Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 38 (1963-1964)

Artikel: Structures quotient.
Autor: Ehresmann, Charles
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29443

Structures quotient

par Charles Ehresmann

A Georges de Rham, en hommage amical à l'occasion de son 60e anniversaire

Introduction

Dans la première partie, dont les résultats ont été résumés dans [0], sont d'abord définies et étudiées les notions générales de structure quotient et de sous-structure. La suite est consacrée à l'étude des catégories d'homomorphismes formées des homomorphismes entre classes multiplicatives, entre graphes orientés et entre graphes multiplicatifs. Ceci permet de donner une définition précise des catégories quotient et catégories quotient strict, ainsi que leurs propriétés.

Dans la deuxième partie sont définis et étudiés les classes multiplicatives structurées, les graphes structurés et les graphes multiplicatifs structurés, qui interviennent dans la théorie des catégories structurées. Le dernier paragraphe contient les principaux théorèmes de l'article, concernant les catégories structurées quotient, dont la démonstration utilise tous les résultats précédents.

Ce mémoire est lié aux articles [1] et [2] et reprend les mêmes conventions, en particulier les suivantes:

Une structure de catégorie sur une classe C sera encore désignée par $C^{\cdot}$ (ou simplement par C). Soit $C^{\cdot}$ une catégorie. Le composé de deux éléments g et f de C, s'il est défini, est désigné par $g \cdot f$. Les applications source et but dans C sont notées α et β. La classe des unités de $C^{\cdot}$ (ou une classe d'objets) est représentée par le symbole $C_0^{\cdot}$; le groupoïde des éléments inversibles de $C^{\cdot}$ est noté C_γ.

Soit C une catégorie. Soit $\square C$ la classe des quatuors de C, c'est-à-dire [3] des quadruplets (g', f', f, g), où $g \in C$, $f \in C$, $f' \in C$ et $g' \in C$, tels que les composés $f' \cdot g$ et $g' \cdot f$ soient définis et égaux. Rappelons [2] que $\square C$ est une catégorie double $(\square\square C, \overset{\square}{\square} C)$ pour les multiplications longitudinale et latérale.

Soit (C, p, H) un foncteur (le mot foncteur signifie toujours foncteur covariant); ce foncteur sera parfois représenté par p seulement. La restriction de p à $C_0^{\cdot}$ est notée p_0. Soit $\square p$ le foncteur de $\square\square H$ vers $\square\square C$ défini par:

$$(\square p)\,(g', f', f, g) = (p(g'), p(f'), p(f), p(g))\,.$$

La catégorie duale de la catégorie C est notée C^* et considérée comme ayant la même classe support que C. Si (C, p, H) est un foncteur, nous désignons par p^* le foncteur (C^*, p, H^*).

Soit (C, p, H, S) une catégorie d'homomorphismes [3]. Un élément $\bar{h}$ de H est souvent identifié au triplet $(\beta(\bar{h}), p(\bar{h}), \alpha(\bar{h}))$. Rappelons [2] que (C, p, H, S) est saturé au-dessus de C (ou que H est saturé au-dessus de C) si les conditions:

$$h \in C_\gamma, \ s \in H_0 \text{ et } p(s) = \alpha(h)$$

assurent l'existence de $\bar{h} \in H$ tel que $\alpha(\bar{h}) = s$ et $p(\bar{h}) = h$. Si S n'est pas explicitement défini, il est sous-entendu que $S = H_\gamma$. Pour simplifier les notations nous remplacerons parfois l'une des lettres du symbole (C, p, H, S) par un point, si aucune confusion n'est possible. Ainsi $(C, p, H, .)$ signifiera (C, p, H, H_γ).

Pour simplifier le texte, nous faisons de plus la convention suivante: Soit (C, p, H) un foncteur; soit H' une sous-catégorie de H; quand aucune confusion n'est possible, nous désignerons par (C, p, H') le foncteur de H' vers C défini par la restriction de p à H'.

Table des matières

I. Structures quotient

1. (K', p)-injections et (K', p)-surjections.

Soient (K, p, H) un foncteur et K' une sous-catégorie de K. Soit p^* le foncteur (K^*, p, H^*).

Définition 1: *On appellera* (K', p)-injection faible (*resp.* (K', p)-injection) *un élément $j \in H$ vérifiant les conditions suivantes:*
1) $p(j) \in K'$.
2) *Les conditions: $\overline{g} \in H$, $\beta(\overline{g}) = \beta(j)$ et $p(\overline{g}) = p(j) \cdot g'$ entraînent l'existence d'un (resp. d'un et d'un seul) $\overline{g}' \in H$ tel que $p(\overline{g}') = g'$ et $\overline{g} = j \cdot \overline{g}'$.*

On dira que $j^* \in H$ est une (K', p)-surjection faible (*resp.* (K', p)-surjection) *si j^* est une (K'^*, p^*)-injection faible (resp. injection).*

Ainsi $j^* \in H$ est une (K', p)-surjection faible (resp. surjection) si, et seulement si:
1*) $p(j^*) \in K'$;
2*) Les conditions $\overline{g} \in H, \alpha(\overline{g}) = \alpha(j^*)$ et $p(\overline{g}) = g' \cdot p(j^*)$ entraînent l'existence (resp. l'existence et l'unicité) de $\overline{g}' \in H$ tel que:

$$p(\overline{g}') = g' \quad \text{et} \quad \overline{g} = \overline{g}' \cdot j^* .$$

Remarque: La notion de (K', p)-injection faible est définie dans [1] sous le nom de (K', p)-injection; comme nous aurons essentiellement à considérer des (K', p)-injections (au sens de la définition 1), il semble préférable de modifier ainsi la terminologie.

Cas particuliers: 1. Si (K, p, H, S) est une catégorie d'homomorphismes, les notions de (K', p)-injection et (K', p)-injection faible sont identiques; en effet, si j est une (K', p)-injection, l'élément $\overline{g}'$ dont l'existence est assurée par la condition 2 est entièrement déterminé par la donnée du triplet $(\alpha(j), g', \alpha(\overline{g}))$, donc unique. 2. Si j est une (K', p)-surjection (resp. une (K', p)-injection) et si $p(j)$ est un épimorphisme (resp. un monomorphisme) dans K, alors j est un épimorphisme (resp. monomorphisme) dans la catégorie H.

Nous désignerons par $H^i(K', p)$ et $H^s(K', p)$ resp. les classes des (K', p)-injections et des (K', p)-surjections. Nous énoncerons les résultats pour les (K', p)-surjections; par dualité on pourra obtenir des propositions analogues pour les (K', p)-injections.

Pour que $j \in H$ soit une (K', p)-surjection, il faut et il suffit que j soit une (K', p)-surjection faible et que les conditions:

$$\overline{g}' \cdot j = \overline{g}_1' \cdot j \quad \text{et} \quad p(\overline{g}') = p(\overline{g}_1')$$

entraînent $\overline{g}' = \overline{g}_1'$.

Proposition 1: *$H^s(K', p)$ est une sous-catégorie de H contenant tout élément $f \in H_\gamma$ tel que $p(f) \in K'$.*

Démonstration: Tout $f \in H_\gamma$ tel que $p(f) \in K'$ vérifie la condition 2* pour $j^* = f$. Soit $j \in H^s(K', p)$; on a évidemment $\alpha(j) \in H^s(K', p)$ et $\beta(j) \in H^s(K', p)$. Soit $j' \in H^s(K', p)$ tel que $\alpha(j') = \beta(j)$. D'après la proposition duale de la proposition 1 de [1], $j' \cdot j$ est une surjection faible. Supposons que l'on ait:

$$\overline{g}' \cdot (j' \cdot j) = \overline{g}_1' \cdot (j' \cdot j) \quad \text{et} \quad p(\overline{g}') = p(\overline{g}_1').$$

Les conditions:

$$(\overline{g}' \cdot j') \cdot j = (\overline{g}_1' \cdot j') \cdot j \quad \text{et} \quad p(\overline{g}' \cdot j') = p(\overline{g}_1' \cdot j')$$

entraînent $\overline{g}' \cdot j' = \overline{g}_1' \cdot j'$, puisque j est une (K', p)-surjection. Les relations:

$$\overline{g}' \cdot j' = \overline{g}_1' \cdot j' \quad \text{et} \quad p(\overline{g}') = p(\overline{g}_1')$$

entraînent alors $\overline{g}' = \overline{g}_1'$; donc $j' \cdot j \in H^s(K', p)$.

Théorème 1: *Soient $j \in H^s(K', p)$ et $j' \in H^s(K', p)$ tels que $\alpha(j) = \alpha(j')$. Soit $f \in K'$ tel que: $f \cdot p(j) = p(j')$. Alors il existe un et un seul $j'' \in H^s(K', p)$ vérifiant les conditions:*

$$p(j'') = f \quad \textit{et} \quad j'' \cdot j = j'.$$

Si f est inversible dans K', j'' est inversible dans H.

Démonstration: Les relations:

$$j \in H^s(K', p), \quad \alpha(j) = \alpha(j') \quad \text{et} \quad p(j') = f \cdot p(j)$$

entraînent l'existence d'un élément unique j'' tel que:

$$p(j'') = f \quad \text{et} \quad j'' \cdot j = j'.$$

Montrons que j'' est une (K', p)-surjection. Soit $\overline{g} \in H$ tel que

$$\alpha(\overline{g}) = \alpha(j'') = \beta(j) \quad \text{et} \quad p(\overline{g}) = g' \cdot f.$$

Comme $j' \in H^s(K', p)$ et que l'on a:

$$p(\overline{g} \cdot j) = g' \cdot f \cdot p(j) = g' \cdot p(j'),$$

il existe un et un seul $\overline{g}' \in H$ pour lequel:

$$p(\overline{g}') = g' \quad \text{et} \quad \overline{g}' \cdot j' = \overline{g} \cdot j = (\overline{g}' \cdot j'') \cdot j.$$

Comme $p(\overline{g}' \cdot j'') = p(\overline{g})$, il en résulte $\overline{g}' \cdot j'' = \overline{g}$. Les conditions:

$$\overline{g}' \cdot j'' = \overline{g}_1' \cdot j'' \quad \text{et} \quad p(\overline{g}') = p(\overline{g}_1')$$

entraînent $\overline{g}' \cdot j' = \overline{g}_1' \cdot j'$, d'où $\overline{g}' = \overline{g}_1'$, et par suite $j'' \in H^s(K', p)$. –

Supposons $f \in K'_\gamma$. Il existe aussi $j''_1 \in H^s(K', p)$ tel que:

$$p(j''_1) = f^{-1} \quad \text{et} \quad j''_1 \cdot j' = j\,.$$

Les relations:

$$(j''_1 \cdot j'') \cdot j = j''_1 \cdot j' = j \quad \text{et} \quad p(j''_1 \cdot j'') = \alpha(f) = p(\beta(j))$$

entraînent: $j''_1 \cdot j'' = \alpha(j'')$. De même on montre $j'' \cdot j''_1 = \beta(j'')$. On en déduit $j'' = (j''_1)^{-1} \in H_\gamma$.

Corollaire: *Les conditions:* $j \in H^s(K', p)$, $j' \in H^s(K', p)$,

$$\alpha(j) = \alpha(j') \quad \textit{et} \quad p(j) = p(j')$$

entraînent $j' = \gamma \cdot j$, *où* $\gamma \in H_\gamma$.

En effet, d'après le théorème, il existe $j'' \in H_\gamma$ tel que:

$$p(j'') = p(\beta(j)) \quad \text{et} \quad j'' \cdot j = j'\,.$$

Nous désignerons par U la catégorie longitudinale $\square\square(K; K')$ dont les éléments sont les quatuors [2, 3] $(g', f', f, g) \in \square K$ tels que $f \in K'$ et $f' \in K'$. De même:

$$\overline{U}^s = \square\square(H; H^s(K', p)) \quad \text{et} \quad \overline{U}^i = \square\square(H; H^i(K', p))\,.$$

Définition 2: *On dira que* $\overline{h}' \in H$ *est un* (K', p)-homomorphisme quotient (*resp.* sous-homomorphisme) de $\overline{h} \in H$ *s'il existe* $(\overline{h}', j', j, \overline{h}) \in \overline{U}^s$ (*resp.* $(\overline{h}, j', j, \overline{h}') \in \overline{U}^i$); *on écrira alors:*

$$\overline{h}' \overset{(K',p)}{\longrightarrow\!\!\!<} \overline{h} \quad \textit{ou} \quad \overline{h}' \longrightarrow\!\!\!< \overline{h} \ (\textit{resp.}\ \overline{h}' \underset{(K',p)}{<} \overline{h} \quad \textit{ou} \quad \overline{h}' < \overline{h})\,.$$

Proposition 2: *Soient* $\overline{h} \in H$, $j \in H^s(K', p)$ *et* $j' \in H^s(K', p)$ *tels que:* $\alpha(\overline{h}) = \alpha(j)$ *et* $\beta(\overline{h}) = \alpha(j')$. *S'il existe:*

$$H = (h', p(j'), p(j), p(\overline{h})) \in U\,,$$

alors il existe un et un seul $\overline{H} = (\overline{h}', j', j, \overline{h}) \in \overline{U}^s$ *tel que*

$$\square p(\overline{H}) = H\,.$$

Si de plus $\overline{h} \in H_\gamma$ *et* $h' \in K_\gamma$, *on a:* $\overline{h}' \in H_\gamma$.

En effet, les conditions $j \in H^s(K', p)$ et $p(j' \cdot \overline{h}) = h' \cdot p(j)$ assurent l'existence et l'unicité de $\overline{h}' \in H$ tel que $\overline{h}' \cdot j = j' \cdot \overline{h}$. – Supposons $\overline{h} \in H_\gamma$ et $h' \in K_\gamma$; on a aussi $(h'^{-1}, p(j), p(j'), p(\overline{h}^{-1})) \in U$; donc il existe $\overline{h}'_1 \in H$ tel que $p(\overline{h}'_1) = h'^{-1}$ et $(\overline{h}'_1, j, j', \overline{h}^{-1}) \in \overline{U}^s$. On en déduit:

$$(\overline{h}' \cdot \overline{h}'_1) \cdot j' = \overline{h}' \cdot j \cdot \overline{h}^{-1} = j' \cdot \overline{h} \cdot \overline{h}^{-1} = j',$$

donc $\overline{h}' \cdot \overline{h}'_1 = \beta(j') = \beta(\overline{h}')$, puisque $j' \in H^s(K', p)$ et $p(\overline{h}' \cdot \overline{h}'_1) = p(\beta(j'))$. De même on obtient $\overline{h}'_1 \cdot \overline{h}' = \alpha(\overline{h}')$; d'où $\overline{h}' = (\overline{h}'_1)^{-1} \in H_\gamma$.

Proposition 3: *Soient* $\overline{h} \in H_\gamma$ *et* $\overline{h}' \in H_\gamma$. *S'il existe* $j \in H^s(K', p)$ *tel que:* $(p(\overline{h}'), f', p(j), p(\overline{h})) \in U$, $\alpha(j) = \alpha(\overline{h})$ *et* $\beta(j) = \alpha(\overline{h}')$, *alors on a:*

$$j' = \overline{h}' \cdot j \cdot \overline{h}^{-1} \in H^s(K', p) \text{ et } \overline{h}' \overset{(K',p)}{\longrightarrow\!\!<} \overline{h}\,.$$

En effet, d'après la proposition duale de la proposition 3 de [1], j' est une (K', p)-surjection faible. Les conditions:

$$\overline{g}' \in H, \overline{g}_1' \in H, \ \overline{g}' \cdot j' = \overline{g}_1' \cdot j' \quad \text{et} \quad p(\overline{g}') = p(\overline{g}_1')$$

entraînent: $(\overline{g}' \cdot \overline{h}') \cdot j = (\overline{g}_1' \cdot j') \cdot \overline{h} = (\overline{g}_1' \cdot \overline{h}') \cdot j$, d'où $\overline{g}' = \overline{g}_1'$, puisque $j \in H^s(K', p)$ et $\overline{h}' \in H_\gamma$.

Proposition 4: *Soient* $j \in H$ *une* (K', p)*-surjection faible,* $(\overline{h}', j, \overline{f}, \overline{h}) \in \square H$, *et* $\overline{k} \in H$ *tel que* $\overline{k} \cdot \overline{h} = \alpha(\overline{h})$. *Si* $f = p(\overline{f})$ *est un épimorphisme et s'il existe* $(k', f, p(j), p(\overline{k})) \in U$, *alors* $\overline{f}$ *est une* (K', p)*-surjection faible.*

Démonstration: Puisque f est un épimorphisme, les égalités:

$$k' \cdot p(\overline{h}') \cdot f = k' \cdot p(j \cdot \overline{h}) = f \cdot p(\overline{k}) \cdot p(\overline{h}) = f$$

entraînent

$$k' \cdot p(\overline{h}') = \beta(k')\,.$$

Les conditions: j est une (K', p)-surjection faible, $\alpha(j) = \alpha(\overline{k})$ et $p(\overline{f} \cdot \overline{k}) = k' \cdot p(j)$ assurent l'existence de $\overline{k}' \in H$ tel que:

$$p(\overline{k}') = k' \quad \text{et} \quad \overline{f} \cdot \overline{k} = \overline{k}' \cdot j\,.$$

Soit $\overline{g} \in H$ tel que:

$$\alpha(\overline{g}) = \alpha(\overline{f}) \quad \text{et} \quad g = p(\overline{g}) = g' \cdot f\,.$$

Comme on a:

$$p(\overline{g} \cdot \overline{k}) = g' \cdot f \cdot p(\overline{k}) = g' \cdot k' \cdot p(j)\,,$$

il existe un $\overline{g}'' \in H$ tel que $p(\overline{g}'') = g' \cdot k'$ et $\overline{g} \cdot \overline{k} = \overline{g}'' \cdot j$.
Posons: $\overline{g}' = \overline{g}'' \cdot \overline{h}'$. On obtient:

$$p(\overline{g}') = g' \cdot k' \cdot p(\overline{h}') = g'$$

et

$$\overline{g} = \overline{g} \cdot \overline{k} \cdot \overline{h} = \overline{g}'' \cdot j \cdot \overline{h} = \overline{g}'' \cdot \overline{h}' \cdot \overline{f} = \overline{g}' \cdot \overline{f}\,.$$

Donc $\overline{f}$ est une (K', p)-surjection faible.

Remarque: Même si on suppose de plus dans la proposition 4 que j est une (K', p)-surjection, il n'en résulte pas que $\overline{f}$ soit une surjection (sauf évidemment dans le cas où $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes).

Soient $(H, \overline{p}, L)$ un foncteur et H' une sous-catégorie de H.

Théorème 2 *(transitivité des surjections)*: *Soit* $\bar{j} \in L$ *tel que* $\bar{p}(\bar{j}) \in H^s(K',p)$. *On a* $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$ *si, et seulement si,* $\bar{j} \in L^s(K', p\bar{p})$ et $\bar{p}(\bar{j}) \in H'$.

Démonstration: Supposons $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$. D'après la proposition duale de la proposition 6 de [1], $\bar{j}$ est une $(K', p\bar{p})$-surjection faible. Les conditions: $\bar{h}' \cdot \bar{j} = \bar{h}'_1 \cdot \bar{j}$ et $p\bar{p}(\bar{h}') = p\bar{p}(\bar{h}'_1)$ entraînent $\bar{p}(\bar{h}') = \bar{p}(\bar{h}'_1)$ puisque $\bar{p}(\bar{j}) \in H^s(K', p)$; par suite $\bar{h}'_1 = \bar{h}'$, car $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$. – Inversement supposons $\bar{j} \in L^s(K', p\bar{p})$. Soit $\bar{h} \in L$ tel que $\alpha(\bar{h}) = \alpha(\bar{j})$ et $\bar{p}(\bar{h}) = h' \cdot \bar{p}(\bar{j})$, où $h' \in H$. On a:

$$p\bar{p}(\bar{h}) = p(h') \cdot p\bar{p}(\bar{j})$$

et, comme $\bar{j} \in L^s(K', p\bar{p})$, il existe un et un seul $\bar{h}' \in L$ tel que:

$$\bar{h} = \bar{h}' \cdot \bar{j} \quad \text{et} \quad p\bar{p}(\bar{h}') = p(h') .$$

Des relations: $\bar{p}(\bar{j}) \in H^s(K', p)$, et $\bar{p}(\bar{h}') \cdot \bar{p}(\bar{j}) = \bar{p}(\bar{h}) = h' \cdot \bar{p}(\bar{j})$, il résulte $\bar{p}(\bar{h}') = h'$. Les conditions:

$$\bar{h}'_1 \cdot \bar{j} = \bar{h}' \cdot \bar{j} \quad \text{et} \quad \bar{p}(\bar{h}'_1) = \bar{p}(\bar{h}') = h'$$

entraînent $p\bar{p}(\bar{h}'_1) = p\bar{p}(\bar{h}')$, et par suite $\bar{h}'_1 = \bar{h}'$; donc $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$.

Soient $(K, \varkappa, \bar{K})$ un foncteur, $\varkappa^*(H, p)$ la catégorie induite (voir n° 4 et [3]) de H par $(\varkappa, p)$ et η le foncteur canonique:

$$(g, \bar{g}) \to p(g) = \varkappa(\bar{g}) \quad \text{de} \quad \varkappa^*(H, p) \text{ vers } K.$$

Proposition 5: *Les conditions:* $j \in H^s(K', p)$, $\bar{j} \in \bar{K}^s(K', \varkappa)$ *et* $p(j) = \varkappa(\bar{j})$ *entraînent que* $(j, \bar{j})$ *est une* (K', η)*-surjection.*

Nous verrons des exemples dans lesquels $(j, \bar{j})$ est une (K', η)-surjection sans que j (resp. $\bar{j}$) soit une (K', p) (resp. $(K', \varkappa)$)-surjection.

Remarque: Les conditions $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$ et $\bar{j} \in L^s(H', p\bar{p})$ n'entraînent pas $\bar{p}(\bar{j}) \in H^s(K', p)$.

2. Cas particuliers

I) Sous-structures et structures quotient:

Soit (K, p, H, H_γ) une catégorie d'homomorphismes; soit K' une sous-catégorie de K.

Pour que $j \in H$ soit une (K', p)-surjection, il faut et il suffit que $p(j) \in K'$ et que les conditions:

$$g' \in K \quad \text{et} \quad (S, g' \cdot p(j), \alpha(j)) \in H$$

entraînent:

$$(S, g', \beta(j)) \in H .$$

Proposition 6: *Les conditions:* $j \in H^s(K', p)$, $j' \in H^s(K', p)$, $\alpha(j) = \alpha(j')$ *et* $p(j) = p(j')$ *entraînent* $j = j'$. *Si* $\bar{f} = (s^*, f, s) \in H$, $f \in K'$, *et s'il existe* $\bar{f}' \in H$ *tel que* $\bar{f} \cdot \bar{f}' = s^*$, *alors on a* $\bar{f} \in H^s(K', p)$.

En effet, la première partie de la proposition résulte du théorème 1. Supposons $\bar{g} = (s', g' \cdot f, s) \in H$; posons $\bar{g}' = \bar{g} \cdot \bar{f}'$. On a:

$$p(\bar{g}') = g' \cdot f \cdot f' = g' \quad \text{et} \quad p(\bar{g}' \cdot \bar{f}) = g' \cdot f = p(\bar{g}),$$

d'où $\bar{g} = \bar{g}' \cdot \bar{f}$ et $\bar{f} \in H^s(K', p)$.

Définition 3: *Si* K' *est formé d'épimorphismes, on dira que* S^* *est une* structure quotient de S relativement à (K', p) *s'il existe une* (K', p)*-surjection* j *telle que* $\alpha(j) = S$ *et* $\beta(j) = S^*$. *Par dualité, on définit de même la notion de* sous-structure S^* de S relativement à (K', p), *si* K' *est formé de monomorphismes.*

Ainsi S^* est une sous-structure de S s'il existe une (K', p)-injection j telle que $\alpha(j) = S^*$ et $\beta(j) = S$.

Si S^* est une structure quotient (resp. une sous-structure) de S relativement à (K', p), alors S^* est un objet quotient (resp. un sous-objet) [7] de S dans la catégorie H. Mais un objet quotient de S dans H peut ne pas être une structure quotient de S.

Proposition 7: *Soient* $(H, \bar{p}, L)$ *un foncteur et* H' *une sous-catégorie de* H; *les conditions:*

$$\bar{j} \in L^s(K', p\bar{p}) \quad et \quad \bar{p}(\bar{j}) \in H'$$

entraînent $\bar{j} \in L^s(H', \bar{p})$.

En effet, reprenons les notations de la 2e partie de la démonstration du théorème 2; puisque $(K, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes, les éléments h' et $\bar{p}(\bar{h}')$ sont égaux, car ils ont la même image $p\bar{p}(\bar{h}')$, même source $\beta(\bar{p}(\bar{j}))$ et même but $\beta(\bar{p}(\bar{h}))$. La fin de cette démonstration s'applique alors et démontre la proposition 7.

II) C'-projections et C'-éjections:

Soient C une catégorie et C' une sous-catégorie pleine de C. Soit Θ la catégorie formée d'une seule flèche z et de deux unités distinctes $\alpha(z)$ et $\beta(z)$. Soit $\bar{C}'$ la sous-catégorie de C formée des $f \in C$ tels que $f \in C'$ ou $\alpha(f) \notin C'$. Soit Z le foncteur de $\bar{C}'$ vers Θ défini par:

$$\begin{cases} Z(f) = \beta(z) & \text{si} \quad f \in C'\,; \\ Z(f) = \alpha(z) & \text{si} \quad \alpha(f) \notin C'_0 \quad \text{et} \quad \beta(f) \notin C'_0\,; \\ Z(f) = z & \text{si} \quad \alpha(f) \notin C'_0 \quad \text{et} \quad \beta(f) \in C'_0\,. \end{cases}$$

Définition 4: *Si j est une (Θ, Z)-surjection telle que $Z(j) \neq \alpha(z)$, on dira que j est un C'-*projecteur dans C *et $\beta(j)$ sera appelé* C'-projection de $\alpha(j)$ dans C. *Si $h' \in C'$ est un (Θ, Z)-homomorphisme quotient de h, on dira que h' est* une C'-projection de h dans C. *Par dualité on définit les* C'-éjecteurs *et* C'-éjections dans C.

Pour que $\bar{S} \in C'_0$ soit une C'-projection de $S \in C_0$, il faut et il suffit qu'il existe $j \in C$ tel que $\alpha(j) = S$, $\beta(j) = \bar{S}$, et que les conditions:

$$g \in C, \ \beta(g) \in C' \quad \text{et} \quad \alpha(g) = \alpha(j)$$

assurent l'existence d'un et d'un seul $g' \in C'$ tel que $g = g' \cdot j$.

Proposition 8: *Soient C'' une sous-catégorie pleine de C' et j' un C'-projecteur dans C. Si j'' est un C''-projecteur dans C' tel que $j'' \cdot j'$ soit défini, $j'' \cdot j'$ est un C''-projecteur dans C. Si j''_1 est un C''-projecteur dans C tel que $\alpha(j''_1) = \alpha(j')$, il existe un C''-projecteur j'_1 dans C' tel que $j''_1 = j'_1 \cdot j'$.*

Démonstration: Soient j' et j'' deux projecteurs tels que $\alpha(j') = S$, $\beta(j') = \alpha(j'') = S'$ et $\beta(j'') = S''$. Si $g \in C$, $\beta(g) \in C''$ et $\alpha(g) = S$ il existe un et un seul g' tel que $g = g' \cdot j'$ et un et un seul g'' tel que $g' = g'' \cdot j''$, d'où $g = g'' \cdot (j'' \cdot j')$. De plus la relation:

$$g = g'' \cdot (j'' \cdot j') = g''_1 \cdot (j'' \cdot j')$$

entraîne $g'' \cdot j'' = g''_1 \cdot j''$, et par suite $g''_1 = g''$. Ainsi $j'' \cdot j'$ est un C''-projecteur dans C. – Soit j''_1 un C''-projecteur tel que $\alpha(j''_1) = S$ et $\beta(j''_1) = S''_1$. Comme j' est un C'-projecteur, il existe un et un seul j'_1 tel que $j'_1 \cdot j' = j''_1$. Supposons $f \in C'$, $\alpha(f) = S'$ et $\beta(f) \in C''$. Puisque j''_1 est un C''-projecteur, il existe un et un seul f'' tel que $f \cdot j' = f'' \cdot j''_1 = f'' \cdot j'_1 \cdot j'$. Il en résulte $f = f'' \cdot j'_1$, et j'_1 est un C''-projecteur dans C'.

Soit (K, p, H) un foncteur; soit K' une sous-catégorie de K. Soit V la catégorie des quadruplets $(h', j', j, \bar{h}) \in K \times H \times H \times H$ tels que:

$$p(j') \in K', \ p(j) \in K' \quad \text{et} \quad (h', p(j'), p(j), p(\bar{h})) \in \square K,$$

munie de la loi de composition:

$$(h'_1, j'_1, j_1, \bar{h}_1) \cdot (h', j', j, \bar{h}) = (h'_1 \cdot h', j'_1, j, \bar{h}_1 \cdot \bar{h})$$

si, et seulement si, $j_1 = j'$.

H s'identifie à la sous-catégorie pleine de V ayant pour unités les quadruplets $(p(s), s, s, s)$, en identifiant $\bar{h} \in H$ avec:

$$<\bar{h}> = (p(\bar{h}), \beta(\bar{h}), \alpha(\bar{h}), h).$$

Proposition 9: *$j \in H$ est une (K', p)-surjection si, et seulement si, $J = (p(\beta(j)), \beta(j), j, j)$ est un H-projecteur dans V.*

Démonstration: Supposons $j \in H^s(K', p)$ et soit $(h', s, j, \bar{h}) \in V$; comme $\alpha(\bar{h}) = \alpha(j)$ et $p(\bar{h}) = h' \cdot p(j)$, il existe un et un seul $\bar{h}' \in H$ tel que $p(\bar{h}') = h'$ et $\bar{h} = \bar{h}' \cdot j$; par suite on a:

$$(h', s, \beta(j), \bar{h}') = <\bar{h}'> \quad \text{et} \quad (h', s, j, \bar{h}) = <\bar{h}'> \cdot J ,$$

donc J est un H-projecteur dans V. – Inversement soit J un H-projecteur dans V. Les conditions: $\bar{h} \in H$, $\alpha(\bar{h}) = \alpha(j)$ et $p(\bar{h}) = h' \cdot p(j)$ entraînent $(h', \beta(\bar{h}), j, \bar{h}) \in V$; par conséquent il existe un et un seul $\bar{h}' \in H$ tel que $<\bar{h}'> \cdot J = (h', \beta(\bar{h}), j, \bar{h})$. Il en résulte $p(\bar{h}') = h'$ et $\bar{h}' \cdot j = \bar{h}$, d'où $j \in H^s(K', p)$.

Exemples: 1. – Soit U la catégorie formée des applications uniformément continues entre espaces uniformes séparés; soit U' la sous-catégorie pleine de U ayant pour unités les espaces uniformes complets. Tout $E \in U_0$ admet pour U'-projection le complété $\bar{E}$ de E.

2. – Les produits tensoriels et les puissances extérieures d'espaces vectoriels (ou vectoriels topologiques) peuvent être interprétés comme des projections dans des catégories convenables.

3. – Soit $G(I^p)$ la catégorie des foncteurs $\frown$-inductifs entre groupoïdes prélocaux; un élément de $G(I^p)$ est un triplet

$$((S_1^{\cdot}, <), \Phi, (S^{\cdot}, <)) ,$$

tel que $(S_1^{\cdot}, \Phi, S^{\cdot})$ soit un foncteur, que $(S^{\cdot}, <)$ et $(S_1^{\cdot}, <)$ soient des groupoïdes prélocaux [3] et que l'on ait:

$$\Phi(f \frown f') = \Phi(f) \frown \Phi(f') \quad \text{pour tout } f \in S,\ f' \in S;$$
$$\Phi(\bigcup_{i \in I} f_i) = \bigcup_{i \in I} \Phi(f_i) \qquad \text{si } f_i \in S \text{ et si } \bigcup_{i \in I} f_i \text{ existe.}$$

Soit $G'(I^p)$ la sous-catégorie pleine de $G(I^p)$ ayant pour objets les groupoïdes locaux complets [3].

Théorème 3: *Tout $(S^{\cdot}, <) \in G(I^p)_0$ admet pour $G'(I^p)$-projection le groupoïde local $(\bar{S}^{\cdot}, <)$ dont les éléments sont les classes complètes de S.*

En effet, d'après le théorème de complétion [3], $\bar{S}^{\cdot}$ est un groupoïde local complet. Soit $\bar{\Psi}$ le foncteur ($\frown$-inductif) canonique de $S^{\cdot}$ dans $\bar{S}^{\cdot}$. Soit Φ un foncteur $\frown$-inductif de $(S^\cdot, <)$ dans un groupoïde local complet $(\Sigma^\cdot, <)$. Soit $F \in \bar{S}$; puisque deux éléments de F sont compatibles et que Φ est compatible avec les intersections finies, la classe $\Phi(F)$ est compatible [3] dans Σ, donc admet un agrégat $\Phi'(F)$. Si $F' \in \bar{S}$, la classe $F \frown F'$ est engendrée par les éléments $f \frown f'$, où $f \in F$ et $f' \in F'$; en utilisant l'axiome de distributivité, on trouve:

$$\Phi'(F) \frown \Phi'(F') = (\smile \Phi(F)) \frown (\smile \Phi(F')) = \smile (\Phi(f) \frown \Phi(f')) =$$
$$= \smile \Phi(f \frown f') = \Phi'(F \frown F').$$

Donc l'application $F \to \Phi'(F)$ définit un foncteur $\frown$-inductif tel que $\Phi = \Phi' \cdot \bar{\Psi}$. Le théorème 3 en résulte.

Soit $G''(I^p)$ la sous-catégorie pleine de $G(I^p)$ ayant pour objets les groupoïdes locaux.

Théorème 4: *Tout* $(S^\cdot, <) \in G(I^p)_0$ *admet pour* $G''(I^p)$*-projection le sous-pseudogroupe faible* $\check{S}^\cdot$ *de* $\bar{S}^\cdot$ *engendré par* S.

En effet, d'après [3], $\check{S}^\cdot$ est un groupoïde local. Soit $\check{\Psi}$ le foncteur $\frown$-inductif canonique de $S^\cdot$ dans $\check{S}^\cdot$. Soit Φ un foncteur $\frown$-inductif de $(S^\cdot, <)$ dans un groupoïde local $(\Sigma^\cdot, <)$. Si $F \in \check{S}$, la classe F est majorée par f dans S; par suite la classe $\Phi(F)$ est majorée par $\Phi(f)$ dans Σ, donc admet un agrégat $\Phi'(F)$ dans Σ. Comme Φ est $\frown$-inductif, l'application: $F \to \Phi'(F)$ définit un foncteur $\frown$-inductif Φ' de $\check{S}^\cdot$ vers $\Sigma^\cdot$ tel que $\Phi = \Phi' \cdot \check{\Psi}$. Le théorème en résulte.

Soit $G'_r(I^p)$ la sous-catégorie pleine de $G(I^p)$ ayant pour objets les groupoïdes locaux relativement complets [3].

Théorème 5: *Tout* $(S^\cdot, <) \in G(I^p)_0$ *admet pour* $G'_r(I^p)$*-projection le sous-groupoïde plein* $\hat{S}^\cdot$ *de* $\bar{S}^\cdot$ *ayant* $S_0^\cdot$ *pour classe de ses unités.*

En effet, d'après la proposition 8 et le théorème 4 il suffit de montrer que la $G''(I^p)$-projection de $(S^\cdot, <)$ admet une $G'_r(I^p)$-projection; nous pouvons donc supposer $(S^\cdot, <)$ local. D'après [3], $\hat{S}^\cdot$ est un groupoïde local relativement complet. Soit $\hat{\Psi}$ le foncteur $\frown$-inductif canonique de $S^\cdot$ dans $\hat{S}^\cdot$. Soit Φ un foncteur $\frown$-inductif de $S^\cdot$ dans un groupoïde local relativement complet $\Sigma^\cdot$. Soit $F \in \hat{S}$; puisque $\alpha(F)$ et $\beta(F)$ sont majorés dans $S_0^\cdot$, $\Phi(\alpha(F))$ et $\Phi(\beta(F))$ sont majorés dans Σ; de plus, $\Phi(F)$ est compatible, car Φ est $\frown$-inductif; par suite $\Phi(F)$ engendre une sous-classe relativement complète [3] de Σ et $\Phi(F)$ admet un agrégat $\Phi'(F)$ dans Σ. L'application $F \to \Phi'(F)$ définit un foncteur $\frown$-inductif Φ' et $\Phi = \Phi' \cdot \hat{\Psi}$.

III) Injections et surjections au-dessus d'une catégorie d'applications:

Nous désignerons par M_0 une classe de classes contenant avec une classe M toutes ses sous-classes, avec deux classes, leur classe produit. Soit M la catégorie de toutes les applications (M', f, M), de $M \in \mathsf{M}_0$ dans $M' \in \mathsf{M}_0$. Soit M^i la sous-catégorie de M formée des applications (M, ι, M'), où M' est une sous-classe de M et ι l'injection canonique de M' dans M.

Soit M^s la sous-catégorie de M formée des surjections. Soit $(M', \varphi, M) \in \mathsf{M}^s$; nous appellerons *relation d'équivalence associée* à (M', φ, M) la relation d'équivalence ϱ_φ sur M définie par:

$$m \sim m' \quad \text{si, et seulement si,} \quad \varphi(m) = \varphi(m') .$$

On a évidemment: $(M', \varphi, M) = \gamma \,.\, (M/\varrho_\varphi, \tilde{\varrho}_\varphi, M)$, où $\tilde{\varrho}_\varphi$ est la surjection canonique de M sur la classe quotient M/ϱ_φ et γ, la bijection: $m \bmod \varrho_\varphi \to \varphi(m)$. Soit M^q la sous-classe de M^s formée des surjections canoniques $(M/\varrho, \tilde{\varrho}, M)$, où ϱ est une relation d'équivalence sur M.

Soit M^ϱ la catégorie dont les éléments sont les triplets $\Phi = (\varrho_{\overline{M}}, \varphi, \varrho_M)$, où ϱ_M et $\varrho_{\overline{M}}$ sont des relations d'équivalence sur M et $\overline{M}$ resp. et $\mu(\Phi) = (\overline{M}, \varphi, M) \in \mathsf{M}$ est une application compatible avec ϱ_M et $\varrho_{\overline{M}}$. Soit i_M la relation d'équivalence $x \sim x$ sur M. La catégorie M s'identifie à la sous-catégorie pleine de M^ϱ ayant les relations i_M pour objets. Tout $\varrho_M \in \mathsf{M}^\varrho$ admet M/ϱ pour M-projection dans M^ϱ. De plus $(\mathsf{M}, \mu, \mathsf{M}^\varrho, .)$ est une catégorie d'homomorphismes.

Si $(\mathsf{M}, p, \mathsf{H})$ est un foncteur, une (M^s, p)-surjection (resp. une (M^i, p)-injection) sera appelée *p-surjection* (resp. *p-injection*). Si h' est un (M^s, p)-homomorphisme quotient (resp. un (M^i, p)-sous-homomorphisme) de h, on dira que h' est un *p-homomorphisme quotient* (resp. un *p-sous-homomorphisme*) de h et on écrira:

$$h' \overset{p}{\longrightarrow\!\!<} h \quad (\text{resp. } h' \underset{p}{<} h) .$$

La relation: $h' \overset{p}{\longrightarrow\!\!<} h$ est une relation de préordre dans H, d'après la proposition 1 (voir aussi [2]).

Soit $(\mathsf{M}, p, \mathsf{H}, \mathsf{H}_\gamma)$ une catégorie d'homomorphismes; une structure quotient (resp. une sous-structure) S^* de S relativement à (M^s, p) (resp. à (M^i, p)) sera appelée *p-structure quotient* (resp. *p-sous-structure)* de S, ou structure quotient (resp. sous-structure) de S dans $(\mathsf{M}, p, \mathsf{H}, .)$. Une (M^s, p)-surjection j telle que $p(j) \in \mathsf{M}^q$ est uniquement déterminée par la donnée de $\alpha(j)$ et de $\beta(j)$, ou par la donnée de $\alpha(j)$ et de la relation d'équivalence ϱ sur $p(\alpha(j))$ associée à $p(j)$. Toute p-surjection φ est de la forme

$\varphi = \gamma \cdot j$, où $\gamma \in H_\gamma$, $j \in H^s(M^s, p)$ et $p(j) \in M^q$, si H est saturé au-dessus de M.

Définition 5: *Soient $S \in H_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur $p(S)$. Nous dirons que S^* est la* structure quotient de S par *ϱ si on a $(S^*, \tilde{\varrho}, S) \in H^s(M^s, p)$ et si $\tilde{\varrho}$ est la surjection canonique de $p(S)$ sur $p(S)/\varrho$; dans ce cas, nous poserons $S^* = S/\varrho$.*

Tout $\varrho_M \in M^\varrho$ admet M/ϱ pour structure quotient par ϱ dans $(M, \mu, M^\varrho, .)$. H s'identifie à la sous-catégorie pleine de la catégorie induite $\mu^*(H, p)$ (voir n° 4 et [3]) ayant pour unités les couples $(s, p(s))$. Soient $\tilde{p}$ et $\tilde{\mu}$ les projections canoniques de $\mu^*(H, p)$ vers M^ϱ et H resp.

Proposition 10: *Pour que S/ϱ soit une structure quotient de S par la relation d'équivalence ϱ dans $(M, p, H, .)$, il faut et il suffit que S/ϱ soit une H-projection de (S, ϱ) dans $\mu^*(H, p)$ et que $p(S/\varrho) = p(S)/\varrho$.*

La démonstration est analogue à celle de la proposition 9.

Soient $s_i \in H_0$, $i = 1, 2$. Nous dirons qu'il existe un produit $s_1 \times s_2$ dans H tel que $p(s_1 \times s_2) = p(s_1) \times p(s_2)$, si on a $\overline{p}_i = (s_i, p_i, s_1 \times s_2) \in H$ où p_i désigne la projection canonique de $p(s_1) \times p(s_2)$ sur $p(s_i)$, et si $(s_1 \times s_2; p_1, p_2)$ est un produit dans H de s_1 et s_2 (voir [6]). Ces conditions déterminent $s_1 \times s_2$ d'une manière unique (proposition 2, II, [2]).

Théorème 6: *Supposons $(M, p, H, .)$ résolvante à droite* [2] *(resp. saturée au-dessus de M). Soient $s \in H_0$ et $s' \in H_0$ tels qu'il existe des produits $s \times s$ et $s' \times s'$ dans H, pour lesquels $p(s \times s) = p(s) \times p(s)$ et $p(s' \times s') = p(s') \times \times p(s')$. Alors on a $s \underset{p}{\prec} s'$ si, et seulement si, $s \times s \underset{p}{\prec} s' \times s'$. Si ϱ est une relation d'équivalence sur $p(s)$ admettant $(p(s'), \tilde{\varrho}, p(s))$ pour surjection canonique associée, et si on a $(s' \times s', \tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho}, s \times s) \in H^s(M^s, p)$, alors $s' = s/\varrho \overset{p}{\prec} s$.*

Démonstration: La condition $s \prec s'$ entraîne $s \times s \prec s' \times s'$ d'après la proposition 3, II, [2]. – Supposons $(M, p, H, .)$ résolvante à droite; le couple $((s, p_2, s \times s), (s, p_1, s \times s))$, où p_i désignent les projections canoniques de $p(s \times s)$ sur $p(s)$, admet un p-noyau s_δ tel que $p(s_\delta) = \Delta =$ diagonale de $p(s \times s)$. De la démonstration du théorème 12, II [2], il résulte que l'on a: $\gamma_\delta = (s_\delta, [\iota, \iota], s) \in H_\gamma$, où $[\iota, \iota](x) = (x, x)$. – Supposons H saturé au-dessus de M; alors il existe

$$\gamma_\delta = (s_\delta, [\iota, \iota], s) \in H_\gamma,$$

et on a:

$$(s \times s, \iota, s_\delta) = (s \times s, [\iota, \iota], s) \cdot \gamma_\delta^{-1} \in H, \quad (s_\delta, [\iota, \iota]\, p_1, s \times s) \in H.$$

Comme
$$(s_\delta, [\iota, \iota]\, p_1, s \times s) \cdot (s \times s, \iota, s_\delta) = s_\delta\,,$$
la proposition duale de la proposition 6 assure $s_\delta \prec s \times s$. – Soient donc $s_\delta \prec s \times s$ et $s'_\delta \prec s' \times s'$ tels que $p(s_\delta) = \Delta$ et $p(s'_\delta) = \Delta'$. Si on a $s \times s \prec s' \times s'$, les conditions:
$$s_\delta \prec s \times s \prec s' \times s'\,, \quad s'_\delta \prec s' \times s' \quad \text{et} \quad \Delta \subset \Delta'$$
entraînent $s_\delta \prec s'_\delta$, en utilisant le théorème dual du théorème 1. – Soit ϱ une relation d'équivalence sur $p(s)$ vérifiant les conditions de l'énoncé. Les relations:
$$s_\delta \prec s \times s,\ s'_\delta \prec s' \times s' \quad \text{et} \quad \tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho}(\Delta) \subset \Delta'$$
assurent l'existence de $(s'_\delta, \tilde{\varrho}_\delta, s_\delta) \prec (s' \times s', \tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho}, s \times s)$. On a:

$\bar{k} = \gamma_\delta \cdot (s, p_1, s \times s) \in H,\ \bar{k} \cdot (s \times s, \iota, s_\delta) = s_\delta$ et $\tilde{\varrho}_\delta p(\bar{k}) = ([\iota, \iota] p'_1)\,(\tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho})$,

d'où, en utilisant la proposition 4, $(s'_\delta, \tilde{\varrho}_\delta, s_\delta) \in H^s(M^s, p)$. Par suite:
$$(s', \tilde{\varrho}, s) = \gamma'^{-1}_\delta \cdot (s'_\delta, \tilde{\varrho}_\delta, s_\delta) \cdot \gamma_\delta \in H^s(M^s, p) \quad \text{et} \quad s' = s/\varrho\,.$$

Remarque: Avec les notations du théorème 6, la condition $s' \longrightarrow\!\!\!< s$ n'entraîne pas $s' \times s' \longrightarrow\!\!\!< s \times s$, comme le montre le cas $H = \tilde{T}$. Si on a: $s' \longrightarrow\!\!\!< s$ et s'il existe $S \longrightarrow\!\!\!< s \times s,\ p(S) = p(s' \times s')$, alors $(s' \times s', \iota, S) \in H$.

Exemples: 1) Soit $\tilde{T}$ la catégorie des applications continues (S', f, S) où S et S' sont des topologies sur des classes $\theta(S)$ et $\theta(S')$ appartenant à M_0 et f une application de $\theta(S)$ dans $\theta(S')$. Soit $(M, \theta, \tilde{T}, T)$ la catégorie d'homomorphismes correspondante, où T est le groupoïde des homéomorphismes appartenant à $\tilde{T}$. Une structure quotient de S dans $(M, \theta, \tilde{T}, T)$ est une topologie quotient de S; une sous-structure de S est une topologie induite par S sur une sous-classe de $\theta(S)$. Pour que j soit une (M, θ)-injection, il faut et il suffit que $\alpha(j)$ soit homéomorphe à la topologie image réciproque de $\beta(j)$ par $\theta(j)$.

2) Soit F la catégorie des foncteurs $(\bar{C}^\cdot, \Phi, C^\cdot)$ tels que:
$$p_F(\bar{C}^\cdot, \Phi, C^\cdot) = (\bar{C}, \Phi, C) \in M\,.$$
(M, p_F, F, F_γ) est une catégorie d'homomorphismes à produits finis et résolvante à droite [2]. Soit $C^\cdot \in F_0$; une sous-structure de la catégorie $C^\cdot$ est une sous-catégorie de $C^\cdot$ (proposition 9, II, [2]). Une structure quotient de $C^\cdot$ sera appelée *catégorie quotient de* $C^\cdot$, une structure quotient de $C^\cdot$ par la relation d'équivalence ϱ, *catégorie quotient de* $C^\cdot$ *par* ϱ. Nous reviendrons plus loin sur cet exemple (n° 3).

3. Graphes multiplicatifs et catégories quotient

I) Classes multiplicatives:

Définition 6: *On appellera* classe multiplicative $M^{\cdot}$ *le couple formé d'une classe* M *et d'une loi de composition, partiellement définie sur* M. *On appellera* homomorphisme de la classe multiplicative $M^{\cdot}$ vers la classe multiplicative $M_1^{\perp}$ *un triplet* $(M_1^{\perp}, \Phi, M^{\cdot})$ *tel que* Φ *soit une application de* M *dans* M_1 *vérifiant la condition:*
(Q) *Si* $g \cdot f$ *est défini, alors* $\Phi(g) \perp \Phi(f)$ *est défini et on a:*

$$\Phi(g) \perp \Phi(f) = \Phi(g \cdot f).$$

Soit N la catégorie dont les éléments sont les homomorphismes entre classes multiplicatives $(M_1^{\perp}, \Phi, M^{\cdot})$ tels que:

$$p_N(M_1^{\perp}, \Phi, M^{\cdot}) = (M_1, \Phi, M) \in M .$$

N contient F comme sous-catégorie.

Si $M^{\cdot} \in N_0$ et si $M_1 \subset M$, on désignera par $M_1^{\cdot}$ la classe multiplicative dont la loi de composition, appelée *loi de composition induite* par $M^{\cdot}$, est définie par:

$(g, f) \to g \cdot f$ si, et seulement si, $g \cdot f$ est défini dans $M^{\cdot}$ et si on a $g \cdot f \in M_1$.

Proposition 11: (M, p_N, N, N_γ) *est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite et saturée au-dessus de* M. *Pour que* $M_1^{\perp}$ *soit une* p_N*-sous-structure de* $M^{\cdot} \in N_0$, *il faut et il suffit que l'on ait:* $M_1 \subset M$ *et* $M_1^{\perp} = M_1^{\cdot}$.

En effet, la première partie résulte des définitions. Si $M \subset M$, on a évidemment $M_1^{\cdot} < M^{\cdot}$. Inversement si $M_1^{\perp} < M^{\cdot}$, on a aussi $M_1^{\cdot} < M^{\cdot}$, donc $M_1^{\perp} = M_1^{\cdot}$ en vertu de la proposition 6.

Définition 7: *Soit* $M^{\cdot} \in N_0$; *nous dirons que* ϱ *est une relation d'équivalence compatible sur* $M^{\cdot}$ *si* ϱ *est une relation d'équivalence sur* M *telle que les conditions:*

$$g \cdot f \text{ et } g' \cdot f' \text{ sont définis; on a } f \sim f' \text{ et } g \sim g'$$

entraînent:

$$g \cdot f \sim g' \cdot f' .$$

Si ϱ est une relation d'équivalence compatible sur $M^{\cdot}$, la classe M/ϱ des classes d'équivalence modulo ϱ peut être munie de la loi de composition, appelée *loi de composition quotient,* définie par:

$$(g \bmod \varrho , f \bmod \varrho) \to (g' \cdot f') \bmod \varrho$$

si, et seulement si, il existe $g' \sim g$ et $f' \sim f$ tels que $g' \cdot f'$ soit défini. Nous désignerons par $M^{\cdot}/\varrho$ la classe multiplicative $(M/\varrho)^{\cdot}$.

Proposition 12: *Soient $M^\cdot \in N_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur M. Pour que $M^\cdot$ admette $(M/\varrho)^\perp$ pour p_N-structure quotient par ϱ, il faut et il suffit que ϱ soit compatible sur $M^\cdot$ et que $(M/\varrho)^\perp = M^\cdot/\varrho$.*

En effet, les conditions sont évidemment suffisantes. Inversement si $(M/\varrho)^\perp$ est une p_N-structure quotient de $M^\cdot$, comme $M^\cdot/\varrho$ est aussi une p_N-structure quotient de $M^\cdot$, il résulte de la proposition 6 que l'on a $(M/\varrho)^\perp = M^\cdot/\varrho$.

Corollaire: *Pour que $(M_1^\perp, \Phi, M^\cdot) = \bar{\Phi}$ soit une p_N-surjection, il faut et il suffit que $\Phi(M) = M_1$ et que l'on ait*

$$\bar{\Phi} = \bar{\gamma} \cdot (M^\cdot/\varrho_\Phi, \tilde{\varrho}_\Phi, M^\cdot) \quad avec \quad \bar{\gamma} \in N_\gamma,$$

en désignant par ϱ_Φ la relation d'équivalence associée à Φ.

Remarque: Soient $M^\cdot \in N_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur M. Soit $\bar{\varrho}$ la relation d'équivalence sur M, intersection des relations d'équivalence ϱ' compatibles sur $M^\cdot$ et telles que $f \sim f' \bmod \varrho$ entraîne $f \sim f' \bmod \varrho'$. Alors $M^\cdot/\bar{\varrho}$ peut être appelée *classe multiplicative* quotient de $M^\cdot$ par ϱ.

II) Graphes orientés:

Soit $[G] = (G, \beta, \alpha)$ un graphe orienté; rappelons [5] qu'alors G est une classe, α et β, deux rétractions de G sur une sous-classe $[G]_0$ de G; un élément de $[G]_0$ est appelé sommet de $[G]$; une flèche de $[G]$ est un élément f de G tel que $f \neq \alpha(f)$; les sommets $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ sont appelés source et but de f resp.

Soit G la catégorie des morphismes de graphes, formée des triplets $\bar{\Phi} = ((G', \beta', \alpha'), \Phi, (G, \beta, \alpha))$ tels que:

(G, β, α) et (G', β', α') sont deux graphes orientés,

$$p_{\mathsf{G}}(\bar{\Phi}) = (G', \Phi, G) \in \mathsf{M},$$

$$\Phi \circ \alpha = \alpha' \circ \Phi \quad \text{et} \quad \Phi \circ \beta = \beta' \circ \Phi.$$

La classe des unités de G sera identifiée à la classe G_0 des graphes orientés $[G]$ tels que $G \in \mathsf{M}_0$.

$(\mathsf{M}, p_{\mathsf{G}}, \mathsf{G}, \mathsf{G}_\gamma)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite [2]. Une sous-structure de $[G]$ est un *sous-graphe* de $[G]$, c'est-à-dire un graphe (G', β', α'), où G' est une sous-classe de G contenant avec une flèche sa source et son but, α' et β' étant les restrictions de α et β à G'.

Proposition 13: *Soit G^s la sous-catégorie de G formée des Ψ tels que $p_{\mathsf{G}}(\Psi) \in \mathsf{M}^s$; alors G^s est la catégorie des p_{G}-surjections.*

Corollaire: *Soient* $(G, \beta, \alpha) \in G_0$ *et* ϱ *une relation d'équivalence sur* G. *Pour que* $[G]$ *admette une structure quotient par* ϱ *il faut et il suffit que* ϱ *soit compatible avec* α *et* β, *c'est-à-dire que* $f \sim f'$ *entraîne* $\alpha(f) \sim \alpha(f')$ *et* $\beta(f) \sim \sim \beta(f')$.

Si $C^\cdot$ est une catégorie, le triplet (C, β, α) est un graphe orienté, noté $[C^\cdot]$. Soit p_{GF} l'application:

$$(\overline{C}^\cdot, \varphi, C^\cdot) \to ((\overline{C}, \beta, \alpha), \varphi, (C, \beta, \alpha))$$

de F dans G; (G, p_{GF}, F, F_γ) est une catégorie d'homomorphismes.

Proposition 14: $\overline{C}^\cdot \in F_0$ *est une structure quotient de* $C^\cdot$ *relativement à* (G^s, p_{GF}) *si, et seulement si,* $\overline{C}^\cdot$ *est une catégorie quotient de* $C^\cdot$.

Ceci résulte du théorème 2 et de la proposition 13.

Soit L la catégorie réunion de $F \cup G$ avec la classe des triplets $(C^\cdot, \Phi, [G])$ tels que $((C, \beta, \alpha), \Phi, [G]) \in G$, la loi de composition étant définie par:

$$\begin{cases} (\overline{C}^\cdot, \Phi', C^\cdot) \cdot (C^\cdot, \Phi, C_1^\cdot) = (\overline{C}^\cdot, \Phi'\Phi, C_1^\cdot)\ ; \\ (\overline{C}^\cdot, \Phi', C^\cdot) \cdot (C^\cdot, \Phi, [G]) = (\overline{C}^\cdot, \Phi'\Phi, [G])\ ; \\ (\overline{C}^\cdot, \Phi', [G]) \cdot ([G], \Phi, [G_1]) = (\overline{C}^\cdot, \Phi'\Phi, [G_1])\ ; \\ ([\overline{G}], \Phi', [G]) \cdot ([G], \Phi, [G_1]) = ([\overline{G}], \Phi'\Phi, [G_1])\,. \end{cases}$$

F est une sous-catégorie pleine de L.

Proposition 15: *Il existe un foncteur naturalisé* (L, λ) *dans* L *tel que pour tout* $\overline{\Phi} \in L$, $L(\overline{\Phi})$ *soit une* F*-projection de* $\overline{\Phi}$ *dans* L *et que, pour tout* $[G] \in G_0$, $L([G])$ *soit la catégorie libre* $L[G]$ *des chemins de* $[G]$.

Démonstration: Rappelons la construction de la catégorie libre $L[G]$ des chemins de $[G]$ (voir [4]): $L[G]$ a pour éléments les sommets de $[G]$ et les chemins de $[G]$, c'est-à-dire les suites finies $(f_n, \ldots, f_1)$, où $f_i \in G$, $f_i \notin [G]_0$ et $\alpha(f_{i+1}) = \beta(f_i)$ pour tout $i < n$. La loi de composition est définie par:

$$\begin{cases} (g_m, \ldots, g_1) \cdot (f_n, \ldots, f_1) = (g_m, \ldots, g_1, f_n, \ldots, f_1) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{si, et seulement si, } \alpha(g_1) = \beta(f_n)\ ; \\ (f_n, \ldots, f_1) \cdot e = (f_n, \ldots, f_1) \ \text{si, et seulement si, } e = \alpha(f_1) \\ e' \cdot (f_n, \ldots, f_1) = (f_n, \ldots, f_1) \ \text{si, et seulement si, } e' = \beta(f_n) \\ e \cdot e' = e \ \text{si, et seulement si, } e' = e \in [G]_0. \end{cases}$$

On a: $\lambda([G]) = (L[G], \iota, [G]) \in L$. Soit $\overline{\Phi} = (C^\cdot, \Phi, [G]) \in L$; alors

$$\overline{\Phi} = (C^\cdot, L(\Phi), L[G]) \cdot \lambda([G]),$$

où $L(\Phi)$ désigne l'application définie par:

$$L(\Phi)\,(e) = \Phi(e) \quad \text{si} \quad e \in [G]_0\,;$$

et

$$L(\Phi)\,(f_n, \ldots, f_1) = \Phi(f_n) \cdot \ldots \cdot \Phi(f_1)\,.$$

Donc $\lambda([G])$ est un F-projecteur dans L et $L(\overline{\Phi}) = (C^\cdot, L(\Phi), L[G])$ est une F-projection de $\overline{\Phi}$. D'après la proposition 2, il existe une et une seule F-projection $L(\overline{\Phi}_1)$ de $\overline{\Phi}_1 = ([\overline{G}], \Phi_1, [G]) \in G$ de la forme $(L[\overline{G}], L(\Phi_1), L[G])$; l'application $L(\Phi_1)$ associe à $(f_n, \ldots, f_1)$ le chemin $(\Phi_1(f_n), \ldots, \Phi_1(f_1))$. On définit ainsi un foncteur L de L vers F en posant de plus $L(\overline{\Phi}_2) = \overline{\Phi}_2$, si $\overline{\Phi}_2 \in F$; le foncteur L est naturalisé [4] par l'application λ:

$$[G] \to \lambda([G]) \quad \text{et} \quad C^\cdot \to Id_C = \text{foncteur identité de } C^\cdot\,.$$

Corollaire 1: *Si $(C^\cdot, \Phi, L[G])$ est une p_F-surjection, $(C^\cdot, \Phi\,\iota, [G])$ est une $p_F L$-surjection.*

Ceci résulte du théorème 2, puisque $(L[G], \iota, [G]) \in L$ est une (F, L)-surjection.

Corollaire 2: *Soient $C_i^\cdot$ une catégorie et B_i un sous-graphe de $[C_i^\cdot]$ tel que $C_i^\cdot$ soit la sous-catégorie de $C_i^\cdot$ engendrée par B_i, où $i = 1, 2$. Tout foncteur $\overline{\Phi} = (C_2^\cdot, \Phi, C_1^\cdot)$ pour lequel $\Phi(B_1) \subset B_2$ est un foncteur quotient de $L(\overline{\Psi})$, où $\overline{\Psi} = ([B_2], \Phi\,\iota, [B_1])$.*

En effet, posons: $j_i = (C_i^\cdot, \iota, [B_i])$; on a $L(j_i) \in L$. Comme la restriction de $L(j_i)$ à $L[B_i]_0$ est une bijection sur $(C_i^\cdot)_0$, il résulte de la proposition 23 (voir aussi [3]) que $C_i^\cdot$ est une catégorie quotient de $L[B_i]$. – Le quatuor $(j_2, \overline{\Phi}, \overline{\Psi}, j_1)$ étant appliqué par le foncteur $\square L$ sur le quatuor $(L(j_2), \overline{\Phi}, L(\overline{\Psi}), L(j_1))$, où $L(j_i)$ est une p_F-surjection, on a $\overline{\Phi} \prec L(\overline{\Psi})$.

Soit $[G] \in G_0$; supposons donnée une relation ϱ sur la catégorie libre $L[G]$. Soit $\bar{\varrho}$ la relation d'équivalence sur $L[G]$ intersection des relations d'équivalence ϱ' compatibles avec les applications source et but et la loi de composition de $L[G]$ et telles que si $(f', f) \in \varrho$, alors $f' \sim f$ modulo ϱ'.

Définition 8: *Avec les notations précédentes, si $L[G]$ admet une catégorie quotient $C^\cdot$ par $\bar{\varrho}$, nous dirons que $C^\cdot$ est la catégorie engendrée par le système de générateurs $[G]$ et la relation ϱ (ou les relations élémentaires $(\varrho_i)_{i \in I}$, où ϱ_i est un couple (f_i, f_i') et ϱ la classe des couples (f_i, f_i'), $i \in I$).*

En particulier, si ϱ vérifie la condition: $(e, e') \in \varrho$, $e \in [G]_0$ et $e' \in [G]_0$ entraînent $e = e'$, alors la classe d'équivalence e modulo $\bar{\varrho}$ est réduite à e pour tout $e \in [G]_0$; par suite il existe une catégorie quotient de $L[G]$ par $\bar{\varrho}$, qui admet $[G]_0$ pour classe d'objets.

Applications: 1. – Groupoïdes libres:

Soit L' la sous-catégorie pleine de L dont les unités sont les graphes orientés et les groupoïdes. Soit $F' = F \cap L'$.

Proposition 16: *Tout graphe orienté* $[G]$ *admet pour* F'*-projection le groupoïde libre* $\Gamma[G]$.

Démonstration: Soit γ une bijection de $G - [G]_0$ sur une classe G' telle que $G \cap G' = \varnothing$. Soit $(\tilde{G}, \tilde{\beta}, \tilde{\alpha})$ le graphe orienté dans lequel on a:

$$\tilde{G} = G \cup G'; \ \tilde{\alpha}(f) = \alpha(f), \ \tilde{\beta}(f) = \beta(f), \ \tilde{\alpha}(\gamma(f)) = \beta(f) \ \text{ et } \ \tilde{\beta}(\gamma(f)) = \alpha(f)$$

pour tout $f \in G$. Soit ϱ_1 la relation sur $L[\tilde{G}]$ définie par:

$$(\gamma(f) \cdot f, \ \alpha(f)) \in \varrho_1 \ \text{ et } \ (f \cdot \gamma(f), \ \beta(f)) \in \varrho_1$$

pour tout $f \in G$. Il existe une catégorie $\Gamma[G]$ quotient de $L[\tilde{G}]$ par ϱ, engendrée par le système de générateurs $[\tilde{G}]$ et par la relation ϱ_1. L'élément $\tilde{\varrho}(f) = f \bmod \varrho$ de $\Gamma[G]$ admet pour inverse $\tilde{\varrho}(\gamma(f))$. Par suite $\Gamma[G]$ est un groupoïde, appelé [5] groupoïde libre sur $[G]$. On a: $(\Gamma[G], \tilde{\varrho}\,\iota, [G]) = \Psi \in L'$. Tout élément $\Phi = (S^{\cdot}, \varphi, [G])$ de L' se prolonge d'une manière unique en $\tilde{\Phi} = (S^{\cdot}, \tilde{\varphi}, [\tilde{G}]) \in L'$, en posant:

$$\tilde{\varphi}(f) = \varphi(f) \quad \text{et} \quad \tilde{\varphi}(\gamma(f)) = (\varphi(f))^{-1}$$

pour tout $f \in G$. D'après la proposition 15, on a:

$$\tilde{\Phi} = L(\tilde{\Phi}) \cdot (L[\tilde{G}], \iota, [\tilde{G}]) .$$

Par ailleurs, la relation: $(w, w') \in \varrho_1$ entraîne:

$$p_F(L(\tilde{\Phi}))\,(w) = \tilde{\varphi}(w) = \tilde{\varphi}(w') = p_F(L(\tilde{\Phi}))\,(w') ;$$

donc il existe une application unique $\tilde{\varphi}'$ telle que:

$$p_F(L(\tilde{\Phi})) = \tilde{\varphi}' \circ \tilde{\varrho} .$$

Puisque $\Gamma[G]$ est une catégorie quotient de $L[\tilde{G}]$, on en déduit:

$$\tilde{\Phi}' = (S^{\cdot}, \tilde{\varphi}', \Gamma[G]) \in L' \quad \text{et} \quad \Phi = \tilde{\Phi}' \cdot \Psi .$$

Par conséquent, $\Gamma[G]$ est une F'-projection de $[G]$.

2. – Rappelons les définitions suivantes (voir [3]): Soit $C^{\cdot}$ une catégorie; soit $R(C^{\cdot})$ la classe des éléments réguliers de $C^{\cdot}$ (c'est-à-dire des éléments qui sont à la fois un épimorphisme et un monomorphisme). On dit que $C^{\cdot}$ est *parfaite* si on a $R(C^{\cdot}) = C^{\cdot}_{\gamma}$. On dit que $C^{\cdot}$ *vérifie la condition* (P) si, pour tout $f \in R(C^{\cdot})$ et tout $h \in C$ avec $\beta(f) = \beta(h)$, il existe $(h, f, f', h') \in \square(C^{\cdot}; R(C^{\cdot}))$, l'élément h' étant un épimorphisme si $h \in R(C^{\cdot})$.

On dit que $\overline{C}^\cdot$ est un *perfectionnement* de $C^\cdot$ si $\overline{C}^\cdot$ est une catégorie parfaite, telle que $C^\cdot \prec \overline{C}^\cdot$ et que, pour tout $\overline{h} \in \overline{C}$, il existe $(\overline{h}, f', f, h) \in \square\overline{C}^\cdot$, avec $f \in C \cap R(\overline{C}^\cdot)$, $f' \in C \cap R(\overline{C}^\cdot)$ et $h \in C$.

Soit $\tilde{F}$ la sous-catégorie de F ayant pour éléments toutes les catégories et les foncteurs $(\overline{C}^\cdot, \Phi, C^\cdot)$ tels que $\Phi(R(C^\cdot)) \subset \overline{C}^\cdot_\gamma$. Soit $\tilde{F}^p$ la sous-catégorie pleine de $\tilde{F}$ ayant pour objets les catégories parfaites.

Proposition 17: *Toute catégorie* $C^\cdot \in F_0$ *admet une* F^p*-projection* $P[C^\cdot]$ *dans* $\tilde{F}$.

Cette proposition est démontrée dans [5]; $P[C^\cdot]$ est une catégorie quotient de la catégorie libre des chemins du graphe $[\tilde{G}] \cup [C - G_1]$, où G_1 est la classe des éléments réguliers de $C^\cdot$ non inversibles et $[\tilde{G}]$ le graphe construit dans la proposition 16, où $G = G_1 \cup \alpha(G_1) \cup \beta(G_1)$.

Corollaire: *Pour que* $P[C^\cdot]$ *soit un perfectionnement de* $C^\cdot$, *il faut et il suffit que* $C^\cdot$ *vérifie la condition* (P).

Démonstration: Si $P[C^\cdot]$ est un perfectionnement de $C^\cdot$, alors $C^\cdot$ vérifie la condition (P) en vertu du théorème de perfectionnement d'une catégorie (voir [3], p. 73). – Si $C^\cdot$ vérifie (P), $C^\cdot$ admet [3] un perfectionnement $\overline{C}^\cdot$ qui est la catégorie quotient de la catégorie des trios (f', f, h) de $C^\cdot$, tels que $f \in R(C^\cdot)$ et $f' \in R(C^\cdot)$, par la relation d'équivalence ϱ:

$$(f', f, h) \sim (g', g, k) \text{ si, et seulement si, } f \cdot \varphi = g \cdot \psi, \text{ où } \varphi \in R(C^\cdot) \text{ et } \psi \in R(C^\cdot), \text{ entraîne } f' \cdot h \cdot \varphi = g' \cdot k \cdot \psi .$$

Soit $(S^\cdot, \Phi, C^\cdot) \in F$, où $S^\cdot \in \tilde{F}^p$; soit Φ' l'application:

$$(f', f, h) \bmod \varrho \to \Phi(f') \cdot \Phi(h) \cdot \Phi(f)^{-1};$$

on trouve $(S^\cdot, \Phi', \overline{C}^\cdot) \in \tilde{F}^p$. Par suite $\overline{C}^\cdot$ est une $\tilde{F}^p$-projection de $C^\cdot$ dans $\tilde{F}$, c'est-à-dire est équivalente à $P[C^\cdot]$.

III) Graphes multiplicatifs:

Nous allons maintenant construire une sous-catégorie de la catégorie N des homomorphismes entre classes multiplicatives.

Définition 9: *On appellera* graphe multiplicatif *une classe multiplicative* $G^\cdot$ *vérifiant les conditions suivantes:*

1) *Tout* $f \in G$ *admet une et une seule unité à droite* $\alpha(f)$, *appelée source de* f *(resp. à gauche* $\beta(f)$ *appelée but de* f*).*
2) *Si* $g \cdot f$ *est défini, on a:* $\alpha(g) = \beta(f)$, $\alpha(g \cdot f) = \alpha(f)$ *et* $\beta(g \cdot f) = \beta(g)$.

La classe des unités du graphe multiplicatif $G^\cdot$ sera notée $G_0^\cdot$. Si η est une bijection d'une classe A sur $G_0^\cdot$, un élément de A sera appelé *objet* de $G^\cdot$ et généralement identifié à $\eta(A)$. Soit $G^\cdot * G^\cdot$ la classe des couples (g, f) tels que $g \cdot f$ soit défini.

Exemple: Une catégorie est un graphe multiplicatif. Pour qu'un graphe multiplicatif $G^\cdot$ soit une catégorie, il faut et il suffit que les axiomes suivants soient vérifiés:
1) Si $h \cdot (g \cdot f)$ et $(h \cdot g) \cdot f$ sont définis, ces composés sont égaux,
2) Si $\alpha(g) = \beta(f)$, alors le composé $g \cdot f$ est défini.

Définition 10: *On appelle* homomorphisme du graphe multiplicatif $G^\cdot$ vers le graphe multiplicatif $\bar{G}^\cdot$ *un triplet* $(\bar{G}^\cdot, \Phi, G^\cdot)$ *tel que:*
1) $(\bar{G}^\cdot, \Phi, G^\cdot)$ *est un homomorphisme de classes multiplicatives*;
2) *On a:* $\Phi(G_0^\cdot) \subset \bar{G}_0^\cdot$.

Soit N' la sous-catégorie de N formée des homomorphismes entre graphes multiplicatifs.

Proposition 18: N' *est une sous-catégorie pleine de la catégorie induite* $p_G^*(N, p_N)$ *de* N *par* (p_G, p_N); F *est une sous-catégorie pleine de* N'.

Démonstration: Soit $G^\cdot \in N_0'$; le triplet (G, β, α) est un graphe ayant $G_0^\cdot$ pour classe de ses sommets. Posons $p_{GN}(G^\cdot) = (G, \beta, \alpha) = [G^\cdot]$ et

$$p_{GN}(\bar{G}^\cdot, \Phi, G^\cdot) = ([\bar{G}^\cdot], \Phi, [G^\cdot]), \text{ si } (\bar{G}^\cdot, \Phi, G^\cdot) \in N'.$$

On a $([\bar{G}^\cdot], \Phi, [G^\cdot]) \in \mathbf{G}$. Soit $f \in G$; comme $f \cdot \alpha(f)$ est défini, le composé $\Phi(f) . \Phi(\alpha(f))$ est aussi défini; puisque $\Phi(\alpha(f)) \in \bar{G}_0^\cdot$ et que $\alpha(\Phi(f))$ est unique, on a: $\alpha(\Phi(f)) = \Phi(\alpha(f))$. De même on trouve $\beta(\Phi(f)) = \Phi(\beta(f))$; par suite $p_{GN}(\bar{G}^\cdot, \Phi, G^\cdot) \in \mathbf{G}$. La proposition résulte alors des définitions.

Nous désignerons par p_{GN} le foncteur canonique de N' vers $\mathbf{G}$. Remarquons que p_{GN} admet un foncteur section π tel que $\pi(G, \beta, \alpha)$ soit le graphe multiplicatif $G^\cdot$ dans lequel la loi de composition est définie par:

$$f \cdot \alpha(f) = f \quad \text{et} \quad \beta(f) \cdot f = f \text{ pour tout } f \in G.$$

Proposition 19: *Tout* $\bar{\Phi} \in N'$ *admet une* F*-projection* $\nu(\bar{\Phi})$ *dans* N' *telle que* $(\nu, \tilde{\nu})$ *soit un foncteur naturalisé dans* N' (voir [4]).

Démonstration: Soit $G^\cdot \in N_0'$; désignons par $\nu(G^\cdot)$ la catégorie $L[G^\cdot]/\underline{\varrho}$ engendrée par le système de générateurs $[G^\cdot]$ et la relation $\underline{\varrho}$:

$$((g, f), g \cdot f) \in \underline{\varrho} \quad \text{si, et seulement si,} \quad (g, f) \in G^\cdot * G^\cdot.$$

Posons $\tilde{\nu}(G^\cdot)(f) = f \bmod \bar{\varrho}$, pour tout $f \in G$. On a: $(\nu(G^\cdot), \tilde{\nu}(G^\cdot), G^\cdot) \in N'$. Soit $C^\cdot \in F_0$ et supposons $\bar{\Phi} = (C^\cdot, \Phi, G^\cdot) \in N'$. Alors $L(\bar{\Phi}) = (C^\cdot, L(\Phi), L[G^\cdot]) \in F$ et, comme $L(\Phi)$ est compatible avec ϱ, il existe Φ' tel que:

$$L(\Phi) = \Phi' \tilde{\bar{\varrho}} \text{ et } (C^\cdot, \Phi', \nu(G^\cdot)) \in F.$$

De plus on obtient:

$$\Phi = L(\Phi)\,\iota = \Phi' \tilde{\bar{\varrho}}\,\iota = \Phi' \tilde{\nu}(G^\cdot),$$

d'où

$$\bar{\Phi} = (C^\cdot, \Phi', \nu(G^\cdot)) \cdot (\nu(G^\cdot), \tilde{\nu}(G^\cdot), G^\cdot).$$

Donc $\nu(G^\cdot)$ est une F-projection de $G^\cdot$ dans N'. En vertu de la proposition 2, il existe un homomorphisme quotient de $L([\bar{G}^\cdot], \Psi, [G^\cdot])$, noté $\nu(\bar{G}^\cdot, \Psi, G^\cdot) = (\nu(\bar{G}^\cdot), \nu(\Psi), \nu(G^\cdot))$, pour tout $(\bar{G}^\cdot, \Psi, G^\cdot) \in N'$. On définit ainsi un foncteur ν de N' vers F, qui est naturalisé par l'application $\tilde{\nu}$:

$$G^\cdot \to (\nu(G^\cdot), \tilde{\nu}(G^\cdot), G^\cdot).$$

Soit (M, p'_N, N', N'_γ) la catégorie d'homomorphismes dans laquelle p'_N est la restriction de p_N à N'.

Proposition 20: *Pour que $G_1^\perp$ soit une p'_N-sous-structure de $G^\cdot \in N'_0$, il faut et il suffit que $G_1^\perp$ soit une sous-classe multiplicative de $G^\cdot$ et que $p_{GN}(G_1^\perp)$ soit un sous-graphe de $p_{GN}(G^\cdot)$.*

Démonstration: Si les conditions sont vérifiées, pour tout $f \in G_1$, on a $\alpha(f) \in G_1$ et $\beta(f) \in G_1$ et f admet $\alpha(f)$ et $\beta(f)$ pour unités à droite et à gauche dans $G_1^\perp$. Par suite $G_1^\perp$ est un graphe multiplicatif; puisque $G_1^\perp$ est une sous-structure de $G^\cdot$ dans $p_G^*(N, p_N)$ d'après la proposition 5, $G_1^\perp$ est aussi une sous-structure de $G^\cdot$ dans la sous-catégorie pleine N' de $p_G^*(N, p_N)$. – Inversement, soit $G_1^\perp$ une p'_N-sous-structure de $G^\cdot$; comme $(G^\cdot, \iota, G_1^\perp) \in N'$, on a, pour tout $f \in G_1 : \alpha(f) = \iota(\alpha^\perp(f)) \in G_1$; de même $\beta(f) \in G_1$ et $[G_1^\perp]$ est un sous-graphe de $[G^\cdot]$. On en déduit que $G_1^\cdot$ est aussi un graphe multiplicatif, donc une p'_N-sous-structure de $G^\cdot$ en vertu du début de la démonstration. L'unicité de la sous-structure de $G^\cdot$ sur G_1 entraîne $G_1^\cdot = G_1^\perp$.

Définition 11: *Soient $G^\cdot \in N'_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur G; on dira que ϱ est* bicompatible sur $G^\cdot$ *si ϱ est compatible sur la classe multiplicative $G^\cdot$ et compatible avec α et β.*

Proposition 21: *Soient $G^\cdot \in N'_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur G. Pour que $G^\cdot$ admette une p'_N-structure quotient $\bar{G}^\perp$ par ϱ, il faut et il suffit que ϱ soit bicompatible sur $G^\cdot$; dans ce cas, on a: $\bar{G}^\perp = G^\cdot/\varrho$.*

Démonstration: Supposons ϱ bicompatible sur $G^\cdot$ et soit $\tilde{\varrho}$ l'application $f \to f \bmod \varrho$ de G sur G/ϱ. Montrons que la classe multiplicative $G^\cdot/\varrho$, qui est la p_N-structure quotient de $G^\cdot$ par ϱ, est un graphe multiplicatif. Soit $f \in G$; puisque $f \cdot \alpha(f)$ est défini, $\tilde{\varrho}(f) \cdot \tilde{\varrho}(\alpha(f))$ est défini et égal à $\tilde{\varrho}(f)$. Si $\tilde{\varrho}(g) \cdot \tilde{\varrho}(\alpha(f))$ est aussi défini, il existe $g' \sim g$ et $h \sim \alpha(f)$ tels que $g' \cdot h$ soit défini; on a alors

$$\beta(h) \sim \alpha(f) \quad \text{et} \quad \alpha(g') = \beta(h).$$

Comme

$$\tilde{\varrho}(g) \cdot \tilde{\varrho}(\alpha(f)) = \tilde{\varrho}(g' \cdot \alpha(g')) = \tilde{\varrho}(g'),$$

$\tilde{\varrho}(\alpha(f))$ est une unité à droite de $\tilde{\varrho}(f)$. Soit $\tilde{\varrho}(k)$ une autre unité de $G^\cdot/\varrho$ telle que $\tilde{\varrho}(f) \cdot \tilde{\varrho}(k)$ soit défini; il existe $f' \sim f$ et $k' \sim k$ tels que $f' \cdot k'$ soit défini; la relation $\alpha(f') = \beta(k')$ entraînant $\beta(k') \sim \alpha(f)$, on a:

$$\tilde{\varrho}(k) = \tilde{\varrho}(\beta(k') \cdot k') = \tilde{\varrho}(\alpha(f)) \cdot \tilde{\varrho}(k) = \tilde{\varrho}(\alpha(f)).$$

Donc $\tilde{\varrho}(\alpha(f))$ est la seule unité à droite de $\tilde{\varrho}(f)$; de même $\tilde{\varrho}(f)$ admet $\tilde{\varrho}(\beta(f))$ pour seule unité à gauche. On en déduit que $G^\cdot/\varrho$ est un graphe multiplicatif. Par ailleurs $[G^\cdot/\varrho]$ est le graphe quotient de $[G^\cdot]$ par ϱ. Il en résulte que $G^\cdot/\varrho$ est une structure quotient de $G^\cdot$ dans $p^*_G(N, p_N)$ et, N' étant une sous-catégorie pleine de $p^*_G(N, p_N)$, $G^\cdot/\varrho$ est la p'_N-structure quotient de $G^\cdot$ par ϱ. – Inversement supposons que $\overline{G}^\perp$ soit la p'_N-structure quotient de $G^\cdot$ par ϱ. La relation: $(\overline{G}^\perp, \tilde{\varrho}, G^\cdot) \in N'$ signifie que ϱ est bicompatible sur $G^\cdot$ et, d'après le début de la démonstration, $G^\cdot/\varrho$ est une p'_N-structure quotient de $G^\cdot$ par ϱ. On déduit donc de la proposition 6 que $G^\cdot/\varrho = \overline{G}^\cdot$.

Corollaire: *$j \in N'$ est une p'_N-surjection si, et seulement si, j est une p_N-surjection et si $p_{GN}(j)$ est une p_G-surjection.*

IV) Catégories quotient et catégories quotient strict

Proposition 22: *Soient $C^\cdot$ une catégorie et ϱ une relation d'équivalence bicompatible sur $C^\cdot$; alors $C^\cdot/\varrho$ est un graphe multiplicatif; $\nu(C^\cdot/\varrho)$ est une catégorie quotient de $C^\cdot$ si $\tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)$ est une surjection de $C^\cdot/\varrho$ sur $\nu(C^\cdot/\varrho)$.*

Démonstration: D'après la proposition 21, $C^\cdot/\varrho$ est un graphe multiplicatif quotient de $C^\cdot$ par ϱ et on a $(C^\cdot/\varrho, \tilde{\varrho}, C^\cdot) \in N'$, où $\tilde{\varrho}(f) = f \bmod \varrho$ pour tout $f \in C$. Soit $\nu(C^\cdot/\varrho)$ la F-projection de $C^\cdot/\varrho$, qui existe d'après la proposition 19; on a

$$\overline{\Psi} = (\nu(C^\cdot/\varrho), \tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)\,\tilde{\varrho}, C^\cdot) = \tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho) \cdot (C^\cdot/\varrho, \tilde{\varrho}, C^\cdot) \in F.$$

Soit $\overline{\Phi} = (S^\cdot, \Phi, C^\cdot) \in F$ tel que $\Phi = \Phi'\,\tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)\,\tilde{\varrho}$. Puisque $C^\cdot/\varrho$ est un graphe multiplicatif quotient de $C^\cdot$, on a:

$$\overline{\Phi}' = (S^\cdot, \Phi' \tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho), C^\cdot/\varrho) \in N';$$

d'après la proposition 19, il existe $\nu(\overline{\Phi}') \in F$ tel que

$$\overline{\Phi}' = \nu(\overline{\Phi}') \cdot \tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho) \text{ et par suite } \overline{\Phi} = \overline{\Phi}' \cdot (C^\cdot/\varrho, \tilde{\varrho}, C^\cdot) = \nu(\overline{\Phi}') \cdot \overline{\Psi}.$$

Si $\tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)$ est une surjection, l'égalité $\Phi = p_F(\nu(\overline{\Phi}'))\,\tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)\,\tilde{\varrho} = \Phi'\tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)\,\tilde{\varrho}$ entraîne $\Phi' = p_F(\nu(\overline{\Phi}'))$, donc $\overline{\Psi}$ est une p_F-surjection. Inversement si $(\nu(C^\cdot/\varrho), \tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)\tilde{\varrho}, C^\cdot) \in F^s(M^s, p_F)$, l'application $\tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)$ est évidemment une surjection sur $\nu(C^\cdot/\varrho)$.

Remarque: La démonstration précédente prouve que tout foncteur $\overline{\Phi}$ se décompose d'une manière canonique en le produit de deux foncteurs $\nu(\overline{\Phi}') \cdot \overline{\Psi}$, l'application $\nu(\overline{\Phi}')_0$ étant une injection, mais $\overline{\Psi}$ n'est pas une (M, p_F)-surjection, car $p_F(\nu(\overline{\Phi}'))$ et Φ' peuvent être différents. En particulier tout foncteur $(S^\cdot, \Phi, C^\cdot)$ se décompose d'une manière canonique en le produit de foncteurs $(S^\cdot, \Phi_1, \nu(C^\cdot/\varrho_\Phi)) \cdot (\nu(C^\cdot/\varrho_\Phi), \tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho_\Phi)\,\tilde{\varrho}_\Phi, C^\cdot)$, où ϱ_Φ est la relation d'équivalence associée à Φ.

Théorème 7: *Soient $C^\cdot$ une catégorie et ϱ une relation d'équivalence sur C. Pour que $\overline{C}^\cdot$ soit une catégorie quotient de $C^\cdot$ par ϱ, il faut et il suffit que ϱ soit bicompatible sur $C^\cdot$ et que $\tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)$ soit une bijection de $C^\cdot/\varrho$ sur $\nu(C^\cdot/\varrho)$; dans ce cas $\overline{C}^\cdot$ est équivalente à $\nu(C^\cdot/\varrho)$.*

Démonstration: Si les conditions sont vérifiées, $\nu(C^\cdot/\varrho)$ est une catégorie quotient de $C^\cdot$ d'après la 2e partie de la proposition 22, et la bijection $\tilde{\nu}(C^\cdot/\varrho)$ définit sur $C^\cdot/\varrho$ une structure de catégorie équivalente à $\nu(C^\cdot/\varrho)$; par suite $C^\cdot$ admet une catégorie quotient par ϱ. – Inversement supposons que $C^\cdot$ admette $\overline{C}^\cdot$ pour catégorie quotient par ϱ. Comme $(\overline{C}^\cdot, \tilde{\varrho}, C^\cdot) \in F$, où $\tilde{\varrho}(f) = f \bmod \varrho$ pour tout $f \in C$, la relation d'équivalence ϱ est bicompatible sur $C^\cdot$ et il résulte de la proposition 21 que $C^\cdot/\varrho$ est le graphe multiplicatif quotient de $C^\cdot$ par ϱ; par conséquent on a $(\overline{C}^\cdot, \iota, C^\cdot/\varrho) \in N'$. Soient $S^\cdot \in F_0$ et $(S^\cdot, \Phi, C^\cdot/\varrho) \in N'$. La relation: $(S^\cdot, \Phi\tilde{\varrho}, C^\cdot) \in F$ entraîne $(S^\cdot, \Phi, \overline{C}^\cdot) \in F$, puisque $\overline{C}^\cdot \prec C^\cdot$. Il en résulte:

$$(S^\cdot, \Phi, C^\cdot/\varrho) = (S^\cdot, \Phi, \overline{C}^\cdot) \cdot (\overline{C}^\cdot, \iota, C^\cdot/\varrho);$$

donc $\overline{C}^\cdot$ est une F-projection de $C^\cdot/\varrho$ et, en vertu de la proposition 6, $\overline{C}^\cdot$ est une catégorie équivalente à $\nu(C^\cdot/\varrho)$.

Corollaire: *Pour que* $(\bar{C}^\cdot, \Psi, C^\cdot) \in F$ *soit une* p_F*-surjection, il faut et il suffit que* $\Psi(C) = \bar{C}^\cdot$ *et que* $\bar{C}$ *soit une* F*-projection de* $C^\cdot/\varrho_\Psi$*, où* ϱ_Ψ *est la relation d'équivalence associée à* Ψ*.*

En effet ϱ_Ψ est bicompatible sur $C^\cdot$ et le corollaire résulte du théorème 7.

Si $(\bar{C}^\cdot, \Psi, C^\cdot)$ est une p_F-surjection, il n'en résulte pas que $(\bar{C}^\cdot, \Psi, C^\cdot)$ soit une p'_N-surjection.

Définition 12: *Soient* $C^\cdot$ *et* $\bar{C}^\cdot$ *deux catégories; on dira que* $\bar{C}^\cdot$ *est une* catégorie quotient strict *de* $C^\cdot$ *(resp. de* $C^\cdot$ *par* ϱ*) si* $\bar{C}^\cdot$ *est une catégorie quotient de* $C^\cdot$ *(resp. de* $C^\cdot$ *par* ϱ*) et si* $\bar{C}^\cdot$ *est une* p'_N*-structure quotient de* $C^\cdot$*.*

Proposition 23: *Soient* $C^\cdot$ *une catégorie et* ϱ *une relation d'équivalence sur* C*. Pour qu'il existe une catégorie* $\bar{C}^\cdot$ *quotient strict de* $C^\cdot$ *par* ϱ*, il faut et il suffit que* ϱ *soit compatible sur* $C^\cdot$ *et que l'on ait* $(C^\cdot/\varrho, \tilde{\varrho}, C^\cdot) \in F$*, où* $\tilde{\varrho}(f) = f \bmod \varrho$*, pour tout* $f \in C$*. Dans ce cas, on a* $\bar{C}^\cdot = C^\cdot/\varrho$*.*

Démonstration: Soit $\bar{C}^\cdot$ une catégorie quotient strict de $C^\cdot$ par ϱ. Puisque $\bar{C}^\cdot$ est une p'_N-structure quotient de $C^\cdot$, d'après la proposition 21 ϱ est bicompatible sur $C^\cdot$ et on a $\bar{C}^\cdot = C^\cdot/\varrho$, donc $(C^\cdot/\varrho, \tilde{\varrho}, C^\cdot) \in F$. – Inversement si $(C^\cdot/\varrho, \tilde{\varrho}, C^\cdot) \in F$, alors ϱ est bicompatible sur $C^\cdot$ et $C^\cdot/\varrho$ est une p'_N-structure quotient de $C^\cdot$; puisque $C^\cdot/\varrho$ est une catégorie et que F est une sous-catégorie pleine de N', $C^\cdot/\varrho$ est une catégorie quotient strict de $C^\cdot$.

Corollaire: *Pour qu'une catégorie* $C^\cdot$ *admette une catégorie quotient strict par* ϱ*, il faut et il suffit que* ϱ *soit bicompatible sur* $C^\cdot$ *et que* $C^\cdot/\varrho$ *soit une catégorie.*

Soient $C^\cdot$ une catégorie et ϱ une relation d'équivalence bicompatible sur $C^\cdot$. Alors $C^\cdot/\varrho$ est un graphe multiplicatif et pour que $C^\cdot/\varrho$ soit une catégorie, il faut et il suffit que de plus soient vérifiées les conditions suivantes (voir exemple III):

1) Si $\tilde{\varrho}(h)\cdot(\tilde{\varrho}(g)\cdot\tilde{\varrho}(f))$ et $(\tilde{\varrho}(h)\cdot\tilde{\varrho}(g))\cdot\tilde{\varrho}(f)$ sont définis, ils sont égaux.

2) Si $\alpha(\tilde{\varrho}(g)) = \beta(\tilde{\varrho}(f))$, alors $\tilde{\varrho}(g)\cdot\tilde{\varrho}(f)$ est défini, c'est-à-dire: si $g \in C$, $f \in C$ et $\alpha(g) \sim \beta(f)$, il existe $g' \sim g$ et $f' \sim f$ tels que $g'\cdot f'$ soit défini.

Par suite on obtient les critères suivants pour que $C^\cdot$ admette une catégorie quotient strict:

Proposition 24: *Pour que* $(\bar{C}^\cdot, \Psi, C^\cdot) \in F$ *soit une* p_F*-surjection, définissant* $\bar{C}^\cdot$ *comme catégorie quotient strict de* $C^\cdot$*, il faut et il suffit que* $\Psi(C) = \bar{C}$ *et que, si* $\Psi(\alpha(g)) = \Psi(\beta(f))$*, il existe* $g' \in C$ *et* $f' \in C$ *tels que*

$$\Psi(g') = \Psi(g),\ \Psi(f') = \Psi(f)\ \text{ et }\ \alpha(g') = \beta(f').$$

En effet, ces conditions signifient que $C^\cdot/\varrho_\Psi$ est une catégorie, où ϱ_Ψ est la relation d'équivalence correspondant à Ψ. (Cette proposition se trouve dans [3].)

Proposition 25: *Si ϱ est une relation d'équivalence bicompatible sur la catégorie $C^{\cdot}$ vérifiant l'une des conditions:*
Si $e \in C_0^{\cdot}$, $f \in C$ *et* $e \sim \alpha(f)$ (*resp.* $e \sim \beta(f)$), *il existe* $f' \sim f$ *tel que* $e = \alpha(f')$ (*resp.* $e = \beta(f')$),
alors $C^{\cdot}/\varrho$ *est une catégorie quotient strict de* $C^{\cdot}$.

Cette proposition est démontrée dans [3].

Corollaire: *Si ϱ est une relation d'équivalence compatible sur la catégorie $C^{\cdot}$ vérifiant la condition:*
Si $f \sim f'$, *alors* $\alpha(f) = \alpha(f')$ *et* $\beta(f) = \beta(f')$,
$C^{\cdot}/\varrho$ *est une catégorie quotient strict de* $C^{\cdot}$.

Exemples: 1) Une catégorie quotient peut ne pas être une catégorie quotient strict comme le montre l'exemple suivant: Soit $C^{\cdot}$ la catégorie formée de 9 unités et de 9 morphismes $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_1', a_2', a_4'$, chaque unité étant adjacente à deux morphismes différents exactement. Les seuls composés entre deux éléments différents d'une unité sont:

$$a_2 \cdot a_1 = a_3;\ a_4 \cdot a_1' = a_5 \quad \text{et} \quad a_6 \cdot a_4' = a_2'.$$

Soit ϱ la plus petite relation d'équivalence sur $C^{\cdot}$ compatible avec α et β et telle que l'on ait:

$$a_1 \sim a_1';\ a_2 \sim a_2' \quad \text{et} \quad a_4 \sim a_4'.$$

Alors $C^{\cdot}$ admet une catégorie quotient par ϱ, qui n'est pas une catégorie quotient strict par ϱ, puisque le composé $\tilde{\varrho}(a_6) \cdot \tilde{\varrho}(a_5)$ est défini et égal à $\tilde{\varrho}(a_3)$.

2) Soient $C^{\cdot}$ une catégorie et ϱ une relation d'équivalence sur C. La condition: il existe $((C/\varrho)^{\perp}, \tilde{\varrho}, C^{\cdot}) \in F$ n'entraîne pas que $(C/\varrho)^{\perp}$ soit une catégorie quotient de $C^{\cdot}$, comme le montre l'exemple suivant: $C^{\cdot}$ est formé de 6 unités et de 3 morphismes f_1, f_2, f_3, le composé de deux éléments n'étant défini que si l'un des éléments au moins est une unité. Soit ϱ la relation d'équivalence sur C engendrée par: $\alpha(f_1) \sim \alpha(f_3)$, $\beta(f_2) \sim \beta(f_3)$ et $\alpha(f_2) \sim \beta(f_1)$. Alors C/ϱ devient une catégorie pour la loi de composition:

$$h' \perp h = h' \cdot h \quad \text{si} \quad h' \cdot h \text{ est défini dans } C^{\cdot}/\varrho;$$

et

$$\tilde{\varrho}(f_2) \perp \tilde{\varrho}(f_1) = \tilde{\varrho}(f_3).$$

Mais $(C/\varrho)^{\perp}$ n'est pas une catégorie quotient de $C^{\cdot}$.

3) Soit $C^{\cdot}$ une catégorie. Une relation d'équivalence ϱ sur C peut être compatible sur la classe multiplicative $C^{\cdot}$ et telle que $C^{\cdot}/\varrho$ soit une catégorie sans que $C^{\cdot}$ admette une catégorie quotient par ϱ. Par exemple, soit $C^{\cdot}$ une catégorie ayant deux unités distinctes e et e' et un seul morphisme f tel que: $f \cdot f = f$ et $\alpha(f) = e'$. Soit ϱ la relation d'équivalence engendrée par $e \sim f$, e non équivalent à e'. Alors $C^{\cdot}/\varrho$ est une catégorie formée d'une unité $\tilde{\varrho}(e')$ et

d'un élément idempotent $\tilde{e}$ tel que $\alpha(\tilde{e}) = \tilde{\varrho}(e')$. Mais $C^\cdot/\varrho$ n'est pas une catégorie quotient de $C^\cdot$. Toutefois on a:

Proposition 26: *Soient $C^\cdot$ un groupoïde et ϱ une relation d'équivalence compatible sur $C^\cdot$ et telle que $C^\cdot/\varrho$ soit une catégorie. Alors $C^\cdot/\varrho$ est un groupoïde* [1]) *quotient strict de $C^\cdot$.*

Démonstration: Pour tout $f \in C$, posons:

$$\tilde{f} = \tilde{\varrho}(f) = f \text{ modulo } \varrho .$$

Les relations: $g \in C$ et $\tilde{g} \in (C^\cdot/\varrho)_0$, entraînent:

$$\tilde{g} = \tilde{g} \cdot (\widetilde{\alpha(g)}) = \widetilde{\alpha(g)}, \quad \text{d'où } g \sim \alpha(g) .$$

De même $\beta(g) \sim g$. – Montrons que si $e \in C_0^\cdot$, on a: $\tilde{e} \in (C^\cdot/\varrho)_0$. En effet, de l'égalité $e \cdot e = e$, on déduit $\tilde{e} \cdot \tilde{e} = \tilde{e}$, donc $\alpha(\tilde{e}) = \beta(\tilde{e})$. Posons $\tilde{\mu} = \alpha(\tilde{e})$. Puisque $\tilde{\mu} \cdot \tilde{e}$ est défini, il existe $f \sim e$ et $g \in \tilde{\mu}$ tels que $\alpha(g) = \beta(f)$; comme $\tilde{\mu} \in (C^\cdot/\varrho)_0$, d'après le début de la démonstration on a $\beta(f) \in \tilde{\mu}$. Posons $\tilde{e}' = \widetilde{f^{-1}}$. A partir de l'égalité $f \cdot f^{-1} = \beta(f)$, on obtient $\tilde{e} \cdot \tilde{e}' = \tilde{\mu}$. Par suite:

$$\tilde{e} = \tilde{e} \cdot \tilde{\mu} = \tilde{e} \cdot \tilde{e} \cdot \tilde{e}' = \tilde{e} \cdot \tilde{e}' = \tilde{\mu} .$$

Il en résulte: $\tilde{e} \in (C^\cdot/\varrho)_0$ et $(C^\cdot/\varrho, \tilde{\varrho}, C^\cdot) \in F$. Par conséquent $C^\cdot/\varrho$ est un groupoïde, qui est une catégorie quotient strict de $C^\cdot$, en vertu de la proposition 23.

V) Relations d'ordre quotient

Soit $\tilde{\Omega}$ la catégorie des homomorphismes entre classes ordonnées (voir [2]) et $(M, \omega, \tilde{\Omega}, .)$ la catégorie d'homomorphismes correspondante; soit $\hat{\omega}$ l'équivalence de $\tilde{\Omega}$ sur la sous-catégorie pleine de F ayant pour objets les catégories de couples définissant un ordre sur la classe de leurs unités. Si $\hat{\omega}(\tilde{g})$ est une p_F-surjection, $\tilde{g}$ est une ω-surjection. Mais il existe des ω-surjections $\tilde{g}$ telles que $\hat{\omega}(\tilde{g})$ ne soit pas une p_F-surjection.

Soit $\tilde{\Omega}'$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des homomorphismes stricts ([1] et [2]), c'est-à-dire des triplets $((\bar{A}, <), g, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$ tels que les conditions: $x' < x$ et $g(x') = g(x)$ entraînent $x' = x$.

Soit $\tilde{\Omega}''$ la sous-catégorie de $\tilde{\Omega}$ formée des triplets $((\bar{A}, <), g, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$ tels que, pour tout $x \in A$ et tout $z < g(x)$, il existe $x' < x$ avec $g(x') = z$.

$\tilde{\Omega}'$ et $\tilde{\Omega}''$ sont des sous-catégories saturées de $\tilde{\Omega}$. Soient ω' et ω'' les restrictions de ω à $\tilde{\Omega}'$ et à $\tilde{\Omega}''$ resp.

---

[1]) Pour une proposition analogue, voir [8].

Définition 13: *On dira qu'une relation d'équivalence ϱ sur A est* compatible sur $(A, <) \in \tilde{\Omega}_0$ *si la relation définie par:*
$\tilde{\varrho}(x) < \tilde{\varrho}(y)$ *si, et seulement si, il existe* $x' \sim x$ *et* $y' \sim y$ *tels que* $x' < y'$ *est une relation d'ordre sur* A/ϱ.

Proposition 27: *Si ϱ est une relation d'ordre compatible sur $(A, <) \in \tilde{\Omega}_0$, alors $(A/\varrho, <)$ est une ω-structure quotient de $(A, <)$. Si de plus il existe $\bar{\varphi} = ((A', <), \varphi' \cdot \tilde{\varrho}, (A, <)) \in \tilde{\Omega}'$, alors $(A/\varrho, <)$ est une ω'-structure quotient de $(A, <)$.*

Démonstration: On a $((A/\varrho, <), \tilde{\varrho}, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$. Soit $\bar{\varphi} = ((A', <), \varphi' \cdot \tilde{\varrho}, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$. Soient $x \in A/\varrho$ et $x' < x$. Il existe $y \in A$ et $y' < y$ tels que $\tilde{\varrho}(y) = x$ et $\tilde{\varrho}(y') = x'$, donc $\varphi'(x') = \varphi' \cdot \tilde{\varrho}(y') < \varphi' \cdot \tilde{\varrho}(y) = \varphi'(x)$ et on trouve $\bar{\varphi}' = ((A', <), \varphi', (A/\varrho, <)) \in \tilde{\Omega}$. Ainsi $(A/\varrho, <)$ est une ω-structure quotient de $(A, <)$. – Supposons de plus $\bar{\varphi} \in \tilde{\Omega}'$ et $\varphi'(x') = \varphi'(x)$; on en déduit $y' = y$, d'où $x' = x$ et $\bar{\varphi}' \in \tilde{\Omega}'$. – Enfin les conditions $y' < y$ et $y' \sim y$ entraînent $\varphi' \cdot \tilde{\varrho}(y') = \varphi' \cdot \tilde{\varrho}(y)$, et par suite $y' = y$. Ainsi $((A/\varrho, <), \tilde{\varrho}, (A, <)) \in \tilde{\Omega}'$ et $(A/\varrho, <)$ est une ω'-structure quotient.

Définition 14: *On dira que $\bar{g} \in \tilde{\Omega}$ est une* ω-surjection stricte, *ou que $\beta(\bar{g})$* est une structure d'ordre quotient strict de $\alpha(\bar{g})$, *si la catégorie $\hat{\omega}(\beta(\bar{g}))$ est une catégorie quotient strict de $\hat{\omega}(\alpha(\bar{g}))$.*

Proposition 28: *Pour que $\bar{g} = ((\bar{A}, <), g, (A, <)) \in \tilde{\Omega}$ soit une ω-surjection stricte, il faut et il suffit que $g(A) = \bar{A}$ et que les conditions:*

$$x \in \bar{A}, \ x' < x \quad \text{et} \quad x'' < x'$$

entraînent qu'il existe $y \in A$, $y' < y$ et $y'' < y'$ tels que $g(y) = x$, $g(y') = x'$ et $g(y'') = x''$. Si $\bar{g}$ est une ω-surjection stricte et si $\bar{g} \in \tilde{\Omega}'$, alors $\bar{g}$ est une ω'-surjection. Si $\bar{g} \in \tilde{\Omega}''$ et $g(A) = \bar{A}$, $\bar{g}$ est une ω-surjection stricte et une ω''-surjection.

Démonstration: La première partie de la proposition résulte de la proposition 24. – Si $\bar{g} \in \tilde{\Omega}'$ et si $\bar{g}$ est une ω-surjection stricte, la relation d'équivalence ϱ_g associée est compatible sur $\alpha(\bar{g})$ et $\bar{g}$ est une ω'-surjection, en vertu de la proposition 27. – Soit $\bar{g} \in \tilde{\Omega}''$ et $g(A) = \bar{A}$; il résulte des définitions que la condition de l'énoncé est vérifiée, par suite $\bar{g}$ est une ω-surjection. Supposons $\bar{\varphi} = ((A', <), \varphi' \cdot g, (A, <)) \in \tilde{\Omega}''$. Soit $x \in \bar{A}$ et $z < \varphi'(x)$; il existe $y \in A$ et $y' < y$ tels que

$$g(y) = x, \ \varphi' \cdot g(y) = \varphi'(x) \quad \text{et} \quad \varphi' \cdot g(y') = z\,.$$

Par suite $x' = g(y') < x$ et $\varphi'(x') = z$, d'où $((A', <), \varphi', (\bar{A}, <)) \in \tilde{\Omega}''$, et $\bar{g}$ est une ω''-surjection.

Soient I^{ps}, I^{s} et I les catégories des applications sous-inductives entre classes sous-préinductives, des applications inductives entre classes sous-inductives et des applications inductives entre classes inductives (voir [1], [2] et [3]). Soient ω^{ps}, ω^{s}, ω^{i}, ω'^{ps}, ω'^{s}, ω'^{i}, ω''^{ps}, ω''^{s} et ω''^{i} les restrictions de ω à I^{ps}, I^{s}, I, $I'^{ps} = I^{ps} \frown \tilde{\Omega}'$, $I'^{s} = \tilde{\Omega}' \frown I^{s}$, $I' = I \frown \tilde{\Omega}'$, $I''^{ps} = I^{ps} \frown \tilde{\Omega}''$, $I''^{s} = I^{s} \frown \tilde{\Omega}''$ et $I'' = I \frown \tilde{\Omega}''$ resp.

Proposition 29: *Supposons* $\bar{g} = ((\bar{A}, <), g, (A, <)) \in I^{ps}$ *et* $g(A) = \bar{A}$. *Si on a la propriété suivante:*

(q^{ps}) *Les conditions* $x \in \bar{A}$, $x' < x$ *et* $x'' < x$ *entraînent qu'il existe* $y \in A$,

$$y' < y \text{ et } y'' < y \text{ tels que } g(y) = x,\ g(y') = x' \text{ et } g(y'') = x'',$$

alors $\bar{g}$ *est une* ω^{ps}*-surjection stricte.*

Démonstration: L'axiome (q^{ps}) entraîne que la relation d'équivalence ϱ_g associée à g est compatible sur $(A, <)$; par suite g est une ω-surjection stricte, d'après la proposition 27. Soit $\bar{\varphi} = ((A', <), \varphi' \cdot g, (A, <)) \in I^{ps}$. Soient $x' \in \bar{A}$, $x' < x$ et $x'' < x$; en vertu de (q^{ps}), on a:

$$\varphi'(x' \frown x'') = \varphi' \cdot g(y' \frown y'') = \varphi' \cdot g(y') \frown \varphi' \cdot g(y'') = \varphi'(x') \frown \varphi'(x''),$$

d'où $((A', <), \varphi', (\bar{A}, <)) \in I^{ps}$ et $\bar{g}$ est une ω^{ps}-surjection.

Corollaire: *Si* $\bar{g} \in I''^{ps}$ *et* $\omega(\bar{g}) \in M^{s}$, *alors* $\bar{g}$ *est une* ω^{ps}*-surjection et une* ω''^{ps}*-surjection.*

Proposition 30: *Soit* $\bar{g} = ((\bar{A}, <), g, (A, <)) \in I^{s}$ *(resp.* $\in I$*) et* $g(A) = \bar{A}$. *Supposons l'axiome suivant vérifié:*

(q^{s}) *Les conditions* $x \in \bar{A}$ *et* $x_i < x$, $i \in I$ *entraînent qu'il existe* $y \in A$ *et* $y_i < y$ *tels que* $g(y) = x$ *et* $g(y_i) = x_i$, *pour tout* $i \in I$.

Alors $\bar{g}$ *est une* ω^{s}*(resp.* ω^{i}*)-surjection stricte.*

Démonstration: D'après la proposition 29, $\bar{g}$ est une ω^{ps}-surjection stricte. Soit $\bar{\varphi} = ((A', <), \varphi' \cdot g, (A, <)) \in I^{s}$; en reprenant les notations de (q^{s}) on trouve:

$$\varphi'\Big(\overset{x}{\underset{i \in I}{\cup}} x_i\Big) = \varphi'\Big(\overset{x}{\underset{i \in I}{\cup}} g(y_i)\Big) = \varphi'\Big(g\Big(\overset{y}{\underset{i \in I}{\cup}} y_i\Big)\Big) = \overset{\varphi'(x)}{\underset{i \in I}{\cup}} \varphi'(x_i),$$

d'où $((A', <), \varphi', (\bar{A}, <)) \in I^{s}$ et $\bar{g}$ est une ω^{s}-surjection. Si $\bar{g} \in I$, $\bar{g}$ est une ω^{i}-surjection, car I est une sous-catégorie pleine de I^{s}.

Corollaire: *Si* $\bar{g} \in I''^{s}$ *(resp.* $\in I''$*) et* $\omega(\bar{g}) \in M^{s}$, *alors* $\bar{g}$ *est une* ω^{s}*- (resp.* ω^{i}*-) surjection et une* ω''^{s}*- (resp.* ω''^{i}*-) surjection.*

4. Graphes multiplicatifs induits

Théorème 8: *Soient* $\bar{\varkappa}_i = (G^\cdot, \varkappa_i, G_i^\cdot) \in N$, *où* $i = 1, 2$. *Il existe une* p_N*-sous-structure* $\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$ *de* $G_1^\cdot \times G_2^\cdot$ *telle que:*

$$K = (\bar{\varkappa}_2, \bar{\varkappa}_1, \overline{p_1\iota}, \overline{p_2\iota}) \in \square N,$$

où $\overline{p_i\iota}$ *désigne la restriction à* $\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$ *de la projection canonique* $\bar{p}_i$ *de* $G_1^\cdot \times G_2^\cdot$ *sur* $G_i^\cdot$. *Si de plus on a* $\bar{\varkappa}_i \in N'$ *(resp.* $\in F$*), alors* $K \in \square N'$ *(resp.* $K \in \square F$*).*

Démonstration: Soit $\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$ la classe des couples (g_1, g_2) tels que $\varkappa_1(g_1) = \varkappa_2(g_2)$. Si $(g_1, g_2) \in \bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$ et si $(g_1', g_2') \in \bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$, les composés $g_i' \cdot g_i$ étant supposés définis, $i = 1, 2$, on a:

$$\varkappa_1(g_1' \cdot g_1) = \varkappa_1(g_1') \cdot \varkappa_1(g_1) = \varkappa_2(g_2' \cdot g_2), \quad \text{d'où} \quad (g_1' \cdot g_1, g_2' \cdot g_2) \in \bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1).$$

Par suite $\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$ est une sous-classe stable pour la loi de composition de $G_1^\cdot \times G_2^\cdot$; la première partie du théorème en résulte. – Si $\bar{\varkappa}_i \in N'$ et si $(g_1, g_2) \in \bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$, on trouve:

$$\varkappa_1(\alpha(g_1)) = \alpha(\varkappa_1(g_1)) = \alpha(\varkappa_2(g_2)) = \varkappa_2(\alpha(g_2)),$$

d'où $(\alpha(g_1), \alpha(g_2)) \in \bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$; de même $(\beta(g_2), \beta(g_1)) \in \bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \varkappa_1)$. On en déduit que $\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \varkappa_1)$ est un graphe multiplicatif, qui est une sous-structure du graphe multiplicatif $G_1^\cdot \times G_2^\cdot$ d'après la proposition 20. Enfin, si $\bar{\varkappa}_i \in F$, puisque $\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$ est stable pour $\cdot$, $\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$ est une sous-catégorie de $G_1^\cdot \times G_2^\cdot$, ce qui prouve le théorème 8.

Corollaire: *Si* $K' = (\bar{\varkappa}_1, \bar{\varkappa}_2, \bar{\varkappa}_2', \bar{\varkappa}_1') \in \square N'$, *il existe un élément et un seul* $(\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1), \pi, \alpha(\bar{\varkappa}_1')) = \bar{\pi} \in N'$ *tel que* $\overline{p_i\iota} \cdot \bar{\pi} = \bar{\varkappa}_i'$.

Démonstration: D'après la définition du produit $\Pi = \alpha(\bar{\varkappa}_1) \times \alpha(\bar{\varkappa}_2)$, il existe $[\bar{\varkappa}_1', \bar{\varkappa}_2'] = (\Pi, [\varkappa_1', \varkappa_2'], \alpha(\bar{\varkappa}_1')) \in N'$ tel que $\bar{p}_i \cdot [\bar{\varkappa}_1', \bar{\varkappa}_2'] = \bar{\varkappa}_i'$, $i = 1, 2$. La relation: $K' \in \square N'$ signifie: $[\varkappa_1', \varkappa_2'] (\alpha(\bar{\varkappa}_i')) \subset \bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$. Puisque $\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$ est une p_N'-sous-structure de Π, il en résulte:

$$\bar{\pi} = (\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1), [\varkappa_1', \varkappa_2'], \alpha(\bar{\varkappa}_1')) \in N' \quad \text{et} \quad (\overline{p_i\iota}) \cdot \bar{\pi} = \bar{\varkappa}_i'.$$

Définition 15: *Soient* $\bar{\varkappa}_i \in N$ *(resp.* $\in N'$*) tels que* $\beta(\bar{\varkappa}_1) = \beta(\bar{\varkappa}_2)$; $\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$ (théorème 8) *sera appelé* classe multiplicative (*resp.* graphe multiplicatif) induit *de* $G_1^\cdot = \alpha(\bar{\varkappa}_1)$ *par* $(\bar{\varkappa}_2, \bar{\varkappa}_1)$.

Si $\bar{\varkappa}_i \in F$, la catégorie $\bar{\varkappa}_2^*(G_1^\cdot, \bar{\varkappa}_1)$ est la catégorie induite de $G_1^\cdot$ par $(\bar{\varkappa}_2, \bar{\varkappa}_1)$, au sens de [3].

Soit A une classe. Nous désignerons par $(A \times A)^\perp$ la catégorie obtenue en munissant la classe produit $A \times A$ de la loi de composition entre couples:

$$(u'', u_1') \perp (u', u) = (u'', u) \quad \text{si, et seulement si,} \quad u_1' = u'.$$

Soient $G^\cdot \in N'$ et $\bar{a}_0 = (G_0^\cdot, a_0, A) \in M$. On a:
$\overline{[\beta, \alpha]} = ((G_0^\cdot \times G_0^\cdot)^\perp, [\beta, \alpha], G^\cdot) \in N'$, où $[\beta, \alpha](f) = (\beta(f), \alpha(f))$
et
$$\bar{a}_0 \times \bar{a}_0 = ((G_0^\cdot \times G_0^\cdot)^\perp, a_0 \times a_0, (A \times A)^\perp) \in N'.$$

Définition 16: *Avec les notations précédentes, le graphe multiplicatif*
$$(\bar{a}_0 \times \bar{a}_0)^*(G^\cdot, \overline{[\beta, \alpha]})$$
induit de $G^\cdot$ *par* $(\bar{a}_0 \times \bar{a}_0, \overline{[\beta, \alpha]})$ *est appelé* graphe multiplicatif induit *de* $G^\cdot$ *par* a_0 *et noté* $a_0^*(G^\cdot)$.

Un élément du graphe multiplicatif $a_0^*(G^\cdot)$ est un triplet $(f, (u', u))$ où $f \in G$, $u \in A$ et $u' \in A$, tel que:
$$a_0(u) = \alpha(f) \quad \text{et} \quad a_0(u') = \beta(f).$$
L'application $[a_0, \delta]^{-1}$: $(a_0(u), (u, u)) \to u$ est une bijection de $(a_0^*(G^\cdot))_0$ sur A; ainsi A est une classe d'objets de $a_0^*(G^\cdot)$. Nous poserons:
$$\tilde{a} = (G^\cdot, p_1, a_0^*(G^\cdot)), \text{ où } p_1(f, (u', u)) = f.$$

Cas particulier: Si $G^\cdot$ est une catégorie, $a_0^*(G^\cdot)$ est la catégorie induite de $G^\cdot$ par a_0, au sens de [3].

L'application U:
$$(G^\cdot, \Phi, \bar{G}^\cdot) \to (G_0^\cdot, \Phi_0, \bar{G}_0^\cdot), \text{ où } (G^\cdot, \Phi, \bar{G}^\cdot) \in N',$$
définit un foncteur $\bar{U} = (M, U, N')$. Soit U_F la restriction de U à F et $\bar{U}_F = (M, U_F, F)$.

Théorème 9: *Pour que* $\bar{\Psi} = (G^\cdot, \Psi, \bar{G}^\cdot) \in N'$ *soit une* $(M, \bar{U})$*-injection, il faut et il suffit que l'on ait:*
$$\bar{\Psi} = (G^\cdot, \tilde{\Psi}, \Psi_0^*(G^\cdot)) \cdot \bar{\gamma}, \text{ avec } \bar{\gamma} = (\Psi_0^*(G^\cdot), \gamma, \bar{G}^\cdot) \in N'_\gamma.$$
Dans ce cas $\gamma(f) = (\Psi(f), (\beta(f), \alpha(f)))$, *pour tout* $f \in G$.

Démonstration: Montrons que $(G^\cdot, \tilde{\Psi}, \Psi_0^*(G^\cdot))$ est une $(M, \bar{U})$-injection. En effet, soit $\bar{\Phi} = (G^\cdot, \Phi, \Gamma^\cdot) \in N'$ tel que $\Phi_0 = \tilde{\Psi}_0 \Phi'_0$. Comme:
$\bar{\chi} = ((\bar{G}_0^\cdot \times \bar{G}_0^\cdot)^\perp, \chi, \Gamma^\cdot) = ((\bar{G}_0^\cdot \times \bar{G}_0^\cdot)^\perp, ([\Psi_0, \delta]^{-1}\Phi'_0 \times [\Psi_0, \delta]^{-1}\Phi'_0)[\beta, \alpha], \Gamma^\cdot) \in N'$,
on a:
$$(\overline{[\beta, \alpha]}, \bar{\Psi}_0 \times \bar{\Psi}_0, \bar{\Phi}, \bar{\chi}) \in \square N'$$
et il résulte du corollaire du théorème 8 que $\bar{\Phi}$ se décompose d'une manière unique sous la forme: $\bar{\Phi} = \tilde{\Psi} \cdot \bar{\Phi}'$, avec:
$$\bar{\Phi}' = (\Psi_0^*(G^\cdot), \Phi', \Gamma^\cdot) \in N',$$

l'application Φ' associant à $f \in \Gamma$ le triplet $(\Phi(f), (e', e))$, dans lequel e et e' sont définis par les relations:

$$(\Psi_0(e), (e, e)) = \Phi'_0(\alpha(f)) \quad \text{et} \quad (\Psi_0(e'), (e', e')) = \Phi'_0(\beta(f)) .$$

Par suite $\tilde{\Psi}$ est une $(M, \overline{U})$-injection. – Inversement soit

$$\overline{\Psi} = (G^{\cdot}, \Psi, \overline{G}^{\cdot}) \in N'$$

une $(M, \overline{U})$-injection. D'après ce qui précède, $(G^{\cdot}, \tilde{\Psi}, \Psi_0^*(G^{\cdot}))$ est aussi une $(M, \overline{U})$-injection. Puisque $(\Psi_0^*(G^{\cdot})_0, \gamma_0, \overline{G}_0^{\cdot}) \in M_\gamma$, où $\gamma_0 = [\Psi_0, \delta]$, il existe, en vertu du théorème 1, un élément

$$\overline{\gamma} = (\Psi_0^*(G^{\cdot}), \gamma, \overline{G}^{\cdot}) \in N'_\gamma \text{ tel que } \overline{\Psi} = \tilde{\Psi} \cdot \overline{\gamma} .$$

Corollaire: *Pour que* $\overline{\Psi} = (C^{\cdot}, \Psi, \overline{C}^{\cdot}) \in F$ *soit une* $(M, \overline{U}_F)$*-injection, il faut et il suffit que l'on ait:*

$$\overline{\Psi} = (C^{\cdot}, \tilde{\Psi}, \Psi_0^*(C^{\cdot})) \cdot \overline{\gamma}, \quad où \ \overline{\gamma} \in F_\gamma .$$

Démonstration: D'après le théorème 8, $\Psi_0^*(C^{\cdot}) \in F_0$. Puisque F est une sous-catégorie pleine de N', la condition est suffisante en vertu du théorème. Une démonstration analogue à la fin de celle du théorème montre que la condition est aussi nécessaire.

Proposition 31: *Soient* $(C, \varkappa_i, C_i, .)$, *où* $i = 1, 2$, *des catégories d'homomorphismes;* $(C_i, \overline{p_i \iota}, \varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1)), .)$ *est une catégorie d'homomorphismes. Si* C_1 *est saturée au-dessus de* C, *alors* $\varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1)$ *est saturée au-dessus de* C_2 *et* $(C, \varkappa_i \overline{p_i \iota}, \varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1), .)$ *est une catégorie d'homomorphismes.*

Démonstration: La première partie de la proposition est démontrée dans [3]. Supposons C_1 saturée au-dessus de C. Soient $(s_1, s_2) \in \varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1)_0$ et $\varphi_2 = (s'_2, \varphi, s_2) \in (C_2)_\gamma$; on a $(\varkappa_2(s'_2), \varphi, \varkappa_2(s_2)) \in C_\gamma$ et, puisque $\varkappa_2(s_2) = \varkappa_1(s_1)$, il existe $\varphi_1 = (s'_1, \varphi, s_1) \in C_1$; par suite (φ_1, φ_2) appartient à $\varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1)$ et $\varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1)$ est saturée au-dessus de C_2. Il en résulte que $(C, ., \varkappa_2^*(C_1, \varkappa_1), .)$ est une catégorie d'homomorphismes, ce qui démontre la proposition.

II. Graphes multiplicatifs structurés

1. Classes multiplicatives structurées

Soit (M, p_N, N, N_γ) la catégorie d'homomorphismes considérée au n° 3, I.

Soit $(\overline{G^\cdot}, \varphi, G^\cdot) \in N$; nous désignerons par $\varphi * \varphi$ la restriction de l'application $\varphi \times \varphi$ à $G^\cdot * G^\cdot$. Soit $\varkappa(G^\cdot)$ l'application:

$$(g, f) \to g \cdot f \quad \text{où} \quad (g, f) \in G^\cdot * G^\cdot .$$

Lorsqu'aucune confusion n'est possible, nous écrirons $\varkappa^\cdot$ au lieu de $\varkappa(G^\cdot)$. L'application: $(\overline{G^\cdot}, \varphi, G^\cdot) \to (\varkappa(\overline{G^\cdot}), \varphi, \varphi * \varphi, \varkappa(G^\cdot))$ définit une équivalence $\varkappa$ de N sur une sous-catégorie de $\square\square M$.

Soit (M, p, H) un foncteur. Dans tout ce paragraphe, nous identifierons $(\square\square H)_0$ (resp. $(\square\square M)_0$) avec H (resp. M).

Définition 1: *Une unité de la catégorie induite* $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ *sera appelée* classe multiplicative p-structurée; *un morphisme de* $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ *sera appelé* morphisme entre classes multiplicatives p-structurées.

Une classe multiplicative p-structurée est donc un couple $(G^\cdot, K)$ où $G^\cdot \in N_0$, $K \in H$ et $p(K) = (G, \varkappa(G^\cdot), G^\cdot * G^\cdot)$. Un morphisme entre classes multiplicatives p-structurées s'identifie à un quadruplet:

$$\overline{\Phi} = ((\overline{G^\cdot}, \overline{K}), \Phi, \Phi', (G^\cdot, K))$$

vérifiant les conditions suivantes:

$(G^\cdot, K)$ et $(\overline{G^\cdot}, \overline{K})$ sont des classes multiplicatives p-structurées;

$$(\overline{K}, \Phi, \Phi', K) \in \square H; (\overline{G^\cdot}, p(\Phi), G^\cdot) \in N \quad \text{et} \quad p(\Phi') = p(\Phi) * p(\Phi) .$$

Remarquons que l'application: $\overline{\Phi} \to (\overline{K}, \Phi, \Phi', K)$ est une équivalence de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ sur une sous-catégorie de $\square\square H$. Nous poserons:

$$\breve{p}_M(\overline{\Phi}) = p(\Phi) \in M; \ \breve{p}_N(\overline{\Phi}) = (\overline{G^\cdot}, p(\Phi), G^\cdot) \in N; \ \breve{p}_H(\overline{\Phi}) = \Phi \in H .$$

Définition 2: *Nous dirons que la classe multiplicative p-structurée* $(G^\cdot, K)$ *est* fortement p-structurée *si la condition suivante est vérifiée: Soit* $s = \beta(K)$; *il existe un produit* $s \times s$ *dans* H *tel que* $p(s \times s) = G \times G$, *et* $\alpha(K)$ *est une p-sous-structure de* $s \times s$.

Nous désignerons par $\overline{N}(p)$ la sous-catégorie pleine de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ ayant pour unités les classes multiplicatives fortement p-structurées.

Supposons désormais que $(M, p, H, .)$ soit une catégorie d'homomorphismes. Une classe multiplicative p-structurée $(G^\cdot, K)$ est entièrement déterminée par la donnée de $s = \beta(K)$, de $s' = \alpha(K)$ et de la loi de composition $\varkappa(G^\cdot) = p(K)$; elle sera représentée par le triplet $(G^\cdot, s, s')$.

Proposition 1: *$\varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)$ s'identifie à la catégorie des triplets*

$$\bar{\Phi} = ((\bar{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}'), \varphi, (G^\cdot, s, s'))$$

vérifiant les conditions suivantes: $(\bar{G}^\cdot, (\bar{s}, \varkappa(\bar{G}^\cdot), \bar{s}'))$ *et* $(G^\cdot, (s, \varkappa(G^\cdot), s'))$ *sont des classes multiplicatives p-structurées;* $(\bar{G}, \varphi, G) \in M$; $(\bar{G}^\cdot, \varphi, G^\cdot) \in N$; $(\bar{s}, \varphi, s) \in H$ *et* $(\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \in H$.

Nous poserons:

$$\check{p}_M(\bar{\Phi}) = (\bar{G}, \varphi, G);\ \check{p}_N(\bar{\Phi}) = (\bar{G}^\cdot, \varphi, G^\cdot);\ \check{p}_H(\bar{\Phi}) = (\bar{s}, \varphi, s).$$

Proposition 2: *$\bar{N}(p)_0$ s'identifie à la classe des couples $(G^\cdot, s)$ vérifiant les conditions suivantes:*

1) *On a $G^\cdot \in N_0$, $s \in H_0$ et $p(s) = G$.*

2) *Il existe un produit $s \times s$ dans H tel que $p(s \times s) = G \times G$ et il existe une p-sous-structure s' de $s \times s$ telle que $p(s') = G^\cdot * G^\cdot$.*

3) *On a $(s, \varkappa(G^\cdot), s') \in H$.*

$\bar{N}(p)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $p^*(N, p_N)$ ayant $\bar{N}(p)_0$ pour classe d'objets.

Démonstration: Supposons que $(G^\cdot, s)$ vérifie les conditions 1, 2 et 3. Puisque $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes, $s \times s$ et s' sont uniquement déterminés par la condition 2 et $(G^\cdot, s)$ s'identifie à: $(G^\cdot, (s, \varkappa(G^\cdot), s')) \in \bar{N}(p)_0$. – Soit $\bar{\Phi} = ((\bar{G}^\cdot, \varphi, G^\cdot), (\bar{s}, \varphi, s))$ un élément quelconque de la catégorie induite $p^*(N, p_N)$; si $(G^\cdot, s) \in \bar{N}(p)_0$ et $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}) \in \bar{N}(p)_0$, on a $(\bar{s} \times \bar{s}, \varphi \times \varphi, s \times s) \in H$, par définition du produit; comme $s' \prec s \times s$, $\bar{s}' \prec \bar{s} \times \bar{s}$ et $(\varphi * \varphi)\ (G^\cdot * G^\cdot) \subset \bar{G}^\cdot * \bar{G}^\cdot$, on trouve:

$$\Phi' = (\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \in H,\ \text{ donc } (\bar{K}, \Phi, \Phi', K) \in \Box H,\ \text{ où } \Phi = (\bar{s}, \varphi, s),$$

$K = (s, \varkappa(G^\cdot), s')$, et $\bar{K} = (\bar{s}, \varkappa(\bar{G}^\cdot), \bar{s}')$. Par suite on peut identifier $\bar{\Phi}$ avec $((\bar{G}^\cdot, \bar{s}), \varphi, (G^\cdot, s)) \in \bar{N}(p)$.

Nous ferons toujours les identifications dont les propositions 1 et 2 assurent l'existence.

Théorème 1: $(N, \check{p}_N, \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p), .)$ *est une catégorie d'homomorphismes. Si H est saturé au-dessus de M, alors $(H, \check{p}_H, \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de H.*

Démonstration: Montrons que les conditions:
$\bar{\Phi} = ((\bar{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}'), \varphi, (G^\cdot, s, s')) \in (\varkappa^*(\Box\Box H, \Box p))_\gamma$ et $(G^\cdot, s_1, s_1') \in \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)_0$ entraînent l'existence de $\bar{\Phi}_1 = ((\bar{G}^\cdot, \bar{s}_1, \bar{s}_1'), \varphi, (G^\cdot, s_1, s_1')) \in \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)$. En effet, puisque (M, p, H_γ) est une espèce de structures, les relations

$(\overline{G}, \varphi, G) \in M_\gamma$, $(\overline{G}^{\cdot} * \overline{G}^{\cdot}, \varphi * \varphi, G^{\cdot} * G^{\cdot}) \in M_\gamma$, $p(s_1) = p(s)$ et $p(s_1') = p(s')$ assurent qu'il existe

$$\Phi_1 = (\bar{s}_1, \varphi, s_1) \in H_\gamma \quad \text{et} \quad \Phi_1' = (\bar{s}_1', \varphi * \varphi, s_1') \in H_\gamma .$$

On a $(\overline{K}_1, \Phi_1, \Phi_1', K_1) \in \Box H$, où $K_1 = (s_1, \varkappa(G^{\cdot}), s_1')$ et $\overline{K}_1 = \Phi_1 \cdot K_1 \cdot \Phi_1'^{-1}$. Comme $(\varkappa(\overline{G}^{\cdot}), \varphi, \varphi * \varphi, \varkappa(G^{\cdot})) \in \Box M$ et $\Box p(\overline{K}_1, \Phi_1, \Phi_1', K_1) \in \Box M$, il en résulte $(\varkappa(\overline{G}^{\cdot}), \varphi, \varphi * \varphi, \varkappa(G^{\cdot})) = \Box p(\overline{K}_1, \Phi_1, \Phi_1', K_1)$, d'où $(\bar{s}_1, \varkappa(\overline{G}^{\cdot}), \bar{s}_1') = \overline{K}_1$ et $\overline{\Phi}_1 = ((\overline{G}_1^{\cdot}, \bar{s}_1, \bar{s}_1'), \varphi, (G^{\cdot}, s_1, s_1')) \in \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)$. On en déduit que $(N, ., \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes. – Supposons H saturé au-dessus de M. Soient

$$\Phi = (\bar{s}, \varphi, s) \in H_\gamma \quad \text{et} \quad (G^{\cdot}, s, s') \in \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)_0 .$$

Puisque $(\overline{G}, \varphi, G) \in M_\gamma$, il existe $(\overline{G}^{\cdot}, \varphi, G^{\cdot}) \in N_\gamma$ et on a

$$(\overline{G}^{\cdot} * \overline{G}^{\cdot}, \varphi * \varphi, G^{\cdot} * G^{\cdot}) \in M_\gamma .$$

H étant saturé au-dessus de M, il existe $\Phi' = (\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \in H_\gamma$ et on obtient

$$(\bar{s}, \varkappa(\overline{G}^{\cdot}), \bar{s}') = \Phi \cdot (s, \varkappa(G^{\cdot}), s') \cdot (\Phi')^{-1} \in H .$$

Par conséquent $(\overline{G}^{\cdot}, \bar{s}, \bar{s}') \in \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)$, et $(H, ., \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de H.

Corollaire: *Si H est saturé au-dessus de M, alors $(M, \check{p}_M, \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de M.*

En effet, $\check{p}_M = p\check{p}_H$ et, puisque $(H, \check{p}_H, ., .)$ et $(M, p, H, .)$ sont saturées, $(M, \check{p}_M, \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée.

Théorème 2: *Si $(M, p, H, .)$ est saturée au-dessus de M (resp. est à produits finis), $\overline{N}(p)$ est une sous-catégorie saturée de $\varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)$.*

Démonstration: Soient $(G^{\cdot}, s) \in \overline{N}(p)_0$ et

$$\overline{\Phi} = ((\overline{G}^{\cdot}, \bar{s}, \bar{s}'), \varphi, (G^{\cdot}, s, s')) \in (\varkappa^*(\Box\Box H, \Box p))_\gamma .$$

On a $s \times s \in H_0$, $(\bar{s}, \varphi, s) \in H_\gamma$ et $(\overline{G} \times \overline{G}, \varphi \times \varphi, G \times G) \in M_\gamma$. Si $(M, ., H, .)$ est à produits finis, il existe $\bar{s} \times \bar{s}$ et on a

$$(\bar{s} \times \bar{s}, \varphi \times \varphi, s \times s) \in H_\gamma .$$

Si H est saturé au-dessus de M, il existe $(\overline{S}, \varphi \times \varphi, s \times s) \in H_\gamma$; montrons qu'alors $\overline{S} = \bar{s} \times \bar{s}$ dans H. En effet, soient $(s, p_i, s \times s)$, où $i = 1, 2$, les projections canoniques de $s \times s$ sur s, p_i' la projection canonique de $\overline{G} \times \overline{G}$ sur $\overline{G}$. On trouve:

$$(\bar{s}, p_i', \overline{S}) = (\bar{s}, \varphi, s) \cdot (s, p_i, s \times s) \cdot (s \times s, (\varphi \times \varphi)^{-1}, \overline{S}) \in H .$$

Par ailleurs, si $\bar{f}_i = (\bar{s}, f_i, \sigma) \in H$, $i = 1, 2$, on a:

$$(s \times s, [\varphi^{-1}f_1, \varphi^{-1}f_2], \sigma) \in H,$$

d'où $(\bar{S}, [f_1, f_2], \sigma) = (\bar{S}, \varphi \times \varphi, s \times s) . (s \times s, [\varphi^{-1}f_1, \varphi^{-1}f_2], \sigma) \in H$.
On en déduit $\bar{S} = \bar{s} \times \bar{s}$. – Enfin les conditions:

$$s' \prec s \times s, (\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \in H_\gamma \quad \text{et} \quad (\bar{s} \times \bar{s}, \varphi \times \varphi, s \times s) \in H_\gamma$$

entraînent $\bar{s}' \prec \bar{s} \times \bar{s}$ en vertu de la proposition 3, I. Donc $(\bar{G}^{\cdot}, \bar{s}, \bar{s}') \in \bar{N}(p)_0$ et $\bar{N}(p)$ est une sous-catégorie saturée de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$.

Corollaire: *Si $(M, p, H, .)$ est à produits finis (resp. est saturée au-dessus de M), $(N, \check{p}_N, \bar{N}(p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes. Si H est saturé au-dessus de M, $(H, \check{p}_H, \bar{N}(p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de H et $(M, \check{p}_M, \bar{N}(p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de M.*

Ce corollaire résulte des théorèmes 1 et 2.

Théorème 3: *Soit $(M, p, H, .)$ une catégorie d'homomorphismes à produits finis, saturée au-dessus de M. Alors $(M, \check{p}_M, \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$ et $(M, \check{p}_M, \bar{N}(p), .)$ sont des catégories d'homomorphismes à produits finis.*

Démonstration: Soient $(G_i, s_i, s_i') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$, où $i = 1, 2$. On a: $G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot} \in N_0$ et $K_1 \times K_2 = (s_1 \times s_2, \varkappa(G_1^{\cdot}) \times \varkappa(G_2^{\cdot}), s_1' \times s_2') \in H$.
Soit π la bijection de $(G_1 \times G_1) \times (G_2 \times G_2)$ sur $(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2)$ définie par $\pi((g_1', g_1), (g_2', g_2)) = ((g_1', g_2'), (g_1, g_2))$; soit π' la restriction de π à $p(s_1' \times s_2') = (G_1^{\cdot} * G_1^{\cdot}) \times (G_2^{\cdot} * G_2^{\cdot})$. Il existe $(S', \pi', s_1' \times s_2') \in H_\gamma$, car H est saturé au-dessus de M; on a: $p(S') = (G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}) * (G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot})$ et

$$(s_1 \times s_2, \varkappa(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}), S') = (K_1 \times K_2) \cdot (S', \pi', s_1' \times s_2')^{-1} \in H,$$

donc $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$. – Supposons de plus $(G_i^{\cdot}, s_i) \in \bar{N}(p)_0$. D'après la proposition 3, II [2], on a $s_1' \times s_2' \prec (s_1 \times s_1) \times (s_2 \times s_2)$; en vertu de la proposition 4, II, [2]

$$((s_1 \times s_2) \times (s_1 \times s_2), \pi, (s_1 \times s_1) \times (s_2 \times s_2)) \in H_\gamma,$$

d'où $S' \prec (s_1 \times s_2) \times (s_1 \times s_2)$, d'après la proposition 3, I. Donc $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2) \in \bar{N}(p)_0$. – Démontrons que $(M, ., \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$ est une catégorie à produits finis, dans laquelle $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') = (G_1^{\cdot}, s_1, s_1') \times \times (G_2^{\cdot}, s_2, s_2')$. Soit p_i (resp. p_i') la projection canonique de $G_1 \times G_2$ sur G_i (resp. de $p(s_1' \times s_2')$ sur $p(s_i')$); les relations: $(G_i^{\cdot}, p_i, G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}) \in N$, $(s_i, p_i, s_1 \times s_2) \in H$ et

$$(s_i', p_i * p_i, S') = (s_i', p_i', s_1' \times s_2') . (s_1' \times s_2', \pi', S') \in H$$

entraînent $((G_i^\cdot, s_i, s_i'), p_i, (G_1^\cdot \times G_2^\cdot, s_1 \times s_2, S')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)$. – Enfin soient
$$\overline{\Phi}_i = ((G_i^\cdot, s_i, s_i'), \varphi_i, (\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p);$$
comme $(M, ., H, .)$ et $(M, ., N, .)$ sont à produits finis, on a: $(G_1^\cdot \times G_2^\cdot, [\varphi_1, \varphi_2], \overline{G}^\cdot) \in N$; $(s_1 \times s_2, [\varphi_1, \varphi_2], \bar{s}) \in H$; $\Psi = (s_1' \times s_2', [\varphi_1 * \varphi_1, \varphi_2 * \varphi_2], \bar{s}') \in H$, où $[\varphi_1, \varphi_2](f) = (\varphi_1(f), \varphi_2(f))$. On trouve:
$$(S', [\varphi_1, \varphi_2] * [\varphi_1, \varphi_2], \bar{s}') = (S', \pi', s_1' \times s_2') . \Psi \in H,$$
et par suite $[\overline{\Phi}_1, \overline{\Phi}_2] = ((G_1^\cdot \times G_2^\cdot, s_1 \times s_2, S'), [\varphi_1, \varphi_2], (\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)$.

Théorème 4: *Soit* $(G^\cdot, s, s') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ *(resp.* $\in \overline{N}(p)_0$*); si* $G_1^\cdot$ *est une sous-classe multiplicative de* $G^\cdot$ *et si* s_1 *et* s_1' *sont des p-sous-structures de* s *et* s' *resp. telles que* $p(s_1) = G_1$ *et* $p(s_1') = G_1^\cdot * G_1^\cdot$, *alors* $(G_1^\cdot, s_1, s_1')$ *est une sous-structure de* $(G^\cdot, s, s')$ *dans* $(M, ., \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$ *(resp. dans* $(M, ., \overline{N}(p), .)$*)*.

Démonstration: D'après la proposition 11, I, $G_1^\cdot$ est une p_N-sous-structure de $G^\cdot$. D'après la proposition 2, I, les conditions: $s_1 \underset{p}{<} s$, $s_1' \underset{p}{<} s'$ et $\varkappa(G^\cdot)(G_1^\cdot * G_1^\cdot) \subset G_1$ entraînent:
$$(s_1, \varkappa(G_1), s_1') \underset{p}{<} (s, \varkappa(G^\cdot), s'),$$
d'où
$$(G_1^\cdot, s_1, s_1') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0 \quad \text{et} \quad ((G^\cdot, s, s'), \iota, (G_1^\cdot, s_1, s_1')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p).$$
Soit $\Phi = ((G^\cdot, s, s'), \varphi, (\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)$ tel que $\varphi(\overline{G}) \subset G_1$; on a alors $(\varphi * \varphi)(\overline{G}^\cdot * \overline{G}^\cdot) \subset G_1^\cdot * G_1^\cdot$; des relations:
$$G_1^\cdot \underset{p_N}{<} G^\cdot, \quad s_1 \underset{p}{<} s \quad \text{et} \quad s_1' \underset{p}{<} s'$$
on déduit: $(G_1^\cdot, \varphi, \overline{G}^\cdot) \in N$; $(s_1, \varphi, \bar{s}) \in H$ et $(s_1', \varphi * \varphi, \bar{s}') \in H$, donc
$$((G_1^\cdot, s_1, s_1'), \varphi', (\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p) \quad \text{et} \quad (G_1^\cdot, s_1, s_1') \underset{p_M}{<} (G^\cdot, s, s').$$
Si on suppose de plus $(G^\cdot, s) \in \overline{N}(p)_0$, on a:
$$s_1' < s' < s \times s$$
et, puisque $p(s_1') \subset p(s_1 \times s_1)$, le théorème 1, I, montre que $s_1' < s_1 \times s_1$, donc $(G_1^\cdot, s_1, s_1') \in \overline{N}(p)_0$.

Remarque: Les conditions $(G^\cdot, s) \in \overline{N}(p)_0$, $G_1 \subset G$, $s_1 < s$ et $p(s_1) = G_1$ n'entraînent pas toujours l'existence de $s_1' < s'$ tel que $(G_1^\cdot, s_1, s_1')$ soit une classe multiplicative fortement p-structurée, même si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite.

Théorème 5: *Soient* $(G^{\cdot}, s, s') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ *et* ϱ *une relation d'équivalence compatible sur* $G^{\cdot}$ *telle que l'on ait:*

$$\overline{\varrho} = (s/\varrho, \tilde{\varrho}, s) \in H^s(M^s, p) \text{ et } \overline{\varrho * \varrho} = (\overline{s}', \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, s') \in H^s(M^s, p),$$

où $\tilde{\varrho}$ *désigne la surjection canonique de* G *sur* G/ϱ. *Alors* $(G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \overline{s}')$ *est une structure quotient de* $(G^{\cdot}, s, s')$ *dans* $(M, ., \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$.

Démonstration: D'après la proposition 12, I, $G^{\cdot}$ admet une classe multiplicative quotient $G^{\cdot}/\varrho$ et on a:

$$(\varkappa(G^{\cdot}/\varrho), \tilde{\varrho}, \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, \varkappa(G^{\cdot})) \in \square M;$$

la proposition 2, I, entraîne $(s/\varrho, \varkappa(G^{\cdot}/\varrho), \overline{s}') \overset{p}{\prec} (s, \varkappa(G^{\cdot}), s')$,
d'où $\Gamma_\varrho = (G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \overline{s}') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ et

$$(\Gamma_\varrho, \tilde{\varrho}, (G^{\cdot}, s, s')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p).$$

Soit $\Phi = ((\tilde{G}^{\cdot}, \tilde{s}, \tilde{s}'), \varphi' \tilde{\varrho}, (G^{\cdot}, s, s')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)$; alors on a $\varphi'\tilde{\varrho} * \varphi'\tilde{\varrho} = (\varphi' * \varphi')(\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})$ et les relations:

$$G^{\cdot}/\varrho \overset{pN}{\prec} G^{\cdot}, \quad s/\varrho \overset{p}{\prec} s \quad \text{et} \quad \overline{s}' \overset{p}{\prec} s'$$

entraînent:

$$(\tilde{G}^{\cdot}, \varphi', (G^{\cdot}/\varrho)) \in N; \ (\tilde{s}, \varphi', s/\varrho) \in H \quad \text{et} \quad (\tilde{s}', \varphi' * \varphi', \overline{s}') \in H,$$

donc

$$\Phi' = ((\tilde{G}^{\cdot}, \tilde{s}, \tilde{s}'), \varphi', \Gamma_\varrho) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p) \text{ et}$$

$$\Phi = \Phi' \cdot (\Gamma_\varrho, \tilde{\varrho}, (G^{\cdot}, s, s')).$$

Ceci démontre le théorème 5.

Remarque: Si dans le théorème 5 on suppose de plus $(G^{\cdot}, s) \in \overline{N}(p)_0$, il n'en résulte pas que $(G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \overline{s}') \in \overline{N}(p)_0$, comme il peut être montré par des exemples de classes multiplicatives structurées dans $\tilde{T}$.

Théorème 6: *Supposons* $(M, p, H, .)$ *saturée au-dessus de* M, *à produits finis et résolvante à droite. Soient*

$$\overline{\mu}_i = ((G^{\cdot}, s, s'), \mu_i, (G_i^{\cdot}, s_i, s_i')) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p) \ (\textit{resp.} \in \overline{N}(p)),$$

où $i = 1, 2$. *Soit* $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') = (G_1^{\cdot}, s_1, s_1') \times (G_2^{\cdot}, s_2, s_2')$ (théorème 3). *Il existe* $\sigma \prec s_1 \times s_2$ *et* $\sigma' \prec S'$ *tels que* $(\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1), \sigma, \sigma')$ *soit une sous-structure de* $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S')$ *dans* $(M, p_M, \varkappa^*(\square\square H, \square p), .)$ (*resp. dans* $(M, ., \overline{N}(p), .)$), $\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1)$ *désignant la classe multiplicative induite de* $G_1^{\cdot}$ *par* $((G^{\cdot}, \mu_2, G_2^{\cdot}), (G^{\cdot}, \mu_1, G_1^{\cdot}))$.

Démonstration: Puisque $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, le couple $((s, \mu_1 p_1, s_1 \times s_2), (s, \mu_2 p_2, s_1 \times s_2))$ admet un p-noyau σ tel que $p(\sigma) =$

$= \overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1)$, où p_i désigne la projection canonique de $G_1 \times G_2$ sur G_i. D'après le théorème 3, il existe S' tel que:

$(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ (*resp.* $\in N(p)_0$) et $(S', \pi', s_1' \times s_2') \in H_\gamma$, où $\pi'((g_1', g_1), (g_2', g_2)) = ((g_1', g_2'), (g_1, g_2))$. Le couple

$$((s \times s, (\mu_1 * \mu_1)\, p_1' \pi'^{-1}, S'), (s \times s, (\mu_2 * \mu_2)\, p_2' \pi'^{-1}, S')) ,$$

où p_1' est la projection canonique de $p(s_1' \times s_2')$ sur $p(s_1')$, admet un p-noyau $\sigma' < S'$ tel que $p(\sigma') = (\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1)) * (\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1))$. Il résulte donc du théorème 4 que l'on a:

$$(\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1), \sigma, \sigma') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0 \quad (\text{resp.} \in \overline{N}(p)_0) .$$

2. Graphes structurés

Soit $(M, p_G, G, .)$ la catégorie d'homomorphismes considérée au n° 3, I. Rappelons qu'une unité de G est un graphe (G, β_G, α_G), unité que nous noterons aussi (G, β, α), ou simplement $[G]$. Soit (M, p, H) un foncteur.

Définition 3: *On appellera* graphe p-structuré *un triplet* $([G], B, A)$ *vérifiant les conditions suivantes:*

1) $[G] \in G_0$, $B \in H$, $A \in H$, $p(B) = ([G]_0, \beta_G, G)$, $p(A) = ([G]_0, \alpha_G, G)$;
2) $\beta(A) = \beta(B) = s_0 \in H_0$, $\alpha(A) = \alpha(B) = s \in H_0$;
3) s_0 *est une sous-structure de* s *relativement à* (M^i, p) (voir n° 3, I).

Nous désignerons par $G(p)_0$ la classe des graphes p-structurés.

Définition 4: *On appellera* morphisme entre graphes p-structurés *un triplet* $\overline{\Phi} = (([\overline{G}], \overline{B}, \overline{A}), \Phi, ([G], B, A))$ *vérifiant les conditions suivantes:*

1) $([G], B, A) \in G(p)_0$ *et* $([\overline{G}], \overline{B}, \overline{A}) \in G(p)_0$;
2) $\overline{p}_H(\overline{\Phi}) = \Phi \in H$ *et* $\overline{p}_G(\overline{\Phi}) = ([\overline{G}], p(\Phi), [G]) \in G$.
3) *On a:* $(\overline{B}, \Phi_0, \Phi, B) \in \square H$ *et* $(\overline{A}, \Phi_0, \Phi, A) \in \square H$, *où* $\Phi_0 \underset{p}{<} \Phi$.

Proposition 3: *La classe* $G(p)$ *des morphismes entre graphes* p*-structurés est une catégorie;* $(G, \overline{p}_G, G(p))$ *et* $(H, \overline{p}_H, G(p))$ *sont des foncteurs.*

Nous supposons désormais que $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes.

Proposition 4: $G(p)_0$ *s'identifie à la classe des couples* $([G], s)$ *vérifiant les conditions suivantes:*

1) $[G] \in G_0$, $s \in H_0$ *et* $p(s) = G$.
2) *Il existe* $s_0 \underset{p}{<} s$ *tel que* $p(s_0) = [G]_0$ *et on a:*

$$(s_0, \alpha_G, s) \in H \quad et \quad (s_0, \beta_G, s) \in H .$$

Démonstration: Si $([G], s)$ vérifie les conditions 1 et 2, alors

$$([G], (s_0, \beta, s), (s_0, \alpha, s)) \in G(p)_0 .$$

Inversement soit $([G], B, A) \in G(p)_0$, $s_0 = \beta(A)$ et $s = \alpha(A)$; le couple $([G], s)$ vérifie les conditions 1 et 2 et on a:

$$A = (s_0, \alpha_G, s) \quad \text{et} \quad B = (s_0, \beta_G, s);$$

comme la p-sous-structure s_0 de s est entièrement déterminée par la donnée de s et de $[G]_0$ d'après la proposition 6, I, l'application $([G], B, A) \to ([G], s)$ est une bijection.

Proposition 5: *$G(p)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine de $p^*(G, p_G)$ admettant $G(p)_0$ pour classe d'objets.*

Démonstration: Soit $\bar{\Phi} = (([\bar{G}], \varphi, [G]), (\bar{s}, \varphi, s)) \in p^*(G, p_G)$ tel que $([G], s)$ et $([\bar{G}], \bar{s})$ vérifient les conditions 1 et 2 de la proposition 4. D'après la proposition 2, I, il existe $\Phi_0 = (\bar{s}_0, \varphi_0, s_0) \in H$, où $s_0 \prec s$, $\bar{s}_0 \prec \bar{s}$, $p(s_0) = [G]_0$ et $p(\bar{s}_0) = [\bar{G}]_0$. Il en résulte, en posant $\Phi = (\bar{s}, \varphi, s)$,

$$((\bar{s}_0, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}), \Phi_0, \Phi, (s_0, \alpha_G, s)) \in \square H ;$$

$$((\bar{s}_0, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}), \Phi_0, \Phi, (s_0, \beta_G, s)) \in \square H .$$

Donc $\bar{\Phi}$ s'identifie à $(([\bar{G}], \bar{s}), \Phi, ([G], s)) \in G(p)$. – Inversement si $(([\bar{G}], \bar{B}, \bar{A}), \Phi, ([G], B, A)) \in G(p)$, on a $(([\bar{G}], p(\Phi), [G]), \Phi) \in p^*(G, p_G)$.

Nous identifierons désormais $G(p)$ à la sous-catégorie pleine de $p^*(G, p_G)$ lui correspondant d'après la proposition 5. Ainsi un graphe p-structuré sera représenté par le couple $([G], s)$; nous désignerons par s_0 la p-sous-structure de s telle que $p(s_0) = [G]_0$. Un morphisme $\bar{\Phi}$ entre graphes p-structurés sera écrit sous la forme:

$$(([\bar{G}], \bar{s}), \varphi, ([G], s)), \text{ où } ([\bar{G}], \varphi, [G]) \in G \text{ et } (\bar{s}, \varphi, s) \in H .$$

Proposition 6: *Soient $[G] \in G_0$, $s \in H_0$ et $p(s) = G$. Pour que $([G], s)$ soit un graphe p-structuré, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée:*

1) *Il existe $s_0 \prec s$ tel que $p(s_0) = [G]_0$; on a:*

$$(s, \alpha, s) \in H \quad \text{et} \quad (s, \beta, s) \in H .$$

1') *Il existe $s_0 \in H_0$ tel que $(s, \iota, s_0) \in H$, $(s_0, \alpha, s) \in H$ et $(s_0, \beta, s) \in H$.*

Démonstration: Si $([G], s) \in G(p)_0$, les conditions 1 et 1' sont évidemment vérifiées. – Supposons la condition 1 vérifiée; des relations:

$$(s, \alpha, s) \in H \quad \text{et} \quad \alpha(G) \subset [G]_0, \text{ on déduit } (s_0, \alpha, s) \in H$$

puisque $s_0 < s$; de même $(s_0, \beta, s) \in H$, et $([G], s) \in G(p)_0$. – Supposons la condition 1′ vérifiée. Comme $s_0 = (s_0, \alpha, s) \cdot (s, \iota, s_0)$, il résulte de la proposition 6, I que $s_0 < s$, d'où $([G], s) \in G(p)_0$.

Théorème 7: *Si H est saturé au-dessus de M, $G(p)$ est une sous-catégorie saturée de $p^*(G, p_G)$.*

Démonstration: Soient $([G], s) \in G(p)_0$ et

$$\Phi = (([\bar{G}], \varphi, [G]), (\bar{s}, \varphi, s)) \in (p^*(G, p_G))_\gamma .$$

Montrons que $([\bar{G}], \bar{s})$ est un graphe p-structuré. En effet, puisque H est saturé au-dessus de M, il existe $(\bar{s}_0, \varphi_0, s_0) \in H_\gamma$, où $\varphi_0 = \varphi\, \iota$; comme $(\bar{s}, \varphi, s) \in H_\gamma$, on a $\bar{s}_0 < \bar{s}$ d'après la proposition 3, I; il en résulte:

$$(\bar{s}_0, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}) = (\bar{s}_0, \varphi_0, s_0) \cdot (s_0, \alpha_G, s) \cdot (\bar{s}, \varphi, s)^{-1} \in H;$$

de même $(\bar{s}_0, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H$, donc $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p)_0$.

Corollaire: *Si H est saturé au-dessus de M, $(G, \bar{p}_G, G(p), .)$, $(H, \bar{p}_H, G(p), .)$ et $(M, p\bar{p}_H, G(p), .)$ sont des catégories d'homomorphismes; de plus $G(p)$ est saturé au-dessus de G et de H.*

Ce corollaire résulte du théorème 7 et de la proposition 31, I.

Proposition 7: *Si $(M, p, H, .)$ est saturée au-dessus de M et à produits finis, $(M, ., G(p), .)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis.*

Démonstration: Soient $([G_i], s_i) \in G(p)_0$, où $i = 1, 2$. On a:
$[G_1] \times [G_2] = [G_1 \times G_2] \in G_0$, où $\alpha_{G_1 \times G_2} = \alpha_{G_1} \times \alpha_{G_2}$, $\beta_{G_1 \times G_2} = \beta_{G_1} \times \beta_{G_2}$,

$$(s_1 \times s_2, \iota \times \iota, (s_1)_0 \times (s_2)_0) \in H,$$

$((s_1)_0 \times (s_2)_0, \alpha_{G_1 \times G_2}, s_1 \times s_2) \in H$ et $((s_1)_0 \times (s_2)_0, \beta_{G_1 \times G_2}, s_1 \times s_2) \in H$ et, d'après la proposition 6, $([G_1 \times G_2], s_1 \times s_2) \in G(p)_0$. On en déduit que $G(p)$ est à produits finis, avec

$$([G_1 \times G_2], s_1 \times s_2) = ([G_1], s_1) \times ([G_2], s_2).$$

Définition 5: *Une $p\bar{p}_H$-sous-structure (resp. une $p\bar{p}_H$-structure quotient) $([\bar{G}], \bar{s})$ de $([G], s) \in G(p)_0$ sera appelée* sous-graphe (*resp.* graphe quotient) *p-structuré de* $([G], s)$.

Puisque $[\bar{G}]$ est un graphe, il résulte du théorème 2, I, que $([\bar{G}], \bar{s})$ est aussi une $\bar{p}_G$-sous-structure (resp. une $\bar{p}_G$-structure quotient) de $([G], s)$.

Proposition 8: *Soient $([G], s) \in G(p)_0$, $[\bar{G}]$ un sous-graphe de $[G]$ et $\bar{s} \underset{p}{<} s$ tel que $p(\bar{s}) = \bar{G}$. S'il existe $\bar{s}_0 < \bar{s}$ tel que $p(\bar{s}_0) = [\bar{G}]_0$, $([\bar{G}], \bar{s})$ est un sous-graphe p-structuré de $([G], s)$.*

Démonstration: Comme $s_0 \prec s, \bar{s}_0 \prec s$ et $p(\bar{s}_0) \subset p(s_0)$, on a $\bar{s}_0 \prec s_0$, d'après le théorème 1, I. $\alpha_{\bar{G}}$ étant une restriction de α_G, les conditions: $\alpha_G(\bar{G}) \subset [\bar{G}]_0$,

$$(s_0, \alpha_G, s) \in H,\ \bar{s}_0 \prec s_0 \text{ et } \bar{s} \prec s \text{ entraînent } (\bar{s}_0, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H;$$

de même $(\bar{s}_0, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H$, et par suite $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p)_0$. Puisque $([\bar{G}], \bar{s})$ est une sous-structure de $([G], s)$ dans $(M, ., p^*(G, p_G), .)$ d'après la proposition 5, I, $([\bar{G}], \bar{s})$ est aussi une sous-structure de $([G], s)$ dans la sous-catégorie pleine $G(p)$ de $p^*(G, p_G)$.

Proposition 9: *Soient* $([G], s) \in G(p)_0$ *et* ϱ *une relation d'équivalence sur* G, *compatible avec* α_G *et* β_G, *telle qu'il existe une p-structure quotient* s/ϱ. *S'il existe* $\bar{s}_0 \prec s/\varrho$ *avec* $p(\bar{s}_0) = [G/\varrho]_0$, *alors* $([G/\varrho], s/\varrho)$ *est un graphe quotient p-structuré de* $([G], s)$.

Démonstration: Soit $\tilde{\varrho}$ l'application: $f \to f \bmod \varrho$, où $f \in G$. Les conditions:

$$s/\varrho \overset{p}{\longrightarrow\!\!<} s,\ (s/\varrho, \tilde{\varrho}\alpha_G, s) = (s/\varrho, \tilde{\varrho}, s) \cdot (s, \alpha_G, s) \in H \quad \text{et} \quad \alpha_{G/\varrho}\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}\alpha_G$$

entraînent $(s/\varrho, \alpha_{G/\varrho}, s/\varrho) \in H$ en vertu de la proposition 2, I; de même $(s/\varrho, \beta_{G/\varrho}, s/\varrho) \in H$ et on a $([G/\varrho], s/\varrho) \in G(p)_0$, d'après la proposition 6. – Comme $([G/\varrho], s/\varrho)$ est une structure quotient de $([G], s)$ dans $(M, ., p^*(G, p_G), .)$ d'après la proposition 5, I, et que $G(p)$ est une sous-catégorie pleine de $p^*(G, p_G)$, on a aussi $([G/\varrho], s/\varrho) \longrightarrow\!\!< ([G], s)$ dans $(M, ., G(p), .)$.

Proposition 10: *Supposons* $(M, p, H, .)$ *résolvante à droite. Pour qu'un couple* $([G], s)$ *soit un graphe p-structuré, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées:*

1) $[G] \in G_0$, $s \in H_0$ *et* $p(s) = G$.

2) *On a:* $(s, \alpha, s) \in H$ *et* $(s, \beta, s) \in H$.

En effet, les conditions sont évidemment nécessaires. Si elles sont vérifiées, le couple $(s, (s, \alpha, s))$ admet un p-noyau $s_0 \prec s$ tel que $p(s_0) = [G]_0$ et on a $([G], s) \in G(p)_0$ en vertu de la proposition 6.

Corollaire 1: *Si* $(M, p, H, .)$ *est résolvante à droite,* $G(p)$ *est une sous-catégorie saturée de* $p^*(G, p_G)$; $(G, \bar{p}_G, G(p), .)$, $(H, \bar{p}_H, G(p),)$ *et* $(M, p\bar{p}_H, G(p), .)$ *sont des catégories d'homomorphismes.*

Démonstration: Les conditions: $([G], s) \in G(p)_0$ et

$$\Phi = (([\bar{G}], \varphi, [G]), (\bar{s}, \varphi, s)) \in p^*(G, p_G)_\gamma$$

entraînent:

$$(\bar{s}, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}) = (\bar{s}, \varphi, s) \cdot (s, \alpha_G, s) \cdot (\bar{s}, \varphi, s)^{-1} \in H \quad \text{et} \quad (\bar{s}, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H,$$

d'où $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p)_0$ en vertu de la proposition 10. Par suite $G(p)$ est saturée dans $p^*(G, p_G)$ et le corollaire résulte de la proposition 31, I.

Corollaire 2: *Si* $(M, p, H, .)$ *est résolvante à droite et à produits finis* $(M, ., G(p), .)$ *est à produits finis.*

En effet, si $([G_i], s_i) \in G(p)_0$, $i = 1, 2$, on a:

$$(s_1 \times s_2, \alpha_{G_1 \times G_2}, s_1 \times s_2) \in H \quad \text{et} \quad (s_1 \times s_2, \beta_{G_1 \times G_2}, s_1 \times s_2) \in H,$$

d'où $([G_1 \times G_2], s_1 \times s_2) = ([G_1], s_1) \times ([G_2], s_2)$ dans $G(p)$.

Théorème 8: *Supposons* $(M, p, H, .)$ *résolvante à droite; soit* $([G], s) \in G(p)_0$. *Si* $[\bar{G}] \underset{p_G}{<} [G]$, $\bar{s} \underset{p}{<} s$ *et* $p(\bar{s}) = \bar{G}$, *alors* $([\bar{G}], \bar{s})$ *est un sous-graphe p-structuré de* $([G], s)$. *Si* ϱ *est une relation d'équivalence sur G compatible avec* α_G *et* β_G *et si s admet une p-structure quotient* s/ϱ *par* ϱ, $([G/\varrho], s/\varrho)$ *est un graphe quotient p-structuré de* $([G], s)$.

Démonstration: Les conditions: $(s, \alpha_G, s) \in H$ et $\alpha_G(\bar{G}) \subset \bar{G}$ entraînent: $(\bar{s}, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H$; de même $(\bar{s}, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H$, donc $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p)$, d'après la proposition 10. – Une démonstration analogue à celle de la proposition 9 prouve: $(s/\varrho, \alpha_{G/\varrho}, s/\varrho) \in H$ et $(s/\varrho, \beta_{G/\varrho}, s/\varrho) \in H$, donc $([G/\varrho], s/\varrho) \in G(p)_0$. Le théorème résulte des propositions 5, I, et 5.

Corollaire: *Si* $(M, p, H, .)$ *est résolvante à droite,* $(M, p\bar{p}_H, G(p), .)$ *est résolvante à droite.*

En effet, soient $\bar{\Phi}_i = (([\bar{G}], \bar{s}), \varphi_i, ([G], s)) \in G(p)$, où $i = 1, 2$. Soit $[G']$ le graphe p_G-noyau du couple $(([\bar{G}], \varphi_1, [G]), ([\bar{G}], \varphi_2, [G]))$ et s' le p-noyau du couple $((\bar{s}, \varphi_1, s), (\bar{s}, \varphi_2, s))$. Il résulte du théorème 8 que $([G'], s')$ est le $p\bar{p}_H$-noyau de $(\bar{\Phi}_1, \bar{\Phi}_2)$.

Nous supposons désormais $(M, p, H, .)$ à produits finis. Soit H' une sous-catégorie de H contenant H_γ et soit p' la restriction de p à H'.

Définition 6: *On dira que* $([G], s)$ *est un* graphe (p, H')-structuré (*resp.* $(p, (H', H'))$-structuré) *si les conditions suivantes sont vérifiées:*

1) $([G], s) \in G(p)_0$.

2) *On a* $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H'$, *où* $[\beta, \alpha](f) = (\beta(f), \alpha(f))$, $f \in G$ (*resp. on a* $(s_0, \alpha, s) \in H'$ *et* $(s_0, \beta, s) \in H'$).

Proposition 11: *Soient* $[G] \in G_0$, $s \in H_0$ *et* $p(s) = G$. *Pour que* $([G], s)$ *soit un graphe* (p, H')- (*resp.* $(p, (H', H'))$-)*structuré, il faut et il suffit que l'une des conditions équivalentes suivantes soit vérifiée:*

1) *Il existe* $s_0 \underset{p}{<} s$ *tel que* $p(s_0) = [G]_0$; *on a* $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H'$ (*resp. on a* $(s_0, \alpha, s) \in H'$ *et* $(s_0, \beta, s) \in H'$).

1') *Il existe* $s_0 \in H_0$ *tel que* $p(s_0) = [G]_0$ *et* $(s, \iota, s_0) \in H$; *on a* $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H'$ (*resp. on a* $(s_0, \alpha, s) \in H'$ *et* $(s_0, \beta, s) \in H'$).

Démonstration: Les conditions sont évidemment nécessaires. La condition $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H'$ entraîne $(s_0, \alpha, s) = (s_0, p_1 [\beta, \alpha], s) \in H$, où p_1 désigne la projection canonique de $p(s_0 \times s_0)$ sur $p(s_0)$; de même $(s_0, \beta, s) \in H$. Il résulte donc de la condition 1 ou 1′ et de la proposition 6 que $([G], s) \in G(p)_0$, ce qui démontre la proposition 11.

Nous désignerons par $G(p, H')$ (resp. $G(p, (H', H'))$) la sous-catégorie pleine de $G(p)$ admettant pour unités les graphes (p, H') (resp. $(p, (H', H'))$)-structurés.

Si la sous-catégorie H' de H vérifie la condition [2]:

(σ) $s < s'$ dans $(M, p, H, .)$ entraîne $s < s'$ dans $(M, p', H', .)$,

la catégorie $G(p, (H', H'))$ est identique à la catégorie $G(p')$.

Proposition 12: *Si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite (resp. saturée au-dessus de M) et si H' est stable par produits dans H* (déf. 2, II, [2]), *et vérifie* (σ), *alors $G(p')$ est une sous-catégorie pleine de $G(p, H')$.*

En effet, soit $([G], s) \in G(p, (H', H'))_0$; d'après le théorème 6, I, il existe $(s_\delta, [\iota, \iota], s) \in H_\gamma$, et par suite:

$$(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) = (s_0 \times s_0, \beta \times \alpha, s \times s) \cdot (s \times s, \iota, s_\delta) \cdot (s_\delta, [\iota, \iota], s) \in H',$$

d'où

$$([G], s) \in G(p, H')_0 .$$

Proposition 13: *Supposons que H' vérifie la condition (σ); soient $[G] \in G_0$, $s \in H_0$ et $p(s) = G$; on a $([G], s) \in G(p, H')_0$ si, et seulement si:*

1″) *Il existe $s_0 \underset{p}{<} s$ tel que $p(s_0) = [G]_0$ et on a $(s \times s, [\beta, \alpha], s) \in H'$.*

Si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, la condition 1″ est équivalente à:

1‴) *On a $(s \times s, [\beta, \alpha], s) \in H'$.*

En effet, les conditions sont évidemment nécessaires. Si 1″ est vérifié, on a: $s_0 \times s_0 \underset{p}{<} s \times s$ et $[\beta, \alpha](G) \subset p(s_0 \times s_0)$, d'où

$$(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H' \text{ et } ([G], s) \in G(p, H')_0.$$

La condition 1‴ entraîne $(s, \alpha, s) \in H$ et $(s, \beta, s) \in H$, donc $([G], s) \in G(p)_0$ d'après la proposition 10; par suite 1″ est vérifié.

Théorème 9: *Si H est saturé au-dessus de M (resp. si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite), $G(p, H')$ et $G(p, (H', H'))$ sont des sous-catégories saturées de $G(p)$; $(M, p\bar{p}_H, G(p, H'), .)$ et $(M, p\bar{p}_H, G(p, (H', H')), .)$ sont des catégories d'homomorphismes; si de plus H' est stable par produits dans H, ces catégories d'homomorphismes sont à produits finis.*

Démonstration: Les conditions $([G], s) \in G(p, H')_0$ et

$$\bar{\Phi} = (([\bar{G}], \bar{s}), \varphi, ([G], s)) \in (G(p))_\gamma$$

entraînent: $\Phi_0 = (\bar{s}_0, \varphi_0, s_0) \in H_\gamma$, $\Phi_0 \times \Phi_0 = (\bar{s}_0 \times s_0, \varphi_0 \times \varphi_0, s_0 \times s_0) \in H_\gamma$

et $(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\beta_{\bar{G}}, \alpha_{\bar{G}}], \bar{s}) = (\Phi_0 \times \Phi_0) \cdot (s_0 \times s_0, [\beta_G, \alpha_G], s) \cdot (\bar{s}, \varphi, s)^{-1} \in H'$, donc $G(p, H')$ est saturé dans $G(p)$. – Les conditions $([G], s) \in G(p, (H', H'))_0$ et $\bar{\Phi} \in (G(p))_\gamma$ entraînent:

$$(\bar{s}_0, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}) = (\bar{s}_0, \varphi_0, s_0) \cdot (s_0, \alpha_G, s) \cdot (\bar{s}, \varphi, s)^{-1} \in H'$$

et $(\bar{s}_0, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H'$, d'où $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p, (H', H'))_0$ et $G(p, (H', H'))$ est saturée dans $G(p)$. Les deux dernières affirmations du théorème résultent d'une part du théorème 7, d'autre part des propositions 7 et 10, corollaire 2.

Proposition 14: *Soient* $([G], s) \in G(p, H')_0$ *(resp.* $\in G(p, (H', H'))_0$*)*, $\bar{s} \underset{p}{<} s$, $[\bar{G}] \underset{pG}{<} [G]$ *et* $p(\bar{s}) = \bar{G}$. *Si on a* $(s, \iota, \bar{s}) \in H'$ *et s'il existe* $\bar{s}_0 \in H_0$ *tel que* $\bar{s}_0 \times \bar{s}_0 \underset{p'}{<} s_0 \times s_0$ *(resp. que* $\bar{s}_0 \underset{p'}{<} s_0$*) et* $p(\bar{s}_0) = [\bar{G}]_0$, *alors* $([\bar{G}], \bar{s})$ *est une sous-structure de* $([G], s)$ *dans* $(M, ., G(p, H'), .)$ *(resp. dans* $(M, ., G(p, (H', H')), .)$*)*.

Démonstration: La condition $\bar{s}_0 \times \bar{s}_0 \underset{p'}{<} s_0 \times s_0$ entraînant $(s_0 \times s_0, \iota, \bar{s}_0 \times \bar{s}_0) \in H$, on trouve:

$$(s, \iota, \bar{s}_0) = (s, \iota, s_0) \cdot (s_0, p_1, s_0 \times s_0) \cdot (s_0 \times s_0, \iota, \bar{s}_0 \times \bar{s}_0) \cdot (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\iota, \iota], \bar{s}_0) \in H,$$

où p_1 désigne la projection canonique de $[G]_0 \times [G]_0$ sur $[G]_0$. On en déduit $(\bar{s}, \iota, \bar{s}_0) \in H$, puisque $\bar{s} \underset{p}{<} s$ et $p(\bar{s}_0) \subset p(\bar{s})$. Par ailleurs, les relations: $\bar{s}_0 \times \bar{s}_0 \underset{p'}{<} s_0 \times s_0$, $[\beta_G, \alpha_G](\bar{G}) \subset [\bar{G}]_0 \times [\bar{G}]_0$ et $(s_0 \times s_0, [\beta_G, \alpha_G], s) \cdot (s, \iota, \bar{s}) \in H'$ entraînent:

$$(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\beta_{\bar{G}}, \alpha_{\bar{G}}], \bar{s}) \in H',$$

donc $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p, H')_0$ en vertu de la proposition 11.

– Si $([G], s) \in G(p, (H', H')_0)$, de la condition $\bar{s}_0 \underset{p'}{<} s_0$, il résulte:

$$(s, \iota, \bar{s}_0) = (s, \iota, s_0) \cdot (s_0, \iota, \bar{s}_0) \in H$$

et par suite $(\bar{s}, \iota, \bar{s}_0) \in H$, car $\bar{s} \underset{p}{<} s$. De plus on a:

$$(\bar{s}_0, \alpha_G, s) \cdot (s, \iota, \bar{s}) \in H', \quad \text{d'où} \quad (\bar{s}_0, \alpha_{\bar{G}}, \bar{s}) \underset{p'}{<} (s_0, \alpha_G, s);$$

de même $(\bar{s}_0, \beta_{\bar{G}}, \bar{s}) \in H'$. Par conséquent $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p, (H', H'))_0$. – La proposition 14 est alors conséquence des propositions 5, I et 5.

Corollaire 1: *Soient* $([G], s) \in G(p, H')_0$, $[\bar{G}] \underset{pG}{<} [G]$, $\bar{s} \underset{p}{<} s$ et $p(\bar{s}) = \bar{G}$. *Si* H' *vérifie la condition* (σ) *et s'il existe* $\bar{s}_0 \underset{p}{<} s$ *tel que* $p(\bar{s}_0) = [\bar{G}]_0$, *alors* $([\bar{G}], \bar{s})$ *est une sous-structure de* $([G], s)$ *dans* $(M, ., G(p, H'), .)$.

En effet, les conditions $\bar{s}_0 \underset{p}{\prec} \bar{s}$, $s_0 \underset{p}{\prec} s$ et $p(\bar{s}_0) \subset p(s_0)$ entraînent $\bar{s}_0 \underset{p}{\prec} s_0$ d'après le théorème 1, I, et par suite $\bar{s}_0 \times \bar{s}_0 \underset{p}{\prec} s_0 \times s_0$ en vertu de la proposition 3, II, [2]. En utilisant la condition (σ), on en déduit $\bar{s}_0 \times \bar{s}_0 \underset{p'}{\prec} s_0 \times s_0$; de plus $\bar{s} \underset{p}{\prec} s$ entraîne $\bar{s} \underset{p'}{\prec} s$, d'où $(s, \iota, \bar{s}) \in H'$. Ainsi les conditions de la proposition 14 sont vérifiées et le corollaire 1 en résulte.

Corollaire 2: *Si H' vérifie la condition (σ) et si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, les conditions $([G], s) \in G(p, H')_0$, $[\bar{G}] \prec [G]$, $\bar{s} \underset{p}{\prec} s$ et $p(\bar{s}) = \bar{G}$ entraînent $([\bar{G}], \bar{s}) \in G(p, H')_0$. De plus $(M, ., G(p, H'), .)$ est résolvante à droite.*

Ceci résulte du théorème 8, et du corollaire 1.

Proposition 15: *Soient $([G], s) \in G(p, H')_0$, ϱ une relation d'équivalence sur G compatible avec α_G* et *β_G et $s/\varrho \xrightarrow{p'}\!\!\prec s$ tel que $p(s/\varrho) = G/\varrho$. Si H' est stable par produits et vérifie la condition (σ) et s'il existe $\bar{s}_0 \in H_0$ tel que $\bar{s}_0 \underset{p}{\prec} s/\varrho$ et $p(\bar{s}_0) = [G/\varrho]_0$, alors $([G/\varrho], s/\varrho)$ est une structure quotient de $([G], s)$* dans *$(M, ., G(p, H') \frown p'^*(G, p_G), .)$.*

Démonstration: En vertu de (σ), on a $\bar{s}_0 \underset{p'}{\prec} s/\varrho$. Soit $\tilde{\varrho}$ la surjection canonique de G sur G/ϱ. Comme $(s/\varrho \times s/\varrho, \tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho}, s \times s) \in H'$ et $(s \times s, [\beta_G, \alpha_G], s) \in H'$, on a $(s/\varrho \times s/\varrho, (\tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho})[\beta_G, \alpha_G], s) \in H'$ et les relations $s/\varrho \xrightarrow{p'}\!\!\prec s$ et $[\beta_{G/\varrho}, \alpha_{G/\varrho}]\tilde{\varrho} = (\tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho})[\beta_G, \alpha_G]$ entraînent:

$$(s/\varrho \times s/\varrho, [\beta_{G/\varrho}, \alpha_{G/\varrho}], s/\varrho) \in H', \text{ d'où } ([G/\varrho], s/\varrho) \in G(p, H')_0,$$

en tenant compte de la proposition 13. – De plus $([G/\varrho], s/\varrho)$ est une structure quotient de $([G], s)$ dans $p'^*(G, p_G)$ d'après la proposition 5, I; comme $G(p, H')$ est une sous-catégorie pleine de $p^*(G, p_G)$, la sous-catégorie $G(p, H') \frown p'^*(G, p_G)$ est pleine dans $p'^*(G, p_G)$ et $([G/\varrho], s/\varrho)$ est aussi une structure quotient de $([G], s)$ dans $(M, ., G(p, H') \frown p'^*(G, p_G), .)$.

Corollaire: *Supposons que H' vérifie la condition (σ) et soit stable par produits et que $(M, p, H, .)$ soit résolvante à droite. Soient $([G], s) \in G(p, H')_0$ et ϱ une relation d'équivalence sur G compatible avec α_G et β_G et telle que s admette une p'-structure quotient par ϱ. Alors on a $([G/\varrho], s/\varrho) \in G(p, H')_0$.*

En effet, la démonstration précédente montre que l'on a:

$$(s/\varrho \times s/\varrho, [\beta_{G/\varrho}, \beta_{G/\varrho}], s/\varrho) \in H',$$

et le corollaire résulte de la proposition 10.

3. Graphes multiplicatifs structurés

Soit $(M, p'_N, N', .)$ la catégorie d'homomorphismes construite au n° 3, I, où p'_N est la restriction de p_N à la sous-catégorie N' de N. Soit $G^\cdot \in N'_0$; $G^\cdot$ est donc un graphe multiplicatif, dont le graphe sous-jacent sera désigné par $[G^\cdot]$. Soient $G^\cdot_\alpha$ et $G^\cdot_\beta$ les classes des couples $(f, \alpha(f))$ et $(\beta(f), f)$ resp., où $f \in G$; soient γ_α et γ_β les bijections canoniques:

$$[\iota, \alpha] : f \to (f, \alpha(f)) \quad \text{et} \quad [\beta, \iota] : f \to (\beta(f), f)$$

de $G^\cdot$ sur $G^\cdot_\alpha$ et sur $G^\cdot_\beta$ respectivement.

Soit (M, p, H) un foncteur. Nous reprenons les notations des n^{os} 1 et 2; en particulier $\overline{p}_G$ et $\overline{p}_H$ désignent les foncteurs canoniques de la catégorie $G(p)$ vers G et H resp.; $\check{p}_N$ est le foncteur canonique de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ vers N et $\check{p}_H$ le foncteur de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ vers H défini par: $((\overline{G^\cdot}, \overline{K}), \Phi, \Phi', (G^\cdot, K)) \to \Phi$.

Définition 7: *On appellera* graphe multiplicatif p-structuré (*resp.* fortement p-structuré) *un quadruplet* $(G^\cdot, K, B, A)$ *vérifiant les conditions:*

1) $G^\cdot \in N'_0$; $(G^\cdot, K) \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ (*resp.* $\in \overline{N}(p)_0$), $([G], B, A) \in G(p)_0$.

2) *On a:* $\alpha(A) = \beta(K) = s \in H_0$.

3) *Il existe* $\Gamma_\alpha \in H_\gamma$ *et une p-injection* j_α *telle que* $K \cdot j_\alpha = \Gamma_\alpha^{-1}$ *et* $p(\Gamma_\alpha) = \gamma_\alpha$; *il existe* $\Gamma_\beta \in H_\gamma$ *tel que* $\alpha(\Gamma_\beta) = s$ *et* $p(\Gamma_\beta) = \gamma_\beta$.

Ces conditions entraînent que $j_\beta = j_\alpha \cdot \Gamma_\alpha \cdot \Gamma_\beta^{-1}$ est une p-injection telle que $K \cdot j_\beta = \Gamma_\beta^{-1}$.

Soit $N'(p)_0$ (resp. $\overline{N}'(p)_0$) la classe des graphes multiplicatifs p-structurés (resp. fortement p-structurés).

Les conditions 1 et 2 de la définition 7 signifient que $(G^\cdot, K, B, A)$ s'identifie à une unité $((G^\cdot, K), ([G^\cdot], B, A))$ de $\overline{p}_H^*(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \check{p}_H)$ (resp. de $\overline{p}_H^*(\overline{N}(p), \check{p}_H))$ telle que $G^\cdot \in N'_0$.

Définition 8: *Un morphisme de la sous-catégorie pleine* $N'(p)$ (*resp.* $\overline{N}'(p)$) *de* $\overline{p}_H^*(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \check{p}_H)$ *ayant* $N'(p)_0$ (*resp.* $\overline{N}'(p)_0$) *pour classe d'objets sera appelé* morphisme entre graphes multiplicatifs p-structurés (*resp.* fortement p-structurés).

Nous supposerons désormais que $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes.

Un graphe multiplicatif p-structuré s'identifie alors à un triplet $(G^\cdot, s, s')$ vérifiant les conditions suivantes:

1) $G^\cdot \in N'_0$; $(G^\cdot, s, s') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$, $([G^\cdot], s) \in G(p)_0$.

2) Il existe $s_\alpha \prec s'$ tel que $p(s_\alpha) = G^\cdot_\alpha$ et $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H_\gamma$.

3) Il existe $s_\beta \in H_0$ tel que $(s_\beta, \gamma_\beta, s) \in H_\gamma$.

La condition 2 entraîne que $(G^{\cdot}, s, s')$ est entièrement déterminé par la donnée du couple $(G^{\cdot}, s')$, en vertu de la proposition 6, I; si de plus $(G^{\cdot}, s, s')$ est fortement p-structuré, la donnée du couple $(G^{\cdot}, s)$ détermine aussi $(G^{\cdot}, s, s')$. Par suite nous représenterons indifféremment un graphe multiplicatif p-structuré sous la forme $(G^{\cdot}, s, s')$ ou $(G^{\cdot}, s')$; s'il est fortement p-structuré, on peut aussi le représenter par $(G^{\cdot}, s)$.

Proposition 16: *Un morphisme entre graphes multiplicatifs p-structurés s'identifie à un triplet* $\hat{\Phi} = ((\overline{G}^{\cdot}, \overline{s}'), \varphi, (G^{\cdot}, s'))$ *vérifiant les conditions suivantes:* $(G^{\cdot}, s') \in N'(p)_0$; $(\overline{G}^{\cdot}, \overline{s}') \in N'(p)_0$; $(\overline{G}, \varphi, G) \in M$; $(\overline{G}^{\cdot}, \varphi, G^{\cdot}) \in N'$ et $(\overline{s}', \varphi * \varphi, s') \in H$. *Un morphisme entre graphes multiplicatifs fortement p-structurés s'identifie à un triplet*

$$\hat{\Phi} = ((\overline{G}^{\cdot}, \overline{s}), \varphi, (G^{\cdot}, s)) \ \textit{tel que} \ (G^{\cdot}, s) \in N'(p)_0, (\overline{G}^{\cdot}, \overline{s}) \in N'(p)_0,$$
$$(\overline{G}, \varphi, G) \in M, \ (\overline{G}^{\cdot}, \varphi, G^{\cdot}) \in N' \ \textit{et} \ (\overline{s}, \varphi, s) \in H .$$

En effet, les conditions $s_\alpha \prec s', \overline{s}_{\overline{\alpha}} \prec \overline{s}'$, $(\overline{s}', \varphi * \varphi, s') \in H$ et $(\varphi * \varphi)(G^{\cdot}_\alpha) \subset \overline{G}^{\cdot}_{\overline{\alpha}}$ entraînent, en vertu de la proposition 2, I: $(\overline{s}_{\overline{\alpha}}, (\varphi * \varphi)\,\iota, s_\alpha) \in H$, et par suite:

$$(\overline{s}, \varphi, s) = (\overline{s}_{\overline{\alpha}}, \gamma_{\overline{\alpha}}, \overline{s})^{-1} \cdot (\overline{s}_{\overline{\alpha}}, (\varphi*\varphi)\,\iota, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H ,$$

d'où $\hat{\Phi} \in N'(p)$. La fin de la proposition résulte de la proposition 2.

Proposition 17: *Soit* $(G^{\cdot}, s, s')$ *un triplet vérifiant les conditions:*

1) $G^{\cdot} \in N'_0$; $(G^{\cdot}, s, s') \in \varkappa^*(\Box\Box H, \Box p)_0$ *et* $([G^{\cdot}], s) \in G(p)_0$;

Si H est saturé au-dessus de M, $(G^{\cdot}, s, s') \in N'(p)_0$ *est équivalent à:*

2) $(s', \gamma_\alpha, s) \in H$.

Démonstration: Si $(G^{\cdot}, s, s') \in N'(p)_0$, on a:

$$(s', \gamma_\alpha, s) = (s', \iota, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_c, s) \in H .$$

Supposons la condition 2 vérifiée. Il existe $s_\alpha \in H_0$ et $s_\beta \in H_0$ tels que $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H_\gamma$ et $(s_\beta, \gamma_\beta, s) \in H_\gamma$; on obtient:

$$(s', \iota, s_\alpha) = (s', \gamma_\alpha, s) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha, s)^{-1} \in H$$

et

$$(s_\alpha, \gamma_\alpha\, \varkappa(G^{\cdot}), s') = (s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \cdot (s, \varkappa(G^{\cdot}), s') \in H .$$

Comme $(s_\alpha, \gamma_\alpha\, \varkappa(G^{\cdot}), s') \cdot (s', \iota, s_\alpha) = s_\alpha$, il résulte de la proposition duale de la proposition 6, I, que s_α est une p-sous-structure de s'; par suite $(G^{\cdot}, s') \in N'(p)_0$.

Si $\hat{\Phi} = ((\overline{G}^{\cdot}, \overline{s}'), \varphi, (G^{\cdot}, s')) \in N'(p)$, nous poserons:

$$\hat{p}_H(\hat{\Phi}) = (\overline{s}, \varphi, s) \in H \quad \text{et} \quad \hat{p}_{N'}(\hat{\Phi}) = (\overline{G}^{\cdot}, \varphi, G^{\cdot}) \in N' .$$

Théorème 10: *Si H est saturé au-dessus de M (resp. si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite), $N'(p)$ est une sous-catégorie saturée de la catégorie $\overline{p}_H^*(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \grave{p}_H)$. Si H est saturé au-dessus de M, $\overline{N}'(p)$ est une sous-catégorie saturée de $N'(p)$.*

Démonstration: Soit $(G^\cdot, s, s') \in N'(p)_0$ et:
$\hat{\Phi} = (((\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}'), \varphi, (G^\cdot, s, s')), (([\overline{G}], \bar{s}), \varphi, ([G^\cdot], s))) \in \overline{p}_H^*(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \grave{p}_H)_\gamma$; comme N' est saturé au-dessus de M, on a $\overline{G}^\cdot \in N'_0$ et $[\overline{G}] = [\overline{G}^\cdot]$. De plus $(\bar{s}', \gamma_{\alpha_{\overline{G}}}, \bar{s}) = (\bar{s}', \varphi * \varphi, s') \cdot (s', \gamma_\alpha, s) \cdot (\bar{s}, \varphi, s)^{-1} \in H$, ce qui entraîne $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}') \in N'(p)_0$ en vertu de la proposition 17. – Si on suppose $(G^\cdot, s) \in \overline{N}'(p)_0$, on trouve $(G^\cdot, \bar{s}, \bar{s}') \in \overline{N}'(p)_0$, car $\overline{N}(p)$ est une sous-catégorie saturée de $\varkappa^*(\square\square H, \square p)$ d'après le théorème 2.

Corollaire: *Si H est saturé au-dessus de M, $(H, \hat{p}_H, N'(p), .)$, $(N', \hat{p}_{N'}, N'(p), .)$, $(M, p'_N \hat{p}_{N'}, N'(p), .)$, $(H, ., \overline{N}'(p), .)$, $(N', ., \overline{N}'(p), .)$ et $(M, ., \overline{N}'(p), .)$ sont des catégories d'homomorphismes saturées.*

Ce corollaire résulte de la proposition 31, I.

Théorème 11: *Si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, $\overline{N}'(p)$ est identique à la sous-catégorie pleine et saturée de $\overline{p}_H^*(\overline{N}(p), \grave{p}_H)$ ayant pour unités les couples $((G^\cdot, s, s'), ([G^\cdot], s))$, où $G^\cdot \in N'_0$.*

Démonstration: Montrons que les conditions $G^\cdot \in N'_0$, $(G^\cdot, s, s') \in \overline{N}(p)_0$ et $([G'], s) \in G(p)_0$ entraînent $(G^\cdot, s') \in \overline{N}'(p)_0$. On a:

$$(s, p_2, s \times s) \in H \quad \text{et} \quad (s, \alpha, s) \cdot (s, p_1, s \times s) \in H,$$

où p_i désigne la i^e projection canonique de $G \times G$ sur G. Puisque $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, le couple $((s, p_2, s \times s), (s, \alpha p_1, s \times s))$ admet un p-noyau s_α tel que $p(s_\alpha) = G^\cdot_\alpha$. Les relations:

$$s' \prec s \times s \quad \text{et} \quad G^\cdot_\alpha \subset G^\cdot * G^\cdot$$

entraînent $s_\alpha \prec s'$, d'après le théorème 1, I. Comme $s \times s$ est un produit dans H, on a:

$$(s \times s, \gamma_\alpha, s) = (s \times s, [\iota, \alpha], s) \in H,$$

et par suite $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H$, puisque $s_\alpha \prec s \times s$. Par ailleurs, on a:

$$(s, \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) = (s, \varkappa(G^\cdot), s') \cdot (s', \iota, s_\alpha) \in H.$$

On en déduit $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H_\gamma$. On montre de même que l'on a $(s_\beta, \gamma_\beta, s) \in H_\gamma$, d'où $(G^\cdot, s) \in \overline{N}'(p)_0$. Le théorème résulte alors du fait que N' est saturé dans N.

Corollaire: *Si* $(M, p, H, .)$ *est résolvante à droite et à produits finis,* $(N', \hat{p}_{N'}, \overline{N'}(p), .)$ *est une catégorie d'homomorphismes.*

Démonstration: Soient $(G^\cdot, s) \in \overline{N'}(p)_0$, $(G^\cdot, s_1) \in \overline{N'}(p)_0$ et

$$\hat{\Phi} = ((\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}'), \varphi, (G^\cdot, s, s')) \in (\overline{N'}(p))_\gamma .$$

Puisque (M, p, H_γ) est une espèce de structures, il existe $(\bar{s}_1, \varphi, s_1) \in H_\gamma$ et il résulte des corollaires du théorème 2 et de la proposition 10 que l'on a $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}_1) \in \overline{N}(p)_0$ et $([\overline{G}^\cdot], \bar{s}_1) \in G(p)_0$; donc $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}_1) \in \overline{N'}(p)_0$ en vertu du théorème 11.

Cas particulier: La définition donnée dans [2] d'une catégorie H-structurée $(C^\cdot, s)$ est équivalente à: $C^\cdot$ est une catégorie et on a $(C^\cdot, s) \in \bar{p}_H^*(\overline{N}(p), \check{p}_H)_0$. Il résulte du théorème 11 que, si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, cette définition est équivalente à: $C^\cdot$ est une catégorie et on a $(C^\cdot, s) \in \overline{N'}(p)_0$.

Remarques: 1. En général si H n'est pas saturé au-dessus de M, $N'(p)$ et $\overline{N'}(p)$ ne sont pas des catégories d'homomorphismes au-dessus de H ni au-dessus de M. Toutefois si $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite et à produits finis, la catégorie des foncteurs H-structurés est une catégorie d'homomorphismes au-dessus de H (voir [2] théorème 11, II); ceci résulte des propriétés suivantes: si $(C^\cdot, s)$ est une catégorie H-structurée, s' est le p-noyau du couple $((s, \alpha\, p_1, s \times s), (s, \beta\, p_2, s \times s))$; par ailleurs H_γ opère sur les p-injections définissant un p-noyau, en vertu de la proposition 16, I, [2].
2. Si H n'est pas saturé au-dessus de M, on peut se ramener à ce cas en remplaçant H par son élargissement [3] $\tilde{H}$ au-dessus de M. Cette opération ne change pas les notions de sous-structures et de structures quotient dans H, mais peut introduire de nouvelles sous-structures ou structures quotient.

Nous supposerons désormais que $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes saturée au-dessus de M.

Théorème 12: *Si* $(M, p, H, .)$ *est à produits finis,* $(M, ., N'(p), .)$ *et* $(M, ., \overline{N'}(p), .)$ *sont des catégories d'homomorphismes à produits finis.*

Démonstration: Soient $(G_i, s_i, s_i') \in N'(p)_0$ (resp. $\in \overline{N'}(p)_0$), où $i = 1, 2$. D'après la proposition 7 et le théorème 3, on a:

$$([G_1^\cdot \times G_2^\cdot], s_1 \times s_2) \in G(p)_0 ,$$

et $(G_1^\cdot \times G_2^\cdot, s_1 \times s_2, S') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ (resp. $\in \overline{N}(p)_0$), où $(S', \pi', s_1' \times s_2') \in H_\gamma$

et $\pi'((g_1', g_1), (g_2', g_2)) = ((g_1', g_2'), (g_1, g_2))$. Il en résulte:

$(S', \gamma_{\alpha_{G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}}}, s_1 \times s_2) = (S', \pi', s_1' \times s_2') \cdot [(s_1', \gamma_{\alpha_{G_1^{\cdot}}}, s_1) \times (s_2', \gamma_{\alpha_{G_2^{\cdot}}}, s_2)] \in H.$

En vertu de la proposition 17, ceci prouve que l'on a:

$$(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') \in N'(p)_0 \text{ (resp. } \in \overline{N}'(p)_0) .$$

Comme $(M, p, H, .)$ et $(M, ., N', .)$ sont à produits finis, on en déduit $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') = (G_1^{\cdot}, s_1, s_1') \times (G_2^{\cdot}, s_2, s_2')$ dans $N'(p)$ (resp. $\overline{N}'(p)$).

Soit $(G^{\cdot}, s')$ un couple vérifiant la condition suivante:

1) $G^{\cdot} \in N_0'$, $s' \in H_0$ et $p(s') = G^{\cdot} * G^{\cdot}$.

Considérons les conditions suivantes:

2) Il existe $s_\alpha \prec s'$ tel que $p(s_\alpha) = G_\alpha^{\cdot}$ et il existe $s_0' \prec s'$ tel que $p(s_0') = (G_0^{\cdot} \times G_0^{\cdot}) \frown G_\alpha^{\cdot}$.

2′) Il existe $(s', \iota, s_\alpha) \in H$ et $(s', \iota, s_0') \in H$ tels que:

$$p(s_\alpha) = G_\alpha^{\cdot} \quad \text{et} \quad p(s_0') = (G_0^{\cdot} \times G_0^{\cdot}) \frown G_\alpha^{\cdot} .$$

3) $(s', \gamma_\alpha \varkappa(G^{\cdot}), s') \in H$;

3′) $(s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^{\cdot}), s') \in H$;

4) $(s', \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^{\cdot}), s') \in H$ et $(s', \gamma_\alpha \beta \varkappa(G^{\cdot}), s') \in H$;

4′) $(s_0', \gamma_\alpha \alpha \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \in H$ et $(s_0', \gamma_\alpha \beta \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \in H$.

Proposition 18: *On a* $(G^{\cdot}, s') \in N'(p)_0$ *si, et seulement si, les conditions* 1, 2, 3, 4 (*resp.* 1, 2, 3′, 4′; *resp.* 1, 2′, 3′, 4′) *ci-dessus sont vérifiées. Si* $(M, p, H, .)$ *est résolvante à droite, on a* $(G^{\cdot}, s') \in N'(p)_0$ *si, et seulement si, les conditions* 1, 3 *et* 4 *sont vérifiées.*

Démonstration: Soit $(G^{\cdot}, s, s') \in N'(p)_0$; il existe $s_0 \prec s$, où $p(s_0) = G_0^{\cdot}$, et par suite $(s_0', \gamma_\alpha \iota, s_0) \in H_\gamma$ avec $p(s_0') = (G_0^{\cdot} \times G_0^{\cdot}) \frown G_\alpha^{\cdot}$; comme $s_0 \prec s$ et $(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H_\gamma$, on a $s_0' \prec s_\alpha \prec s'$, d'après la proposition 3, I. On en déduit que les conditions indiquées sont vérifiées, à l'aide des relations:

$$(s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \cdot (s, \varkappa(G^{\cdot}), s') \in H; \; (s_0', \gamma_\alpha \iota, s_0) \cdot (s_0, \alpha, s) \cdot (s, \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \in H$$

et

$$(s', \iota, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \cdot (s, \alpha, s) \cdot (s, \varkappa(G^{\cdot}), s') \in H .$$

Supposons les conditions 1, 2, 3, 4 vérifiées. D'après le théorème 1, I, la condition 2 entraîne $s_0' \prec s_\alpha$. H étant saturé au-dessus de M, il existe $(s, \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \in H_\gamma$ et $(s_0, \gamma_\alpha^{-1} \iota, s_0') \in H_\gamma$, où $p(s_0) = G_0^{\cdot}$; en vertu de la proposition 3, I, on a $s_0 \prec s$. La condition 3 et les relations $s_\alpha \prec s'$ et $\gamma_\alpha \varkappa(G^{\cdot}) (G^{\cdot} * G^{\cdot}) \subset G_\alpha^{\cdot}$ ont pour conséquence $(s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^{\cdot}), s') \in H$, d'où $(s, \varkappa(G^{\cdot}), s') = (s, \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^{\cdot}), s') \in H$ et $(G^{\cdot}, s, s') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$. La condition 4 et les relations: $s_\alpha \prec s'$ et $\gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^{\cdot}) (G_\alpha^{\cdot}) \subset G_\alpha^{\cdot}$ entraînant $(s_\alpha, \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^{\cdot}) \iota, s_\alpha) \in H$, on trouve

$$(s, \alpha, s) = (s, \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^\cdot)\, \iota, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H .$$

De même $(s, \beta, s) \in H$, d'où $([G^\cdot], s) \in G(p)_0$ et $(G^\cdot, s, s') \in N'(p)_0$. – Si les conditions 1, 2, 3′, 4′ sont vérifiées, on a:

$$(s', \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^\cdot), s') = (s', \iota, s'_0) \cdot (s'_0, \gamma_\alpha \alpha \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H .$$

On en déduit que les conditions 1, 2, 3, 4 sont vérifiées, d'où $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$. – Si les conditions 1, 2′, 3′, 4′ sont vérifiées, les égalités:

$$(s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \cdot (s', \iota, s_\alpha) = s_\alpha$$

et

$$((s'_0, \gamma_\alpha \alpha \gamma_\alpha^{-1}, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s')) \cdot (s', \iota, s'_0) = s'_0$$

entraînent $s_\alpha \prec s'$ et $s'_0 \prec s'$, en utilisant la proposition 6, I. Donc les conditions 1, 2, 3′ et 4′ sont vérifiées et $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$. – Enfin supposons $(M, p, H, .)$ résolvante à droite et les conditions 1, 3, 4 vérifiées. Le couple $(s', (s', \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s'))$ admet un p-noyau s_α tel que $p(s_\alpha) = G^\cdot_\alpha$ et le couple $(s', (s', \gamma_\alpha \alpha \varkappa(G^\cdot), s'))$ admet un p-noyau s'_0 tel que l'on ait $p(s'_0) = (G^\cdot_0 \times G^\cdot_0) \frown G^\cdot_\alpha$. Par conséquent la condition 2 est aussi vérifiée, et par suite $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$.

Définition 9: *Une $p\hat{p}_H$-sous-structure (resp. structure quotient) de $(G^\cdot, s') \in N'(p)_0$ sera appelée* sous-graphe multiplicatif (*resp.* graphe multiplicatif quotient) p-structuré *de* $(G^\cdot, s')$. *On définit de même les sous-graphes multiplicatifs (resp. graphes multiplicatifs quotient)* fortement p-structurés *en remplaçant $N'(p)$ par $\overline{N'}(p)$.*

Théorème 13: *Supposons $(M, p, H, .)$ résolvante à droite. Soient $(G^\cdot, s, s') \in N'(p)_0$ (resp. $\in \overline{N'}(p)_0$), $\overline{G^\cdot}$ une sous-structure de $G^\cdot$ dans $(M, ., N', .)$ et $\bar{s}' \prec s'$ tel que $p(\bar{s}') = \overline{G^\cdot} * \overline{G^\cdot}$. Alors $(\overline{G^\cdot}, \bar{s}')$ est un sous-graphe multiplicatif p-structuré (resp. fortement p-structuré) de $(G^\cdot, s')$.*

Démonstration: Les conditions $\bar{s}' \prec s'$, $(s', \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H$ et $\gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot)(\overline{G^\cdot} * \overline{G^\cdot}) \subset \overline{G^\cdot} * \overline{G^\cdot}$ entraînent $(\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}} \varkappa(\overline{G^\cdot}), \bar{s}') \in H$. Le couple $(\bar{s}', (\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}} \varkappa(\overline{G^\cdot}), \bar{s}'))$ admet un p-noyau $\bar{s}_{\bar{\alpha}} \prec \bar{s}'$ tel que $p(\bar{s}_{\bar{\alpha}}) = \overline{G^\cdot}_{\bar{\alpha}}$; comme $\bar{s}_{\bar{\alpha}} \prec \bar{s}' \prec s'$ et $s_\alpha \prec s'$, on a $\bar{s}_{\bar{\alpha}} \prec s_\alpha$, en vertu du théorème 1, I. De plus, H étant saturé au-dessus de M, il existe $(\bar{s}, \gamma_{\bar{\alpha}}^{-1}, \bar{s}_{\bar{\alpha}}) \in H$, avec $p(\bar{s}) = \overline{G^\cdot}$; d'où $\bar{s} \prec s$, en vertu de la proposition 3, I. Des théorèmes 4 et 8, il résulte alors: $([\overline{G^\cdot}], \bar{s}) \in G(p)_0$; $([\overline{G^\cdot}], \bar{s}) \underset{pp_H}{\prec} ([G^\cdot], s)$; $(\overline{G^\cdot}, \bar{s}, \bar{s}') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$ et $(\overline{G^\cdot}, \bar{s}') \underset{pp_H}{\prec} (G^\cdot, s')$. Donc $(\overline{G^\cdot}, \bar{s}') \in N'(p)_0$ et $(\overline{G^\cdot}, \bar{s}') \prec (G^\cdot, s')$ dans $(M, ., \overline{p}^*_H(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \hat{p}_H), .)$ d'après la proposition 5, I; puisque $N'(p)$ est une sous-catégorie pleine de $\overline{p}^*_H(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \hat{p}_H)$, $(\overline{G^\cdot}, \bar{s}')$ est un sous-graphe multiplicatif de

$(G^\cdot, s')$. – Supposons de plus $(G^\cdot, s) \in \overline{N}'(p)_0$. D'après le théorème 6, I, on a $\bar{s} \times \bar{s} \prec s \times s$; par ailleurs les conditions $\bar{s}' \prec s' \prec s \times s$ et $p(\bar{s}') \subset \bar{G} \times \bar{G}$ entraînent $\bar{s}' \prec \bar{s} \times \bar{s}$. Par conséquent $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}) \in \overline{N}'(p)_0$. Comme $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}) \underset{p\hat{p}_H}{\prec} (G^\cdot, s)$ et comme $\overline{N}'(p)$ est pleine dans $N'(p)$, on trouve $(\bar{G}^\cdot, \bar{s}) \prec (G^\cdot, s)$ dans $(M, p\hat{p}_H, \overline{N}'(p), .)$.

Théorème 14: *Supposons* $(M, p, H, .)$ *résolvante à droite. Soient* $(G^\cdot, s, s') \in \overline{N}'(p)_0$, ϱ *une relation d'équivalence bicompatible sur* $G^\cdot$ *et* $\tilde{\varrho}$ *la surjection canonique associée. Si on a:*

$$(\bar{s}', \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, s') \in H^s(M^s, p) \quad et \quad p(\bar{s}') = (G^\cdot/\varrho) * (G^\cdot/\varrho),$$

alors il existe $s/\varrho \overset{p}{\prec} s$ *et* $(G^\cdot/\varrho, s/\varrho, \bar{s}')$ *est un graphe multiplicatif quotient* p*-structuré de* $(G^\cdot, s, s')$; *de plus on a* $(s/\varrho)_0 \overset{p}{\prec} s_0$.

Démonstration: D'après la proposition 21, I, $G^\cdot/\varrho$ est un graphe multiplicatif; nous désignerons par $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ resp. ses applications source et but. Comme $\bar{s}' \prec s'$, les relations:

$$(s', \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H \quad \text{et} \quad (\tilde{\varrho} * \varrho)\, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot) = \gamma_{\bar{\alpha}} \varkappa(G^\cdot/\varrho)\, (\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})$$

entraînent

$$(\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}} \varkappa(G^\cdot/\varrho), \bar{s}') \in H,$$

et les relations:

$$(s', \gamma_\alpha\, \alpha\, \varkappa(G^\cdot), s') \in H \quad \text{et} \quad (\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})\, \gamma_\alpha\, \alpha\, \varkappa(G^\cdot) = \gamma_{\bar{\alpha}}\, \bar{\alpha}\, \varkappa(G^\cdot/\varrho)\, (\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})$$

entraînent

$$(\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}}\, \bar{\alpha}\, \varkappa(G^\cdot/\varrho), \bar{s}') \in H;$$

de même

$$(\bar{s}', \gamma_{\bar{\beta}}\, \bar{\beta}\, \varkappa(G^\cdot/\varrho), \bar{s}') \in H.$$

D'après la proposition 18, il en résulte $(G^\cdot/\varrho, s/\varrho, s') \in \overline{N}'(p)_0$. Le couple $(\bar{s}', (\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}} \varkappa(G^\cdot/\varrho), \bar{s}'))$ admet un p-noyau $\bar{s}_{\bar{\alpha}}$ tel que $p(\bar{s}_{\bar{\alpha}}) = (G^\cdot/\varrho)_{\bar{\alpha}} = \bar{G}^\cdot_{\bar{\alpha}}$. Comme $(\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})(G^\cdot_\alpha) = G^\cdot_{\bar{\alpha}}$, on a

$$(\bar{s}_{\bar{\alpha}}, \tilde{\varrho}_\alpha, s_\alpha) \in H \quad \text{et} \quad (\bar{s}_{\bar{\alpha}}, \tilde{\varrho}_\alpha, s_\alpha) \prec (\bar{s}', \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, s');$$

de plus on a:

$$(s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \in H \quad \text{et} \quad (s_\alpha, \gamma_\alpha \varkappa(G^\cdot), s') \cdot (s', \iota, s_\alpha) = s_\alpha;$$

à l'aide la proposition 4, I, on en déduit $(\bar{s}_{\bar{\alpha}}, \tilde{\varrho}_\alpha, s_\alpha) \in H^s(M^s, p)$. H étant saturé au-dessus de M, il existe $(\bar{s}, \gamma_{\bar{\alpha}}^{-1}, \bar{s}_{\bar{\alpha}}) \in H_\gamma$. On obtient:

$$(\bar{s}, \tilde{\varrho}, s) = (\bar{s}, \gamma_{\bar{\alpha}}^{-1}, \bar{s}_{\bar{\alpha}}) \cdot (\bar{s}_{\bar{\alpha}}, \tilde{\varrho}_\alpha, s_\alpha) \cdot (s_\alpha, \gamma_\alpha, s) \in H^s(M^s, p),$$

d'où $\bar{s} = s/\varrho \prec s$. Des théorèmes 8 et 5, il résulte que $([G^\cdot/\varrho], s/\varrho)$ est un graphe quotient p-structuré de $([G^\cdot], s)$ et que $([G^\cdot/\varrho], \bar{s}/\varrho, s')$ est une classe multiplicative quotient p-structuré de $(G^\cdot, s, \bar{s}')$. En utilisant la proposition 5,I et le fait que $N'(p)$ est une sous-catégorie pleine de $\overline{p}^*_H(\varkappa^*(\square\square H, \square p), \check{p}_H)$, on voit que $(G^{\cdot}/\varrho, \bar{s}')$ est un graphe multiplicatif quotient p-structuré de $(G^{\cdot}, s')$. — Les relations: $s_0 \prec s$, $(s/\varrho)_0 \prec s/\varrho$ et $\tilde{\varrho}(G_0^{\cdot}) \subset (G^{\cdot}/\varrho)_0$ entraînant $((s/\varrho)_0, \tilde{\varrho}_0, s_0) \prec (s/\varrho, \tilde{\varrho}, s)$, on trouve, à l'aide de la proposition 4, I, $s/\varrho_0 \overset{p}{\prec} s_0$.

Remarque: Si on suppose dans le théorème 14 que $(G^{\cdot}, s) \in \bar{N}'(p)_0$, il n'en résulte pas que $(G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho) \in \bar{N}'(\varrho)_0$; nous verrons plus loin des cas où il en est ainsi.

Soient H' et H'' deux sous-catégories de H contenant H_γ. Pour simplifier, nous supposons $(M, p, H, .)$ à produits finis. Soient p' et p'' les restrictions de p à H' et à H'' resp.

Définition 10: *On dira que* $(G^{\cdot}, s, s')$ *est un* graphe multiplicatif (p, H', H'') (*resp.* $(p, (H', H''), H'')$)-structuré *si les conditions suivantes sont vérifiées:*

1) $(G^{\cdot}, s, s')$ *est un graphe multiplicatif* p*-structuré.*

2) $([G^{\cdot}], s)$ *est un graphe* (p, H') (*resp.* $(p, (H', H'))$)*-structuré.*

3) $(G^{\cdot}, s, s')$ *est une classe multiplicative* p''*-structurée.*

Si la condition 1 *est remplacée par la condition:*

1') $(G^{\cdot}, s, s')$ *est un graphe multiplicatif fortement* p*-structuré,*

on dira que $(G^{\cdot}, s, s')$ *est un* graphe multiplicatif fortement (p, H', H'') (*resp.* $(p, (H, H'), H'')$)-structuré.

Remarque: Un graphe multiplicatif $(G^{\cdot}, s, s')$ fortement (p, H', H'')-structuré peut ne pas être une classe multiplicative fortement p''-structurée, sauf si H'' vérifie la condition (σ), car $s' \underset{p}{\prec} s \times s$ n'entraîne pas $s' \underset{p''}{\prec} s \times s$.

Définition 11: *Soient* $C^{\cdot}$ *une catégorie et* $(C^{\cdot}, s, s')$ *un graphe multiplicatif* (p, H', H'')*-structuré (resp.* $(p, (H', H'), H'')$*-structuré); on dira que* $(C^{\cdot}, s, s')$ *est* une catégorie faiblement (p, H', H'') (*resp.* $(p, (H', H'), H'')$)-structurée. *Si de plus* $(C^{\cdot}, s) \in \bar{N}'(p)_0$, *on dira que* $(C^{\cdot}, s)$ *est* une catégorie $H(H', H'')$ (*resp.* $H((H', H'), H'')$)-structurée.

Remarque: Cette définition est en accord avec celle de [2] dans le cas, principalement considéré dans [2], où $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite, en vertu du théorème 11 (voir ci-dessus dans le cas $H = H' = H''$).

Un graphe multiplicatif (p, H', H'')-structuré est aussi un graphe multiplicatif (p, H_1', H_1'')-structuré, si H_1' contient H' et H_1'' contient H''.

Nous désignerons par $N'(p, H', H'')$ (resp. $N'(p, (H', H'), H''))$ la sous-catégorie pleine de $N'(p)$ ayant pour unités les graphes multiplicatifs (p, H', H'') (resp. $(p, (H', H'), H'')$)-structurés. Soit:

$$\bar{N}'(p, H', H'') = \bar{N}'(p) \cap N'(p, H', H'')$$

et

$$\bar{N}'(p, (H', H'), H'') = \bar{N}'(p) \cap N'(p, (H', H'), H'').$$

Pour simplifier les notations, nous utiliserons le symbole $N'(\ )$ qui pourra être lu partout $N'(p, H', H'')$, ou partout $N'(p, (H', H'), H'')$. Même convention pour les symboles $\overline{N}'(\ ), (p,\ )$ et $H(\ )$. D'une manière analogue, $G(\ )$ peut être lu partout $G(p, H')$ ou partout $G(p, (H', H'))$.

Théorème 15: *$N'(\ )$ (resp. $\overline{N}'(\ )$) est une sous-catégorie saturée de $N'(p)$ (resp. de $\overline{N}'(p)$).*

Démonstration: Supposons $((\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}'), \Phi, (G^\cdot, s')) \in (N'(p))_\gamma$ et $(G^\cdot, s') \in N'(\ )_0$. Comme $G(\ )$ est une sous-catégorie saturée de $G(p)$ d'après le théorème 9, on a $([\overline{G}^\cdot], \bar{s}) \in G(\ )_0$. Puisque $(M, p'', H'', .)$ est saturée au-dessus de M, $\varkappa^*(\square\square H'', \square p'')$ est saturé au-dessus de M, selon le cor. du théorème 1, et on a $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}') \in \varkappa^*(\square\square H'', \square p'')_0$. Donc $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}') \in N'(\ )_0$. Par suite $N'(\ )$ est une sous-catégorie saturée de $N'(p)$. Le théorème en résulte, car $\overline{N}'(p)$ est saturée dans $N'(p)$ en vertu du théorème 10.

Corollaire: *Le corollaire du théorème 10 est encore vrai en y remplaçant $N'(p)$ par $N'(\ )$ et $\overline{N}'(p)$ par $\overline{N}'(\ )$.*

Théorème 16: *Si H' et H'' sont stables par produits dans H, les catégories d'homomorphismes $(M, ., N'(\ ), .)$ et $(M, ., \overline{N}'(\ ), .)$ sont à produits finis.*

Ce théorème résulte des théorèmes 3, 9 et 12.

Nous supposerons désormais pour simplifier que $(M, p, H, .)$ est résolvante à droite et que la sous-catégorie H' vérifie la condition (σ).

Théorème 17: *Supposons aussi que H'' vérifie la condition (σ). Soit $(G^\cdot, s, s') \in N'(\ )_0$, (resp. $\in \overline{N}'(\ )_0$). Les conditions:*

$$\bar{s}' \underset{p}{\prec} s', \quad \overline{G}^\cdot \underset{p'_N}{\prec} G^\cdot \quad et \quad p(\bar{s}') = \overline{G}^\cdot * \overline{G}^\cdot$$

entraînent que $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}')$ est une sous-structure de $(G^\cdot, s')$ dans $(M, ., N'(\ ), .)$ (resp. dans $(M, ., \overline{N}'(\ ), .)$).

Démonstration: Soit $(G^\cdot, s) \in N'(\ )_0$. D'après le théorème 13, il existe $\bar{s} \prec s$ tel que $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}') \prec (G^\cdot, s, s')$. Puisque H' vérifie la condition (σ), on a $([\overline{G}^\cdot], \bar{s}) \in G(\ )$, en vertu du cor. 2, prop. 14. Comme H'' vérifie la condition (σ), on a aussi $\bar{s}' \underset{p''}{\prec} s'$ et $\bar{s} \underset{p''}{\prec} s$, donc

$$(\overline{G}^\cdot, \bar{s}, \bar{s}') \prec (G^\cdot, s, s') \text{ dans } (M, ., \varkappa^*(\square\square H'', \square p''), .)$$

d'après le théorème 4. Donc $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}') \prec (G^\cdot, s')$ dans $(M, ., N'(\ ), .)$. – Si de plus $(G^\cdot, s') \in \overline{N}'(\ )_0$, on a $(\overline{G}^\cdot, \bar{s}') \in \overline{N}'(p)_0$, en tenant compte du théorème 13, ce qui démontre le théorème 17.

Corollaire 1: *Si H'' vérifie la condition (σ), les catégories d'homomorphismes* $(M, ., N'(\ ), .)$ *et* $(M, ., \overline{N}'(\ ), .)$ *sont résolvantes à droite.*

Démonstration analogue à celle du corollaire du théorème 8.

Corollaire 2: *Supposons que H'' vérifie la condition (σ) et que H' et H'' soient stables par produits. Soient*

$$\overline{\mu}_i = ((G^{\cdot}, s, s'), \mu_i, (G_i^{\cdot}, s_i, s_i')) \in N'(\ )\ (\textit{resp.} \in \overline{N}'(\ )),\ i = 1, 2\,.$$

Alors il existe $\sigma \underset{p}{<} s_1 \times s_2$ *et* $\sigma' \underset{p}{<} S'$ *tels que* $(\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1), \sigma, \sigma')$ *soit une sous-structure de* $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S')$ *dans* $(M, ., N'(\ ), .)$ (*resp. dans* $(M, ., \overline{N}'(\ ), .)$) ; *de plus on a:*

$$\overline{p_i\,\iota} = ((G_i^{\cdot}, s_i'), p_i\,\iota, (\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1), \sigma'))\in N'(\ )\ (\textit{resp.} \in \overline{N}'(\ )).$$

(voir théorèmes 8, I et 6).

Démonstration: D'après le théorème 16, on a $(G_1^{\cdot} \times G_2^{\cdot}, s_1 \times s_2, S') \in N'(\ )_0$ et, en vertu du théorème 6, il existe $\sigma' < S'$ et $\sigma < s_1 \times s_2$ tels que $(\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1), \sigma, \sigma') \in \varkappa^*(\square\square H, \square p)_0$; il résulte donc du théorème 17 que l'on a $(\overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1), \sigma') \in N'(\ )_0$. – Par définition, on a:

$$(G_i^{\cdot}, p_i\,\iota, \overline{\mu}_2^*(G_1^{\cdot}, \overline{\mu}_1)) \in N'.$$

La relation:

$$(s_i', p_i\,\iota * p_i\,\iota, \sigma') = (s_i', p_i', s_1' \times s_2') \cdot (s_1' \times s_2', \pi', S') \cdot (S', \iota, \sigma') \in H\,,$$

où p_i' est la projection canonique de $p(s_1' \times s_2')$ sur $p(s_i')$ et

$$\pi'((g_1, g_2), (f_1, f_2)) = ((g_1, f_1), (g_2, f_2))\,,$$

entraîne $\overline{p_i\,\iota} \in N'(\ )$.

Remarque: Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie $H(\ )$-structurée. Si $\bar{s} \underset{p}{<} s$ et si $p(\bar{s})$ est une sous-catégorie $\overline{C}^{\cdot}$ de $C^{\cdot}$, alors $(\overline{C}^{\cdot}, \bar{s})$ est une catégorie $H(\ )$-structurée (voir théorème 13, II, [2]). Par contre l'énoncé analogue pour les graphes multiplicatifs fortement structurés n'est plus valable car la démonstration du théorème 13, II [2] repose sur le fait que s' est un p-noyau, ce qui n'est plus vrai dans un graphe multiplicatif.

Théorème 18: *Supposons H' stable par produits. Soit* $(G^{\cdot}, s, s') \in N'(\ )_0$. *Soit ϱ une relation d'équivalence bicompatible sur $G^{\cdot}$ et $\tilde{\varrho}$ la surjection canonique de G sur G/ϱ. Si on a:* $(\bar{s}', \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, s') \in H^s(M^s, p) \cap H''^s(M^s, p)$ *et si la relation* $s/\varrho \xrightarrow{p} < s$ *entraîne* $s/\varrho \xrightarrow{p'} < s$ *et* $(s/\varrho, \tilde{\varrho}, s) \in H''$, *alors* $(G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}')$ *est un graphe multiplicatif $(p,\ )$-structuré, qui est une structure quotient de* $(G^{\cdot}, s, s')$ *dans* $(M, ., N'(\ ), .)$.

Démonstration: D'après le théorème 14, il existe $s/\varrho \in H_0$ tel que $s/\varrho \overset{p}{\longrightarrow\!\!<} s$ et $(G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in N'(p)_0$. En vertu du cor. prop. 15, on a aussi

$$([G^{\cdot}/\varrho], s/\varrho) \in G(\ )_0 .$$

Enfin les relations: $\bar{s}' \overset{p''}{\longrightarrow\!\!<} s'$, $(s/\varrho, \tilde{\varrho}\,\varkappa(G^{\cdot}), s') \in H''$ et $\tilde{\varrho}\,\varkappa(G^{\cdot}) = \varkappa(G^{\cdot}/\varrho)\,(\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})$ entraînent $(s/\varrho, \varkappa(G^{\cdot}/\varrho), \bar{s}') \in H''$. Donc $(G^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in N'(\ )_0$.

4. Quelques applications

Nous reprenons les conventions de la fin du n° 3. En particulier, $(M, p, H, .)$ est une catégorie d'homomorphismes à produits finis, résolvante à droite et saturée au-dessus de M. H' et H'' désignent deux sous-catégories de H contenant H_γ et on suppose que H' vérifie la condition (σ).

A. Graphes multiplicatifs fortement structurés induits

Supposons que H'' soit identique à H et que H' soit une sous-catégorie de H stable par produits dans H.

Théorème 19: *Soient* $(G^{\cdot}, s) \in \overline{N'}(\ )_0$ *et* $(s_0, \psi_0, \bar{s}_0) \in H$, *où* $s_0 < s$ *et* $p(s_0) = G^{\cdot}_0$. *Alors il existe un graphe multiplicatif fortement structuré induit* $(\psi_0^*(G^{\cdot}), \sigma) \in \overline{N'}(\ )_0$ *tel que* $\sigma < s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)$ *et*

$$\overline{\Psi} = ((G^{\cdot}, s), \bar{\psi}, (\psi_0^*(G^{\cdot}), \sigma)) \in \overline{N'}(\ ), \ \bar{\psi} = p_1\, \iota,$$

p_1 *désignant la projection* $(f, (u', u)) \to f$ *de* $G \times (p(\bar{s}_0) \times p(\bar{s}_0))$ *sur* G (voir n° 4, I). *De plus, si* $\sigma_0 < \sigma$ *et* $p(\sigma_0) = \psi_0^*(G^{\cdot})_0$, *on a:*

$$j = (s_0, [\psi_0, \delta]^{-1}, \sigma_0) \in H_\gamma, \ \textit{avec}\ [\psi_0, \delta](u) = (\psi_0(u), (u, u)) .$$

Démonstration: D'après le théorème 13, II, [2], $\overline{\Sigma} = ((p(\bar{s}_0) \times p(\bar{s}_0))^{\perp}, \bar{s}_0 \times \bar{s}_0)$ est une catégorie $H(H_\gamma, H)$-structurée, où $\perp$ désigne la loi de composition entre couples:

$$(u'', u') \perp (u', u) = (u'', u),$$

et

$$\overline{\Psi}_0 \times \overline{\Psi}_0 = (((p(s_0) \times p(s_0))^{\perp}, s_0 \times s_0), \psi_0 \times \psi_0, \overline{\Sigma}) \in \overline{N'}(\ ) .$$

Comme $((p(s_0) \times p(s_0))^{\perp}, [\beta, \alpha], G^{\cdot}) \in N'$ et $(s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in H$, on a $\overline{[\beta, \alpha]} = (((p(s_0) \times p(s_0))^{\perp}, s_0 \times s_0), [\beta, \alpha], (G^{\cdot}, s)) \in \overline{N'}(\ )$, en vertu de la proposition 16. Puisque $\psi_0^*(G^{\cdot}) = (\overline{\Psi}_0 \times \overline{\Psi}_0)^*(G^{\cdot}, \overline{[\beta, \alpha]})$, il résulte du corollaire 2 du théorème 17 qu'il existe $\sigma < s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)$ tel que $(\psi_0^*(G^{\cdot}), \sigma) \in \overline{N'}(\ )_0$ et $\overline{\Psi} \in \overline{N'}(\ )$. – De plus on a:

$$(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, \delta, \bar{s}_0) = (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [\iota, \iota], \bar{s}_0) \in H, \text{ d'où } (s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0), [\psi_0, \delta], \bar{s}_0) \in H,$$

et par suite $(\sigma_0, [\psi_0, \delta], \bar{s}_0) \in H$, car $[\psi_0, \delta](p(\bar{s}_0)) \subset \psi_0^*(G_0^\cdot)$. Les relations:

$$j = (\bar{s}_0, p_1' p_2, s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)) \cdot (s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0), \iota, \sigma_0) \in H,$$

où p_2 (resp. p_1') est la projection de $p(s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0))$ sur $p(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)$ (resp. de $p(\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)$ sur $p(\bar{s}_0)$),

$$(\sigma_0, [\psi_0, \delta], \bar{s}_0) \cdot j = \sigma_0 \text{ et } j \cdot (\sigma_0, [\psi_0, \delta], \bar{s}_0) = \bar{s}_0$$

entraînent:

$$j \in H_\gamma.$$

Corollaire: *Si de plus $(G^\cdot, s)$ est une catégorie $H(\ )$-structurée, alors $(\psi_0^*(G^\cdot), \sigma)$ est aussi une catégorie $H(\ )$-structurée.*

Soit $\bar{U}(\ )$ le foncteur de $\bar{N}'(\ )$ vers H défini par:

$$\Phi = ((G^\cdot, s), \varphi, (\bar{G}^\cdot, \bar{s})) \to (s_0, \varphi_0, \bar{s}_0),$$

φ_0 désignant toujours la restriction de φ à $G_0^\cdot$.

Théorème 20: *Pour que $\Psi = ((G^\cdot, s), \psi, (\bar{G}^\cdot, \bar{s})) \in \bar{N}'(\ )$ soit une $(H, \bar{U}(\ ))$-injection, il faut et il suffit que l'on ait:*

$$\Psi = \bar{\Psi} \cdot \Psi', \text{ où } \bar{\Psi} = ((G^\cdot, s), p_1 \iota, (\psi_0^*(G^\cdot), \sigma)) \text{ et } \Psi' \in \bar{N}'(\ )_\gamma.$$

Démonstration: Reprenons les notations du théorème 19 et montrons que $\bar{\Psi}$ est une $(H, \bar{U}(\ ))$-injection. Soit:

$$\Phi = ((G^\cdot, s), \varphi, (\tilde{G}^\cdot, \tilde{s})) \in \bar{N}'(\ )$$

tel que $\bar{U}(\ )(\Phi) = (s_0, \varphi_0, \tilde{s}_0) = (s_0, \bar{\psi}_0, \sigma_0) \cdot (\sigma_0, \varphi_0', \tilde{s}_0)$, où $(\sigma_0, \varphi_0', \tilde{s}_0) \in H$. Puisque $\varphi_0 = \bar{\psi}_0 \varphi_0'$ et que $(G^\cdot, \bar{\psi}, \psi_0^*(G^\cdot))$ est une $(M, \bar{U})$-injection d'après le théorème 9, I, on a:

$$(G^\cdot, \varphi, \tilde{G}^\cdot) = (G^\cdot, \bar{\psi}, \psi_0^*(G^\cdot)) \cdot (\psi_0^*(G^\cdot), \varphi', \tilde{G}^\cdot),$$

φ' désignant l'application $[\varphi, [p(j)\varphi_0'\tilde{\beta}, p(j)\varphi_0'\tilde{\alpha}]]$, c'est-à-dire $\varphi'(f) = (\varphi(f), (e', e))$ tel que:

$$(\psi_0(e), (e, e)) = \varphi_0'(\alpha(f)) \quad \text{et} \quad (\psi_0(e'), (e', e')) = \varphi_0'(\beta(f))$$

pour tout $f \in \tilde{G}$. Les relations:

$$j \cdot (\sigma_0, \varphi_0', \tilde{s}_0) \cdot (\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}, \tilde{s}) \in H \quad \text{et} \quad j \cdot (\sigma_0, \varphi_0', \tilde{s}_0) \cdot (\tilde{s}_0, \tilde{\beta}, \tilde{s}) \in H$$

entraînent:

$$h = (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0, [p(j)\varphi_0'\tilde{\beta}, p(j)\varphi_0'\tilde{\alpha}], \tilde{s}) = [(\bar{s}_0, p(j)\varphi_0'\tilde{\beta}, \tilde{s}), (\bar{s}_0, p(j)\varphi_0'\tilde{\alpha}, \tilde{s})] \in H.$$

Par ailleurs, on a:

$$(s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0), \varphi', \tilde{s}) = [(s, \varphi, \tilde{s}), h] \in H.$$

Comme $\varphi'(\tilde{G}) \subset \psi_0^*(\tilde{G}^\cdot)$ et $\sigma \prec s \times (\bar{s}_0 \times \bar{s}_0)$, il en résulte $(\sigma, \varphi', \tilde{s}) \in H$.

Donc $\Phi' = ((\psi_0^*(G^\cdot), \sigma), \varphi', (\bar{G}^\cdot, \bar{\bar{s}})) \in \bar{N}'(\ )$ et $\bar{\Psi}$ est une $(H, \bar{U}(\ ))$-injection; il en est de même de $\Psi = \bar{\Psi} \cdot \Psi'$, si $\Psi' \in \bar{N}'(\ )_\gamma$. – On voit que la condition de l'énoncé est aussi nécessaire, par une démonstration analogue à la deuxième partie de la démonstration du théorème 9, I.

Corollaire: *Soit* $\Psi = ((G^\cdot, s), \psi, (\bar{G}^\cdot, \bar{s})) \in \bar{N}'(\ )$; *alors* Ψ *admet la décomposition canonique* $\Psi = \bar{\Psi} \cdot \Psi'$, *où*

$$\bar{\Psi} = ((G^\cdot, s), \bar{\psi}, (\psi_0^*(G^\cdot), \sigma)), \quad \Psi' = ((\psi_0^*(G^\cdot), \sigma), \psi', (\bar{G}^\cdot, \bar{s}))$$

et

$$\psi'(f) = (\psi(f), (\psi_0(\bar{\beta}(f)), \psi_0(\bar{\alpha}(f)))) \ \textit{pour tout} \ f \in \bar{G}.$$

B. Catégorie structurée quotient

Dans tous les théorèmes suivants *nous supposons que* $C^\cdot$ *est une catégorie et* ϱ *une relation d'équivalence sur* C, *telle que* $C^\cdot$ *admette une catégorie quotient strict par* ϱ; les applications source et but dans la catégorie quotient $C^\cdot/\varrho$ seront notées $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$. Soit $\varrho * \varrho$ (resp. ϱ_0) la relation d'équivalence induite par la relation d'équivalence produit $\varrho \times \varrho$ sur $C^\cdot * C^\cdot$ (resp. par ϱ sur $C_0^\cdot$). Nous supposons que $(C^\cdot, s)$ est une catégorie H-structurée et nous posons $s' \prec s \times s$, $p(s') = C^\cdot * C^\cdot$. Si:
$$\overline{\varrho * \varrho} = (\bar{s}', \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, s') \in H^s(M^s, p),$$
où $\tilde{\varrho}(f) = f \bmod \varrho$ pour tout $f \in C$ et $\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}(g, f) = (\tilde{\varrho}(g), \tilde{\varrho}(f))$, alors il existe $s/\varrho \overset{p}{\longrightarrow}\!\!\prec s$ et $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho, \bar{s}')$ est une catégorie faiblement p-structurée quotient de $(C^\cdot, s, s')$ dans $(M, ., N'(p), .)$, d'après le théorème 14; de plus $(s/\varrho)_0 \overset{p}{\longrightarrow}\!\!\prec s_0$ et par suite il existe $s_0/\varrho_0 \longrightarrow\!\!\prec s_0$. Dans ce cas nous poserons $\bar{\varrho} = (s/\varrho, \tilde{\varrho}, s)$ et $\bar{\varrho}_0 = ((s/\varrho)_0, \tilde{\varrho}_0, s_0)$.

Remarque: Pour que $C^\cdot * C^\cdot$ soit saturé pour $\varrho \times \varrho$, il faut et il suffit que ϱ_0 soit la relation identique. Généralement les auteurs se bornent à ce cas particulier (mais important dans des applications) pour définir une catégorie quotient.

Théorème 21: *Supposons* $\overline{\varrho * \varrho} \in H^s(M^s, p)$. *Si les relations:* $(\tilde{s}', \iota, \bar{s}') \in H$ *et* $p(\tilde{s}') = p(\bar{s}')$ *entraînent* $\bar{s}' = \tilde{s}'$, *alors* $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ *est une catégorie* H-*structurée quotient de* $(C^\cdot, s)$ *dans* $(M, ., \bar{H}, .)$ (II, [3]).

Démonstration: On a $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in N'(p)_0$. Le couple:
$$((s/\varrho, \bar{\alpha}\, p_1, s/\varrho \times s/\varrho), (s/\varrho, \bar{\beta}\, p_2, s/\varrho \times s/\varrho))$$
où p_i sont les projections canoniques de $C^\cdot/\varrho * C^\cdot/\varrho$ sur $C^\cdot/\varrho$, admet un p-noyau $\tilde{s}'$ tel que $p(\tilde{s}') = C^\cdot/\varrho * C^\cdot/\varrho$. Les conditions:
$$(s/\varrho \times s/\varrho, \tilde{\varrho} \times \tilde{\varrho}, s \times s) \in H, \quad \text{et} \quad (\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})(C^\cdot * C^\cdot) = (C^\cdot/\varrho) * (C^\cdot/\varrho)$$
entraînent $(\tilde{s}', \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}, s') \in H$. Comme $\bar{s}' \longrightarrow\!\!\prec s'$, il en résulte $(\tilde{s}', \iota, \bar{s}') \in H$,

d'où $\bar{s}' = \tilde{s}' \prec s/\varrho \times s/\varrho$, et $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho) \in \bar{N}'(p)_0$. On en déduit que $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie H-structurée quotient de $(C^{\cdot}, s)$ dans $(M, ., \bar{H}, .)$, car la sous-catégorie $\bar{H}$ de $\bar{N}'(p)$ formée des foncteurs H-structurés [2] est pleine dans $\bar{N}'(p)$.

Corollaire: *Soit* $(C^{\cdot}, C^{\perp})$ *une catégorie double* [2]. *Si* $(C^{\cdot} * C^{\cdot})^{\perp}$ *admet une catégorie quotient (resp. quotient strict) par* $\varrho * \varrho$, *alors il existe une catégorie double* $(C^{\cdot}/\varrho, (C/\varrho)^{\perp})$ *(resp.* $(C^{\cdot}/\varrho, C^{\perp}/\varrho)$*) quotient de* $(C^{\cdot}, C^{\perp})$ *par* ϱ.

Démonstration: Rappelons qu'une catégorie double est une catégorie F-structurée $(C^{\cdot}, s)$, où $s = C^{\perp} \in F_0$. Comme les relations $(S, \iota, S') \in F$ et $p(S) = p(S')$ entraînent $S = S'$ (proposition 9, II [2]), il résulte du théorème 21 qu'il existe une catégorie $(C/\varrho)^{\perp}$ quotient de $C^{\perp}$ telle que $(C^{\cdot}/\varrho, (C/\varrho)^{\perp})$ soit une catégorie double. – Supposons de plus que $(C^{\cdot} * C^{\cdot})^{\perp}$ admette une catégorie quotient strict $(C^{\cdot} * C^{\cdot})/\varrho * \varrho$. La bijection canonique de $(C^{\cdot} * C^{\cdot})/\varrho * \varrho$ sur $(C^{\cdot}/\varrho) * (C^{\cdot}/\varrho)$ définit sur $(C^{\cdot}/\varrho) * (C^{\cdot}/\varrho)$ une loi de composition $\perp$ telle que $(C^{\cdot}/\varrho * C^{\cdot}/\varrho)^{\perp}$ soit aussi une catégorie quotient strict de $(C^{\cdot} * C^{\cdot})^{\perp}$. Si $\tilde{g} \perp \tilde{f}$ est défini dans $(C/\varrho)^{\perp}$, le composé $(\tilde{g}, \bar{\alpha}(\tilde{g})) \perp (\tilde{f}, \bar{\alpha}(\tilde{f}))$ est défini dans $(C^{\cdot}/\varrho * C^{\cdot}/\varrho)^{\perp}$, puisque l'on a:

$$((C^{\cdot}/\varrho * C^{\cdot}/\varrho)^{\perp}, \gamma_{\bar{\alpha}}, (C/\varrho)^{\perp}) \in F .$$

Par suite il existe $(g, h') \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ et $(f, h) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ tels que le composé $(g, h') \perp (f, h)$ soit défini dans $(C^{\cdot} * C^{\cdot})^{\perp}$ et que:

$$\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}\,(g, h') = (\tilde{g}, \bar{\alpha}(\tilde{g})), \quad \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}\,(f, h) = (\tilde{f}, \bar{\alpha}(\tilde{f})) .$$

Comme $\tilde{\varrho}(g) = \tilde{g}$, $\tilde{\varrho}(f) = \tilde{f}$ et que $g \perp f$ est défini, $\bar{\varrho}$ définit $(C/\varrho)^{\perp}$ comme catégorie quotient strict de $C^{\perp}$, en vertu de la proposition 23, I, c'est-à-dire on a $(C/\varrho)^{\perp} = C^{\perp}/\varrho$.

Corollaire 2: *Soit* $(C^{\cdot}, s)$ *une catégorie topologique* [3]. *Supposons* $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ *saturé pour* $\varrho \times \varrho$ *(resp. supposons la relation d'équivalence* ϱ *fermée et la topologie* s *séparée). Si* $s \times s/\varrho \times \varrho$ *est homéomorphe à* $s/\varrho \times s/\varrho$ *(par exemple si la relation d'équivalence* ϱ *est ouverte) alors* $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ *est une catégorie topologique quotient de* $(C^{\cdot}, s)$.

Démonstration: Rappelons qu'une catégorie topologique $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\tilde{T}$-structurée, où $(M, \theta, \tilde{T}, .)$ est la catégorie d'homomorphismes formée des applications continues; donc s est une topologie sur C et s' est la topologie induite par $s \times s$ sur $C^{\cdot} * C^{\cdot}$. Comme s' admet une topologie quotient $s'/\varrho * \varrho$, on a $\overline{\varrho * \varrho} \in \tilde{T}^s(M^s, \theta)$ et $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in N'(\theta)$, où $\bar{s}'$ est la topologie sur $(C^{\cdot}/\varrho) * (C^{\cdot}/\varrho)$ homéomorphe à $s'/\varrho * \varrho$. Soit $\tilde{s}'$ la topologie induite par $s/\varrho \times s/\varrho$ sur $(C^{\cdot}/\varrho) * (C^{\cdot}/\varrho)$. Puisque s' est un θ-noyau, $\theta(s')$ est fermé dans $s \times s$, si s est séparée. Si la relation d'équivalence ϱ est fermée et si s est séparée (resp. si $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ est saturé pour $\varrho \times \varrho$), et si $s/\varrho \times s/\varrho$ est homéomorphe à $s \times s/\varrho \times \varrho$, alors $s'/\varrho * \varrho$, et par suite $\bar{s}'$, est homéomorphe à $\tilde{s}'$. Il en résulte $\bar{s}' = \tilde{s}' \prec s/\varrho \times s/\varrho$; donc $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie topologique.

Théorème 22: *Soit* $(C^{\cdot}, s)$ *une catégorie ordonnée. Si on a* $\overline{\varrho * \varrho} \in \tilde{\Omega}''$ *et si les relations* $E \in C_0^{\cdot}$, $e \in C_0^{\cdot}$, $e' \in C_0^{\cdot}$, $e < E$, $e' < E$ *et* $e \sim e' \bmod \varrho$ *entraînent* $e = e'$, *alors on a* $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$ *et* $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ *est une catégorie ordonnée. Si de plus* $(C^{\cdot}, s)$ *est une catégorie* $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}'')$*-structurée, il en est de même de* $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$.

Démonstration: Rappelons [1] qu'une catégorie ordonnée $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$-structurée, donc s est la classe C munie d'une relation d'ordre, notée $<$. D'après la proposition 28, I, $\overline{\varrho * \varrho} \in \tilde{\Omega}''$ est une ω-surjection; par suite $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}')$ est un graphe multiplicatif ω-structuré. La deuxième condition du théorème signifie que l'on a $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}_1'$; on en déduit: $\bar{\varrho}_0 \times \bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}_1' \subset \tilde{\Omega}'$. Les relations:

$$\bar{\varphi} = (\bar{\varrho}_0 \times \bar{\varrho}_0) \cdot (s_0 \times s_0, [\beta, \alpha], s) \in \tilde{\Omega}' \quad \text{et} \quad \omega(\bar{\varphi}) = (\tilde{\varrho}_0 \times \tilde{\varrho}_0)\,[\beta, \alpha] = [\bar{\beta}, \bar{\alpha}]\,\tilde{\varrho}$$

assurent que $\bar{\varrho}$ est une ω'-surjection d'après la proposition 27, I. Donc $((s/\varrho)_0 \times (s/\varrho)_0, [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], s/\varrho) \in \tilde{\Omega}'$, en vertu du corollaire de la proposition 15, et $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}')$ est un graphe multiplicatif $(\omega, \tilde{\Omega}', \tilde{\Omega})$-structuré. – Montrons: $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$. En effet, soient $f \in C$ et $\tilde{f}' < \tilde{\varrho}(f)$ dans s/ϱ. Comme $(\bar{s}', \gamma_{\bar{\alpha}}, s/\varrho) \in \tilde{\Omega}$, on trouve, dans $\bar{s}'$:

$$(\tilde{f}', \bar{\alpha}(\tilde{f}')) < (\tilde{\varrho}(f), \bar{\alpha}(\tilde{\varrho}(f))) = (\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})\,(f, \alpha(f)).$$

L'hypothèse $\overline{\varrho * \varrho} \in \tilde{\Omega}''$ assure l'existence de $(f', h) < (f, \alpha(f))$ dans s' tel que $\tilde{\varrho}(f') = \tilde{f}'$ et $\tilde{\varrho}(h) = \bar{\alpha}(\tilde{f}')$. On a:

$$f' \cdot h = \varkappa(C^{\cdot})\,(f', h) < \varkappa(C^{\cdot})\,(f, \alpha(f)) = f$$

et, puisque $(C^{\cdot}/\varrho, \tilde{\varrho}, C^{\cdot}) \in F$:

$$\tilde{\varrho}(f' \cdot h) = \tilde{\varrho}(f') \cdot \tilde{\varrho}(h) = \tilde{f}',$$

d'où $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$. – Montrons que $\bar{s}'$ est identique à la structure d'ordre $\tilde{s}'$ induite par $s/\varrho \times s/\varrho$ sur $C^{\cdot}/\varrho * C^{\cdot}/\varrho$. En effet, on a $(\tilde{s}', \iota, \bar{s}') \in \tilde{\Omega}$. Supposons $(\tilde{g}', \tilde{f}') < (\tilde{g}, \tilde{f})$ dans $(C^{\cdot}/\varrho * C^{\cdot}/\varrho, \tilde{s}')$, c'est-à-dire $\tilde{g}' < \tilde{g}$ et $\tilde{f}' < \tilde{f}$ dans s/ϱ. Comme $C^{\cdot}/\varrho$ est une catégorie quotient strict de $C^{\cdot}$, il existe $(g, f) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ tel que $\tilde{\varrho}(g) = \tilde{g}$ et $\tilde{\varrho}(f) = \tilde{f}$. Puisque $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$, il existe $g' < g$ tel que

$\tilde{\varrho}(g') = \tilde{g}'$ et il existe $f' < f$ tel que $\tilde{\varrho}(f') = \tilde{f}'$; on a:

$$\alpha(g') < \alpha(g) = \beta(f),\ \beta(f') < \beta(f) \text{ et } \tilde{\varrho}(\alpha(g')) = \bar{\alpha}(\tilde{g}') = \bar{\beta}(\tilde{f}') = \tilde{\varrho}(\beta(f)).$$

En utilisant la condition $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'_1$, on en déduit $\alpha(g') = \beta(f')$. $(C^\cdot, s)$ étant une catégorie ordonnée, on a $(g', f') < (g, f)$ dans s', d'où

$$(\tilde{g}', \tilde{f}') = \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}(g', f') < \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}(g, f) = (\tilde{g}, \tilde{f})$$

dans $\bar{s}'$, car $\overline{\varrho * \varrho} \in \tilde{\Omega}$. Ceci démontre la relation $(\bar{s}', \iota, \tilde{s}') \in \tilde{\Omega}$; par suite $\bar{s}' = \tilde{s}' \prec s/\varrho \times s/\varrho$ et $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie ordonnée. – Supposons de plus $(C^\cdot, s) \in \overline{N}'(\omega, \tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}'')$. De $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$ et de la proposition 28, I, il résulte $s/\varrho \overset{\omega''}{\prec} s$; la proposition 2, I, entraîne alors $(s/\varrho, \varkappa(C^\cdot/\varrho), \bar{s}') \overset{\omega''}{\prec} (s, \varkappa(C^\cdot), s')$, donc $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}'')$-structurée.

Théorème 23: *Soit $(C^\cdot, s)$ une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, resp. inductive). Si on a $\overline{\varrho * \varrho} \in I''^{ps}$ (resp. $\in I''^{s}$, resp. $\in I''$) et $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'$, alors $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, resp. inductive) quotient de $(C^\cdot, s)$ par ϱ.*

Démonstration: Soit $(C^\cdot, s)$ une catégorie sous-préinductive, c'est-à-dire (voir [1]) une catégorie $I^{ps}(I'^{ps}, I^{ps})$-structurée. D'après le corollaire de la proposition 29, I, $\overline{\varrho * \varrho} \in I''^{ps}$ est une ω^{ps}-surjection et il résulte du théorème 14 que $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho, \bar{s}')$ est un graphe multiplicatif ω^{ps}-structuré. D'après la démonstration du théorème 22, $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}''$, d'où $s/\varrho \overset{\omega}{\prec} s$. Le couple

$$((s/\varrho, \alpha p_1, s/\varrho \times s/\varrho), (s/\varrho, \beta p_2, s/\varrho \times s/\varrho))$$

où p_i désigne la i-ième projection canonique de $C/\varrho \times C/\varrho$ sur C/ϱ, admet un ω^{ps}-noyau $\tilde{s}'$ et on a $(\tilde{s}', \iota, \bar{s}') \in I^{ps}$. Par ailleurs les conditions $\bar{\varrho}_0 \in I^{ps}$ et $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'$ entraînant $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'_1$ (voir [3] et [1]), $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie ordonnée en vertu du théorème 22. Les relations:

$$\bar{s}' \underset{\omega}{\prec} s/\varrho \times s/\varrho \quad \text{et} \quad (s/\varrho \times s/\varrho, \iota, \tilde{s}') \in I^{ps}$$

entraînent $(\bar{s}', \iota, \tilde{s}') \in \tilde{\Omega}$, d'où $\bar{s}' = \tilde{s}' \underset{\omega^{ps}}{\prec} s/\varrho \times s/\varrho$. Donc $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie sous-préinductive. Le cas sous-inductif (resp. inductif) se démontre d'une manière analogue.

Corollaire: *Soit $(C^\cdot, s)$ un groupoïde sous-préinductif (resp. sous-inductif, resp. inductif)* [3]. *Si on a $\overline{\varrho * \varrho} \in I''^{ps}$ (resp. $\in I''^{s}$, resp. $\in I''$) et $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'$, alors $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est un groupoïde sous-préinductif (resp. sous-inductif, resp. inductif).*

Démonstration: Rappelons [2] qu'un groupoïde sous-préinductif est un groupoïde $I^{ps}(I^{ps}, I''^{ps} \cap I'^{ps})$-structuré. Supposons $\overline{\varrho * \varrho} \in I''^{ps}$ et $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'$. D'après les théorèmes 22 et 23, $(C^\cdot/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie sous-préinductive et une catégorie $\tilde{\Omega}\,(\tilde{\Omega}', \tilde{\Omega}'')$-structurée. En vertu de la proposition 2, I, on a $(s/\varrho, j, s/\varrho) \in \tilde{\Omega}_\gamma$, où $j(\tilde{f}) = \tilde{f}^{-1}$ pour tout $\tilde{f} \in C/\varrho$. D'après la démonstration du théorème 22, on a $\bar{\varrho} \in \tilde{\Omega}'$. Des relations:

$$\bar{\varrho} \cdot (s, \varkappa(C^{\cdot}), s') \in \tilde{\Omega}' \quad \text{et} \quad \tilde{\varrho}\,\varkappa(C^{\cdot}) = \varkappa(C^{\cdot}/\varrho)\,(\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho})$$

et de la proposition 27, I, il résulte que $\overline{\varrho * \varrho}$ est une ω'-surjection. Par suite on a $(s/\varrho, \varkappa(C^{\cdot}/\varrho), \bar{s}') \overset{\omega'}{\prec} (s, \varkappa(C^{\cdot}), s')$

et
$$(s/\varrho, \varkappa(C^{\cdot}/\varrho), \bar{s}') \in I''^{ps} \cap I'^{ps},$$

ce qui démontre le corollaire dans le cas sous-préinductif. La démonstration est analogue dans le cas sous-inductif (resp. inductif).

Remarque: Le théorème p. 57 [3] est un cas particulier du dernier corollaire.

Dans les deux théorèmes suivants, *nous supposons que* $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ *est saturée pour* $\varrho \times \varrho$.

Théorème 24: *Soit* $(C^{\cdot}, s)$ *une catégorie ordonnée;* ϱ *est compatible avec* s *si, et seulement si,* $\varrho * \varrho$ *est compatible avec* s'. *Si* ϱ *est compatible avec* s, *il existe une catégorie ordonnée* $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ *quotient de* $(C^{\cdot}, s)$ *par* ϱ.

Démonstration: Supposons $\varrho * \varrho$ compatible avec s'; alors $\overline{\varrho * \varrho}$ est une ω-surjection d'après la proposition 27, I, il existe $s/\varrho \overset{\omega}{\prec} s$ et $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in N'(\omega)$. Supposons $\tilde{f}' < \tilde{f}$ dans s/ϱ; on a:

$$(\tilde{f}', \bar{\alpha}(\tilde{f}')) < (\tilde{f}, \bar{\alpha}(\tilde{f})) \quad \text{dans } \bar{s}'$$

et il existe $(f', h') \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ et $(f, h) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ tels que

$$\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}\,(f', h') = (\tilde{f}', \bar{\alpha}(\tilde{f}'))\,;\ \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}\,(f, h) = (\tilde{f}, \bar{\alpha}(\tilde{f}))\,;\ (f', h') < (f, h).$$

Comme $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie ordonnée, on a $s' \prec s \times s$, d'où

$$f' < f,\ \tilde{\varrho}\,(f') = \tilde{f}' \quad \text{et} \quad \tilde{\varrho}\,(f) = \tilde{f};$$

donc ϱ est compatible avec s. – Supposons inversement ϱ compatible avec s; soit $\bar{s}'$ la structure d'ordre induite par $s/\varrho \times s/\varrho$ sur $C^{\cdot}/\varrho * C^{\cdot}/\varrho$. La condition $(g', k') < (g, k)$ dans s' entraîne:

$$\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}(g', k') = (\tilde{\varrho}(g'), \tilde{\varrho}(k')) < \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}(g, k)$$

dans $\bar{s}'$. Supposons $(\tilde{f}', \tilde{h}') < (\tilde{f}, \tilde{h})$ dans $\bar{s}'$; il existe $(f', h') \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ et $(f, h) \in C^{\cdot} * C^{\cdot}$ tels que:

$$\tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}(f', h') = (\tilde{f}', \tilde{h}') \quad \text{et} \quad \tilde{\varrho} * \tilde{\varrho}(f, h) = (\tilde{f}, \tilde{h}),$$

car $C^{\cdot}/\varrho$ est une catégorie quotient strict de $C^{\cdot}$. Il existe aussi $f_1' < f_1$ et $h_1' < h_1$ tels que:

$$f_1' \sim f',\ h_1' \sim h',\ f_1 \sim f \quad \text{et} \quad h_1 \sim h.$$

Puisque $C^{\cdot} * C^{\cdot}$ est saturée pour $\varrho \times \varrho$, on en déduit

$$(f_1', h_1') < (f_1, h_1) \text{ dans } s'.$$

Par suite $\overline{\varrho * \varrho}$ est compatible sur s' et, d'après la proposition 27, I, on a $\bar{s}' \underset{\omega}{\prec} s'$. Il en résulte $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho, \bar{s}') \in N'(\omega)$; de plus $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie $\tilde{\Omega}$-structurée, car $\bar{s}' \prec s/\varrho \times s/\varrho$. Comme $\bar{\varrho}_0 \in \tilde{\Omega}'$, un raisonnement analogue à celui du théorème 22 prouve

$$((s/\varrho)_0 \times (s/\varrho)_0, [\bar{\beta}, \bar{\alpha}], s/\varrho) \in \tilde{\Omega}',$$

de sorte que $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie ordonnée.

Théorème 25: *Soit $(C^{\cdot}, s)$ une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, resp. inductive). $\overline{\varrho * \varrho}$ vérifie la condition $(q^{p\,s})$ (resp. la condition (q^s), resp. (q^s)) si, et seulement si, $\bar{\varrho}$ vérifie la même condition. Dans ce cas, $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie sous-préinductive (resp. sous-inductive, resp. inductive) quotient de $(C^{\cdot}, s)$ par ϱ.*

En effet, la démonstration de la première partie est analogue à celle du théorème 24. Si $\overline{\varrho * \varrho}$ vérifie la condition $(q^{p\,s})$, $\varrho * \varrho$ est compatible sur s' et $(C^{\cdot}/\varrho, s/\varrho)$ est une catégorie ordonnée d'après le théorème 24. La condition $(q^{p\,s})$ entraînant que $\overline{\varrho * \varrho}$ est une $\omega^{p\,s}$-surjection d'après la proposition 29, I, une démonstration similaire à celle du théorème 23 prouve que l'on a $\bar{s}' \underset{\omega^{ps}}{\prec} s/\varrho \times s/\varrho$, de sorte que $(C^{\cdot}, s)$ est une catégorie sous-préinductive. La démonstration est analogue dans le cas sous-inductif (resp. inductif).

BIBLIOGRAPHIE

[0] Ehresmann C.: *Structures quotient et catégories quotient.* C.R.A.S. 256, Paris, 1963, p. 5080.

[1] Ehresmann C.: *Sous-structures et catégories ordonnées* (Act. polycopié), à l'impression dans Fund. Math.

[2] Ehresmann C.: *Catégories structurées.* (Act. polycopié, à l'impression dans Ann. Ecole Normale, Paris), résumé dans C.R.A.S. 256, Paris, 1963, p. 1198, 1891, 2080 et 2280.

[3] Ehresmann C.: *Espèces de structures locales. Elargissements de catégories,* Sém. Topologie et Géométrie différentielle (Ehresmann), Paris, III, 1961.

[4] Ehresmann C.: *Catégorie des foncteurs types.* Rev. Un. Mate. Argentina v. XX, 1960, p. 194.

[5] Hasse Maria: *Einige Bemerkungen über Graphen, Kategorien und Gruppoide.* Math. Nachrichten, 22, H. 5–6, Berlin, 1960.

[6] Hilton P. J.: *Note on free and direct products in general categories.* Bull. Soc. Math. Belgique, t. XIII, 1961.

[7] Kurosch, Liwschitz, Schulgeifer, Zalenko. *Zur Theorie der Kategorien.* Deutsch. Verlag Wissenschaften, Berlin, 1963.

[8] Hoehnke H. J.: *Zur Theorie der Gruppoide.* Acta Math. XIII, 1–2, 1962.

(Reçu, le 9 juillet 1963)