \mathbf{R} \to G$, $\varkappa(\tau) = \exp(\tau h)$ für $\tau \in \mathbf{R}$, und setzen

$$\Omega_1 = J(e) \circ \mathrm{ad} \circ \varkappa , \quad \Omega_2 = \mathrm{ad} \circ \varkappa \circ J(e) .$$

$\mathrm{ad} \circ \varkappa : \mathbf{R} \to GL(T_e)$ ist eine einparametrige Untergruppe von $GL(T_e)$, da ad ein Homomorphismus ist. Ω_1 und Ω_2 entstehen aus dieser Untergruppe durch Links- bzw. Rechtstranslation mit $J(e) \in GL(T_e)$, sind also geodätische Linien des durch die Rechtstranslationen definierten Fernparallelismus auf $GL(T_e)$ und genügen als solche derselben Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{\Omega}_i(\tau) = \dot{\Omega}_i(0) \circ \Omega_i(0)^{-1} \circ \Omega_i(\tau) \quad (\mathrm{i} = 1,2)$$

Auf der rechten Seite ist $\dot{\Omega}_i(0) \in L(T_e)$ und $\circ$ bedeutet die Komposition in $L(T_e)$. Nach Konstruktion der Ω_i hat man für $k \in T_e$

$$\dot{\Omega}_1(0)k = J(e)[h, k] , \qquad \dot{\Omega}_2(0)k = [h, J(e)k] ,$$

so daß nach Voraussetzung $\dot{\Omega}_1(0) = \dot{\Omega}_2(0)$. Ferner ist $\Omega_1(0) = \Omega_2(0)$, das heißt Ω_1 und Ω_2 genügen derselben Differentialgleichung mit denselben Anfangswerten $\Omega_i(0)$ und $\dot{\Omega}_i(0)$, stimmen also für jedes $\tau \in \mathbf{R}$ überein. Damit ist $J(e) \circ \mathrm{ad}\, \varkappa(\tau) = \mathrm{ad}\, \varkappa(\tau) \circ J(e)$ gezeigt. Wenn h den Raum T_e durchläuft, so bedecken die Bilder der einparametrigen Untergruppen $\varkappa$ eine volle Umgebung U von $e \in G$. Eine solche Umgebung U erzeugt aber G, das heißt jedes $x \in G$ ist darstellbar als endliches Produkt $x = \prod_{i=1}^{n} x_i$ mit $x_i \in U$. Also ist

$$J(e) \circ \mathrm{ad}\, x = J(e) \circ \mathrm{ad}\,(\prod_{i=1}^{n} x_i) = J(e) \circ \prod_{i=1}^{n} \mathrm{ad}\, x_i = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{ad}\, x_i \circ J(e) = \mathrm{ad}\, x \circ J(e) ,$$

womit (ii) bewiesen ist.

Die Formulierung (1′) ergibt noch folgendes

Korollar. Besitzt G eine biinvariante fast-komplexe Struktur, so ist die komplexifizierte LIE-Algebra nicht einfach.

Beweis. Es bezeichne für festes $h \in T_e$ $\mathrm{Ad}\, h$ die Abbildung $k \to [h, k]$ von T_e, das heißt $\mathrm{Ad}: T_e \to L(T_e)$ ist die adjungierte Darstellung von T_e. Dann läßt sich (ii′) in der Form schreiben

$$J(e) \circ \mathrm{Ad}\, h = \mathrm{Ad}\, h \circ J(e).$$

Sei $\tilde{T}_e$ die komplexifizierte LIE-Algebra von T_e, $\widetilde{\mathrm{Ad}}: \tilde{T}_e \to L(\tilde{T}_e) = \widetilde{L(T_e)}$ die auf $\tilde{T}_e$ erweiterte adjungierte Darstellung und $\tilde{J}(e): \tilde{T}_e \to \tilde{T}_e$ die auf $\tilde{T}_e$

erweiterte Abbildung $J(e)$. Da $\tilde{J}(e)$ die 2 verschiedenen Eigenwerte i und $-i$ besitzt, so ist $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ nach dem SCHURschen Lemma reduzibel. Ein unter $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ invarianter Teilraum von $\tilde{T}_e$ ist aber ein Ideal in $\tilde{T}_e$, da $\widetilde{\mathrm{Ad}}$ mit der adjungierten Darstellung von $\tilde{T}_e$ übereinstimmt. Also ist $\tilde{T}_e$ nicht einfach.

2. Vor der Anwendung des bisherigen Resultates sei der Begriff des Strukturtensors S einer LIEschen Gruppe G erläutert. Wir betrachten den durch (1) definierten Operator A und die an jener Stelle eingeführte T_e-wertige 1-Form A^{-1} auf G. Der Strukturtensor S von G ist nach GRAEUB [3], (2.24) definiert durch

$$S(x) = -\mathrm{A}(x)\mathrm{d}\mathrm{A}^{-1}(x) \tag{3}$$

und ist für $x \in G$ ersichtlich eine schiefsymmetrische bilineare Selbstabbildung von T_x. Zur Deutung von S machen wir einige Bemerkungen und verweisen im übrigen auf die zitierte Arbeit von W. GRAEUB.

A definiert einen Fernparallelismus auf G. Bezeichnen wir der Kürze halber einen lokalen Parameter in x mit demselben Symbol. Dann steht bezüglich eines solchen Parameters S mit dem zum Fernparallelismus A gehörigen Γ-Operator in der Beziehung ([3], (2.28))

$$S(x)hk = \Gamma(x)kh - \Gamma(x)hk\,, \tag{4}$$

wo h, k Repräsentanten von Tangentialvektoren im Punkt x bedeuten. Das heißt S ist der Torsionstensor der durch A definierten linearen Übertragung.

Seien $h, k \in T_e$ und ξ, η die zugehörigen rechtsinvarianten Vektorfelder auf G: $\xi(x) = \mathrm{A}(x)h$, $\eta(x) = \mathrm{A}(x)k$. Die Parallelität von S bezüglich A ([3], (2.35))

$$S(x)\,\mathrm{A}(x)h\,\mathrm{A}(x)k = \mathrm{A}(x)\,S(e)hk \tag{5}$$

besagt, daß $S(x)\,\mathrm{A}(x)h\,\mathrm{A}(x)k$ mit dem von $S(e)hk \in T_e$ erzeugten rechtsinvarianten Vektorfeld übereinstimmt. Das LIEsche Produkt zweier differenzierbarer Vektorfelder ξ, η auf der Mannigfaltigkeit G ist bezüglich eines lokalen Parameters definiert durch

$$L(\xi, \eta)(x) = \eta'(x)\,\xi(x) - \xi'(x)\,\eta(x)\,. \tag{6}$$

Wir verwenden hier das entgegengesetzte Vorzeichen als in [3], Gl. (1.5), um in Übereinstimmung mit den Definitionen von FRÖLICHER in [2] zu gelangen. Für zwei rechtinvariante Vektorfelder ξ, η besteht dann die [3], (2.26) entsprechende Beziehung

$$L(\xi, \eta) = S(\xi, \eta)\,. \tag{7}$$

Aus den bekannten Eigenschaften von L folgt, daß die Definition

$$[h, k] = S(e)hk \qquad h, k \in T_e \tag{8}$$

den Raum T_e zu einer LIEschen Algebra macht, welche kanonisch isomorph ist zur LIE-Algebra der rechtsinvarianten Vektorfelder auf G.

3. Mit Hilfe von Satz 1′ beweisen wir nun für eine LIEsche Gruppe G folgenden

Satz 2. *Eine biinvariante fast-komplexe Struktur J auf G ist komplex*[4]).

Beweis. Eine biinvariante fast-komplexe Struktur J auf G ist reell-analytisch und es genügt zu zeigen, daß der Torsionstensor T von J verschwindet (FRÖLICHER [2], § 11). Seien ξ, η zwei differenzierbare Vektorfelder auf G. Nach [2], (15.9) hat man folgende Identität

$$4\,T(\xi, \eta) = JL(J\,\xi, \eta) + JL(\xi, J\eta) + L(\xi, \eta) - L(J\xi, J\eta)\,, \tag{9}$$

wo L bezüglich eines lokalen Parameters durch (6) erklärt ist. Es genügt zu zeigen, daß $T(\xi, \eta)$ für je zwei von n in jedem Punkt linear unabhängigen Vektorfeldern verschwindet ([2], p. 77). Hierbei ist n die Dimension von G. Seien ξ, η die von zwei linear unabhängigen Vektoren $h, k \in T_e$ erzeugten rechtsinvarianten Vektorfelder auf G. Das Verschwinden von $T(\xi, \eta)$ ist hinreichend für das Verschwinden von T, da es n linear unabhängige rechtsinvariante Vektorfelder auf G gibt.

Die Rechtsinvarianz von J hat zur Folge, daß J ein rechtsinvariantes Vektorfeld ξ in ein rechtsinvariantes Vektorfeld $J\xi$ überführt. Es ist nämlich für $l^* \in T_x^*$ nach (2)

$$\begin{aligned}\langle l^*, (J\xi)(x)\rangle_x = \langle l^*, J(x)\,\mathrm{A}(x)h\rangle_x &= \langle \mathrm{A}^*(x)l^*, J(e)h\rangle_e \\ &= \langle l^*, \mathrm{A}(x)\,J(e)h\rangle_x\,,\end{aligned}$$

das heißt $J\xi$ ist das von $J(e)h \in T_e$ erzeugte rechtinvariante Vektorfeld auf G.

Wegen (7) kann man (9) für rechtsinvariante ξ, η schreiben als

$$4T(\xi, \eta) = JS(J\xi, \eta) + JS(\xi, J\eta) + S(\xi, \eta) - S(J\xi, J\eta)\,. \tag{10}$$

Die rechte Seite definiert nach der vorhin gemachten Bemerkung und wegen (5) ein rechtsinvariantes Vektorfeld. Dies ist der Ausdruck für die Rechtsinvarianz von T, das heißt die Parallelität von T bezüglich A. Hiefür benötigen wir lediglich die Rechtsinvarianz von J und noch nicht die Biinvarianz — eine Bemerkung, von der wir später noch Gebrauch machen werden. Die Identität (10) für rechtsinvariante Vektorfelder ξ, η ist demnach bei Beachtung von (8) äquivalent mit der Identität

$$4T(e)hk = J(e)\,[J(e)h, k] + J(e)\,[h, J(e)k] + [h, k] - [J(e)h, J(e)k] \tag{10′}$$

für h, $k \in T_e$.

[4]) Vgl. den Zusatz am Ende der Einleitung.

T verschwindet somit identisch, falls die linke Seite von (10′) identisch verschwindet. Dies ergibt sich aber sofort aus der Biinvarianz von J. Dann ist nämlich nach Satz 1′

$$\begin{aligned} 4T(e)\,hk &= J(e)^2[h,k] + J(e)[h, J(e)k] + [h,k] - J(e)[h, J(e)k] \\ &= J(e)^2[h,k] + [h,k] = 0 \end{aligned}$$

Demnach ist J integrabel, also komplex.

Satz 2 zeigt, daß eine biinvariante fast-komplexe Struktur J auf G eine komplex-analytische Struktur erklärt. Die Rechts- und Linkstranslationen sind komplex-analytisch bezüglich dieser Struktur, woraus deren Verträglichkeit mit den Gruppenoperationen von G folgt. G ist also eine komplexe LIEsche Gruppe. Ist umgekehrt G eine komplexe LIEsche Gruppe und J der fast-komplexe Strukturtensor der zugrunde gelegten komplex-analytischen Struktur, so ist J biinvariant. Satz 2 ergibt also bei Benutzung von Satz 1′ für eine zusammenhängende LIEsche Gruppe folgendes

Korollar. Ist G komplex und J der zugehörige fast-komplexe Strukturtensor, so definiert $J(e): T_e \to T_e$ eine lineare Abbildung mit den Eigenschaften

$$J(e)^2 = -\textit{Identität von } T_e, \tag{i}$$

$$J(e)[h,k] = [h, J(e)k] \quad \textit{für } h, k \in T_e. \tag{ii}$$

Umgekehrt gibt es zu einer linearen Abbildung $J(e): T_e \to T_e$ mit den Eigenschaften (i) *und* (ii) *genau eine komplex-analytische Struktur auf G, welche mit den Gruppenoperationen verträglich ist und deren zugehöriger fast-komplexer Strukturtensor J in e mit $J(e)$ übereinstimmt.*

Nach dem Korollar von Satz 1′ hat man noch folgenden

Zusatz. Die komplexifizierte LIEsche Algebra $\tilde{T}_e$ einer komplexen LIEschen Gruppe ist nicht einfach.

4. Die bisherigen Feststellungen legen es nahe, eine reelle LIEsche Algebra E zu betrachten, auf welcher eine lineare Abbildung $J: E \to E$ existiert mit den Eigenschaften

$$J^2 = -\text{Identität}, \tag{i}$$

$$J[h,k] = [h, Jk] \quad \text{für } h, k \in E. \tag{ii}$$

Die Bedingung (ii) ist gleichbedeutend mit (ii′) $J[h,k] = [Jh, k]$ für $h, k \in E$ (vgl. Beweis von Satz 1′). Wir nennen eine solche LIE-Algebra im folgenden eine **J**-Algebra. Die Bedingung (ii) ist charakteristisch dafür, daß die durch J auf E definierbare **C**-Vektorraumstruktur zusammen mit der Produktbildung in E eine LIE-Algebrenstruktur über **C** ergibt. Nach Nummer 1 folgt, daß die komplexifizierte Algebra E nicht einfach sein kann.

Die KILLINGsche Form g von E ist definiert durch

$$ghk = Sp(\mathrm{Ad}\, h \circ \mathrm{Ad}\, k) \quad \text{für} \quad h, k \in E\,.$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{Ad}\, h$ die Selbstabbildung $k \to [h, k]$ von E und Sp bedeutet Spurbildung. Dann gilt

Satz 3. *Für die KILLINGsche Form g einer* **J**-*Algebra E besteht die Identität*

$$g\, Jh\, Jk = -\, ghk \qquad h, k \in E\,.$$

Beweis. (ii) ist gleichbedeutend mit $J \circ \mathrm{Ad}\, h = \mathrm{Ad}\, h \circ J$, und (ii′) ist gleichbedeutend mit $J \circ \mathrm{Ad}\, h = \mathrm{Ad}(Jh)$, so daß

$$\begin{aligned} g\, Jh\, Jk &= Sp(\mathrm{Ad}(Jh) \circ \mathrm{Ad}(Jk)) = Sp(J \circ \mathrm{Ad} h \circ J \circ \mathrm{Ad} k) = Sp(J^2 \circ \mathrm{Ad} h \circ \mathrm{Ad} k) \\ &= -\, Sp(\mathrm{Ad}\, h \circ \mathrm{Ad}\, k) = -\, g\, h\, k, \text{ q.e.d.} \end{aligned}$$

Sei E weiterhin eine **J**-Algebra und E' die derivierte LIE-Algebra, erzeugt von den Produkten $[h, k]$ mit $h, k \in E$. Wegen (ii) ist die Restriktion $J/E' = J'$ eine Abbildung $E' \to E'$, welche auf E' offensichtlich die Struktur einer **J**-Algebra erklärt. Insbesondere gilt also nach Satz 3 für die KILLINGsche Form g' von E' die Identität

$$g'\, J'h\, J'k = -\, g'\, h\, k \qquad h, k \in E'\,. \tag{11}$$

Es bezeichne Z das Zentrum von E. Dann ist für $h \in Z$ $[h, k] = 0$ für jedes $k \in E$, also nach (ii′) $[Jh, k] = J[h, k] = 0$, das heißt $Jh \in Z$. Also definiert J/Z auf Z die Struktur einer **J**-Algebra. Zusammenfassend ergibt sich

Satz 4. *Sei E eine J-Algebra, E' die derivierte Algebra und Z das Zentrum von E. Die Restriktion von J auf E' und Z definiert auf diesen Algebren* **J**-*Algebrenstrukturen. Insbesondere sind E' und Z von gerader Dimension.*

5. Als Anwendung von Satz 4 betrachten wir eine komplexe LIEsche Gruppe G. $\underline{G}$ ist nach dem Corollar von Satz 2 eine **J**-Algebra, nach Satz 4 sind also auch $\underline{G}'$ und $\underline{Z}$ (derivierte Algebra und Zentrum von $\underline{G}$) **J**-Algebren. Seien G' und Z die von $\underline{G}'$ und $\underline{Z}$ erzeugten Untergruppen von G. Wiederum nach dem Corollar von Satz 2 sind G' und Z komplex, und zwar handelt es sich bei der unterliegenden komplexen Struktur offensichtlich um die Restriktion der komplexen Struktur von G auf G' und Z. Man hat also das

Korollar. G sei eine komplexe LIEsche Gruppe. Auf den von $\underline{G}'$ und $\underline{Z}$ erzeugten Untergruppen G' und Z induziert die komplexe Struktur von G komplexe Strukturen, bezüglich denen G' und Z komplexe LIEsche Gruppen sind.

6. Eine weitere Anwendung des Bisherigen ist der

Satz 5. *G sei eine zusammenhängende komplexe* LIE*sche Gruppe, auf deren* LIE*-Algebra $\underline{G}$ eine bezüglich der adjungierten Darstellung von G invariante euklidische Metrik existiert. Dann ist G abelsch.*

Beweis. Die Existenz eines ad-invarianten Skalarproduktes auf $\underline{G}$ impliziert die Reduktivität von $\underline{G}$, so daß $\underline{G} = \underline{G}' \oplus \underline{Z}$, wobei die derivierte Algebra $\underline{G}'$ halbeinfach ist. $\underline{G}$ ist nach dem Korollar von Satz 2 eine **J**-Algebra. Bezeichnet also g' die KILLINGsche Form von $\underline{G}'$ und ist $J' = J/\underline{G}'$, so gilt Gl. (11)

$$g'\, J'h\, J'k = -\, g'\, h\, k \quad \text{für} \quad h, k \in \underline{G}' .$$

Die Restriktion eines ad-invarianten Skalarproduktes von $\underline{G}$ auf $\underline{G}'$ ist ad-invariant. g' ist demnach negativ definit (PONTRJAGIN [4], p. 233, Satz 101).

Wir behaupten: $\underline{G}' = \{0\}$. Sei nämlich $h \in G'$, $h \neq 0$. Dann ist auch $J'h \neq 0$. Somit ist nach dem eben Gesagten

$$g'\, h\, h < 0 \quad \text{und} \quad g'\, J'h\, J'k < 0 .$$

Dies steht aber im Widerspruch zu (11). Somit ist $\underline{G}' = \{0\}$, das heißt $\underline{G} = \underline{Z}$ und G ist abelsch.

Bemerkung 1. Eine zusammenhängende LIEsche Gruppe G, auf deren LIE-Algebra $\underline{G}$ ein ad-invariantes Skalarprodukt existiert, ist für halbeinfaches $\underline{G}$ notwendig kompakt (WEYL), für beliebiges $\underline{G}$ braucht dies aber nicht zu gelten. (Zum Beispiel ist die zu $\underline{G}$ gehörige einfachzusammenhängende Gruppe nicht kompakt, wenn $\underline{G}$ nicht halbeinfach ist.) Satz 5 ist für den Spezialfall einer kompakten Gruppe evident, denn die Abbildung ad: $G \to GL(\underline{G})$ ist holomorph, also konstant. Unter Benutzung des WEYLschen Satzes ergibt sich Satz 5 sofort aus diesem Spezialfall so. G' erzeugt eine kompakte und komplexe, somit abelsche Gruppe. $\underline{G}'$ ist also einerseits kommutativ: $[\underline{G}', \underline{G}'] = \{0\}$, anderseits impliziert aber die Halbeinfachheit $[\underline{G}', \underline{G}'] = \underline{G}'$, so daß $\underline{G}' = \{0\}$. Unser Beweis von Satz 5 ist jedoch viel elementarer.

Bemerkung 2. A. FRÖLICHER beweist in [2], p. 95, folgenden Satz: Jede kompakte zusammenhängende LIEsche Gruppe gerader Dimension besitzt eine bezüglich der Linkstranslationen invariante komplexe Struktur J_L. Ebenso existiert eine bezüglich der Rechtstranslationen invariante komplexe Struktur J_R. Aus dem Beweis in [2] geht hervor, daß dieser Satz noch gilt, wenn man die Kompaktheit von G durch die schwächere Bedingung der Existenz eines ad-invarianten Skalarproduktes auf $\underline{G}$ ersetzt. Nach Satz 5 folgt, daß J_R und J_L notwendigerweise verschieden sind — außer G sei abelsch. Denn $J_R = J_L = J$ bedeutet die Biinvarianz von J, das heißt G ist komplex, also abelsch.

7. In Gleichung (3) wurde der Strukturtensor S einer LIEschen Gruppe eingeführt. (5) ist der Ausdruck für die Rechtsinvarianz von S. (S ist biinvariant, was wir aber nicht benötigen.) Der Torsionstensor T einer rechtsinvarianten fast-komplexen Struktur J auf G – man nehme (9) als Definition – ist ein rechtsinvariantes Tensorfeld desselben Typus wie S. Unter welchen Bedingungen ist $S = T$?

Eine rechtsinvariante fast-komplexe Struktur J auf G definiert eine lineare Abbildung $J(e): T_e \to T_e$ mit $J(e)^2 =$ —Identität von T_e. Umgekehrt definiert eine solche Abbildung $J(e)$ genau eine rechtsinvariante fast-komplexe Struktur J auf G, welche in e mit $J(e)$ übereinstimmt (vgl. den Beweis von Satz 1). Dann können wir die gestellte Frage präzisieren: Unter welchen Bedingungen für $J(e)$ ist $S = T$? Auskunft hierüber gibt

Satz 6. *Es gilt $S = T$ genau dann, wenn $J(e): T_e \to T_e$ einer der beiden äquivalenten Bedingungen genügt*

$$J(e)\,[h, k] = -\,[h, J(e)k] \tag{i}$$

$$J(e)\,[h, k] = -\,[J(e)h, k]\,. \tag{i'}$$

Beweis. Die Äquivalenz der beiden Bedingungen ergibt sich wie in Satz 1'.

a) (i') ist notwendig. Sei $S = T$. Die Rechtsinvarianz von J bedeutet die Parallelität bezüglich der durch (1) definierten linearen Übertragung. S ist nach (4) die Torsion dieser Übertragung. FRÖLICHER hat in [2] lineare Übertragungen untersucht, bezüglich welchen eine gegebene fast-komplexe Struktur parallel ist und deren Torsion mit der Torsion der fast-komplexen Struktur übereinstimmt. In § 14 wird u.a. folgende notwendige Beziehung (14.4) zwischen J und T ($= S$ in unserem Fall) angegeben:

$$J(x)\,S(x)hk + S(x)\,J(x)h\,k = 0 \quad \text{für} \quad h, k \in T_x\,.$$

Für $x = e$ erhält man nach (8) hieraus

$$J(e)\,[h, k] + [J(e)h, k] = 0 \quad \text{für} \quad h, k \in T_e\,,$$

das heißt (i').

b) (i) ist hinreichend. $J(e)$ genüge (i) und J sei die durch $J(e)$ bestimmte rechtsinvariante fast-komplexe Struktur auf G. Wir haben die Identität

$$S(x)hk = T(x)hk \qquad x \in G;\, h, k \in T_x$$

zu beweisen. Wegen der Rechtsinvarianz von S und T genügt der Nachweis der Identität

$$S(e)hk = T(e)hk \qquad h, k \in T_e\,,$$

die wegen (8) gleichbedeutend ist mit $[h, k] = T(e)hk$. Nun ist nach (10') für $h, k \in T_e$

$$4T(e)hk = J(e)[J(e)h, k] + J(e)[h, J(e)k] + [h, k] - [J(e)h, J(e)k] .$$

Nach (i) bzw. (i') stimmen der erste, zweite und vierte Term auf der rechten Seite überein, und zwar ist jeder gleich

$$J(e)[J(e)h, k] = -J(e)^2[h, k] = [h, k] .$$

Somit ist $4T(e)hk = 4[h, k]$ und damit ist $S = T$ bewiesen.

Bemerkung. Ist in der in Satz 6 untersuchten Situation J zusätzlich linksinvariant, so verschwindet nach Satz 2 die Torsion T von J, also auch S, das heißt G ist abelsch. Dies ergibt sich auch direkt durch Vergleich der Bedingungen (ii') von Satz 1' und (i) von Satz 6, aus denen $J/\underline{G}' = 0$, wegen der Regularität von J also $\underline{G}' = \{0\}$ folgt.

8. Analog zu Nummer 4 kann man nun eine reelle LIE-Algebra E betrachten, auf welcher eine lineare Abbildung $J: E \to E$ erklärt ist mit den Eigenschaften

$$J^2 = -\text{Identität}, \tag{i}$$

$$J[h, k] = -[h, Jk] \quad \text{für} \quad h, k \in E . \tag{ii}$$

Man zeigt genau wie früher, daß die derivierte Algebra und das Zentrum einer solchen Algebra ebenfalls obige Eigenschaften besitzen und folglich von gerader Dimension sind. Ferner gilt für die KILLINGsche Form g von E die Identität

$$g\,Jh\,Jk = g\,h\,k \qquad h, k \in E ,$$

die man analog wie in Nummer 4 beweist. Als Anwendung letzterer Beziehung führen wir folgenden Satz an.

Satz 7. *G sei eine kompakte, halbeinfache und zusammenhängende LIEsche Gruppe und J eine rechtsinvariante fast-komplexe Struktur auf G, deren Torsionstensor mit dem Strukturtensor von G übereinstimmt. Bezeichnet K die KILLINGsche Form von T_e und setzt man $g(e) = -K$, so definiert $g(e)$ eine biinvariante RIEMANNsche Metrik g auf G, welche bezüglich J fast-hermetisch ist.*

Zum Beweis genügt es zu bemerken, daß K negativ definit ist (vgl. Beweis von Satz 5), so daß g eine RIEMANNsche Metrik ist. Die Beziehung

$$g(e)\,J(e)h\,J(e)k = g(e)hk \qquad h, k \in T_e$$

zieht dann wegen der Rechtsinvarianz von g und J die Identität

$$g(x)\,J(x)h\,J(x)k = g(x)h\,k \qquad x \in G;\ h, k \in T_x$$

nach sich.

LITERATUR

[1] CHEVALLEY, C.: Theory of LIE groups. Princeton University Press 1946.

[2] FRÖLICHER, A.: Zur Differentialgeometrie der komplexen Strukturen. Math. Annalen 129, 50–95 (1955).

[3] GRAEUB, W.: LIEsche Gruppen und affin zusammenhängende Mannigfaltigkeiten. Acta Math. 106, 65–111 (1961).

[4] PONTRJAGIN, L.: Topologische Gruppen, 2. Teil, Teubner Leipzig 1958.

[5] CARTAN, E.: La géométrie des groupes de transformations. J. Math. Pures et Appl. 6 (1927), 1–119.

(Eingegangen, den 21. Dezember 1962)