Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 38 (1963-1964)

Artikel: L'homotopie des groupes abéliens localement compacts.

Autor: André, Michel

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29432

L'homotopie des groupes abéliens localement compacts

par MICHEL ANDRÉ, Institut Battelle, Genève

1. Introduction

Soient A un espace topologique avec un point-base O_A et G un groupe topologique abélien. L'ensemble (A, G) des applications continues de A dans G, appliquant O_A sur l'unité de G, peut être muni d'une structure naturelle de groupe abélien. Désignons par C le foncteur cône et par Σ le foncteur suspension. Utilisons l'injection de A dans CA pour définir le groupe $\Pi(A, G)$ par la suite exacte suivante de groupes abéliens:

$$0 \to (\Sigma A, G) \to (CA, G) \to (A, G) \to \Pi(A, G) \to 0$$

Le but de ce travail est de calculer, si G est localement compact, $\Pi(A, G)$ en fonction de A et du dual G^* de G. Il faudra supposer A connexe et localement connexe par arcs. L'espace A n'interviendra dans le résultat que par l'intermédiaire du groupe $\Pi(A, S^1)$ et le groupe topologique G^*, que par l'intermédiaire de sa structure algébrique.

Le paragraphe 2 expose quelques résultats simples qui permettent de traiter le cas compact, dans le paragraphe 3. Le cas général est déduit du cas compact dans le paragraphe 5. Le paragraphe 4 montre comment, en un certain sens, toute l'homotopie des groupes abéliens compacts peut être réduite à la recherche des groupes fondamentaux.

2. Résultats préliminaires

Désignons une fois pour toutes par S^m, la sphère de dimension m, par Z, le groupe des nombres entiers, par R, le groupe topologique des nombres réels, par p, l'application exponentielle de R sur S^1, par $\pi_n(A)$, le n-ième groupe d'homotopie de l'espace A, par $\tilde{\pi}_1(A)$, le groupe fondamental de A, rendu abélien et par G^*, le groupe dual du groupe abélien localement compact G.

Outre le résultat fondamental de la théorie de la dualité (G est isomorphe au groupe des caractères de G^*, c'est-à-dire au groupe des homomorphismes de G^* dans S^1 avec la topologie compacte-ouverte), j'utiliserai les résultats suivants, dont j'omets les démonstrations (pour le lemme 2, voir S.T. HU, Homotopy theory, proposition II 5.3.).

Lemme 1. Si A est connexe et localement connexe par arcs, CA est aussi localement connexe par arcs.

Lemme 2. Si A est connexe et localement connexe par arcs, on a une suite exacte canonique:

$$0 \to (A, R) \xrightarrow{p_A} (A, S^1) \to \mathrm{Hom}\,(\pi_1(A), \pi_1(S^1))$$

En particulier si A est simplement connexe, p_A est un isomorphisme de (A, R) sur (A, S^1).

Lemme 3. Le groupe (A, R) est divisible.

Lemme 4. Le groupe abélien (S^1, S^1) est la somme directe des images des injections canoniques des groupes (S^1, R) et $\mathrm{Hom}_c(S^1, S^1)$ (groupe des homomorphismes continus de S^1 dans S^1).

Lemme 5. Dans la catégorie des espaces topologiques avec points-base, il y a une équivalence naturelle entre:

$$\mathrm{Hom}(X \times Y/X \times O_Y \cup O_X \times Y, T) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}(X, \mathrm{Hom}(Y, T))$$

si X ou Y est discret; $\mathrm{Hom}(Y, T)$ est à munir de la topologie compacte-ouverte.

3. L'homotopie des groupes abéliens compacts

Soit donc G un groupe abélien compact. En écrivant G en fonction de G^* et en utilisant deux fois le lemme 5, on démontre sans difficulté la proposition suivante:

Proposition 6. Pour tout groupe abélien compact G, les deux foncteurs suivants, de la catégorie des espaces avec points-base à valeurs dans la catégorie des groupes abéliens, sont équivalents:

$$A \to (A, G) \quad \text{et} \quad A \to \mathrm{Hom}(G^*, (A, S^1))$$

Ceci étant, il nous faut donc étudier la suite exacte:

$$\mathrm{Hom}(G^*, (CA, S^1)) \to \mathrm{Hom}(G^*, (A, S^1)) \to \Pi(A, G) \to 0$$

Je vais la remplacer par une autre:

Proposition 7. Si A est connexe et localement connexe par arcs, la suite suivante est exacte:

$$0 \to \mathrm{Hom}(G^*, (A, R)) \to \mathrm{Hom}(G^*, (A, S^1)) \to \Pi(A, G) \to 0\,.$$

En effet, considérons le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & \\
\mathrm{Hom}(G^*, (CA, R)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(G^*, (A, R)) \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
\mathrm{Hom}(G^*, (CA, S^1)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(G^*, (A, S^1)) \arrow[r] & \Pi(A, G) \arrow[r, dash] & 0 \\
0 & & &
\end{tikzcd}$$

Le première ligne est exacte, puisque le groupe $(\Sigma A, R)$ est injectif (lemme 3). La deuxième l'est aussi d'après la proposition 6. La première colonne est exacte en vertu du lemme 2, puisque CA est non seulement simplement connexe, mais encore localement connexe par arcs d'après le lemme 1. Enfin, la deuxième colonne est aussi exacte, car p_A est un monomorphisme, A étant connexe. La conclusion est ainsi immédiate.

Proposition 8. Si A est connexe et localement connexe par arcs, le groupe (A, S^1) est isomorphe à la somme directe de (A, R) et de $\Pi(A, S^1)$.

En effet, appliquons la proposition 7 au cas où G est égal à S^1. On obtient la suite exacte

$$0 \to (A, R) \to (A, S^1) \to \Pi(A, S^1) \to 0 .$$

Cette suite se fend, puisque le groupe (A, R) est injectif.

Il découle immédiatement des propositions 7 et 8, le résultat recherché.

Théorème 9. Si A est un espace connexe et localement connexe par arcs et si G est un groupe abélien compact, alors les groupes

$$\Pi(A, G) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}(G^*, \Pi(A, S^1))$$

sont isomorphes.

Corollaire 10. Si A est un espace localement connexe par arcs, $\Pi(A, G)$ est nul pour tout groupe abélien compact G, si et seulement si les groupes $\Pi(A, S^1)$ et $\Pi(A, S^0)$ sont nuls.

En effet $\Pi(A, S^0)$ est nul, si et seulement si l'espace A est connexe.

Intéressons-nous maintenant aux groupes d'homotopie $\pi_m(G)$.

Théorème 11. Si G est un groupe abélien compact, le groupe $\pi_m(G)$ est nul si m est supérieur à 1 et le groupe $\pi_1(G)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Hom}_c(S^1, G)$; l'isomorphisme est égal au composé de l'injection de $\mathrm{Hom}_c(S^1, G)$ dans (S^1, G) et de l'épimorphisme de (S^1, G) sur $\Pi(S^1, G) = \pi_1(G)$.

Le corollaire 10 démontre la première partie du théorème puisque $\pi_m(S^1)$ est nul si m est supérieur à 1. Voici la démonstration de la seconde partie.

Appelons i et j, les injections de (S^1, R) et de $\mathrm{Hom}_c(S^1, S^1)$ dans (S^1, S^1) qui est égal à la somme directe $i[(S^1, R)] + j[\mathrm{Hom}_c(S^1, S^1)]$. En reprenant la démonstration du théorème 9, ont voit que l'image de $\mathrm{Hom}(G^*, (CS^1, S^1))$ dans $\mathrm{Hom}(G^*,(S^1, S^1))$ est égale à $\mathrm{Hom}(G^*, i[(S^1, R)])$ et que le groupe $\mathrm{Hom}(G^*,(S^1, S^1))$ est égal au groupe

$$\mathrm{Hom}(G^*, i[(S^1, R)]) + \mathrm{Hom}(G^*,j[\mathrm{Hom}_c(S^1,S^1)]) .$$

Autrement dit le groupe (S^1,G) est la somme directe du sous-groupe $\mathrm{Hom}_c(S^1,G)$ et du sous-groupe image de (CS^1,G). Le théorème est ainsi démontré.

4. Réduction du foncteur $\Pi(A,.)$ au foncteur $\pi_1(.)$

La proposition 8 et le lemme 2 démontrent immédiatement le résultat suivant:

Lemme 12. Si A est un espace connexe et localement connexe par arcs, alors $\Pi(A, S^1)$ est isomorphe à un sous-groupe du groupe $\mathrm{Hom}(\pi_1(A), Z)$.

Appelons «pratique» un espace A connexe et localement connexe par arcs pour lequel les groupes $\Pi(A, S^1)$ et $\mathrm{Hom}(\pi_1(A), Z)$ sont isomorphes (par exemple les espaces triangulables connexes).

Théorème 13. Si A est un espace pratique et G un groupe compact abélien alors les groupes $\Pi(A, G)$ et $\mathrm{Hom}(\pi_1(A), \pi_1(G))$ sont isomorphes.

En effet, dans ce cas, on peut écrire la suite suivante d'isomorphismes:

$$\begin{aligned} \Pi(A, G) &\cong \mathrm{Hom}(G^*, \Pi(A, S^1)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(G^*, \mathrm{Hom}(\tilde{\pi}_1(A), Z)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\tilde{\pi}_1(A), \mathrm{Hom}(G^*, Z)) \\ &\cong \mathrm{Hom}(\pi_1(A), \pi_1(G)) . \end{aligned}$$

Désignons par $H_1(A; P)$ et $H^1(A; P)$ le premier groupe d'homologie singulière et le premier groupe de cohomologie singulière de A à coefficients dans P. Si A est un espace connexe et localement connexe par arcs, les groupes $H_1(A; Z)$ et $\tilde{\pi}_1(A)$ sont isomorphes. Il est donc possible de donner au théorème 13, la forme suivante:

Théorème 14. Si A est un espace pratique et G un groupe abélien compact, alors les groupes $\Pi(A, G)$ et $H^1(A; \pi_1(G))$ sont isomorphes.

Le groupe $\Pi(A,G)$ est donc isomorphe au groupe $\mathrm{Hom}(G^*,\mathrm{Hom}(H_1(A;Z),Z))$ ou encore au groupe $\mathrm{Hom}(G^* \otimes H_1(A; Z), Z)$, c'est-à-dire au groupe $\mathrm{Hom}(H_1(A; G^*), Z)$. On sait que le groupe dual du premier groupe compact de cohomologie de A à coefficients dans le groupe compact G: $H^1_c(A; G)$ est isomorphe au groupe $H_1(A; G^*)$. Par conséquent le groupe $\Pi(A, G)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Hom}_c(S^1, H^1_c(A;G))$. Le théorème suivant est donc démontré. (Pour le groupe $H^1_c(A;G)$, voir le livre S. EILENBERG and N. E. STEENROD, Foundations of algebraic topology, chapitre V, paragraphe 11.)

Théorème 15. Si A est un espace pratique et G un groupe abélien compact, alors le groupe $\Pi(A, G)$ est isomorphe au groupe fondamental du groupe abélien compact $H^1_c(A;G)$.

5. L'homotopie des groupes abéliens localement compacts

Je vais généraliser le résultat du paragraphe 3 dans le cas où G est seulement localement compact. Désignons encore par G^* le dual de G, qui n'est pas discret, sauf si G est compact. Voici les résultats à utiliser:

Lemme 16. Tout groupe G, abélien, localement compact et connexe est isomorphe à la somme directe d'un groupe compact H et d'un groupe R^n.

Voir L. PONTRJAGIN, Topological groups, .. théorème 41.

Lemme 17. Si A est un espace connexe et localement connexe par arcs, alors en tant que groupe discret, le groupe R jouit de la propriété suivante: $\mathrm{Hom}(R, \Pi(A, S^1))$ est nul.

En effet, d'après le lemme 12, le seul élément divisible de $\Pi(A, S^1)$ est 0.

Voici le résultat final:

Théorème 18. Si A est un espace connexe et localement connexe par arcs et si G est un groupe abélien, connexe et localement compact, alors $\Pi(A, G)$ est isomorphe au groupe $\mathrm{Hom}(G^*, \Pi(A, S^1))$, G^* étant considéré comme groupe discret.

En effet, le groupe $\Pi(A, G)$ est isomorphe au groupe $\Pi(A, H)$ et le groupe $\mathrm{Hom}(G^*, \Pi(A, S^1))$ au groupe $\mathrm{Hom}(H^*, \Pi(A, S^1))$. Le théorème 9 permet de conclure.

(Reçu le 13 mars, 1963)