Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 38 (1963-1964)

Artikel: Differenzierbarkeit in topologischen Vektorräumen.

Autor: Keller, H.H.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29446

Differenzierbarkeit in topologischen Vektorräumen

von H. H. KELLER*)

Einleitung

Wenn X und Y normierte lineare Räume sind und wenn M eine offene Teilmenge von X ist, so sind auf Abbildungen f von M in Y die Differentiationsdefinitionen von FRÉCHET und von GÂTEAUX anwendbar. In der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Differentiationsbegriffe aufgestellt und zueinander in Beziehung gesetzt für den Fall, daß X und Y mit allgemeineren Topologien versehen sind. Mehrere der Ansätze sind im Laufe der letzten Jahre bereits von anderen Autoren in zum Teil anderer Form gemacht worden. Hinweise werden an Ort und Stelle gegeben.

Die im folgenden aufzustellenden Differentiationsbegriffe zerfallen im wesentlichen in zwei Gruppen, diejenigen vom Typus (F) (FRÉCHET-Typus) und diejenigen vom Typus (G) (GÂTEAUX-Typus). Bei der ersten Gruppe sind X und Y als lokalkonvex vorausgesetzt, wobei für die Definition der Differenzierbarkeit von f je eine zulässige Familie Γ_X bzw. Γ_Y von stetigen Seminormen herangezogen wird. Bei der zweiten Gruppe braucht zunächst nur Y ein topologischer Vektorraum zu sein. Die G_Σ-Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : M \to Y$ wird dann definiert relativ zu einer beliebigen vorgegebenen Überdeckung Σ von X. Letztere bestimmt in X in natürlicher Weise eine translations- und homothetie-invariante Topologie T_Σ mit der folgenden Eigenschaft: Falls M offen ist für T_Σ und $f : M \to Y$ G_Σ-differenzierbar, so ist f auch stetig für T_Σ. Die üblichen Differentiationsregeln, mit Ausnahme der Kettenregel, gelten für alle Arten der Differenzierbarkeit, die Kettenregel im allgemeinen nur für diejenigen vom Typus (F).

Allen Arten der Differenzierbarkeit einer Abbildung $f : M \to Y$ an der festen Stelle $x \in M$ wird die Darstellung

$$f(x+h) - f(x) = \Phi(h) + r(h), \quad (h \in M - x), \tag{D}$$

zugrunde gelegt, wobei Φ eine lineare Abbildung von X in Y ist, die als stetig für die ursprüngliche lokalkonvexe Topologie bzw. für die Topologie T_Σ in X vorausgesetzt wird. Die verschiedenen Differentiationsbegriffe werden dann

*) Mit Dankbarkeit sei erwähnt, daß dem Verfasser die Arbeit an der vorliegenden Publikation durch die Gewährung eines Forschungskredites aus dem Schweiz. Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung ermöglicht wurde.

bestimmt durch die Forderungen, die an das «Restglied» $r : M \overset{x}{\longrightarrow} Y$ gestellt werden. Der erste Teil der Arbeit ist den Definitionen und Eigenschaften der verschiedenen Arten von Restgliedern gewidmet. Die im zweiten Teil formulierten Sätze über Differenzierbarkeit ergeben sich mehr oder weniger direkt aus den Resultaten des ersten Teils.

Die topologischen Vektorräume werden durchwegs als reell und hausdorffsch vorausgesetzt. Eine Familie Γ von Seminormen in einem lokalkonvexen Raum X wird *zulässig* genannt, wenn die Mengen $\{x \in X \mid p(x) \leq \varepsilon\}$ für $p \in \Gamma, \varepsilon > 0$ eine Nullumgebungsbasis in X bilden. Eine solche Familie Γ existiert nach [1] (Chap. II, § 5, prop. 4) immer. Mit $\mathfrak{U}$ wird der Nullumgebungsfilter in X bezeichnet. Unter einer Zuordnung $\varepsilon \to \delta_\varepsilon$ (bzw. $\varepsilon \to U_\varepsilon$) wird stillschweigend eine Abbildung von $(0, \infty)$ in $(0, \infty)$ (bzw. von $(0, \infty)$ in $\mathfrak{U}$) verstanden. $(A) \Longrightarrow (B)$ bedeutet: (A) impliziert (B). Mit $\mathbf{R}$ ist der Körper der reellen, mit $\mathbf{N}$ die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet.

1. Restglieder

1.1. Restglieder vom Typus (F). Seien X, Y zwei lokalkonvexe Räume, versehen mit je einer zulässigen Familie Γ_X bzw. Γ_Y von Seminormen.

Definition 1. *Eine Funktion r, definiert in einer Nullumgebung von X, mit Werten in Y, heißt ein F-, F'-, F_0- oder F_0'-Restglied von X in Y, wenn die entsprechende der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(F) *Zu jedem $q \in \Gamma_Y$ gibt es ein $p \in \Gamma_X$ und eine Zuordnung $\varepsilon \to \delta_\varepsilon > 0$, so daß*

$$p(x) \leq \delta_\varepsilon \Longrightarrow q(r(x)) \leq \varepsilon\, p(x);$$

(F') *Zu jedem $q \in \Gamma_Y$ gibt es ein $p \in \Gamma_X$ und eine Zuordnung $\varepsilon \to U_\varepsilon \in \mathfrak{U}$, so daß*

$$x \in U_\varepsilon \Longrightarrow q(r(x)) \leq \varepsilon p(x);$$

(F_0) *Es gibt ein $p_0 \in \Gamma_X$ mit der Eigenschaft, daß zu jedem $q \in \Gamma_Y$ eine Zuordnung $\varepsilon \to \delta_\varepsilon > 0$ so existiert, daß*

$$p_0(x) \leq \delta_\varepsilon \Longrightarrow q(r(x)) \leq \varepsilon p_0(x);$$

(F_0') *Es gibt ein $p_0 \in \Gamma_X$ mit der Eigenschaft, daß zu jedem $q \in \Gamma_Y$ eine Zuordnung $\varepsilon \to U_\varepsilon \in \mathfrak{U}$ so existiert, daß*

$$x \in U_\varepsilon^{\cdot} \Longrightarrow q(r(x)) \leq \varepsilon p_0(x)\,.$$

Die durch Definition 1 eingeführten vier Restgliedarten seien im folgenden als Restglieder vom Typus (F) zusammengefaßt. Aus der Definition 1 folgt unmittelbar, daß zwischen den Bedingungen (F), (F'), (F_0) und (F_0') die folgenden Implikationen bestehen:

$$\begin{array}{ccc} (F_0) & \Longrightarrow & (F) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ (F_0') & \Longrightarrow & (F'). \end{array} \tag{1}$$

Die folgenden beiden Beispiele zeigen, daß weder $(F) \Longrightarrow (F_0')$ noch $(F_0') \Longrightarrow (F)$. Insbesondere sind daher keine zwei der vier Bedingungen äquivalent.

Beispiel 1. Sei $X = Y = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ = Raum aller reellen Zahlenfolgen $x = (\xi_k)_{k\in\mathbf{N}}$, versehen mit der Topologie der koordinatenweisen Konvergenz. Als $\Gamma_X = \Gamma_Y$ werde die Folge $(p_k)_{k\in\mathbf{N}}$ von Seminormen in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ gewählt, wobei $p_n(x) = \max\{(\xi_i| ; i = 1, 2, \ldots, n\}$. Dann ist die Abbildung $r: (\xi_k)_{k\in\mathbf{N}} \to (\xi_k^2)_{k\in\mathbf{N}}$ ein F-, aber kein F_0'-Restglied von $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Beispiel 2. Sei $X = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ wie in Beispiel 1, $Y = \mathbf{R}$. Die Abbildung

$$r: (\xi_k)_{k\in\mathbf{N}} \to \xi_1 \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} |\xi_i| (1 + |\xi_i|)^{-1}$$

ist ein F_0'-, aber kein F-Restglied von $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ in $\mathbf{R}$.

1.2. Unabhängigkeit von den Seminormen. Die Definition 1 nimmt Bezug auf je eine zulässige Familie von Seminormen in den lokalkonvexen Räumen X und Y. Daß die Bedingungen (F), (F'), $F_0)$, (F_0') jedoch rein topologischer Natur sind, ergibt sich aus der folgenden, etwas allgemeineren Feststellung:

Lemma 1. *Es seien Γ_X, Γ_X' zwei Familien von Seminormen auf dem Vektorraum X und Γ_Y, Γ_Y' zwei Familien von Seminormen auf dem Vektorraum Y. Die durch Γ_X' (bzw. Γ_Y') in X (bzw. Y) bestimmte lokalkonvexe Topologie sei feiner als die durch Γ_X (bzw. Γ_Y) bestimmte. Sei r ein Restglied vom Typus (F) von X in Y in bezug auf Γ_X, Γ_Y'. Dann ist r ein Restglied gleicher Art in bezug auf Γ_X', Γ_Y.*

Nach der Voraussetzung über Γ_X und Γ_X' gibt es zu jedem $p \in \Gamma_X$ ein $p' \in \Gamma_X'$ und eine positive Zahl α, so daß $p \leq \alpha p'$. Entsprechendes gilt für Γ_Y und Γ_Y'. Daraus folgt Lemma 1 unmittelbar.

Seien X und Y wieder lokalkonvexe Räume. Die Klasse der F-Restglieder von X in Y sei im folgenden mit $R_F(X, Y)$ bezeichnet. Entsprechend seien $R_{F'}(X, Y)$, $R_{F_0}(X, Y)$ und $R_{F_0'}(X, Y)$ eingeführt. Als Folgerung aus Lemma 1 ergibt sich, daß diese Restgliedklassen nicht von den speziell gewählten zulässigen Familien Γ_X bzw. Γ_Y abhängig sind. Diese Tatsache wird im folgenden Satz zum Ausdruck gebracht.

Satz 1. *Seien X und Y lokalkonvexe Räume. Die Restgliedklassen $R_F(X, Y)$. $R_{F'}(X, Y)$, $R_{F_0}(X, Y)$ und $R_{F'_0}(X, Y)$ sind invariant gegenüber den Automorphismen von X und Y.*

1.3. Restglieder vom Typus (G). Es seien X ein linearer und Y ein topologischer linearer Raum. In X sei ein System Σ von Teilmengen ausgezeichnet, das X überdeckt. Eine Teilmenge D von X heiße dann *Σ-absorbierend*, wenn es zu jedem $B \in \Sigma$ eine Zahl $\beta > 0$ so gibt, daß $\lambda B \subset D$, sobald $|\lambda| \leq \beta$.

Definition 2. *Eine Funktion r, definiert in einer Σ-absorbierenden Teilmenge von X, mit Werten in Y heißt ein G_Σ-Restglied von X in Y, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

$$\lim_{\tau \to 0} \tau^{-1} r(\tau x) = 0, \text{ gleichmäßig in } x \text{ in jeder Menge } B \in \Sigma. \qquad (G_\Sigma)$$

Die G_Σ-Restglieder, für alle möglichen Überdeckungen Σ von X, werden unter dem Namen Restglieder vom Typus (G) zusammengefaßt. In trivialer Weise kann jedes G_Σ-Restglied r von X in Y zu einem G_Σ-Restglied $\bar{r}$ fortgesetzt werden, das in ganz X definiert ist. Für $\tau \neq 0$ ist dann die Abbildung $\bar{r}_\tau : x \to \tau^{-1} \bar{r}(\tau x)$ ein Element von $F(X, Y)$, und die Bedingung (G_Σ) besagt $\lim \bar{r}_\tau = o \in F(X, Y)$ für $\tau \to 0$ in der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in jeder Menge $B \in \Sigma$.[1])

Für eine gegebene Überdeckung Σ von X werde die Klasse der G_Σ-Restglieder von X in Y mit $R_\Sigma(X, Y)$ bezeichnet. Aus der Definition 2 folgt der

Satz 2. *Sei X ein linearer Raum, Σ ein System von Teilmengen von X, das X überdeckt, und sei Y ein lokalkonvexer Raum. Dann ist die Klasse $R_\Sigma(X, Y)$ aller G_Σ-Restglieder von X in Y invariant gegenüber allen linearen Transformationen von X, die Σ in sich überführen, und gegenüber allen Automorphismen von Y.*

Die Klasse aller Überdeckungen Σ von X ist in natürlicher Weise teilweise geordnet durch die Verfeinerungsrelation: $\Sigma' < \Sigma$, wenn es zu jedem $B' \in \Sigma'$ ein $B \in \Sigma$ so gibt, daß $B' \subset B$. Aus der Definition 2 folgt dann sofort:

$$(G_\Sigma) \Longrightarrow (G_{\Sigma'}) \quad \text{falls } \Sigma' < \Sigma. \qquad (2)$$

Bezeichnet Σ_p das System aller einpunktigen Teilmengen von X, und schreibt man (G_p) statt (G_{Σ_p}), so gilt $(G_\Sigma) \Longrightarrow (G_p)$ trivialerweise für jedes Σ. Wird jedes $B \in \Sigma$ ersetzt durch seine kreisförmige Hülle $B^0 = \{\lambda x \mid x \in B, |\lambda| \leq 1\}$, so entsteht ein System Σ^0. Dann ist zwar $\Sigma < \Sigma^0$, jedoch sind (G_{Σ^0}) und (G_Σ) äquivalente Bedingungen.

---

[1]) $F(X, Y)$ bezeichnet den linearen Raum aller Abbildungen von X in Y.

Der wichtigste Fall liegt vor, wenn X auch ein *topologischer* Vektorraum ist. Die Topologie von X bestimmt dann das System Σ_b aller *topologisch beschränkten* Teilmengen von X. Schreibt man (G_b) statt (G_{Σ_b}), so gilt $(G_b) \Longrightarrow (G_\Sigma)$ für jede Überdeckung Σ von X durch beschränkte Mengen. Zwei Topologien auf X, für die die gleichen Teilmengen von X beschränkt sind, bestimmen dieselben G_b-Restglieder von X in Y. Ist insbesondere X lokalkonvex, so hat man noch die gleichen G_b-Restglieder von X in Y, wenn die ursprüngliche Topologie von X durch die schwache ersetzt wird.

Die Topologie von X bestimmt ferner das System Σ_k der *präkompakten Teilmengen* von X. Setzt man G_k statt G_{Σ_k}, so gilt $(G_b) \Longrightarrow (G_k) \Longrightarrow G_p)$. Die Bedingungen (G_b) und (G_k) sind immer dann äquivalent, wenn jede beschränkte Menge in X präkompakt ist. Dies ist der Fall für die *Montel-Räume* ([2], Chap. IV, § 3), zu denen alle endlich-dimensionalen Vektorräume gehören.

1.4. Beziehungen zwischen den Restglied-Bedingungen. Nun seien X und Y lokalkonvexe Räume. Mit Σ sei stets eine Überdeckung von X durch topologisch beschränkte Teilmengen von X bezeichnet. Über die Beziehungen zwischen den Restgliedbegriffen vom Typus (F) gibt das Schema (1) Aufschluß. Die allgemeinste entsprechende Aussage für die Restglied-Bedingungen vom Typus (G) wird durch die Relation (2) geliefert. Aus dem nächsten Satz folgt nun, daß jede der Restglied-Bedingungen vom Typus (F) jede Bedingung (G_Σ) impliziert, falls Σ aus beschränkten Mengen besteht.

Satz 3. *Jedes F'-Restglied r von X in Y ist ein G_b-Restglied von X in Y.*

Seien Γ_X, Γ_Y zulässige Familien von Seminormen in X bzw. Y; r erfülle die Bedingung (F'), dabei kann U_ε als kreisförmig angenommen werden. Sei $B \in \Sigma_b$, $\beta > 0$ und $\beta \geq \sup\{p(x) \mid x \in B\}$. Die Zuordnung $\varepsilon \to \delta_\varepsilon > 0$ werde so gewählt, daß $|\tau| \leq \delta_\varepsilon \Longrightarrow \tau B \subset U_{\varepsilon\beta^{-1}}$. Dann hat man $(x \in B, |\tau| \leq \delta_\varepsilon) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow q((r(\tau x)) \leq \beta^{-1}\varepsilon \mid \tau \mid p(x) \leq \varepsilon \mid \tau \mid$; also $\lim \tau^{-1} q(r(\tau x)) = 0$ für $\tau \to$ $\to 0 \in \mathbf{R}$, gleichmäßig für $x \in B$. Dies gilt für jedes $q \in \Gamma_Y$. Somit ist (G_b) erfüllt.

Das folgende Beispiel zeigt, daß (F') und (G_b) im allgemeinen jedoch keine äquivalenten Bedingungen sind.

Beispiel 3. Wird in einem normierten Raum E von unendlicher Dimension mit Norm $x \to \|x\|$ die schwache Topologie zugrunde gelegt, so entsteht ein nicht normierbarer lokalkonvexer Raum E_w. Die reelle Funktion $r: x \to \|x\|^2$ ist ein G_b-Restglied von E_w in $\mathbf{R}$, jedoch kein F'-Restglied.

Die folgenden beiden Sätze behandeln Spezialfälle.

Satz 4. *Seien X ein normierbarer und Y ein beliebiger lokalkonvexer Raum. Dann sind die Bedingungen (F_0), (F_0'), (F), (F'), (G_b) äquivalent.*

Ist nämlich $x \to \| x \|$ eine zulässige Norm in X, so reduziert sich jede der in Satz 4 erwähnten Bedingungen auf das Bestehen der Relation

$$\lim_{x \to 0} \frac{r(x)}{\| x \|} = 0 . \tag{3}$$

Satz 5. *Seien X und Y lokalkonvexe Räume. Alle Bedingungen (F_0), (F_0'), (F), (F'), (G_b), (G_p) sind dann und nur dann äquivalent, wenn X eindimensional ist.*

Im Fall $\dim X = 1$, $X = \mathbf{R}$ ist nämlich jede der in Satz 5 genannten Bedingungen gleichwertig dem Bestehen der Relation

$$\lim_{t \to 0} \frac{r(t)}{t} = 0 . \tag{4}$$

Bereits im Fall $\dim X = 2$ existieren bekanntlich Funktionen r, die (G_p), jedoch nicht (G_b), erfüllen.

Sowohl die bei der F-Differenzierbarkeit im Sinne von Hyers [5] auftretenden als auch die Restglieder im Sinne von Fischer [3] sind mit unseren F-Restgliedern identisch. Für die von Michal eingeführten M- bzw. M_1'-Restglieder ($i = 1, 2, 3, 4$) sei auf [6] verwiesen. Der Vollständigkeit halber sei lediglich folgendes erwähnt: $(M_1) \Longrightarrow (F_0')$, $(F) \Longrightarrow (M)$ und $(M) \Longrightarrow (G_p)$. Die bei Gil de Lamadrid [4], in den Begriff der « Σ-strict derivative » eingehenden Restglieder sind mit unseren G_Σ-Restgliedern identisch. Das gleiche gilt für die « Differenzierbarkeit im weiteren Sinne » bei Sebastião e Silva [10].

Eine etwas andere Definition der Restglieder von X in Y (in bezug auf eine Überdeckung Σ von X durch beschränkte kreisförmige Mengen) gibt Sebastião e Silva in [9] unter dem Namen « infiniment petit d'ordre supérieur à 1 ». Diese, hier S_Σ-Restglieder genannt, sind wie folgt definiert:

Definition 3. *Eine Abbildung r, definiert in einer Σ-absorbierenden Teilmenge von X, mit Werten in Y, heißt ein S_Σ-Restglied von X in Y, wenn folgende Bedingung erfüllt ist:*

(S_Σ) *Zu jedem $B \in \Sigma$ existiert eine beschränkte Menge C in Y und eine Zuordnung $\varepsilon \to \delta_\varepsilon > 0$, so daß*

$$| \tau | \leq \delta_\varepsilon \Longrightarrow \tau^{-1} r(\tau B) \subset \varepsilon C .$$

Es ist unmittelbar klar, daß $(S_\Sigma) \Longrightarrow (G_\Sigma)$ für jedes zulässige System Σ. Wenn Y normierbar ist, sind (S_Σ) und (G_Σ) äquivalent. Statt S_{Σ_b} werde S_b gesetzt. Das nächste Beispiel zeigt, daß (S_b) und (G_b) im allgemeinen keine gleichwertigen Bedingungen sind.

Beispiel 4. Es sei X der normierte Raum der *beschränkten* reellen Zahlenfolgen $x = (\xi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ mit der Norm $x \to \| x \| = \sup \{ | \xi_k | \mid k \in \mathbf{N} \}$ und es sei $Y = \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.

Für $k \in \mathbf{N}$ bezeichne $\varphi_k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ die Funktion $\varphi_k(t) = t^2(1 - kt)^{-1}$ für $t \neq k^{-1}$, $\varphi_k(k^{-1}) = 0$. Dann ist die Abbildung $r : (\xi_k)_{k \in \mathbf{N}} \to (\varphi_k(\xi_k))_{k \in \mathbf{N}}$ ein F_0-Restglied, also auch ein G_b-Restglied, jedoch kein S_b-Restglied von X in Y, da r keine beschränkte Menge der Form $\{x \in X \mid \|x\| \leqslant \varrho\}$, $\varrho > 0$ in eine beschränkte Menge von Y überführt.

Aus dem Beispiel 4 folgt gleichzeitig, daß (S_b) im allgemeinen nicht einmal durch (F_0) impliziert wird, selbst dann nicht, wenn X normierbar ist. Andererseits zeigt das Beispiel 3, daß im allgemeinen aus (S_b) nicht einmal (F') folgt.

Das folgende Schema gibt eine Übersicht über die Implikationsrelationen, die zwischen den in diesem Abschnitt vorkommenden Restglied-Bedingungen immer bestehen.

$$\begin{tikzcd}
& (F_0) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (F) \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (M) \arrow[dd, Rightarrow] \\
(M_1) \arrow[r, Rightarrow] & (F_0') \arrow[r, Rightarrow] & (F') \arrow[d, Rightarrow] & \\
& (S_b) \arrow[r, Rightarrow] & (G_b) \arrow[r, Rightarrow] & (G_p)
\end{tikzcd} \tag{5}$$

Im folgenden werden die M_1- und die M-Restglieder nicht mehr betrachtet.

1.5. Stetigkeit im Nullpunkt. Seien X und Y lokalkonvexe Räume. Für ein Restglied r von X in Y hat man $r(o) = o$, gleichgültig, welche der Restglied-Definitionen zugrunde gelegt wird. Aus der Definition 1 folgt unmittelbar der

Satz 6. *Ein Restglied vom Typus (F) von X in Y ist stetig im Nullpunkt von X.*

Das Beispiel 3 zeigt, daß die entsprechende Behauptung für die S_b- (und daher auch für die G_b-)Restglieder falsch ist. Nun gilt jedoch der folgende nichttriviale

Satz 7. *Seien X ein metrisierbarer, Y ein beliebiger topologischer Vektorraum, und sei Σ eine Überdeckung von X, die alle Nullfolgen in X enthält. Dann ist jedes G_Σ-Restglied von X in Y stetig im Nullpunkt.*

Der Beweis wird im folgenden Abschnitt gegeben werden.

Korollar. *Falls X metrisierbar ist, ist jedes G_k-Restglied (und folglich jedes G_b-Restglied) von X in Y stetig im Nullpunkt von X.*

1.6. Die Σ-Topologien. Sei X ein linearer Raum. Eine beliebige Überdeckung Σ von X durch Teilmengen von X bestimmt in natürlicher Weise eine Topologie in X, durch die folgende Auszeichnung ihrer offenen Mengen:

Definition 4. *Eine Teilmenge M von X heiße Σ-offen, wenn für jedes $a \in M$ die Menge $M - a = \{x \in X \mid x + a \in M\}$ Σ-absorbierend* (Abschnitt 1.3.) *ist.*

Die eindeutig bestimmte Topologie in X, für die die Σ-offenen Teilmengen von X die offenen Mengen sind, heiße die Σ-Topologie in X und sei durch T_Σ bezeichnet.

Für jede Σ-Topologie in X sind alle Translationen $x \to x + a$, $(a \in X)$, und alle Homothetien $x \to \lambda x$, $(\lambda \in \mathbf{R}, \lambda \neq 0)$ Homöomorphismen von X auf X. Sind Σ, Σ' zwei Überdeckungen von X und hat man $\Sigma' < \Sigma$ im Sinne von Abschnitt 1.3., so ist $T_{\Sigma'}$ stärker als T_Σ. Unter allen Σ-Topologien in X gibt es eine stärkste, die Σ_p-Topologie T_p.

Sei T eine beliebige translationsinvariante Topologie im linearen Raum X. Eine Teilmenge B wird dann *T-beschränkt* genannt, wenn B von jeder Nullumgebung für T absorbiert wird. Dann hat man die folgende Charakterisierung der Topologie T_Σ:

Satz 8. *Seien X ein linearer Raum und Σ eine Überdeckung von X. Unter allen translationsinvarianten Topologien T in X, für die jedes $B \in \Sigma$ T-beschränkt ist, gibt es eine stärkste. Diese ist die Topologie T_Σ.*

Falls jedes $B \in \Sigma$ T-beschränkt ist, so ist jede für T offene Menge auch T_Σ-offen. Also ist T_Σ stärker als T. Andrerseits ist trivialerweise jedes $B \in \Sigma$ T_Σ-beschränkt.

Korollar. *Seien X ein linearer Raum, Σ eine Überdeckung von X, und Σ^* das System der T_Σ-beschränkten Teilmengen von X. Dann ist $T_{\Sigma^*} = T_\Sigma$.*

Zunächst ist $\Sigma < \Sigma^*$, und daher T_{Σ^*} schwächer als T_Σ. Nach Satz 8, auf das System Σ^* angewandt, ist jedoch T_{Σ^*} stärker als T_Σ.

Der folgende Satz drückt eine wichtige Eigenschaft der Σ-Topologien aus:

Satz 9. *Sei X ein linearer Raum, versehen mit einer Σ-Topologie, und sei Y ein topologischer Vektorraum. Eine lineare Abbildung Φ von X in Y ist dann und nur dann stetig, wenn sie jede Menge $B \in \Sigma$ in eine beschränkte Menge $\Phi(B) \subset Y$ überführt.*

Sei Φ stetig, $B \in \Sigma$. Für jede Nullumgebung V in Y, ist $\Phi^{-1}(V)$ eine Nullumgebung in X und absorbiert daher B. Also absorbiert V die Menge $\Phi(B)$. Nun sei vorausgesetzt, daß $\Phi(B)$ beschränkt ist für jedes $B \in \Sigma$. Dann sei Q eine beliebige offene Menge in Y und $a \in \Phi^{-1}(Q)$. Zu beliebigem $B \in \Sigma$ gibt es eine Zahl $\beta > 0$, so daß $|\lambda| \leq \beta \Longrightarrow \lambda \Phi(B) \subset Q - \Phi(a) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow \lambda B \subset \Phi^{-1}(Q) - a$, das heißt, $\Phi^{-1}(Q)$ ist Σ-offen. Also ist Φ stetig.

Korollar. *Seien X ein linearer und Y ein topologischer linearer Raum. Jede lineare Abbildung von X in Y ist stetig für die Topologie T_p in X.*

Lemma 2. *Seien X ein linearer Raum, Σ eine Überdeckung von X, Y ein topologischer Vektorraum und r ein G_Σ-Restglied von X in Y. Für jede Nullumgebung V in Y ist $r^{-1}(V)$ eine Σ-absorbierende Menge in X.*

Bemerkung. Hieraus folgt *nicht*, daß r stetig ist im Nullpunkt für T_Σ.

Es genügt, die Aussage des Lemmas 2 für eine beliebige kreisförmige Nullumgebung V in Y zu beweisen. Aus der Bedingung (G_Σ) folgt, daß es zu jedem $B \in \Sigma$ ein $\delta \in \mathbf{R}$, $0 < \delta \leq 1$ so gibt, daß

$$|\tau| \leq \delta \Longrightarrow r(\tau B) \subset \tau V \subset V \Longrightarrow \tau B \subset r^{-1}(V) .$$

Nun sei X ein topologischer Vektorraum. Die Topologie T von X bestimmt u.a. folgende Überdeckungen von X: Das System Σ_b aller beschränkten Mengen und das System Σ_k aller präkompakten Mengen in X. Man hat $\Sigma_k < \Sigma_b$. Jede dieser Überdeckungen Σ_b, Σ_k bestimmt eine Σ-Topologie in X, diese seien als T_b bzw. T_k bezeichnet. T_k ist stärker als T_b, T_b stärker als T. Dann und nur dann, wenn T eine Σ-Topologie ist, hat man $T_b = T$. Falls T eine *lokalkonvexe* Σ-Topologie ist, so ist X *bornologisch*.

Lemma 3. *Seien X ein metrisierbarer topologischer Vektorraum und Σ eine Überdeckung von X, die alle Nullfolgen in X enthält. Dann ist jede Σ-absorbierende Menge M in X eine Nullumgebung.*

Sei $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Nullumgebungsbasis in X, so daß $U_{n+1} \subset U_n$ für jedes $n \in \mathbf{N}$. Es genügt zu beweisen, daß M eine Menge der Form $n^{-1} U_n$ enthält. Wäre dies nicht der Fall, dann gäbe es eine Punktfolge $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$, so daß $x_n \in n^{-1} U_n$, $x_n \notin M$. Dann wäre $(n x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ eine Nullfolge in X, die von M nicht absorbiert würde, im Widerspruch zur Voraussetzung über M.

Aus dem Lemma 3 folgt insbesondere der

Satz 10. *Seien X ein metrisierbarer topologischer Vektorraum, T die Topologie von X und Σ eine Überdeckung von X durch beschränkte Mengen, die alle Nullfolgen in X enthält. Dann ist $T = T_\Sigma$.*

Korollar. *Seien X ein metrisierbarer topologischer Vektorraum und T seine Topologie. Dann hat man $T = T_b = T_k$.*

Der in Abschnitt 1.5. formulierte Satz 7 ist eine direkte Folgerung von Lemma 2 und Lemma 3.

2. Differenzierbarkeit

2.1. Differenzierbarkeitsbegriffe. Den verschiedenen im folgenden aufzustellenden Definitionen der Differenzierbarkeit einer Abbildung f im Punkte x wird generell eine Darstellung der Form

$$f(x + h) - f(x) = \Phi(h) + r(h) \tag{D}$$

zugrunde gelegt, wobei Φ eine *stetige lineare* Abbildung und r ein *Restglied* ist.

Definition 5. *Seien X, Y lokalkonvexe Räume und M eine offene Menge in X. Eine Abbildung f von M in Y heißt F_0-, F_0'-, F- bzw. F'-differenzierbar im Punkte $x \in M$, wenn es eine stetige lineare Abbildung Φ von X in Y und ein F_0-, F_0'-, F- bzw. F'-Restglied r von X in Y so gibt, daß die Relation* (D) *identisch in $h \in M - x$ besteht. Dann wird Φ die F_0-, F_0'-, F- bzw. F'-Ableitung von f im Punkte x genannt und durch $f'(x)$ oder $Df(x)$ bezeichnet.*

Definition 6. *Seien X ein linearer Raum, Σ eine Überdeckung von X, M eine Σ-offene Teilmenge von X und Y ein topologischer Vektorraum. Eine Abbildung f von M in Y heißt S_Σ- bzw. G_Σ-differenzierbar im Punkte $x \in M$, falls es eine für die Topologie T_Σ stetige lineare Abbildung Φ von X in Y und ein S_Σ- bzw. G_Σ-Restglied r von X in Y gibt, so daß die Relation* (D) *identisch in $h \in M - x$ besteht. Dann heißt Φ die S_Σ- bzw. G_Σ-Ableitung von f im Punkte x und wird mit $f'(x)$ oder $Df(x)$ bezeichnet.*

Unter S_p- bzw. G_p-Differenzierbarkeit sei S_Σ- bzw. G_Σ-Differenzierbarkeit für $\Sigma = \Sigma_p$ verstanden. Wenn X ein topologischer Vektorraum ist, so heiße G_k- bzw. G_b-Differenzierbarkeit soviel wie G_Σ-Differenzierbarkeit für $\Sigma = \Sigma_k$, bzw. $\Sigma = \Sigma_b$. Analog seien S_k- und S_b-Differenzierbarkeit definiert.

Es ist klar, daß für die verschiedenen Arten der Differenzierbarkeit die gleichen Implikationen bestehen wie für das Bestehen der entsprechenden Restgliedbedingungen. So ist die F-Ableitung von $f: M \to Y$ im Punkte $x \in M$ zugleich F$'$-Ableitung und G_Σ-Ableitung von f im Punkte x für jede Überdeckung $\Sigma < \Sigma_b$. Dies rechtfertigt die Verwendung des gleichen Symbols $f'(x)$ bzw. $Df(x)$. In jedem Fall ist $f'(x)$, falls es existiert, durch f eindeutig bestimmt. Es genügt, dies für die G_p-Differenzierbarkeit zu verifizieren.

2.2. Stetigkeit. Aus der Stetigkeit der F'-Restglieder im Nullpunkt folgt unmittelbar der

Satz 11. *Ist die Abbildung $f: M \to Y$ F'-differenzierbar an der Stelle $x \in M$, so ist sie auch stetig im Punkte x.*

Die gleiche Aussage ist *a* fortiori richtig für F_0-, F_0'- oder F-differenzierbare Abbildungen. Eine entsprechende Aussage kann für G_Σ-differenzierbare Abbildungen (in bezug auf die Topologie T_Σ) nicht gemacht werden. Man beachte jedoch den Satz 16 in Abschnitt 2.8. Hingegen gilt der folgende speziellere

Satz 12. *Seien X ein metrisierbarer, Y ein beliebiger topologischer Vektorraum, M eine offene Menge in X und Σ eine Überdeckung von X durch beschränkte Mengen, die alle Nullfolgen enthält. Falls eine Abbildung $f: M \to Y$ G_Σ-differenzierbar ist im Punkte $x \in M$, so ist f auch stetig an der Stelle x.*

Nach Satz 10 ist die Topologie T von X mit T_Σ identisch; daher ist $h \to f'(x)h$ stetig für T, ebenso ist nach Lemma 2 und Lemma 3 $h \to r(h)$ stetig im Nullpunkt.

Korollar. *Falls X metrisierbar ist, so ist jede in einem Punkte x G_b- oder G_k-differenzierbare Abbildung stetig an der Stelle x.*

2.3. Spezialfall. Sowohl die G_b- als die F_0-, F_0'-, F-, F'-Differenzierbarkeit sind Verallgemeinerungen der FRÉCHET-Differenzierbarkeit:

Satz 13. *Seien X ein normierbarer, Y ein beliebiger topologischer Vektorraum und M eine offene Menge in X. Die G_b-Differenzierbarkeit einer Abbildung $f: M \to Y$ in einem Punkte $x \in M$ ist identisch mit der* FRÉCHET-*Differenzierbarkeit von f an der Stelle x. Falls überdies Y lokalkonvex ist, sind F_0-, F_0'-, F-, F'- und G_b-Differenzierbarkeit gleichwertig.*

Die Topologie von X ist mit T_b identisch nach Satz 10. Ist $x \to \| x \|$ eine zulässige Norm in X, so reduziert sich die Restgliedbedingung (G_b) auf das Bestehen der Relation (3) von Abschnitt 1.4., die von FRÉCHET und NEVANLINNA [7] der Definition der FRÉCHET-Differenzierbarkeit zugrunde gelegt wurde, allerdings nur für den Fall, daß neben X auch Y normierbar ist. Diese letztere Voraussetzung ist für die Begriffsbildung jedoch entbehrlich. Der zweite Teil von Satz 13 folgt unmittelbar aus Satz 4.

2.4. Die Richtungsableitung. Wenn X, Y normierte lineare Räume sind und M eine offene Teilmenge von X ist, so ist es üblich, als *Richtungsableitung* $f'(x, h)$ einer Abbildung $f: M \to Y$ an der Stelle $x \in M$ in der Richtung $h \in X$ den Grenzwert

$$\lim_{\tau \to 0} \frac{f(x + \tau h) - f(x)}{\tau} = f'(x, h) \tag{6}$$

zu bezeichnen, falls er existiert. Ist $h \to f'(x, h)$ überdies stetig linear, so sagt man, f sei differenzierbar im Sinne von GÂTEAUX an der Stelle x. Es ist jedoch klar, daß durch (6) der Ausdruck $f'(x, h)$ bereits sinnvoll erklärt wird, wenn nur X ein linearer und Y ein topologischer linearer Raum ist. Unter diesen Voraussetzungen sei Σ eine Überdeckung von X. Dann stellt die G_Σ-Differenzierbarkeit eine Verallgemeinerung und zugleich eine Modifikation der GÂTEAUX-Differenzierbarkeit dar, und zwar im folgenden Sinne: Die Abbildung $f: M \to Y$ ist dann und nur dann G_Σ-differenzierbar an der Stelle $x \in M$, wenn die Richtungsableitung $f'(x, h)$ gleichmäßig in h in jeder Menge $B \in \Sigma$ existiert und $h \to f'(x, h)$ eine für T_Σ stetige lineare Abbildung von X in Y ist.

2.5. Der Modul der in einem Punkte differenzierbaren Abbildungen. Seien X ein linearer Raum, Σ eine Überdeckung von X und Y ein topologischer Vektorraum. Für einen festen Punkt $x \in X$ bezeichne $D_x(X, Y)$ die Klasse der je in einer Umgebung von x (für die Topologie T_Σ) definierten, im Punkte x G_Σ-differenzierbaren Abbildungen mit Werten in Y. Dann gilt

Satz 14. (i) $D_x(X, \mathbf{R})$ *ist ein Ring (für die gewöhnliche Addition und Multiplikation reeller Funktionen).* (ii) $D_x(X, Y)$ *ist ein Modul über dem Ring* $D_x(X, \mathbf{R})$. (iii) *Für* $\varphi \in D_x(X, \mathbf{R})$, $f, g \in D_x(X, Y)$ *hat man*

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)\,,$$
$$(\varphi f)'(x)h \quad = \quad (\varphi'(x)h)f(x) + \varphi(x)f'(x)h\,.$$

Der Beweis ist eine Routineangelegenheit und wird hier weggelassen. Je ein entsprechender Satz gilt für die F_0-, F_0'-, F- und F'-Differenzierbarkeit, falls X und Y lokalkonvex sind.

2.6. Die Kettenregel der Differentialrechnung ist im allgemeinen nur für F_0-, F_0'-, F-, F'- und S_b-differenzierbare Abbildungen richtig.

Satz 15. *Seien X, Y, Z lokalkonvexe Räume, M eine offene Menge in X, f eine Abbildung von M in Y, M' eine offene Menge in Y, die $f(M)$ enthält und g eine Abbildung von M' in Z. Falls f F-differenzierbar ist im Punkte $x \in M$ und g F-differenzierbar ist im Punkte $f(x) \in M'$, so ist $g \circ f : M \to Z$ F-differenzierbar im Punkte x, und es gilt*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)\,.$$

Die Aussage bleibt richtig, wenn F durch F_0, F_0', F' oder S_b ersetzt wird. Im letzteren Falle können X, Y, Z beliebige topologische Vektorräume sein.

Folgerung: *Es seien X und Y lokalkonvexe Räume. Falls eine bijektive Abbildung einer offenen Teilmenge M von X auf eine offene Teilmenge $f(M)$ von Y existiert, so daß f in einem Punkte $x \in M$ und f^{-1} im Punkte $y = f(x) \in f(M)$ F'-differenzierbar sind, so sind X und Y isomorph.*

Nach Satz 15 sind $f'(x)$ und $(f^{-1})'(y)$ zueinander inverse stetige lineare Abbildungen von X auf Y bzw. von Y auf X.

2.7. Das Umkehrproblem. Ein allgemeiner Umkehrsatz, wie er für Fréchet-differenzierbare Abbildungen zwischen Banachräumen X, Y besteht, [7], gilt nicht mehr, wenn X und Y beliebige lokalkonvexe Räume sind, selbst dann nicht, wenn es sich um Fréchet-Räume handelt. Dies wird im folgenden Beispiel gezeigt.

Beispiel 5. Die Abbildung $f : (\xi_n)_{n \in \mathbf{N}} \to (\xi_n - \xi_n^2)_{n \in \mathbf{N}}$ von $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ hat folgende Eigenschaften: (i) f ist in jedem Punkte von $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ F-differenzierbar; (ii) $(x, h) \to f'(x)h$ ist eine stetige Abbildung von $\mathbf{R}^{\mathbf{N}} \times \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ auf $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$; (iii) wird der Raum $L(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$ der stetigen linearen Selbstabbildungen von $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in allen beschränkten Mengen versehen, so ist $x \to f'(x)$ eine stetige Abbildung von $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ in $L(\mathbf{R}^{\mathbf{N}})$; (iv) $f(o) = o$;

(v) $f'(o)h = h$ für jedes $h \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$. Trotzdem gibt es keine Nullumgebung in $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$, in der f eineindeutig ist. Für die Punktfolge $x_n = (\delta_{nk})_{k \in \mathbf{N}} \in \mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ hat man $\lim x_n = o$ für $n \to \infty$ und $f(x_n) = o$ für jedes $n \in \mathbf{N}$.

2.8. Stetigkeit der G_Σ-differenzierbaren Abbildungen. Eine in *einem* Punkte $x \in M$ G_Σ-differenzierbare Abbildung $f: M \to Y$ braucht nicht stetig zu sein für die Σ-Topologie in X. Jedoch gilt folgendes:

Satz 16. *Seien X ein linearer Raum, Σ eine Überdeckung von X, M eine Σ-offene Teilmenge von X und Y ein topologischer Vektorraum. Eine in jedem Punkte $x \in M$ G_Σ-differenzierbare Abbildung f von M in Y ist stetig für die Topologie T_Σ.*

Sei nämlich Q eine offene Menge in Y, $P = f^{-1}(Q)$. Es ist zu beweisen, daß für jedes $a \in P$ die Menge $P - a$ Σ-absorbierend ist. Man wähle eine Nullumgebung V in Y, so daß $V + V \subset Q - f(a)$. Man setze $f(a+h) - f(a) = f'(a)h + r(h)$. Dann ist $[f'(a)]^{-1}(V)$ Σ-absorbierend, ebenso ist nach Lemma 2 $r^{-1}(V)$ Σ-absorbierend. Daher ist auch $[f'(a)]^{-1}(V) \cap r^{-1}(V)$ Σ-absorbierend. Aus $h \in [f'(a)]^{-1}(V) \cap r^{-1}(V)$ folgt aber $f(a+h) \in f(a) + V + V \subset Q$, das heißt $[f'(a)]^{-1}(V) \cap r^{-1}(V) \subset P - a$.

Ann Arbor, Mich., den 2. Juni 1963

LITERATUR

[1] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques, Chap. I, II.* Hermann & Cie, Paris 1953.
[2] N. BOURBAKI, *Espaces vectoriels topologiques, Chap. III, IV, V.* Hermann & Cie, Paris 1956.
[3] H. R. FISCHER, *Differentialkalkül für nicht metrische Strukturen.* Ann. Acad. Sci. Fenn. A I *247* (1957), 15 p.
[4] J. GIL DE LAMADRID, *Topology of mappings in locally convex topological vector spaces, their differentiation and integration, and application to gradient mappings.* Thesis, University of Michigan, 1955.
[5] D. H. HYERS, *A generalization of* FRÉCHET'*s differential.* Revista de Ciencias, Lima *47* (1945), 645–663.
[6] A. D. MICHAL, *First order differentials of functions with arguments and values in topological abelian groups.* Revista de Ciencias, Lima *47* (1945), 389–422.
[7] F. NEVANLINNA, *Über die Umkehrung differenzierbarer Abbildungen.* Ann. Acad. Sci. Fenn. A I 245 (1957).
[8] R. NEVANLINNA, *Bemerkung zur Funktionalanalysis.* Math. Scand. I (1953), 104–112.
[9] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Le calcul différentiel et intégral dans les espaces localement convexes I, II.* Atti Acad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) *20* (1956), 753–760; *21* (1956), 40–46.
[10] J. SEBASTIÃO E SILVA, *Conceitos de função deferençiável em espaços localmente convexos.* Publicações do Centro de Estudos Matemáticos de Lisboa, Instituto de Alta Cultura, Lisboa, 1957, 65 p.

(Eingegangen den 10. Juli 1963)