Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 38 (1963-1964)

Artikel: Über die Grundlegung der Mengenlehre. Zweiter Teil. Verteidigung.

Autor: Finsler, Paul

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29442

Über die Grundlegung der Mengenlehre

Zweiter Teil. Verteidigung

von PAUL FINSLER, Zürich

Vorbemerkungen

1. Der erste Teil dieser Grundlegung mit dem Untertitel «Die Mengen und ihre Axiome» ist im Jahr 1926 in der Mathematischen Zeitschrift erschienen ([5][1]). Der zweite Teil sollte die Zahlen behandeln. Nun ist aber der erste Teil auf derartiges Unverständnis gestoßen, daß vorgezogen wurde, die Untersuchungen über die natürlichen Zahlen und das Kontinuum und einiges über transfinite Ordnungszahlen in gesonderten Abhandlungen erscheinen zu lassen ([8], [9], [11]).

Eine hinreichende Verteidigung des ersten Teils wurde besonders durch äußere Umstände lange verhindert. Ich hatte allerdings auch gehofft, daß sich die Sache schließlich selbst durchsetzen würde, zum mindesten bei solchen, die sich wirklich ernsthaft um die Grundlagen der Mathematik bemühen.

Nun wurden aber selbst in neuester Zeit noch alte, unrichtige Einwendungen vorgebracht, um die «Grundlegung» abzulehnen. Ich sehe mich daher genötigt, auf diese Einwände genauer einzugehen, um sie zurückzuweisen. Dabei beschränke ich mich hier in der Hauptsache auf die zuerst erfolgten Angriffe und behalte mir vor, auf die weitere Entwicklung bei späterer Gelegenheit zurückzukommen.

2. Eine Schwierigkeit besteht darin, daß es, wie es sich zeigte, nicht genügt, einfach zu sagen, was richtig ist, sondern auch noch viele falsche Ansichten und Irrtümer aufgedeckt und zurückgewiesen werden müssen. Dies ist schon aus persönlichen Gründen nicht immer angenehm, muß aber um der Sache willen doch geschehen.

Insbesondere muß vorausgesetzt werden, daß *in objektiver Weise* zwischen wahr und falsch unterschieden wird. Dies bedeutet, daß auch in der Mengenlehre untersucht wird, was wahr *ist,* und nicht nur, was (etwa in Axiomen) als wahr *angenommen wird.*

Ein *formaler* «Wahrheitsbegriff» kann hier nicht genügen; er ist viel zu eng und kann weder die Paradoxien lösen noch das Unendliche sicherstellen noch die höheren Mächtigkeiten beherrschen. Ein Formalismus, der nur endliche

---

[1] Im folgenden als «Grundlegung» zitiert. Siehe Literaturverzeichnis Seite 218

Formeln zuläßt, hat nur abzählbar viele Darstellungsmöglichkeiten und kann deshalb nicht alle Möglichkeiten eines überabzählbaren Systems erschöpfen.

Nach Überwindung der Antinomien liegt aber auch *gar kein Grund* vor, in der reinen Mathematik eine *absolute Wahrheit* abzulehnen.

Tatsächlich geht es hier um die *Verteidigung und Rettung der klassischen Mathematik,* wie sie bis um die letzte Jahrhundertwende, also bis zum Aufkommen der mengentheoretischen Antinomien, ziemlich unangefochten Geltung hatte, und damit auch um die *Überwindung* der sogenannten «Krise» in der Mathematik.

Kapitel 1

Ausgangspunkt und Ziel der Grundlegung

3. Den bei der Grundlegung eingenommenen Standpunkt glaubte ich in der Einleitung des ersten Teils hinreichend klargelegt zu haben: es ist der Standpunkt der *klassischen Mathematik,* der nur im Hinblick auf die Mengenlehre noch gefestigt werden muß. Da aber auch dies vielfach mißverstanden wurde, sind noch weitere Ausführungen notwendig.

In der klassischen Mathematik sind die Zahlen, insbesondere die natürlichen, aber auch die reellen und die komplexen Zahlen, nicht willkürlich von Menschen erschaffene Wesenheiten (wie hätten denn die Menschen auch nur die Möglichkeit, unendlich viele Wesenheiten zu erschaffen!), sondern sie existieren insgesamt unabhängig von uns selbst; wir können sie nur untersuchen und erforschen. So heißt es auch bei FREGE ([14] § 96): «Auch der Mathematiker kann nicht beliebig etwas schaffen, so wenig wie der Geograph; auch er kann nur entdecken, was da ist, und es benennen.»

4. Eine wichtige Aufgabe, die oft übersehen wird, ist es nun, zu entscheiden, ob es unendlich viele Zahlen gibt oder nicht. Es ist dies eine Frage objektiver Natur, die nicht durch eine bloße Annahme gelöst werden kann.

Die natürliche Zahlenreihe erscheint uns zunächst, soweit wir sie überblicken können, als etwas sehr Einfaches: auf jede natürliche Zahl folgt eine weitere. Gilt dies aber *immer,* für die *ganze* Zahlenreihe?

Es ist nicht leicht zu sehen, daß es auch anders sein könnte, daß es nämlich eine letzte natürliche Zahl geben könnte, über die man nicht hinauskommen kann. Das muß aber untersucht werden. Wirklich überblicken können wir nur einen verschwindend winzigen Teil der Zahlenreihe.

Auch die euklidische Geometrie erscheint zunächst, soweit man sie überblicken kann, als etwas Einfaches, und man hat deshalb lange Zeit geglaubt, es sei die einzig mögliche Geometrie. Es war auch hier nicht leicht zu sehen, daß es vielleicht anders sein könnte, daß nämlich etwa die Geraden nur eine endliche Länge besitzen könnten. Und doch ist es so. Auch das mußte untersucht werden.

Wenn es, wie manche glauben, nichts Unendliches gibt, dann ist auch die Zahlenreihe nur endlich. Sie braucht deshalb nicht (wie eine Gerade der elliptischen Geometrie) in sich zurückzulaufen; es ist zunächst durchaus denkbar, daß es eben eine letzte und größte natürliche Zahl gibt.

Wer dies bestreitet, der übersieht, daß es bei den Ordnungszahlen tatsächlich so ist.

Jede Ordnungszahl kann in bekannter Weise gleich der Menge aller kleineren Ordnungszahlen gesetzt werden. Die kleinste Ordnungszahl ist die Null, die mit der Nullmenge identisch ist. Dann folgt 1 als Menge, welche 0 als einziges Element enthält; dann die Ordnungszahl 2 als Menge, welche 0 und 1 enthält usf.

So weiterschreitend ergeben sich alle Ordnungszahlen, jede gleich der Menge aller vorangehenden. Eine Ordnungszahl ist genau dann größer als eine andere, wenn sie diese als Element enthält. Keine Ordnungszahl enthält sich selbst als Element.

Die Menge aller Ordnungszahlen kann nicht gebildet werden, da ihre Definition einen Widerspruch enthält: Wäre sie keine Ordnungszahl, so würde sie doch genau alle vorangehenden Ordnungszahlen enthalten und müßte deshalb selbst eine Ordnungszahl sein. Als solche müßte sie aber sich selbst als Element enthalten, was unmöglich ist.

Dagegen existiert eine Menge aller derjenigen Ordnungszahlen, zu denen es eine größere gibt. Dies ist die letzte und größte Ordnungszahl; zu dieser gibt es keine größere mehr. Eben deshalb kann auch auf Grund ihrer Definition nicht geschlossen werden, daß sie schon zu ihren Elementen gehören müßte. Es ist dies also eine gegenüber ihren Elementen *neue* Menge und ihrer Existenz steht somit nichts im Wege.

Die *Gesamtheit* aller Ordnungszahlen ist eindeutig bestimmt, nur entspricht ihr keine Menge. Dagegen existiert die *Vereinigungsmenge* dieser Gesamtheit; es ist dies wiederum die *größte Ordnungszahl.*

Das hat nichts mit dem Unendlichen zu tun, von dem hier gar nicht die Rede ist. Die größte Ordnungszahl könnte endlich sein und mit der größten natürlichen Zahl übereinstimmen. Dann wäre die Zahlenreihe nur endlich. Daß dies nicht der Fall ist, ist also keineswegs selbstverständlich.

Die Annahme, zu jeder natürlichen Zahl müsse es eine größere geben, könnte tatsächlich einen Widerspruch enthalten, weil nämlich die Definition einer *beliebigen* natürlichen Zahl ebenso wie die Definition einer *beliebigen* Ordnungszahl einen Zirkel enthält (vgl. [8] und [11]). Bei den Ordnungszahlen verhindert dieser Zirkel schließlich das weitere Fortschreiten; daß es bei den natürlichen Zahlen nicht ebenso ist, muß gezeigt werden.

In der Reihe der natürlichen Zahlen gibt es eine bestimmte erste Zahl, die Zahl 1. Warum sollte es darin nicht auch eine bestimmte letzte Zahl geben? Wenn dies aber nicht der Fall ist, warum sollte sich das nicht beweisen lassen? Muß das nur ein mystischer Glaube sein? Der Glaube an eine absolute Wahrheit in der Mathematik ist gut begründet, sobald man nur die Antinomien überwunden hat. Was aber in der Mathematik wahr ist und was nicht, das sollte man nicht nur glauben, sondern erforschen.

Daß der liebe Gott die natürlichen Zahlen gemacht hat, wird man gerne zugeben. Er hat es aber den Menschen überlassen, herauszubekommen, wieviele es sind. Auch die Atome in unserer Welt hat der liebe Gott gemacht; höchst wahrscheinlich aber sind es nur endlich viele.

5. Sehr bekannt ist die Frage, ob es unendlich viele Primzahlen gibt. Dies wird meistens bejaht, denn Euklid hat es ja schon bewiesen. Wie steht es aber damit? Der Beweis von Euklid gilt nur, wenn man schon weiß, daß es unendlich viele natürliche Zahlen gibt. Weiß man das aber? Nein, die meisten wissen es nicht. Es wird dies vielmehr nur angenommen. Dann weiß man aber auch nicht, ob es unendlich viele Primzahlen gibt. Der Beweis ist umsonst.

Man führt nun also ein Unendlichkeitsaxiom ein und sagt, auf Grund dieses Axioms ist der Satz richtig. Wenn aber das Axiom nicht stimmt, dann ist der Satz falsch. Man weiß also wiederum nichts.

Das Unendlichkeitsaxiom besagt, daß es unendlich viele Dinge gibt. In der realen Welt ist es sehr wahrscheinlich nicht erfüllt. Man braucht also eine ideale Welt. Gibt es in der idealen Welt unendlich viele Dinge? Wenn man das nicht zeigen kann, dann ist die ganze Unendlichkeitsmathematik hinfällig, man hat nur hypothetische Sätze und weiß nicht einmal, ob Euklid mit seiner Behauptung recht hat.

Manche sagen, man brauche in der Mathematik nicht unendlich viele Dinge, sondern nur zu beliebig endlich vielen immer noch eines. Dies führt aber nicht weiter, denn das ist genau dasselbe, nur anders ausgedrückt.

6. Es ist wohl die wichtigste Aufgabe einer wirklichen Grundlegung der Mathematik, diesen Punkt abzuklären, also zu zeigen, daß es unendlich viele Zahlen gibt. Das ist nicht leicht, aber auch nicht unmöglich (vgl. [8] und [11]). Wenn behauptet wird, ein «absoluter Widerspruchsfreiheitsbeweis» für das Peanosche Axiomensystem der natürlichen Zahlen sei «nicht möglich» oder «undenkbar», so ist daran zu erinnern, daß man auch das Fliegen als unmöglich erklärt und die Brüder, die es trotzdem taten, als Lügner bezeichnet hat!

7. Mit rein formalen Methoden geht es allerdings nicht. Ein System von Formeln, die man «aufschreiben kann», ist notgedrungen nur endlich, also mit

der Annahme einer endlichen Welt vereinbar. Wenn aber die Welt endlich ist, kann man nicht zeigen, daß sie unendlich viele Dinge oder etwa unendlich viele «Zeichen» enthält, da dies dann einfach nicht stimmt. Andere «Dinge» kommen aber in den Formalismen nicht vor.

Die Unendlichkeit der Zahlenreihe kann man niemals ausrechnen, wohl aber einsehen; dies aber auch nur dann, wenn man sich die nötige Mühe gibt!

Wenn man einfach behauptet, es gibt unendlich viele Zahlen, ohne zu wissen, ob das stimmt, dann ist das unwürdig und unehrlich. Wenn ein Kind fragt: ist es wahr, daß es zu jeder Zahl immer noch eine größere gibt, kann man ihm dann *mit gutem Gewissen* antworten: ja, das ist wahr?

Unwürdig ist es auch, in der Mathematik so zu tun, als ob es unendlich viele Zahlen gäbe, auch wenn man selbst gar nicht daran glaubt. Viele leugnen das Unendliche und wollen trotzdem Differential- und Integralrechnung unterrichten und mit konvergenten Reihen operieren, und meinen, hinter beliebig viele Zeichen immer noch eines setzen zu können. Aber auch sie können nicht hinter jeden Schritt einen weiteren setzen; einmal kommt der *letzte*, dann geht es nicht mehr.

Die Behauptung aber, es folge schon durch einfache Intuition, daß es zu jeder natürlichen Zahl eine folgende geben müsse, ist *unhaltbar*. Mit gleichem Recht könnte man dasselbe für die Ordnungszahlen behaupten, und das ist, wie schon oben gezeigt wurde, falsch.

Wenn man aber schließlich sagt, es genüge zu zeigen, daß man aus dem Unendlichkeitsaxiom mit formalen Methoden keinen Widerspruch herleiten kann, dann ist das in gleicher Weise unwürdig, wie wenn ein Verbrecher sagt, er dürfe sich alles erlauben, solange er nur die Gewißheit habe, nicht erwischt oder zum mindesten gerichtlich nicht verurteilt zu werden. Wer einen Mord begangen hat, der ist ein Mörder, auch wenn ihm nichts nachzuweisen ist.

8. Ein System von Formeln als etwas «Schärferes» zu betrachten als die abstrakten Zahlen und ihre Beziehungen, ist ein Irrtum.

Zunächst besteht eine Formel aus «Zeichen». Was ist ein Zeichen? Wenn es sich um materielle, also sichtbare Zeichen handelt, so können sie zu einer momentanen Mitteilung dienen. Aber zur Mitteilung wovon, wenn man nichts anderes hat? Wenn man sie zur Mitteilung von logischen Begriffen oder Beziehungen benutzt, dann bilden die logischen Begriffe oder Beziehungen die Grundlage, und nicht die Zeichen. Ein bloßes Spiel mit bedeutungslosen Zeichen bleibt bedeutungslos, wenn den Zeichen nicht schließlich doch ein Sinn beigelegt wird.

Die Zeichen sind zudem unscharf definiert und vergänglich. Sie können deshalb niemals als Grundlage für eine scharfe und unvergängliche Mathematik dienen.

Wenn EUKLID noch die Punkte und Geraden durch anschauliche Eigenschaften zu definieren versuchte, so wird das heute bei einer Grundlegung der Geometrie abgelehnt; es kommt nur auf die Beziehungen zwischen den Punkten und Geraden an und nicht darauf, wie sie «aussehen».

Wenn man nun die Zahlen durch Zeichen definieren will, so ist das ein Rückschritt; auch hier kommt es nur auf die Beziehungen zwischen den Zahlen an und nicht auf ihr «Aussehen».

Auch wenn man die «Zeichen» irgendwie scharf definiert, können die aus ihnen gebildeten Formeln das Denken nicht ersetzen. Die Formeln können für viele Zwecke nützlich sein; es gibt aber ebensowenig denkende Formeln wie denkende Maschinen. Die Formeln stellen nur gewisse äußerlich gegebene Beziehungen zwischen den Dingen dar; die eigentlichen, inneren Zusammenhänge werden von ihnen «übersehen», und dadurch können schlimme Fehler entstehen (vgl. [10] und unten Nr. 13). So kann auch ein formal widerspruchsfreies System inhaltlich völlig falsch sein ([4]).

Die Zahlen sind als ideelle Dinge nicht in gleicher Weise sichtbar wie aufgeschriebene Zeichen oder wie die Gegenstände des täglichen Lebens; sie sind aber für den, der sich ernsthaft mit ihnen beschäftigt, nicht weniger deutlich erkennbar. Das soll nicht heißen, daß jede einzelne Zahl für sich genommen immer scharf erkennbar wäre, wohl aber erkennt man, daß die Zahlen scharf definierte Systeme bilden, die zudem unveränderlich und unvergänglich sind. Auch die genaue Zahl π hat «noch niemand gesehen». Trotzdem ist sie vollständig exakt und eindeutig definiert. Dasselbe gilt auch für die reinen Mengen, die lediglich eine Verallgemeinerung der natürlichen Zahlen sind.

9. Die reine Mathematik, die wir zu untersuchen haben, ist als solche von unseren menschlichen Unvollkommenheiten unabhängig. Ob ein mathematischer Satz richtig oder falsch ist, hat nichts damit zu tun, ob wir ihn entscheiden können oder nicht. Der Satz vom ausgeschlossenen Dritten ist die Voraussetzung für das, was als exakte Mathematik zu gelten hat. Daß es eine solche Mathematik gibt, und zwar eine äußerst reichhaltige, das zeigt die Erfahrung und das logische Denken. Dies im einzelnen nachzuweisen ist die Aufgabe einer Grundlegung der Mathematik.

Die Mathematik soll nicht unnötig oder willkürlich eingeschränkt werden, indem man etwa nur solche Dinge zuläßt, die sich in bestimmter Weise konstruieren lassen. Schon das Gebiet der reellen Zahlen reicht viel weiter; man darf es einem nicht verbieten, sich damit zu beschäftigen. Zur reinen Mathematik ist alles zu rechnen, was dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten genügt, also alles, was eindeutig und widerspruchsfrei ist.

10. In seinen «Grundlagen der Geometrie» zeigt HILBERT, daß die euklidische Geometrie widerspruchsfrei ist, wenn die Arithmetik der reellen Zahlen widerspruchsfrei ist. In «Grundlagen der Mathematik» müßte entsprechend gezeigt werden, daß ohne weitere Voraussetzung die ganze Mathematik widerspruchsfrei ist, also insbesondere auch die klassische Arithmetik der reellen Zahlen, auf welche sich die Geometrie stützt. Dies zu zeigen ist aber mit bloßen Formalismen unmöglich. Man sollte deshalb die Begründung von Formalismen besser nicht als Grundlagen der Mathematik bezeichnen. Die Mathematik ist nicht nur ein Formalismus.

Ebenso sollte man nicht von einem «Widerspruchsfreiheitsbeweis der Zahlentheorie» reden, wenn dabei die natürliche Zahlenreihe und damit also die Zahlentheorie selbst schon als gegeben *vorausgesetzt* wird. In den «Grundlagen der Geometrie» setzt man auch nicht die Geometrie schon als gegeben voraus und untersucht auf dieser Grundlage nur die dort verwendeten Schlüsse; man untersucht vielmehr, ob die angenommenen geometrischen Axiome ausreichen und miteinander verträglich sind.

Eine saubere Grundlegung sollte sich von irreführenden Bezeichnungen freihalten!

Bei der Untersuchung der in der Mathematik oder speziell in der Zahlentheorie verwendeten *Schlüsse* sollte es ferner nicht darauf ankommen, ob sie «weniger sicher» oder «sicherer» sind, sondern darauf, ob sie *richtig* oder *falsch* sind. Wenn man von «sichereren» Schlüssen redet, so gibt man damit zu, daß sie *nicht sicher* sind (was ja auch verständlich ist, wenn sie zum Teil falsch sind). Wozu dienen aber mathematische Beweise, wenn man *keine Sicherheit* hat? Sicherheit erlangt man nicht durch starre Vorschriften und Verbote, sondern durch Aufdeckung und Beseitigung der begangenen Fehler.

Es geht hier nicht um irgendeine Philosophie, sondern um reine Mathematik und Logik.

11. Die Logik, also das richtige Schließen, muß angewendet werden, wenn man die Mathematik begründen will. Man kann auch die Logik im einzelnen untersuchen; sie ist aber an sich als feststehend zu betrachten und sie ist auch von uns Menschen und von unserem Denken unabhängig. Das Denken hat sich vielmehr nach der Logik zu richten, um ein «richtiges Denken» zu sein. Die Logik ist ebenso unveränderlich und unvergänglich wie die Zahlen und die reine Mathematik; nur unser Wissen davon kann sich ändern.

Was beim logischen Denken oder beim logischen Schließen «richtig» ist, beruht also nicht auf Konventionen, sondern es ist in absoluter Weise festgelegt; es ist ein absolutes Unterscheiden zwischen Wahr und Falsch. In diesem Sinn kann es auch nur *eine* Logik geben. Es hat auch keinen Sinn, von dieser Logik etwa die Widerspruchsfreiheit beweisen zu wollen; sie ist an sich widerspruchsfrei, sonst wäre es keine Logik. Widersprüche entstehen erst durch Fehler, also durch Mißachtung der Logik.

Das logische Denken ist nicht identisch mit einem «logischen Rechnen», einer «formalen Logik» oder einer «Logistik». Eine solche kann höchstens einen Teil des logischen Denkens darstellen, wobei aber jeweils zu prüfen ist, ob sie auch wirklich den Anforderungen der Logik genügt, ob sie also selbst «richtig» ist, und zwar nicht nur in formalem Sinn, sondern der Bedeutung nach richtig. Was oben (unter Nr. 8) über die Formeln gesagt wurde, gilt auch hier.

Wenn man glaubt, die Mathematik oder die Logik durch einen Formalismus ersetzen zu können, dann übersieht man, daß der Hauptfehler, der zu den Antinomien führt, gerade darin besteht, daß man sich nur auf formale Beziehungen zwischen den betrachteten Objekten beschränkt und die tatsächlichen inneren Zusammenhänge nicht beachtet.

Das Denken kann durch Formeln unterstützt, aber nicht ersetzt werden. Ein grammatikalisch richtig gebauter Satz kann inhaltlich falsch sein, und auch eine nach scheinbar sicheren Regeln hergestellte Formel braucht nicht immer einem wahren Sachverhalt zu entsprechen.

Es gibt aber auch sehr viele Sachverhalte, die, für sich allein genommen, durch Formeln nicht darstellbar sind. Dies folgt ohne weiteres aus der Abzählbarkeit der Formeln und der Nichtabzählbarkeit der Sachverhalte zum Beispiel in der Analysis. Mit rein formalen Methoden erhält man also niemals die ganze Mathematik, sondern höchstens ein vom absoluten Standpunkt aus äußerst dürftiges Rudiment derselben.

12. Was ein Widerspruch ist, sollte eigentlich jeder, der logisch denken kann, wissen. Der «Satz vom Widerspruch» gehört ja zu den ersten Grundsätzen der Logik. Man könnte etwa sagen, ein Widerspruch entsteht, sobald etwas zugleich wahr und falsch sein müßte. «Falsch» bedeutet dabei dasselbe wie «nicht wahr». Wenn man also sich selbst oder, was in der reinen Mathematik auf dasselbe hinausläuft, einer bestehenden Tatsache widerspricht, dann hat man einen Widerspruch.

Eine widerspruchsvolle Behauptung oder Aussage ist nie wahr, und ein widerspruchsvolles Ding, das heißt ein Ding, welches sich widersprechende Eigenschaften besitzen müßte, nie existierend. Dagegen können widerspruchsfreie Dinge ideell stets als existierend betrachtet werden. Existenz bedeutet in der reinen Mathematik nichts anderes als Widerspruchsfreiheit.

Es ist klar, daß es in einer einwandfreien Mathematik keine unlösbaren Widersprüche, also keine Antinomien geben darf. Es gibt aber auch keine, wenn man nur darauf achtet, sich nie zu widersprechen. Wo man keinen Widerspruch hineinlegt, kommt auch keiner heraus. Die Antinomien der Mengenlehre lassen sich auf diese Weise aufklären und beseitigen. Wenn man aber die Antinomien beibehält oder nur umgehen will, dann bedeutet das, daß man zwischen Wahr und Falsch nicht unterscheiden kann. Dann kann man aber auch jeden Unsinn behaupten, denn aus einem Widerspruch folgen alle andern.

Ein Widerspruch ist es zum Beispiel, wenn behauptet wird, die existierenden, also die widerspruchsfreien Mengen könnten nicht alle zugleich existieren. Dies würde bedeuten, daß existierende Mengen nicht existieren, und das ist doch ein *offenkundiger Unsinn!*

Daß durch ungeklärte Antinomien auch hervorragende Mathematiker zu falschen Ansichten verleitet wurden, ist wohl verständlich. Man sollte aber solche Irrtümer nicht einfach beibehalten!

13. Wenn ich behaupte «ich lüge», oder ausführlicher «das, was ich eben jetzt behaupte, ist falsch», so widerspreche ich mir selbst und behaupte also etwas Falsches. Jede Behauptung behauptet nämlich implizit, eben dadurch, daß es eine Behauptung ist, daß das Behauptete wahr sei. Wenn sie aber zugleich explizit behauptet, dieses selbe sei falsch, so ist das ein Widerspruch, denn damit wird behauptet, etwas Wahres sei falsch oder etwas Falsches sei wahr, und die Behauptung als Ganzes ist also falsch. Man kann nicht sagen, daß die Behauptung in diesem Falle wahr wäre, denn dann würde von etwas Wahrem behauptet, es sei falsch, und das ist eine falsche Behauptung. (Vgl. hiezu [10] Nr. 2.)

Warum wird diese einfache Erklärung immer noch nicht anerkannt? Anscheinend deshalb, weil man sie mit den bekannten Formalismen nicht darstellen kann. Diese «übersehen» die implizite Behauptung und können deshalb lediglich einen Widerspruch konstatieren oder ihn allenfalls durch Verbote umgehen, aber nicht lösen.

Wenn man aber schon diese einfachste Paradoxie nicht richtig lösen kann, wie will man dann mit den schwierigeren Antinomien der Mengenlehre fertig werden?

Man sucht dann den Fehler an einer falschen Stelle und macht damit weitere Fehler.

Es ist merkwürdig, wie viele verschiedene Ansichten und Theorien über die Antinomien entwickelt wurden, anstatt daß man einfach fragt, was wahr und was falsch ist, und das Wahre anerkennt.

Die Behauptung des «Lügners» wird meistens als *sinnlos* erklärt. Das ist sehr bequem, aber *falsch*. Eine sinnlose Behauptung ist nicht falsch, und eine falsche Behauptung nicht sinnlos. Wenn nun die Behauptung «das, was ich eben jetzt behaupte, ist falsch» sinnlos wäre, dann wäre sie falsch, weil sie von etwas Sinnlosem behaupten würde, es sei falsch, also nicht sinnlos; weil sie also etwas behaupten würde, was nicht stimmt. Die angeführte Behauptung kann also nicht sinnlos sein, denn sonst wäre sie falsch und folglich nicht sinnlos. Dieser Einwand wird überall *mit Stillschweigen übergangen.*

14. Die *Antinomien* haben einen *«horror infiniti»* hervorgerufen oder wiedererweckt, obschon sie doch mit dem Unendlichen direkt *gar nichts zu tun* haben.

Dies zeigt schon die eben besprochene Paradoxie des «Lügners», in der das Unendliche gar nicht vorkommt, die aber doch scheinbar zu einem Widerspruch führt; dann aber auch die Tatsache, daß *in der ganzen klassischen Analysis*, die sich auf das sogar überabzählbar unendliche Kontinuum stützt, *keinerlei Antinomien* auftreten. Tatsächlich rühren die Antinomien *nur* von *fehlerhaften Zirkeln* her und von dem Glauben, daß man fehlerhaft definierte Dinge «konstruieren» könne.

Dies gilt auch für die «Paradoxie der endlichen Definierbarkeit», die nicht der klassischen Analysis angehört und zudem so umgeformt werden kann, daß auch hier das Unendliche keine Rolle spielt (vgl. [4]).

Man hat nun gemeint, daß alles *«Finite»*, also beliebig umfangreiche *endliche* Systeme, als etwas unmittelbar Klares und Einleuchtendes ohne weiteres zulässig und «unanfechtbar» sei, während man das *aktual Unendliche*, also insbesondere die Zahlenreihe als Ganzes, ablehnen müsse.

Beides ist falsch. Es bedeutet zudem ein vollständiges *Kapitulieren* gegenüber den durch die Antinomien aufgeworfenen Fragen, wenn man glaubt, sich auf ein so enges Gehäuse, wie es das Finite darstellt, zurückziehen zu müssen.

Die natürlichen Zahlen werden dabei meistens durch ein Hintereinandersetzen von endlich vielen Zeichen erklärt, das man beliebig weit fortsetzen könne. Nun versuche man doch einmal, eine Trillion Striche zu machen, *und dann noch einen!* Das ist doch Unsinn! Die Zahlentheorie betrachtet aber weit größere Zahlen. Diese Zahlen nur als «Symbole» gelten zu lassen, geht auch nicht an. Beim Schluß von n auf $n + 1$ braucht man, damit er gültig ist, *alle* natürlichen Zahlen bis zu der betrachteten. Sind das alles nur Symbole? Was ist dann ein Symbol? Da man tatsächlich nicht beliebig viele Striche machen kann, so *muß* man die natürlichen Zahlen als *ideelle* Dinge betrachten, die sich nicht alle einzeln aufschreiben lassen, die aber ideell doch alle *existieren.*

Wenn man aber die natürlichen Zahlen als *ideelle Dinge* zuläßt, dann sind sie *unabhängig* von uns Menschen und unseren Fähigkeiten, und man muß dann auch von der *Gesamtheit* dieser Zahlen reden können. Die Existenz dieser Zahlen ist *zeitlos*, deshalb hat hier auch eine «werdende» Reihe keinen Sinn; es handelt sich um eine *feststehende* Gesamtheit. Es liegt tatsächlich auch *gar kein Grund* vor, die Reihe der natürlichen Zahlen *als Ganzes* abzulehnen; es wäre dies nur ein durchaus *willkürliches Verbot.*

Etwas *anderes* ist aber die Frage, ob die Reihe der natürlichen Zahlen *endlich oder unendlich* ist. Hier geht es darum, zu wissen, ob es zu *jeder* natürlichen Zahl eine folgende gibt oder nicht. Die Existenz einer *unendlichen* Zahlenreihe ist, wie schon früher bemerkt wurde, *nicht selbstverständlich.* Die *beliebige* natürliche Zahl ist *zirkelhaft* definiert, nämlich durch eine Bezugnahme auf den Begriff der natürlichen Zahl selbst, und daß ein solcher Zirkel das beliebige

Fortschreiten hemmen kann, zeigt das schon unter Nr. 4 behandelte Beispiel der Ordnungszahlen.

Da aber dieser Zirkel schon bei den natürlichen Zahlen auftritt, die ja alle nur endlich sind, so folgt, daß das «Finite» *nicht weniger anfechtbar* ist als das Unendliche, welches sich, wenn man schon weiß, daß es zu jeder Zahl eine folgende gibt, ganz von selbst einstellt. Es ist also tatsächlich unsinnig, die sogenannte «an sich»-Auffassung für beliebig große endliche Systeme zuzulassen und für unendliche abzulehnen.

Ebenso unbegründet ist es auch, zu behaupten, man könne bei einer Aufgabe über natürliche Zahlen beliebig endlich viele Fälle einzeln nachprüfen, aber nicht unendlich viele. In Wirklichkeit ist beides gleich möglich oder gleich unmöglich. Wir Menschen auf der Erde können ganz bestimmt auch mit den besten Maschinen nur sehr wenige Fälle (im Verhältnis zu allen möglichen) einzeln nachprüfen, also sicher nicht beliebig viele und auch nicht unendlich viele. Wenn man aber zuläßt, daß die Proben nur *in abstracto* durchgeführt werden, durch ein *ideelles* Verfahren, dann können sehr gut alle Proben *zugleich* ausgeführt werden, und dann ist es ganz gleichgültig, ob es endlich oder unendlich viele sind. Daß ein endliches Verfahren gegenüber einem unendlichen Vorteile haben kann, wird damit natürlich nicht bestritten.

Man sollte aber die reine Mathematik nicht mit unsern menschlichen Unzulänglichkeiten belasten, mit denen sie nichts zu tun hat!

Kapitel 2

Das Axiomensystem

15. Der erste Einwand, der gegen die «Grundlegung» erhoben und veröffentlicht wurde, stammt von REINHOLD BAER ([1]) und betrifft das Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre. In einer anschließenden Erwiderung ([7]) habe ich diesen Einwand zurückgewiesen; er findet sich übrigens schon in der «Grundlegung» selbst ([5] S. 700) und wurde schon dort widerlegt. Auf kurze Bemerkungen des Herrn BAER ([2]) zu der Erwiderung glaubte ich nicht noch einmal antworten zu müssen, da doch jeder, der sich die Sache richtig überlegt, sehen mußte, wer von beiden recht hat.

Nun hat sich dies aber anscheinend niemand richtig überlegt, und man hat wohl einfach geschlossen, daß der recht hat, welcher «das letzte Wort behält». Auch meine weiteren Bemerkungen dazu in [8] wurden nicht verstanden und nicht beachtet. So wurde der Einwand ungeprüft und unbekümmert um die Folgen von andern übernommen und noch in neuester Zeit gegen die «Grundlegung» vorgebracht. Es ist daher notwendig, diese Dinge ausführlicher zu behandeln, wobei auch scheinbar Nebensächliches für das Verständnis wichtig sein kann, zumal wenn manche meinen, Herr Baer habe meine Darstellung «verbessert», was doch ganz bestimmt nicht der Fall ist.

16. Dem ersten Axiom («Axiom der Beziehung») gibt Herr Baer die folgende Fassung:

Für beliebige Mengen – das sind Elemente eines durch dieses Axiomensystem zu bestimmenden Systems Σ – M und N ist stets eindeutig entschieden, ob zwischen M und N die ε-Beziehung besteht oder nicht, das heißt ob $M \varepsilon N$ oder $M \notin N$ wahr ist.

Als *Ausgangsbeziehung* für die Definition der Mengen habe ich *absichtlich* und *mit gutem Grund* an Stelle der üblichen ε-Beziehung die dazu inverse Beziehung β gewählt, so daß also $M \beta N$ bedeutet: M besitzt N als Element.

Dies ist für das Verständnis der Antinomien von Bedeutung, weil eine Menge stets ihre Elemente bestimmt, aber nicht umgekehrt von beliebigen Elementen auf eine zugehörige Menge geschlossen werden kann.

Es ist ferner für eine Menge wesentlich, welche Elemente sie besitzt, aber ganz unwesentlich, in welchen Mengen sie enthalten ist. So ist die Nullmenge dadurch charakterisiert, daß sie kein Element besitzt; es ist aber gleichgültig, in welchen andern Mengen sie als Element vorkommt, und man muß auch nicht von allen Mengen noch besonders sagen, daß sie nicht in der Nullmenge enthalten sind. Woher hat man übrigens alle Mengen, solange man die Nullmenge noch nicht hat?

Man beachte den Unterschied in den Formulierungen: «Diese Schachtel ist leer» und «Ein jedes Ding ist in dieser Schachtel nicht enthalten». Es scheint, daß die moderne Grundlagenforschung der zweiten Formulierung den Vorzug gibt.

Die Nullmenge ist als Ding, welches die β-Beziehung zu keinem Ding besitzt, sehr *einfach* zu definieren; die Existenz von andern Dingen wird dabei nicht vorausgesetzt. Verlangt man aber von jeder Menge, daß sie die ε-Beziehung zur Nullmenge nicht besitzen darf, so ist das *unendlich kompliziert*, sobald es unendlich viele Mengen gibt. Es ist also *gar nicht gleichgültig*, welche Beziehung als Ausgangsbeziehung gewählt wird. Wichtig für die Definition einer Menge ist die β- und nicht die ε-Beziehung.

Außerdem erinnert die ε-Beziehung an ein anschauliches «Enthaltensein», was (außer in ganz einfachen Fällen) bei einer sorgfältigen Begründung vermieden werden muß, weil es leicht zu Fehlschlüssen führen kann.

In einer sauberen Grundlegung sollte man solche Dinge berücksichtigen!

17. Das Axiom der Beziehung hatte ich so formuliert:

Für beliebige Mengen M und N ist stets eindeutig entschieden, ob M die Beziehung β zu N besitzt oder nicht.

Damit ist, im Gegensatz zur BAERschen Fassung, von vornherein deutlich gesagt, daß es sich um eine *einseitig gerichtete* Beziehung *von M zu N* handelt und *nicht* um eine *wechselseitige* Beziehung *zwischen M und N*, wie bei einer Identität oder Äquivalenz.

Bei der BAERschen Fassung des Axioms kann $M \varepsilon N$ bedeuten, daß M mit N identisch ist, und dies um so mehr, als Herr BAER später nicht die Identität, sondern nur noch eine *Gleichheit* von Mengen einführt.

Wenn man schon weiß, was $M \varepsilon N$ in der Mengenlehre bedeutet, dann weiß man allerdings, daß es sich dabei um eine *unsymmetrische* Beziehung handelt. *Woher* weiß man das aber? *Es geht nicht an*, am Anfang einer zu begründenden Theorie gleich den ersten Begriff, den man einzuführen und zu erklären hat, *schon als bekannt vorauszusetzen!*

Die unsymmetrische Form des Zeichens ε kann hier auch nicht ausschlaggebend sein, denn auch für Äquivalenzen verwendet man üblicherweise Zeichen ohne Rechts-Links-Symmetrie, wie $\sim$ oder $\approx$, während umgekehrt symmetrische Zeichen eine unsymmetrische Beziehung darstellen können, wie etwa $a|b$ für «a ist Teiler von b». *Allgemein sollte man aber neu einzuführende Begriffe nicht stillschweigend von der Gestalt ihrer Bezeichnung abhängig machen!*

Wenn also, dem Wortlaut gemäß, $M \varepsilon N$ als Identität von M mit N gedeutet und noch das nächste BAERsche Axiom über die Gleichheit von Mengen hinzugenommen wird, so kann man als *Modelle* für die BAERschen Mengenlehren Systeme von beliebig vielen nicht identischen Dingen nehmen, die alle einander gleich sein sollen und über die *sonst nichts ausgesagt wird*. Dies sind aber doch wohl zum mindesten *äußerst uninteressante* Mengenlehren!

Wenn man aber die BAERsche Fassung des ersten Axioms verbessert und die ε-Beziehung in $M \varepsilon N$ als Beziehung *von M zu N* einführt, so ergibt sich eine *neue Unstimmigkeit*, da Herr BAER später (S. 538) sagt, daß eine Menge A zu gewissen Mengen B «in der ε-Beziehung $B \varepsilon A$» stehe. Das ist *falsch;* A steht hier zu B nicht in der ε-, sondern in der dazu inversen β-Beziehung!

18. Die Elemente einer Menge M, die Elemente dieser Elemente usf. sind die «*in M wesentlichen Mengen*».

Herr BAER definiert diese so, daß stets auch noch die Menge M selbst dazugehört. Das ist im Hinblick auf die Untersuchung der paradoxen Mengen und der Antinomien *unzulässig*. Es ist ein *sehr wesentlicher* Unterschied, ob eine Menge «in sich selbst wesentlich» ist, wie etwa eine sich selbst als Element enthaltende Menge, oder ob das wie bei der Nullmenge nicht der Fall ist. Die ersteren Mengen sind auf jeden Fall von zirkelhafter Natur. Nach der BAERschen Definition wären alle Mengen in sich wesentlich und also nach der Erklärung von S. 702 der «Grundlegung» alle zirkelhaft; für zirkelfreie Mengen bliebe nichts mehr übrig.

19. Ein System von Mengen, welches mit jeder Menge auch alle Elemente dieser Menge enthält, wurde in der «Grundlegung» S. 693 ein «vollständiges System» genannt. Die in M wesentlichen Mengen sind dann diejenigen Mengen, welche jedem vollständigen System angehören, das alle Elemente von M enthält. Das System der in M wesentlichen Mengen wurde mit Σ_M bezeichnet.

Zwei vollständige Systeme Σ und Σ' von Mengen wird man allgemein dann als *isomorph* bezeichnen, wenn es zwischen den Mengen von Σ und den Mengen von Σ' eine umkehrbar eindeutige und beziehungstreue Abbildung gibt, also eine eineindeutige Abbildung, bei der, wenn A auf A' und a auf a' abgebildet wird, mit $A \, \beta \, a$ stets auch $A' \, \beta \, a'$ gilt und umgekehrt.

Herr Baer bezeichnet jedoch die vollständigen Systeme Σ_M und $\Sigma_{M'}$, die bei ihm auch die Mengen M bzw. M' enthalten, *nur dann* als isomorph, wenn bei der Abbildung speziell noch M auf M' abgebildet wird. Das *widerspricht* dem üblichen Sprachgebrauch und ist auch deshalb *unsinnig*, weil man den *Systemen* allein unter Umständen gar nicht ansehen kann, was M oder M' bedeuten sollen. *Auch hier sollte man den Begriff nicht von der verwendeten Bezeichnung abhängig machen!*

Man setze etwa $A = \{A, B\}$, $B = \{A\}$. Die Systeme Σ_A und Σ_B sind hier *identisch;* sie bestehen aus den Mengen A und B. Nach Herrn Baer sind sie trotzdem *nicht isomorph,* sofern man nämlich weiß, daß hier $M = A$ und $M' = B$ zu setzen ist.

Dieses Beispiel, das sich übrigens in der «Grundlegung» auf S. 694 findet, zeigt nun auch, daß die im üblichen Sinn genommene Isomorphie der *Systeme* Σ_M und $\Sigma_{M'}$ *nicht genügt,* um die *Mengen* M und M' identifizieren zu können. Man kann hier ja A auf A und B auf B abbilden; das aus den Mengen A und B bestehende System ist mit sich selbst isomorph. A kann aber nicht mit B identifiziert werden, weil A sich selbst enthält, B aber nicht.

Ich habe deshalb die *Mengen* M und M' *isomorph* genannt, wenn sich die Systeme Σ_M und $\Sigma_{M'}$ der in M bzw. M' wesentlichen Mengen umkehrbar eindeutig und beziehungstreu so aufeinander abbilden lassen, daß dabei die Elemente von M auf die Elemente von M' abgebildet werden. Damit konnte das zweite Axiom, das «Axiom der Identität», kurz so formuliert werden:

Isomorphe Mengen sind identisch.

20. Bei der *Erklärung der Isomorphie* von Mengen ist mir nun in der «Grundlegung» gegenüber der ursprünglich vorgesehenen Fassung selbst eine *unzulässige Vereinfachung* unterlaufen: Ich glaubte, es genüge, zu den Systemen Σ_M und $\Sigma_{M'}$ noch die Mengen M bzw. M' hinzuzufügen und zu verlangen, daß dann M auf M' abgebildet wird, weil dann ja auch die Elemente von M auf die Elemente von M' abgebildet werden. Daß das nicht stimmt, ist wohl ohne ein Gegenbeispiel nicht leicht zu sehen.

Es sei J eine Menge, welche sich selbst als einziges Element enthält und also der Beziehung $J = \{J\}$ genügt. Ferner sei L eine Menge, welche nicht sich selbst, sondern als einziges Element die von L verschiedene Menge J enthält, so daß $L = \{J\}$ mit $L \neq J$ gilt. Man beachte, daß hier $L = \{J\}$ nicht bedeutet, daß L *diejenige* Menge ist, welche J als einziges Element enthält, sondern nur, daß L *eine* solche Menge ist.

Die Systeme Σ_J und Σ_L bestehen beide nur aus der Menge J, und nach der zweckmäßigen Definition der Isomorphie sind die Mengen J und L isomorph, sie müßten also nach dem Axiom der Identität identisch sein. Dies bedeutet, daß es in einem System Σ, das den Axiomen genügt, keine solche Menge $L \neq J$ geben darf.

Nach der irrtümlich abgeänderten Definition wären aber J und L nicht isomorph, weil J sich selbst enthält, L aber nicht. Damit hätte man zwei verschiedene Mengen mit denselben Elementen, im Widerspruch zu Satz 5 der «Grundlegung» (S. 695), der besagt, daß zwei Mengen, welche dieselben Elemente besitzen, identisch sind.

Herr G. KÖTHE hat mich seinerzeit auf diese Unstimmigkeit aufmerksam gemacht. Meines Wissens handelt es sich dabei um den *einzigen Fehler*, der sich in der «Grundlegung» findet. Ich habe ihn *sofort korrigiert* (in [7] S. 540), indem ich zu der ursprünglichen Definition zurückgekehrt bin.

21. Die BAERsche Fassung des zweiten Axioms lautet so:

Dann und nur dann ist $M = M'$ – wo M und M' Mengen sind –, wenn Σ_M und $\Sigma_{M'}$ isomorph sind, das heißt wenn es eine eineindeutige Abbildung der Elemente von Σ_M auf die von $\Sigma_{M'}$ gibt, bei der

1. *M auf M' abgebildet wird,*
2. *wenn A_i das Bild A_i' $(i = 1, 2)$ hat, aus $A_1 \varepsilon A_2$ auch $A_1' \varepsilon A_2'$ folgt, und umgekehrt.*

Diese Fassung ist aus den in Nr. 19 und in Nr. 20 angegebenen Gründen *unkorrekt*. Außerdem wird aber darin an Stelle der Identität nur eine Beziehung $M = M'$ erklärt, wobei kurz nachher ein «*schwächeres Gleichheitsaxiom*» und eine «Gleichheitsbeziehung in der Mengenlehre» erwähnt wird. Dies erweckt zum mindesten den Anschein, daß im System Σ *mehrere unter sich gleiche Mengen* vorkommen dürften, wie es in der Geometrie viele unter sich gleiche Strecken geben darf.

In einer *eindeutigen* Mengenlehre ist das selbstverständlich *nicht zulässig*.

Wenn etwa eine Menge zwei gleiche Mengen als Elemente besitzt, wieviele Elemente besitzt sie dann? Man könnte, wie es sonst in der Mengenlehre üblich ist, fordern, daß das nicht vorkommen darf, da doch die Elemente einer Menge «wohlunterschieden» sein müssen. Dem steht aber die andere Forderung entgegen, daß aus $a \varepsilon M$ und $a = b$ stets auch $b \varepsilon M$ folgen müsse. Eine Menge muß also mit jedem Element auch alle ihm gleichen enthalten. *Wieviele sind das?*

Man wird sich wohl auch hier mit einer «Relativität der Mächtigkeiten» behelfen und sagen: «mengentheoretisch» ist es nur *ein* Element, auch wenn es in Wirklichkeit viele sind. So spricht man ja auch umgekehrt von «mengentheoretisch überabzählbaren» Mengen, auch wenn sie tatsächlich nur abzählbar viele Elemente enthalten.

In einer *sinnvollen* Mengenlehre sollten solche Unklarheiten und Vieldeutigkeiten nicht vorkommen. Das System Σ der betrachteten Mengen darf von jeder Menge stets nur *ein* Exemplar enthalten, und dieses muß sich von allen andern Mengen in Σ *wesentlich* unterscheiden, das heißt allein schon durch die β-Beziehung. Das ist der Sinn des zweiten Axioms.

22. Vielfach wird der Satz, daß Mengen, welche dieselben Elemente besitzen, identisch sind, zur *Definition* der Identität von Mengen verwendet. Bei beliebigen Mengen von Mengen ist dies aber *nicht zulässig*. Woher soll man wissen, ob die Elemente dieselben sind, wenn man nicht schon weiß, welche Mengen identisch sind? Wie soll man zum Beispiel entscheiden, ob $J = \{J\}$ mit $K = \{K\}$ identisch ist oder nicht? (Vgl. «Grundlegung» S. 695.) Das in der «Grundlegung» S. 711 erwähnte Beispiel zeigt, daß diese Unbestimmtheit nicht nur bei sich selbst enthaltenden oder in sich wesentlichen Mengen auftritt. Die erwähnte Definition der Identität von Mengen enthält einen *fehlerhaften Zirkel* und ist deshalb unbrauchbar.

Herrn Baer scheint dies entgangen zu sein, denn auch in den von ihm zitierten Arbeiten von Fraenkel und Vieler wird dieser Zirkel *nicht beachtet.*

Ein ähnlicher Einwand könnte allerdings auch bei einer Definition der Identität mit Hilfe der Isomorphie gemacht werden: eine «eineindeutige» Abbildung hat erst dann einen genauen Sinn, wenn über die Identität der Mengen schon entschieden ist. Immerhin können dabei nicht beliebig viele «ununterscheidbare» Mengen auftreten, da sich hier die *verschiedenen* Mengen *wesentlich,* also schon durch die β-Beziehung unterscheiden müssen.

Bei dem in der «Grundlegung» angenommenen *axiomatischen* (nicht formalen!) Standpunkt werden aber die Dinge des Systems Σ wie üblich als gegebene Individuen betrachtet, deren Identität oder Verschiedenheit also anderweitig schon feststeht, und das «Axiom der Identität» schließt lediglich solche Dinge aus Σ aus, die ihm nicht genügen.

Von einem *höheren Standpunkt* aus kann man jedoch verlangen, daß die Mengen *allein durch die β-Beziehung definiert* und durch *keine andern Eigenschaften* gegeben sein sollen. Dann wäre der obige Einwand berechtigt.

Bei diesem Standpunkt wird man das System der Mengen nicht nur im Sinne eines «Modells», also nur bis auf Isomorphien, sondern (wie in [11]) *ganz eindeutig* festlegen müssen. Die Identität von Mengen wird dann so definiert, daß zwei durch die β-Beziehung gegebene Mengen *immer, wenn möglich,* als identisch zu betrachten sind. Hier sind also zwei Mengen stets identisch, wenn die *Annahme* ihrer Identität *keinen Widerspruch* zu den geforderten β-Beziehungen ergibt.

Wenn also zum Beispiel die Mengen A und B durch die Beziehungen $A \beta A$, $A \beta B$, $B \beta A$ gegeben werden, so folgt jetzt $A = B$, weil dies mit den Forderungen verträglich ist; es darf hier nicht zusätzlich noch $A \neq B$ verlangt werden. Diese Menge A ist mit der durch $J = \{J\}$ definierten J-Menge identisch, sie ist aber zum Beispiel von der Nullmenge verschieden, weil $A \beta A$ gilt, während die Nullmenge die Beziehung β zu keiner Menge besitzt. Hier würde die Annahme der Identität zu einem Widerspruch führen.

23. Herr BAER bemerkt nun, daß man immer dann von einer *Mengenlehre* sprechen könne, wenn man ein System Σ habe, in welchem die Axiome I und II, das heißt die Axiome der Beziehung und der Identität, erfüllt sind.

Daß diese Axiome, wie Herr BAER später erwähnt, *keine Existenzforderungen* enthalten, ist richtig und von *größter Bedeutung;* denn gerade die unerfüllbaren Existenzforderungen, also die Forderungen, daß gewisse Mengen existieren sollen, auch wenn ihre Definition einen Widerspruch enthält, führen zu den Antinomien.

In jedem System, welches den beiden ersten Axiomen genügt, sollen und dürfen aber *nur* Mengen vorkommen, die tatsächlich existieren, deren Definition also *keinen Widerspruch* enthält.

Das *Gesamtsystem* Σ enthält nun *alle* diese widerspruchsfreien Mengen, also alle, die es gibt, oder alle, die in einem der oben genannten Systeme vorkommen, wobei isomorphe Mengen stets als identisch zu betrachten sind. Dieses Gesamtsystem *existiert*, weil bei seiner Definition *nichts Unmögliches* verlangt wird; es werden ja nur die *existierenden* Mengen aufgenommen, und daß die existierenden Mengen zusammen nicht existieren sollten, wäre ein Widerspruch und somit ein Unsinn (vgl. Nr. 12).

Dieses Gesamtsystem Σ genügt nun auch dem Axiom III, dem «Vollständigkeitsaxiom»: es läßt sich *nicht erweitern*, weil es zu *allen* Mengen *nicht noch eine* geben kann.

24. Um das Vollständigkeitsaxiom anzugreifen, behauptet nun Herr BAER den folgenden, allerdings falschen Satz:

Sei Σ ein System von Mengen, das I. und II. genügt; dann ist entweder

Σ widerspruchsvoll,

das heißt es gibt zwei Mengen A und B in Σ derart, daß $A \varepsilon B$ und $A \notin B$ gleichzeitig bestehen, oder aber

Σ ist einer Erweiterung fähig,

das heißt es gibt ein System Σ^* von Mengen, das

1. *ebenfalls I. und II. genügt;*
2. *wenn A und B gleichzeitig in Σ und Σ^* enthalten sind, so besteht $A \varepsilon B$ dann und nur dann in Σ^*, wenn es in Σ besteht;*
3. *es gibt eine Menge in Σ^*, die nicht in Σ enthalten ist.*

Herr BAER läßt also die Möglichkeit zu, daß das System Σ widerspruchsvoll ist. Was ist aber ein widerspruchsvolles System von Mengen? Eine Aussage oder Behauptung kann widerspruchsvoll sein, dann ist sie falsch. Eine Definition kann widerspruchsvoll sein, dann ist sie nicht erfüllbar, das heißt es gibt nichts, was ihr genügt. Ein Axiomensystem kann widerspruchsvoll sein, dann ist es ebenfalls nicht erfüllbar. Wie kann aber ein System von Mengen widerspruchsvoll sein? Widerspruchsvolle Systeme von Mengen *gibt es nicht!*

Im zugehörigen «Beweis» des Herrn BAER heißt es: «Es sind also $N \varepsilon N$ und $N \notin N$ gleichzeitig wahr, das heißt Σ ist widerspruchsvoll.» Dabei soll N eine Menge in Σ sein. Das System Σ ist dann also ein System von Mengen, welches nach Voraussetzung dem Axiom I genügt, welches aber gleichzeitig diesem selben Axiom nicht genügt. Wie kann ein System einem Axiom zugleich genügen und doch nicht genügen? Wie kann etwas zugleich wahr und doch falsch sein? Wo bleibt da der Satz vom Widerspruch?

Ein System Σ kann dem Axiom I genügen oder es genügt ihm nicht. Beides zugleich aber ist *unmöglich.*

Man könnte vielleicht sagen, der Ausdruck «Σ ist widerspruchsvoll» bedeute, daß Σ *widerspruchsvoll definiert* sei. Dem steht aber entgegen, daß hier Σ eben doch als ein tatsächlich *bestehendes System* von Mengen angenommen wird.

Die Ausdrucksweise des Herrn BAER zeigt hier schon deutlich (was später noch mehr hervortritt), daß er mit den Antinomien nicht zurechtgekommen ist. Er läßt die Antinomien zu, läßt also Widersprüche in der Mathematik zu, und das ist doch das Schlimmste, was in der Mathematik geschehen kann. Trotzdem will er hier kritisieren und beachtet nicht, daß man mit einer Antinomie alles beweisen und alles widerlegen kann, daß aber solche «Beweise» durchaus wertlos sind!

25. Die erste «Möglichkeit» des Satzes erweist sich also als eine *Unmöglichkeit.* Aber auch die weitere Behauptung, daß dann Σ notwendig «einer Erweiterung fähig» sei, ist, wie schon oben gezeigt wurde, *falsch.* Wenn das System Σ noch nicht alle Mengen enthält, kann man es selbstverständlich erweitern, das ist trivial. Wenn aber Σ *alle* Mengen enthält, also alle, dies es gibt, dann ist das nicht mehr möglich, denn zu allen Mengen gibt es nicht noch eine.

Wieviele «Logiken» braucht es wohl noch, bis man einsieht, daß es zu *allen* Dingen irgendwelcher Art *nicht noch eines* geben kann? Daß man, wenn man schon *alles* hat, nicht noch mehr haben kann, das sollte doch jeder vernünftige Mensch verstehen, sofern er sich wenigstens durch die Antinomien und ihre Folgen nicht zu sehr hat verbilden lassen und das *logische Denken* nicht verlernt hat. Von *allen Mengen* zu reden, darf man einem aber *nicht verwehren!*

26. Um seinen Satz zu «beweisen», betrachtet Herr BAER das System N aller und nur der Mengen A aus Σ, die $A \notin A$ erfüllen. Das ist durchaus zulässig. Weiter heißt es dann:

> Es bestehen jetzt zwei Möglichkeiten:
> 1. Entweder gibt es eine N entsprechende Menge N in Σ, so daß also aus $A\ \eta\ \mathsf{N}$ auch $A\ \varepsilon\ N$ folgt und umgekehrt;
> 2. oder es gibt keine solche Menge N in Σ.

Im ersten Fall wird geschlossen, Σ sei widerspruchsvoll. Richtig müßte es heißen, daß dieser Fall nicht vorkommen kann.

Im zweiten Fall will nun Herr BAER «eine im obigen Sinne N entsprechende Menge N zu Σ hinzufügen». Wenn es aber im zweiten Fall nach Annahme keine solche Menge N in Σ gibt und wenn Σ alle Mengen enthält, so bedeutet das, daß es überhaupt keine solche Menge N gibt. *Wie kann man aber eine Menge, die es nicht gibt, zu Σ hinzufügen?*

Es fehlt nicht nur der Beweis für die Existenz der Menge N, ein solcher ist vielmehr unmöglich, weil die Menge N in diesem Fall widerspruchsvoll definiert ist und deshalb gar nicht existieren kann. Dann kann man aber auch das System Σ nicht damit erweitern.

Der Beweis des Herrn BAER ist also *falsch*, und der Satz selbst ist *ebenso falsch*.

27. Herr BAER lehnt es nicht ab, von «*allen möglichen widerspruchsfreien Mengenlehren*» zu sprechen, er behauptet aber, daß «*ihre Vereinigung nicht* wieder zu einer *widerspruchsfreien Mengenlehre* führt» und daß «gewissermaßen als ‚obere Grenze‘ aller Mengenlehren sich eine widerspruchsvolle findet».

Die Vereinigung selbst wird hier also korrekterweise noch zugelassen, nur das Resultat soll dann nach seiner Ausdrucksweise keine widerspruchsfreie Mengenlehre, sondern ein widerspruchsvolles System von Mengen sein. Das ist aber, wie schon in Nr. 24 gezeigt wurde, etwas *Sinnloses;* widerspruchsvolle Systeme von Mengen gibt es nicht!

Es geht hieraus deutlich hervor, daß es sich bei der früheren Angabe «Σ ist widerspruchsvoll» nicht nur um eine unrichtige Ausdrucksweise handelt, sondern wirklich um ein *fehlerhaftes Denken.*

28. Bei seinem unter Nr. 24 erwähnten Satz weist Herr BAER auf ein Theorem Nr. 10 von ZERMELO hin. Dies könnte leicht den Anschein erwecken, daß bei ZERMELO etwas Ähnliches zu finden wäre. Das ist aber durchaus *nicht der Fall.*

Das Theorem Nr. 10 von ZERMELO ([17] S. 264) besagt, daß jede Menge M mindestens eine Untermenge besitzt, welche nicht Element von M ist. Das stimmt für den von ZERMELO betrachteten Bereich $\mathfrak{B}$. Aus dem Theorem folgt nach ZERMELO, daß nicht alle Dinge des Bereichs 𝔅 Elemente einer und derselben Menge sein können; das heißt *der Bereich 𝔅 ist selbst keine Menge.* Das ist ebenfalls richtig.

ZERMELO schließt jedoch *keineswegs,* daß dann entweder 𝔅 widerspruchsvoll oder aber 𝔅 einer Erweiterung fähig sein müsse. Das ist ein *großer Unterschied!*

Im Gesamtsystem Σ kommt nun tatsächlich eine *Menge aller Mengen* vor, die also dem Gesamtbereich Σ selbst entspricht. Daraus ergibt sich aber nur, daß in diesem Bereich nicht alle Axiome ZERMELOs erfüllt sind; insbesondere ist hier das «Axiom der Aussonderung» nicht erfüllt.

Im System der *zirkelfreien Mengen* sind die Axiome ZERMELOs erfüllt. Dieses System enthält auch, wie es nach ZERMELO sein muß, weder eine Menge aller zirkelfreien Mengen noch eine Menge aller sich nicht selbst enthaltenden zirkelfreien Mengen. Trotzdem läßt sich dieses System als solches *nicht erweitern.* Die beiden eben genannten Mengen existieren zwar und sind übrigens identisch, weil alle zirkelfreien Mengen sich nicht selbst enthalten. Sie bilden aber eine *zirkelhafte* Menge, die sich eben deshalb nicht ohne Widerspruch in das System der zirkelfreien Mengen einfügen läßt.

29. Herr BAER erwähnt nun das III. Axiom, das «Axiom der Vollständigkeit». Wie schon in Nr. 23 bemerkt, genügt das Gesamtsystem Σ auch diesem Axiom. Die Axiome I bis III sind also, im *Gegensatz* zu dem, was Herr BAER nun behauptet, *gleichzeitig ohne Widerspruch erfüllbar.* Daß dies mit seinem falschen Satz in Widerspruch steht, ist nicht verwunderlich.

Weiter behauptet jetzt Herr BAER, die Vereinigung *aller* möglichen Mengenlehren sei ein Fehlschluß. Vorher wurde sie als solche noch zugelassen. *Weshalb* sollte sie jetzt nicht möglich sein? Es werden einfach alle widerspruchsfrei existierenden (nach Herrn BAER in irgendeiner «Mengenlehre» vorkommenden) Mengen zusammen betrachtet, wobei isomorphe Mengen als identisch gelten. Dies gibt ein widerspruchsfreies System von Mengen, welches die gesuchte Vereinigung darstellt. Dem widerspruchsfreien Gesamtsystem entspricht auch eine *widerspruchsfreie Mengenlehre.*

Ein *Fehlschluß* ist es vielmehr, eine solche Vereinigung *abzulehnen,* denn es besteht *kein Grund* für diese Ablehnung.

30. Der Einwand des Herrn BAER findet sich, wie in Nr. 15 erwähnt wurde, schon in der «Grundlegung» (S. 700) und wurde schon dort widerlegt. Dabei wurde auf die Abhandlung [3] «Gibt es Widersprüche in der Mathematik?» verwiesen. Herr BAER hat dies offenbar *nicht beachtet;* er hätte schon dort (insbesondere S. 154) eine völlige Widerlegung seiner Ansichten finden können.

Um die in der «Grundlegung» gegebene Widerlegung anzugreifen, behauptet nun Herr BAER, daß das Ding N, das er zum System Σ hinzufügen will, tatsächlich ein «neues», das heißt nicht zum Gesamtsystem Σ gehörendes Ding *sei*, daß es *keinem* den Axiomen I und II genügenden System *angehöre*, daß es aber andererseits mit Σ zusammen doch ein solches System *bilde*.

Das ist aber ein *glatter Widerspruch!*

Wenn ein Ding mit andern Dingen zusammen ein gewisses System bildet, dann gehört es auch mindestens einem solchen System an, dagegen ist nichts zu machen. Dann kann es aber nicht zugleich *keinem* solchen System angehören.

Wenn das Ding N jedoch einem den Axiomen I und II genügenden System angehört (hier ist die Ausdrucksweise des Herrn BAER nicht ganz klar), dann ist es *kein neues*, das heißt nicht zum Gesamtsystem Σ gehörendes Ding!

Der Widerspruch löst sich *nur* so, daß es eben ein Ding N mit diesen Eigenschaften *nicht gibt*.

Tatsächlich liegt also der Widerspruch in der Definition von N und *nicht*, wie Herr BAER behauptet, in den Axiomen. Wenn man zum Gesamtsystem Σ nur die Mengen rechnet, welche einem den Axiomen I und II genügenden System angehören, dann *kommt* hier das Axiom III *gar nicht vor!*

Dies zeigt nun auch deutlich, daß bei dieser Widerlegung im Prinzip *keineswegs* die *Widerspruchslosigkeit* des Axiomensystems *vorausgesetzt* wird, wie Herr BAER weiterhin behauptet. Diese Widerspruchslosigkeit wurde allerdings schon vorher bewiesen und steht somit an dieser Stelle *nicht mehr in Frage*, ebenso, wie auch die Algebra durch eine neue «Kreisquadratur» nicht in Frage gestellt wird.

31. Nun meint aber Herr BAER: «N wird ja nicht gefordert, sondern konstruiert!» Wie kann man aber ein Ding mit derart widerspruchsvollen Eigenschaften konstruieren, ein Ding also, das gar nicht existieren kann? Das ist genau der Weg zu den Antinomien, daß man meint, unmögliche Dinge konstruieren zu können!

Was heißt denn überhaupt «konstruieren»? Ein *Handwerker* kann manche Dinge konstruieren, aber bestimmt *nur beschränkt viele* und nicht zu beliebig vielen immer noch eines.

In der *Geometrie* hat das Wort «konstruierbar» eine bestimmte Bedeutung. Dabei wird jedoch die Geometrie oder zum mindesten die Zahlenreihe schon als gegeben *vorausgesetzt*. Selbst dann aber muß in jedem Fall noch geprüft werden, ob eine verlangte Konstruktion auch *ausführbar* ist. Schon ein Dreieck aus drei Seiten zu konstruieren, ist nicht immer möglich; es müssen bestimmte *Bedingungen* erfüllt sein.

Warum soll in der *Mengenlehre* eine «Konstruktion» stets ausführbar sein, auch wenn sich daraus ein Widerspruch ergeben müßte? *Zirkelfreies* Konstruieren ist zwar möglich; vor unerfüllbaren Zirkeln muß man sich aber hüten!

Daß es unerfüllbare Konstruktionsvorschriften gibt, zeigt schon das in der «Erwiderung» [7] gegebene Beispiel: Man schreibe auf eine Tafel eine Zahl derart, daß sie um 1 größer ist als die größte auf der Tafel angeschriebene Zahl. Natürlich ist hier nicht gemeint, daß die «neue» Zahl um 1 größer sein soll als die größte auf der Tafel angeschrieben *gewesene* Zahl. Es gibt keine Zahl, die, sobald sie auf der Tafel steht, der Forderung genügt. Auch hier darf man nicht sagen, die «neue» Zahl werde ja nicht gefordert, sondern konstruiert!

Manche meinen vielleicht, das Beispiel zeige, daß das System der auf der Tafel angeschriebenen Zahlen immer noch einer Erweiterung fähig sei. Auch das stimmt nicht: sobald die Tafel voll ist, geht es nicht mehr.

32. Man darf es einem nun allerdings nicht verwehren, sich ein Ding **N** zu denken, welches genau zu allen Mengen A, für welche $A\ \beta\ A$ nicht gilt, eine bestimmte Beziehung besitzt. Dieses Ding **N** ist dann aber *keine Menge*, und die «neue» Beziehung ist *nicht* die β-Beziehung, sondern eine andere Beziehung γ, welche nicht mit β identifiziert werden kann.

Geht man von der zu β inversen ε-Beziehung aus, so kann man als neue Beziehung eine zu γ inverse η-Beziehung einführen, wie sie auch Herr Baer bei Systemen verwendet, so daß also $A\ \eta\ \Sigma$ bedeutet, daß die Menge A dem System Σ angehört. Auch η kann nicht immer mit ε identifiziert werden, weil eben nicht jedem System eine Menge entspricht.

Es bleibt einem jedoch unbenommen, die Systeme trotzdem als «Einzeldinge» zu betrachten, die aber im allgemeinen von den Mengen unterschieden werden müssen und nur in besonderen Fällen bestimmten Mengen gleichgesetzt werden können. So ist insbesondere das oben betrachtete Ding **N** *keine Menge*, sondern allenfalls ein *System*.

Daß man die ursprünglich gegebene Grundbeziehung β sorgfältig von andern, aus ihr *abgeleiteten* Beziehungen unterscheiden muß, wurde in einem Zusatz zur «Grundlegung» (S. 713) noch besonders hervorgehoben. So darf man auch die β-Beziehung nicht mit der aus ihr herzuleitenden ε-Beziehung identifizieren (oder umgekehrt), obschon beide Beziehungen in gleicher Weise dem Axiom I genügen.

Dieselben Objekte können also in *verschiedenen* Beziehungen zueinander stehen: wenn eine Beziehung aus einer andern hergeleitet wird, so braucht sie mit dieser nicht identifizierbar zu sein und ist dann eine *andere* Beziehung.

So ist auch die Teilmengenbeziehung eine aus der Elementbeziehung *abgeleitete* Beziehung, die nicht mit ihr verwechselt werden darf. Daß man bei solchen Verwechslungen zu falschen Resultaten kommt, ist nicht verwunderlich.

Im Axiomensystem für die Mengen ist ausdrücklich nur von *einer* Beziehung β die Rede; diese darf also *nicht* durch *andere,* aus β *abgeleitete* Beziehungen ersetzt werden.

33. Die von Herrn BAER angeführte Bemerkung HILBERTS, daß das Vollständigkeitsaxiom in der Geometrie ohne das vorangestellte Archimedische Axiom einen Widerspruch einschließen würde, war mir bei der Abfassung der «Grundlegung» natürlich gut bekannt; sie ist jedoch, wie ich schon in der «Erwiderung» angegeben habe, nicht wörtlich zu nehmen. Es handelt sich vielmehr um einen *scheinbaren* Widerspruch, wie er auch in der nicht eingeschränkten Mengenlehre leicht vorkommt.

Die Behauptung, daß sich ein System von Punkten, Geraden und Ebenen, welche die HILBERTschen Axiome I bis IV erfüllen, stets noch erweitern lasse, gilt für relativ einfache Systeme, wie man sie etwa aus der gewöhnlichen Geometrie durch bestimmte sukzessive Erweiterungen erhalten kann. Diese lassen sich dann immer noch mehr erweitern, solange man nämlich *nicht alle möglichen* Erweiterungen in Betracht zieht. Die Vereinigung *aller möglichen* Erweiterungen gibt aber ein System, welches sich nicht mehr erweitern läßt und deshalb dem Vollständigkeitsaxiom genügt.

In ganz ähnlicher Weise zeigt man ja auch in der elementaren Mengenlehre, daß die Menge aller Teilmengen einer Menge größere Mächtigkeit besitzt als die gegebene Menge, daß es also *in der elementaren Mengenlehre* keine größte Mächtigkeit geben kann. In der *vollständigen* Mengenlehre, welche *alle* reinen Mengen umfaßt, gilt dieser Satz nicht mehr, hier hat die Menge aller Mengen die größte Mächtigkeit. Das ist nur ein *scheinbarer* Widerspruch, und genau so verhält es sich in der Geometrie.

Das Vollständigkeitsaxiom ist also, *entgegen* der von Herrn BAER nun vorgebrachten Bemerkung, insbesondere *dann anwendbar* und für den vollständigen Abschluß einer Theorie in gewissem Sinne sogar *notwendig*, wenn für die Erweiterungen beziehungsweise für die Mengenbildung *keine Einschränkungen* vorgenommen werden.

Der eigentliche Sinn der HILBERTschen Bemerkung ist der, daß in der Geometrie die Hinzunahme des Archimedischen Axioms bewirkt, daß das Vollständigkeitsaxiom *schon in einem zirkelfreien Bereich* erfüllbar ist. Es ist wohl einleuchtend, daß HILBERT nur solche Bereiche gemeint hat, ohne sie allerdings besonders zu definieren; *für diese* gilt die Bemerkung.

Eine ähnliche Einschränkung, wie sie das Archimedische Axiom in der Geometrie liefert, ist aber in der Mengenlehre *nicht bekannt.* Außerdem soll hier doch gerade die *nicht eingeschränkte* Mengenlehre untersucht werden!

Es besteht also tatsächlich ein *prinzipieller Unterschied* zwischen der Anwendung des Vollständigkeitsaxioms in der euklidischen Geometrie und in der Mengenlehre. Für einen wirklichen Abschluß der vollen Mengenlehre ist dieses Axiom oder auch die wesentliche Verwendung des Begriffs «alle» prinzipiell *notwendig*, während in der Geometrie die Ersetzung des Vollständigkeitsaxioms durch andere Forderungen, welche den Begriff «alle» nicht voraussetzen, wenigstens prinzipiell *denkbar*, praktisch aber wohl nicht durchführbar ist.

Wenn man etwa das Kontinuum als die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlenreihe erklärt, so kommt hier zwar der Begriff «alle» vor, aber doch nur so, daß das Resultat immer noch *zirkelfrei* bleibt, daß man also im Prinzip diese Teilmengen auch sämtlich als einzeln vorgelegt betrachten kann. Dies gilt auch schon für das System aller natürlichen Zahlen, jedoch nicht für das System aller Mengen; dieses setzt den Begriff «alle» notwendig voraus, da man es andernfalls doch noch erweitern könnte. Die Definition «alle geraden Primzahlen» kann man durch die Definition «die Zahl zwei» ersetzen; hier ist also der Begriff «alle» nicht notwendig. «Alle Mengen» kann man aber nicht einfach aufzählen; ohne den Begriff «alle» bekommt man, wenn man in sich wesentliche Mengen ausschließt, nur zirkelfreie Mengen, also bestimmt nicht alle Mengen. Das ist aber kein Grund, die «Gesamtheit aller Mengen» abzulehnen, nur kann diese nicht in zirkelfreier Weise gewonnen werden.

Man vergleiche dazu die Bemerkungen in Nr. 60.

34. Wenn man nur die Axiome I und II beibehält und das Vollständigkeitsaxiom wegläßt, dann ist allerdings der *Umfang* des betrachteten Mengenbereichs noch äußerst willkürlich. In jedem vollständigen System sind die Axiome I und II erfüllt. Man kann also von einer ganz beliebigen Menge ausgehen, oder auch von einem beliebigen System von Mengen, und die darin wesentlichen Mengen betrachten; beides zusammen, oder auch diese für sich allein, bilden jedesmal einen solchen Bereich.

Dies hat nun aber mit dem von Herrn Baer erwähnten, besonders von Th. Skolem untersuchten «mengentheoretischen Relativismus» doch wohl *gar nichts zu tun*. Die Mächtigkeiten in den betrachteten Bereichen behalten stets ihre eigentliche, absolute Bedeutung, wie dies auch in der «Grundlegung» S. 701 deutlich angegeben ist; sie werden also *nicht* durch besondere Konstruktionsvorschriften, von denen hier gar nicht die Rede ist, *relativiert*. *Das* meint aber doch der erwähnte Relativismus.

Eine Menge ist *überabzählbar*, wenn es *keine* Abzählung ihrer Elemente *gibt*, und *nicht* schon dann, wenn man *mit bestimmten Methoden* keine Abzählung erhalten kann. Die Gesamtheit *aller* Teilmengen der natürlichen Zahlenreihe ist *in absolutem Sinne* überabzählbar; sie läßt sich nicht in einem tatsächlich abzählbaren Bereich realisieren.

Wenn man jedoch nur Teilmengen zuläßt, die noch gewissen zusätzlichen Anforderungen genügen, dann kann es sein, daß man nur abzählbar viele erhält. Diese Gesamtheit dann in einem übertragenen Sinn trotzdem überabzählbar zu nennen, ist vom absoluten Standpunkt aus gesehen höchst *unnötig* und *irreführend*.

Was soll es nun aber heißen, wenn Herr BAER zum Schluß bemerkt, daß «dieser mengentheoretische Relativismus wenigstens nach ‚oben' gesichert» sei? Das ist doch wohl *sinnlos!*

35. Es fragt sich noch, ob es *zweckmäßig* ist, den Bereich der Mengen besonders *einzuschränken*, sei es durch bestimmte Bildungsvorschriften für die zugelassenen Mengen, oder einfach bezüglich des Gesamtumfanges des Mengenbereichs.

Für die *Untersuchung* und *Aufklärung* der mengentheoretischen *Antinomien* wird man das *Gesamtsystem aller* reinen Mengen zugrunde legen müssen, denn gerade hier machen sich diese Schwierigkeiten ja erst wirklich bemerkbar, und es handelt sich auch vor allem darum, zu wissen, daß dieses Gesamtsystem widerspruchsfrei *existiert.*

Weiter braucht man aber dieses System, um damit die *zirkelfreien* Mengen definieren zu können, also ein System von Mengen, welches *ohne unnötige oder willkürliche Einschränkungen* einen Bereich darstellt, in dem die üblichen Axiome der Mengenlehre erfüllt sind.

Die Betrachtung dieses letzteren Systems ist nun auch *notwendig*, um den *Nachweis* zu führen, daß es *unendlich viele Dinge* und auch *überabzählbare Mächtigkeiten gibt.* Die *unendliche Zahlenreihe* und das *Kontinuum* werden *erst hierdurch* gewährleistet.

Für alle *praktischen Anwendungen* der Mengenlehre ist das System der *zirkelfreien Mengen vollständig ausreichend.*

Weitere, an sich *willkürliche Einschränkungen* können für manche Zwecke in ähnlicher Weise *nützlich* sein, wie etwa beim Zahlenrechnen die Beschränkung auf eine bestimmte Stellenzahl (etwa auf höchstens siebenstellige Zahlen) nützlich sein kann.

Die *Zahlentheorie* als solche sollte sich aber mit der Gesamtheit *aller* natürlichen Zahlen befassen, und die *Mengentheorie* als solche ebenso mit der Gesamtheit *aller* Mengen.

Es sei hier noch besonders darauf hingewiesen, daß die Mengen nur eine *Verallgemeinerung* der natürlichen Zahlen sind: während diese die Beziehung β (zu ihren «Vorgängern») entweder zu genau *einer* andern natürlichen Zahl oder zur Null besitzen, haben die Mengen diese Beziehung β (zu ihren «Elementen») zu beliebig vielen Mengen.

36. Es sei weiter auf die «Erwiderung» [7] selbst verwiesen, die hier nicht ganz wiederholt werden kann, die aber vollständig gültig bleibt.

In seinen Bemerkungen [2] zu dieser Erwiderung wird von Herrn BAER fast alles Vorgebrachte *ignoriert*, und es werden nur zwei Punkte herausgegriffen, in denen er aber ebenfalls unrecht hat.

Die Annahme, daß die BAERsche Konstruktion der Menge N *in gewissen*

Fällen (dies *verschweigt* Herr BAER!) «zirkelhafter Natur» sei, beruht keineswegs auf einem Mißverständnis meinerseits.

Herr BAER hat das System von Mengen, welches den Axiomen I und II genügt, nicht weiter eingeschränkt. Wenn nun dieses System Σ *alle* Mengen enthält, was nicht verboten ist, dann *müßte* die angeblich *neue* Menge N eben dadurch, daß sie eine *Menge* sein soll, doch schon dem System Σ angehören, und das ist der Zirkel.

Die Ausführungen des Herrn BAER sind ein typisches Beispiel dafür, wie man mit einer unverstandenen Paradoxie falsche Behauptungen «beweisen» kann.

Wenn das «neue» Ding N (dann besser N zu nennen) *keine Menge* sein soll, sondern etwa ein *System*, dann verschwindet der Zirkel und der Widerspruch, dann hat man aber auch keine Erweiterung des Systems der Mengen. Wenn man aber fordert oder behauptet, daß N eine *Menge* sei, dann *müßte* diese Menge, sofern Σ *alle* Mengen enthält, selbst zu den im «vorgelegten Mengensystem Σ bereits vorhandenen Mengen» gehören, selbst wenn «ausdrücklich nachgewiesen wird», daß dies nicht möglich ist. In diesem Fall hat man also einen unerfüllbaren Zirkel und einen Widerspruch; eine solche Menge N *gibt es nicht!*

Auch bei der üblichen Paradoxie der «Menge aller sich nicht selbst enthaltenden Mengen», um die es sich hier tatsächlich handelt, wird «ausdrücklich nachgewiesen», daß sie sich nicht selbst enthält. Trotzdem *müßte* sie sich enthalten und sie *kann* deshalb *nicht existieren.*

37. Die zweite Bemerkung des Herrn BAER betrifft die von ihm in [1] zitierten HILBERTschen Ausführungen über das Vollständigkeitsaxiom (siehe oben Nr. 33). Um meine Erklärung des Sachverhaltes anzugreifen, behauptet Herr BAER, daß «*jeder* relle Körper durch Adjunktion eines transzendenten Elementes zu einem größeren reellen – wenn auch nicht immer archimedisch geordneten – Körper erweitert werden kann».

Das *stimmt aber nicht!* Ebenso, wie man durch Vereinigung aller transfiniten Ordnungszahlen eine größte transfinite Ordnungszahl erhält (vgl. Nr. 4), so erhält man auch durch Vereinigung aller transzendenten Erweiterungen eines reellen Körpers einen *größten* reellen Körper. Zu diesem kann kein transzendentes Element mehr adjungiert werden; dies würde wiederum einen unlösbaren Zirkel und damit einen Widerspruch ergeben.

Eine *Beschränkung* auf *zirkelfreie Bildungen* ist hier ja nicht vorgesehen.

Es ist wohl klar, daß *früher* bei solchen Sätzen *stillschweigend* nur zirkelfreie Konstruktionen zugelassen wurden, da man hier an die Möglichkeit von zirkelhaften Bildungen, bei denen der Begriff «alle» vorkommt, gar nicht gedacht hat. Um dies in Ordnung zu bringen, muß man aber ausdrücklich sagen, was gemeint ist, und dazu ist es auch notwendig, *allgemein* zu erklären, was zirkelfreie Konstruktionen sind. Sonst erhält man eben *falsche Sätze.*

38. Herr A. FRAENKEL referiert die Diskussion zwischen Herrn R. BAER und mir in folgender Weise ([13]):

[1] Eine Kritik des entscheidenden Punktes der FINSLERschen Grundlegung der Mengenlehre (M.Z. 25 (1926), 683–713; F.d.M. 52); es wird nämlich gezeigt, daß jedes widerspruchsfreie Modell einer Mengenlehre der FINSLERschen Art stets noch einer Erweiterung fähig ist – im Gegensatz zum dortigen «Vollständigkeitsaxiom».
[7] Versuch einer Widerlegung der vorstehend besprochenen Kritik.
[2] Antikritik zur vorstehend erwähnten Erwiderung.

Wie in Nr. 15 bis Nr. 35 im einzelnen dargelegt wurde, ist die Kritik [1] des Herrn BAER *gänzlich unhaltbar* und auch in der entscheidenden Behauptung *falsch*.

Die Erwiderung [7] wird durch die, wie in Nr. 36 und Nr. 37 gezeigt wurde, überdies selbst noch irrtümliche Antikritik [2] keineswegs aufgehoben und ist, wie auch aus dem Vorangehenden wohl deutlich genug hervorgeht, nicht nur der «Versuch» einer Widerlegung von [1].

Es scheint, daß Herr FRAENKEL sich insbesondere die Erwiderung [7] nicht genau überlegt hat. Daß er zum mindesten die «Grundlegung» nicht sorgfältig gelesen hat, geht schon daraus hervor, daß er in seinem Lehrbuch ([12] 2. Aufl. S. 200, 3. Aufl. S. 289) die Behauptung, im ZERMELOschen Auswahlaxiom (in der üblichen Formulierung!) sei die paarweise Elementenfremdheit der Elemente der gegebenen Menge «keineswegs erforderlich», beibehält und also das in der «Grundlegung» S. 710 angegebene einfache Gegenbeispiel der Menge $\{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ nicht kennt.

39. Weiter kann ich Herrn FRAENKEL versichern, daß ich den Gedanken, die *reinen Mengen* zu untersuchen, deren Elemente selbst nur wieder reine Mengen sind, *nicht von ihm übernommen* habe. Bei meiner Kölner Antrittsvorlesung vom Jahr 1923, in der dieser Gedanke ausgesprochen und begründet wurde (vgl. [3] S. 153), waren mir seine Untersuchungen dazu auf jeden Fall *noch nicht bekannt.* Zudem hatte ich den Gedanken, das System dieser reinen Mengen als Grundlage der Mengenlehre anzunehmen, schon einige Jahre vorher zum Beispiel Herrn BERNAYS gesprächsweise mitgeteilt.

Solche «reine Mengen» wurden übrigens von ZERMELO für die Theorie der Ordnungszahlen schon früher benutzt; aber auch Herr FRAENKEL hat für sie *keinen besonderen Namen* eingeführt.

Die *Hauptsache* ist aber gar nicht die *Beschränkung* auf reine Mengen allein, sondern vielmehr die Einsicht, daß dies die *einzige* Einschränkung ist, die man braucht, um eine *widerspruchsfreie Mengenlehre* und zugleich ein *eindeutiges* System von Mengen zu erhalten, das *alle* reinen Mengen enthält und so dem *eindeutigen* System *aller* natürlichen Zahlen entspricht (vgl. [3] S. 153). Von dieser Einsicht ist aber Herr FRAENKEL allem nach auch heute noch unendlich weit entfernt.

Kapitel 3

Ein Referat

40. Herr TH. SKOLEM hat in [15] die «Grundlegung» [5] besprochen. Dieses Referat sei hier *vollständig wiedergegeben*, damit zu jedem Punkt Stellung genommen werden kann.

Es beginnt so:

P. FINSLER. Über die Grundlegung der Mengenlehre. I: Die Mengen und ihre Axiome. M. Z. 25, 683–713.

Diese Abhandlung enthält einen Versuch, die Mengenlehre so zu begründen, daß sie einerseits nicht zu Antinomien führt und andrerseits eine absolute und eindeutig bestimmte Theorie wird.

Das ist *richtig;* nur handelt es sich dabei nicht, wie Herr SKOLEM später meint, um einen verfehlten, sondern um einen *gelungenen Versuch!*

41. Weiter heißt es:

Die Einstellung des Verfassers tritt schon in der Einleitung scharf hervor, indem er dort sagt, daß es für die Wahrheit oder Falschheit mathematischer Sätze ganz gleichgültig ist, ob wir sie mit unseren menschlichen Mitteln beweisen oder widerlegen können.

So habe ich das *nicht* gesagt! Ein mathematischer Satz ist selbstverständlich wahr, wenn wir ihn mit unseren menschlichen Mitteln beweisen können, und er ist falsch, wenn wir ihn widerlegen können. Das ist also *gar nicht gleichgültig!*

Ein mathematischer Satz *wird* aber nicht erst dann wahr, wenn wir ihn beweisen, und er *wird* nicht erst dann falsch, wenn wir ihn widerlegen; er ist es schon vorher, auch wenn wir nicht wissen, ob er wahr oder ob er falsch ist.

Manche sagen vielleicht, der Satz sei «für uns» erst wahr, wenn wir ihn bewiesen haben. Das bedeutet aber etwas anderes, nämlich daß wir den Satz erst dann als wahr *erkennen*, wenn er bewiesen ist.

Die reine Mathematik als solche, die wir nur zu untersuchen haben (vgl. Nr. 3), ist sowohl vom Zeitablauf wie auch von unseren beschränkten Hilfsmitteln unabhängig.

42.

Viele werden es aber wohl unklar finden, was es eigentlich heißt, daß ein unentscheidbarer Satz «wahr» oder «falsch» ist.

Hier zeigt es sich, daß Herr SKOLEM den gerade an der betreffenden Stelle (S. 685) in der «Grundlegung» gegebenen *Hinweis* auf die Abhandlung [4]: «Formale Beweise und die Entscheidbarkeit» *nicht beachtet* hat. In dieser Abhandlung wird gezeigt, daß es Sätze gibt, die *formal unentscheidbar* sind, bei denen man aber trotzdem *einsehen* kann, daß sie tatsächlich *falsch* sind (ebenso natürlich bei andern, daß sie wahr sind). Daraus geht deutlich hervor, daß es auch bei formal unentscheidbaren Sätzen (und solche meint jedenfalls Herr SKOLEM) klar ist, was es heißt, daß sie wahr oder falsch sind (nämlich in einem absoluten Sinn; nicht «wahr» oder «falsch» in bloß formaler Bedeutung!). Die Frage, ob es auch *absolut unentscheidbare* Sätze gibt, habe ich später in [10] untersucht.

Die genannte Abhandlung [4] geht der «Grundlegung» *unmittelbar voraus.* Wie kann man eine Sache richtig beurteilen, wenn einem die nötigsten Voraussetzungen fehlen?

Wir wissen heute nicht, ob die EULERsche Konstante rational oder irrational ist, und es ist denkbar, daß wir dies nie werden entscheiden können. Trotzdem können wir sagen, sie ist rational, wenn sie gleich dem Quotienten von zwei natürlichen Zahlen ist; andernfalls ist sie irrational. Es gilt hier der Satz vom ausgeschlossenen Dritten. Dieser Satz wurde in der «Grundlegung» für die exakte Mathematik *vorausgesetzt;* dies bedeutet, daß nur solche Dinge untersucht werden, für die er gilt, für die es also *an sich nichts Unklares* gibt. Ob *wir persönlich* immer die Entscheidung treffen können oder nicht, spielt dabei keine Rolle.

Es wurde in der «Grundlegung» (S. 683) auch deutlich gesagt, daß andere Untersuchungen, bei denen der Satz vom ausgeschlossenen Dritten verworfen wird, hier außer Betracht bleiben. Wenn Herr SKOLEM die Arbeit beurteilen will, dann muß er sich ebenfalls auf diesen Standpunkt stellen, also *dieselben Voraussetzungen* machen, und nicht von andern Dingen reden, mit denen die Arbeit gar nichts zu tun hat.

Die Bedeutung von wahr und falsch in der reinen Mathematik wird doch im allgemeinen als bekannt vorausgesetzt.

43.

In Kap. 1, § 1, bespricht er zuerst die falsche, zur RUSSELLschen Antinomie führende, Annahme, daß man mit einem Bereich von Dingen so räsonnieren kann, daß irgendwelche der Dinge zu Mengen zusammengefaßt werden können, die wieder Dinge des Bereiches sind.

Dies bedeutet aber nicht, daß man nicht vom Bereich aller Mengen reden dürfte. Man darf nur nicht zu jedem System N von Mengen eine N entsprechende Menge N annehmen. Es gibt eben Systeme, denen keine Menge entspricht.

In § 2 spricht er von zirkelhaften Definitionen. Die späteren Betrachtungen des Verfassers, daß eine Menge gewisser Dinge nicht mit deren Inbegriff oder Gesamtheit identisch ist, sondern nur ein diesen Dingen zugeordnetes Ding, scheinen dem Referenten nur Wortspiel zu sein; denn jede Zusammenfassung von Dingen, ganz gleichgültig, ob sie Menge, Inbegriff oder Gesamtheit genannt wird, kann als ein solches zugeordnetes Ding angesehen werden.

Unter dem «Inbegriff» oder der «Gesamtheit» von irgendwelchen Dingen versteht man üblicherweise *die Dinge selbst,* also im allgemeinen *viele* Dinge. Eine *Menge* von Dingen muß aber in einer sauberen Mengenlehre ein *einzelnes* Ding sein; das ist also etwas *ganz anderes.* Diesen Unterschied habe ich in der «Grundlegung» doch wohl *sehr deutlich* auseinandergesetzt; wie man hier von einem «Wortspiel» reden kann, ist mir unbegreiflich.

Wenn *eine* Menge *zwei* Elemente besitzt, so ist doch nicht ein Ding identisch mit zwei Dingen und folglich eins gleich zwei. Wenn man solche Dinge verwechselt, kommt man natürlich zu Widersprüchen und Antinomien, aber sicher nicht zu einer brauchbaren Mengenlehre.

Daß man *rein sprachlich* eine Einzahl verwendet, wenn man von *der* Gesamtheit der Elemente einer Menge spricht, tut nichts zur Sache. Es kommt darauf an, was damit *gemeint* ist. *Gemeint* ist hier aber *nicht* die *Zusammenfassung* als solche, sondern *gemeint* sind die *Elemente*, und zwar alle ohne Ausnahme. Wenn die Gesamtheit der Schüler einer Klasse ein Examen bestanden hat, dann hat nicht ein abstrakter Begriff das Examen bestanden, sondern jeder einzelne Schüler hat es bestanden.

§ 3 der «Grundlegung» hat die Überschrift «Menge und Gesamtheit». In § 4 werden *Systeme von Mengen* eingeführt, wobei die *Mengen* nur *Dinge* sind, die *Systeme* jedoch *Zusammenfassungen* von Mengen.

Die analoge Unterscheidung zwischen «set» und «class» ist heute in der Mengenlehre ganz geläufig. Nach H. Weyl ([16] S. 11) ist allerdings «the introduction of classes ... due to Fraenkel, v. Neumann, Bernays, and others».

44. Es sei hier eine Zwischenbemerkung angefügt: Nach G. Cantor ist eine Menge, kurz gesagt, die Zusammenfassung wohlbestimmter Objekte zu einem Ganzen. In [3] S. 151 bemerkte ich dazu: «Also die Zusammenfassung selbst.»

In [12], 3. Aufl., S. 13 meint Herr Fraenkel zur Cantorschen Definition, «daß natürlich nicht der *Akt* des Zusammenfassens, sondern das *Ergebnis* dieses Aktes gemeint ist». Ist das wirklich so natürlich? Gesagt hat es Cantor auf jeden Fall nicht. In einer *sehr naiven* Mengenlehre wird man allerdings zunächst an das *Resultat* der Zusammenfassung denken. Was erhält man aber als Resultat, wenn man zum Beispiel die Zahl 1 zusammenfaßt? Doch wohl die Zahl 1 selbst. Trotzdem sagt man in der Mengenlehre, daß eine Menge, die nur *ein* Element enthält, nicht mit diesem Element verwechselt werden darf. Und was erhält man, wenn man nichts zusammenfaßt? Doch wohl nichts. Wie kommt man dann zur Nullmenge?

Die Bemerkung des Herrn Fraenkel kann nur dazu dienen, die Einsicht in die Grundlagen der Mengenlehre und vor allem in das Wesen der Paradoxien zu *erschweren*. Weshalb soll man bei der Entwicklung der Mengenlehre unter einer Menge nicht die *Operation* des Zusammenfassens ihrer Elemente verstehen? Dann ist alles klar. Das Resultat einer Operation kann man ja nicht erhalten, ohne die Operation auszuführen; diese ist also doch notwendig. Wenn man aber wegen eines unerfüllbaren Zirkels die Operation nicht ausführen kann, dann gibt es auch kein Resultat der Operation. Wenn man nun das Resultat trotzdem *postuliert*, dann hat man eine *Antinomie!*

45.

In Kap. 2 stellt der Verfasser seine Axiome auf. Nach Axiom I soll es immer «entschieden sein», ob $M\ \beta\ N$ (das heißt N ist Element von M) stattfindet oder nicht.

Das «entschieden sein» bedeutet hier natürlich wieder eine Anwendung des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten; es wird nicht verlangt, daß wir selbst immer die Entscheidung treffen können.

Warum als *Grundbeziehung* die Beziehung β, also die Beziehung des Enthaltens und nicht die des Enthaltenseins gewählt wurde, ist oben in Nr. 16 noch näher begründet worden.

Nach Axiom II sollen M und N identisch sein, wenn alle in M wesentlichen Mengen (das heißt Elemente von M, Elemente der Elemente von M usw.) den in N wesentlichen Mengen eineindeutig und β-beziehungstreu zugeordnet werden können.

Daß dabei die Elemente von M den Elementen von N zugeordnet werden müssen, kann hier wohl als selbstverständlich betrachtet werden.

46.

Axiom III ist ein Vollständigkeitsaxiom; es sagt aus, daß der betrachtete Bereich von Mengen maximal sein soll. Es scheint doch klar zu sein, daß jeder Bereich, der den Axiomen I und II genügt, erweiterungsfähig sein muß, falls man nicht die Bildung neuer Dinge verbieten will, zum Beispiel verbieten, die aus den Dingen des Bereiches gebildeten Gesamtheiten als neue Dinge anzusehen, was sinnlos erscheint. (Vgl. R. BAER, Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre, M.Z. 27(1928), 536–539; F.d.M. 54, 90.)

Was von der Note [1] des Herrn BAER und der Besprechung [13] des Herrn FRAENKEL zu halten ist, wurde oben schon gezeigt. Da aber das Vollständigkeitsaxiom anscheinend besondere Schwierigkeiten bereitet, sei hier nochmals darauf eingegangen.

Zu jeder natürlichen Zahl gibt es eine größere natürliche Zahl, so daß man also beim Zählen sozusagen «nie fertig wird», genauer gesagt, bei keiner natürlichen Zahl schon fertig ist. Trotzdem darf man es einem *nicht verbieten*, von *allen* natürlichen Zahlen zu sprechen, also von allen, die es gibt, von allen, die widerspruchsfrei existieren. Ein solches Verbot wäre tatsächlich *unbegründet* und deshalb «sinnlos». Für die Existenz einer natürlichen Zahl ist es doch *nicht notwendig*, daß *wir* bis zu dieser Zahl gezählt haben; das wäre ein *sehr unbilliges Verlangen!*

Ebenso ist es nun auch bei den Mengen. Von irgendeiner gewöhnlichen Menge, etwa der Nullmenge, ausgehend kann man immer weitere Mengen bilden, so daß man auch hier anscheinend «nie fertig wird». Trotzdem darf man es einem auch hier *nicht verbieten*, von *allen* reinen Mengen zu sprechen, also von allen, die es gibt, von allen, die widerspruchsfrei existieren. Ein solches Verbot wäre wiederum *unbegründet* und deshalb «sinnlos».

Die reinen Mengen sind ja (vgl. Nr. 35) nur eine *Verallgemeinerung* der natürlichen Zahlen: während diese immer nur *einen* Vorgänger haben, besitzt eine

Menge *beliebig viele* «Vorgänger», nämlich ihre Elemente. Das ist im Prinzip der ganze Unterschied.

Unter einer «Menge» sei auch im folgenden stets eine «reine Menge» verstanden, so daß also die Elemente einer Menge immer nur Mengen sind. Diese Mengen sind aber *genau wie die natürlichen Zahlen* nur *ideelle Einzeldinge*, die untereinander in einer bestimmten Beziehung stehen.

47. Der Bereich aller Mengen läßt sich nun *als solcher* ebensowenig erweitern wie der Bereich der natürlichen Zahlen; er *genügt* somit dem *Vollständigkeitsaxiom.*

Zu *allen* natürlichen Zahlen kann man nicht noch eine «neue natürliche Zahl» «bilden» oder «konstruieren»; das wäre ein widerspruchsvoller Begriff, und die Bildung von *unmöglichen,* also *widerspruchsvollen* «Dingen» ist *selbstverständlich verboten,* weil das einfach nicht geht!

Genau so kann man zu *allen* Mengen nicht noch eine «neue Menge» «bilden» oder «konstruieren»; auch das wäre ein widerspruchsvoller Begriff, und die Bildung von *unmöglichen,* also *widerspruchsvollen* «Dingen» ist auch hier *selbstverständlich verboten!*

Wenn man zu jeder natürlichen Zahl eine folgende «bilden» kann, warum nicht auch zu allen natürlichen Zahlen eine folgende? Nur deshalb nicht, weil dies ein Widerspruch ist! Man kann sich zwar ein «neues Ding» denken und festsetzen, daß es auf alle natürlichen Zahlen folgen soll; man kann es auch, wenn man will, als Ordnungszahl und mit ω bezeichnen; es ist dies aber auf jeden Fall *keine natürliche Zahl.* Eine auf alle natürlichen Zahlen folgende natürliche Zahl *gibt es nicht!*

Die «Bildung von neuen Dingen» wird also nicht an sich «verboten», sie ist aber nur möglich, wenn es noch neue Dinge gibt, wenn also bei der «Bildung» kein Widerspruch entsteht. *Nicht erlaubt* ist es aber, *neue* Dinge als *alte* Dinge zu betrachten, denn das ist ein Widerspruch!

Es ist also *nicht verboten,* «die aus den Dingen des Bereiches gebildeten Gesamtheiten als neue Dinge anzusehen», solange man eben diese «neuen Dinge» nicht als alte Dinge, das heißt als Mengen bezeichnet.

Wenn man das System aller sich nicht enthaltenden Mengen «als ein neues Ding ansehen» will, dann ist dieses «neue Ding» ein *System* und *keine Menge;* denn sonst wäre es ja kein «neues» Ding. Dieses System ist ebensowenig eine Menge, wie die Ordnungszahl ω eine natürliche Zahl ist. Der Bereich aller Mengen läßt sich *als solcher,* nämlich als Bereich von *Mengen, nicht erweitern;* er ist tatsächlich ein *maximaler* Bereich von Mengen.

48. Den Bereich *aller rationalen Zahlen* kann man zum Bereich *aller reellen Zahlen* erweitern, indem man gewisse Systeme rationaler Zahlen als reelle Zahlen bezeichnet. Jeder rationalen Zahl entspricht eindeutig eine bestimmte reelle Zahl; umgekehrt aber gibt es reelle Zahlen, denen keine rationale Zahl entspricht, die man deshalb auch nicht als rationale Zahlen bezeichnen darf, sonst kommt man zu Widersprüchen.

Ebenso läßt sich der Bereich *aller Mengen* zum Bereich *aller Systeme von Mengen* erweitern, indem man die Zusammenfassungen von Mengen als Systeme bezeichnet. Jeder Menge entspricht eindeutig ein bestimmtes System von Mengen, nämlich das System ihrer Elemente. Umgekehrt aber gibt es Systeme von Mengen, denen keine Menge entspricht, die man deshalb auch nicht als Mengen bezeichnen darf, sonst kommt man zu Widersprüchen. Ein Beispiel dafür ist das System aller sich nicht enthaltenden Mengen.

Die Irrationalzahlen unterscheiden sich wesentlich von den rationalen Zahlen: sie lassen sich nicht als Quotienten von ganzen rationalen Zahlen darstellen. Ebenso unterscheiden sich die Systeme, denen keine Menge entspricht, wesentlich von den Mengen: sie lassen sich nicht mit einer *einzigen* Beziehung β darstellen. Die Mengen werden allein durch die Beziehung β festgelegt. Um ein System von Mengen zu erhalten, braucht man zuerst die Mengen, also die Beziehung β, und dann weiter noch eine neue Beziehung γ, die angibt, welche Mengen das System enthalten soll. Die Beziehung γ hat ohne die Beziehung β keinen Sinn; sie kann nur in speziellen Fällen durch die Beziehung β ersetzt werden, wenn man nämlich das System durch eine Menge ersetzen kann. So kann man auch nur in speziellen Fällen eine reelle Zahl (als System von rationalen Zahlen) durch eine rationale Zahl ersetzen; bei den irrationalen Zahlen geht das nicht.

Daß man den Bereich aller Mengen zu einem größeren Bereich von Systemen «erweitern» kann, widerspricht keineswegs dem Vollständigkeitsaxiom; dieses bezieht sich lediglich auf die *Mengen*, also auf solche Dinge, die durch *eine* (ursprüngliche, nicht abgeleitete) Beziehung β definiert sind (vgl. Nr. 32). Einen *größeren Bereich* von *Mengen gibt es nicht!*

49.

Weiter ist klar, daß die Forderung, daß das betrachtete System das größte ist, das I und II genügt, nur dann eine absolute Bedeutung haben kann, wenn die Gesamtheit aller Systeme schon sonst eindeutig bestimmt ist; aber dann müßte es wohl ein erst zu lösendes Problem sein, ob darin ein größtes vorkommt.

Die Gesamtheit aller Systeme, die den Axiomen I und II genügen, ist durch diese Axiome tatsächlich schon eindeutig bestimmt; es sind alle, die es gibt, also alle, die widerspruchsfrei möglich sind.

Das Problem, ob unter diesen Systemen ein größtes vorkommt, wird dadurch gelöst, daß man zeigt, daß sich diese Systeme zu einem größten vereinigen lassen, indem man isomorphe Mengen der verschiedenen Systeme identifiziert. Dies wurde in § 9 und § 11 der «Grundlegung» durchgeführt.

50.

Bei der näheren Besprechung des Axioms III in § 10 sagt der Verfasser, daß eine Menge existiert, wenn die Annahme ihrer Existenz nicht zu einem Widerspruch mit I und II führt. Es scheint aber dem Referenten ganz unlogisch zu sein, eine solche Erklärung der Existenz von Dingen aufzustellen innerhalb einer Theorie, worin die Dinge nicht isolierte logische Gebilde sind, sondern in den mannigfaltigsten Beziehungen zueinander stehen.

Daß eine irgendwie definierte Menge M «existiert», bedeutet in diesem Zusammenhang, wie eben dort in § 10 angegeben ist, daß es im System Σ aller Mengen eine der Definition genügende Menge gibt. Daß die Annahme der Existenz von M den beiden ersten Axiomen nicht widerspricht, bedeutet, wie dort ebenfalls angegeben ist, daß es ein den beiden ersten Axiomen genügendes System gibt, das eine der Definition genügende Menge M enthält.

Wenn es kein solches System gäbe, dann würde eben die Annahme, daß es eine solche Menge gibt, schon mit den beiden ersten Axiomen in Widerspruch stehen. Wenn es aber ein solches System gibt, dann muß die Menge M auch dem Gesamtsystem Σ angehören, da dieses als Vereinigung aller Systeme, die I und II genügen, auch dieses spezielle System und damit auch die Menge M enthalten muß. Das ist bestimmt nicht «unlogisch».

Die Mengen stehen ebenso «in den mannigfaltigsten Beziehungen zueinander», wie etwa die reellen Zahlen. Bei der Definition einer bestimmten reellen Zahl braucht man aber auch nicht alle diese Beziehungen zu kennen; es genügt, wenn die Definition an sich einwandfrei ist, wenn sie also eindeutig eine bestimmte reelle Zahl festlegt. Genau so ist es bei den Mengen.

Die Mengen kann man ebensogut als «isolierte logische Gebilde» betrachten, wie die reellen Zahlen, und sogar genau so gut, wie die natürlichen Zahlen.

Eine reelle Zahl kann durch ein bestimmtes System rationaler Zahlen definiert sein; ebenso eine Menge durch das System ihrer Elemente mit den darin wesentlichen Mengen. Nicht jedes System von rationalen Zahlen definiert eine reelle Zahl, und nicht jedes System von Mengen definiert eine Menge. Es müssen noch bestimmte Bedingungen erfüllt sein; im letzteren Fall allerdings nur die eine, daß die Annahme einer solchen Menge den Axiomen I und II nicht widerspricht.

51.

Falls die Annahme der Existenz von M und Nichtexistenz von N keinen Widerspruch gibt, und auch nicht die Existenz von N mit Nichtexistenz von M, während die Annahme der Existenz sowohl von M wie N einen Widerspruch gibt, was sollte dann eigentlich existieren? Wie stünde es dann mit der Eindeutigkeit der Theorie?

Wie sollte denn so etwas möglich sein? Wie sollte die Existenz einer Menge von der Nichtexistenz einer andern Menge abhängen können? Die *Existenz* einer Menge ist eine *absolute* und *keine bedingte Eigenschaft*. Wenn eine Menge in bestimmter Weise, etwa durch Angabe ihrer Elemente, definiert wird, so steht die Annahme der Existenz dieser Menge entweder mit den Axiomen I und II in Widerspruch, oder das ist nicht der Fall. Etwas anderes gibt es nicht!

Wenn eine Menge existiert, dann müssen allerdings auch die in ihr wesentlichen Mengen existieren; welche Mengen sonst noch existieren, ist gleichgültig.

Es wird nicht behauptet, daß wir in jedem Fall *wissen* oder *entscheiden können*, ob eine bestimmt definierte Menge existiert oder nicht; wir wissen ja auch nicht von jeder bestimmt definierten reellen Zahl, ob sie rational oder irrational ist.

Es kann vorkommen, daß ein System, welches den Axiomen I und II genügt, die Menge M und nicht die Menge N enthält, während ein anderes die Menge N und nicht die Menge M enthält. Dann kann man aber die beiden Systeme vereinigen, indem man isomorphe Mengen identifiziert, und erhält so ein System, welches ebenfalls diesen Axiomen genügt und sowohl M wie N enthält. Aus dem Identifizieren isomorpher Mengen kann kein Widerspruch entstehen; es liegt ja kein Grund vor, sie nicht zu identifizieren.

Wenn also im absoluten Sinn eine Menge M und eine Menge N existiert, dann existieren sie *alle beide!*

Damit ist auch die Eindeutigkeit der Theorie gewährleistet.

52.

Und was heißt übrigens «Widerspruch» in der FINSLERschen Theorie? Nach der Erklärung in der Einleitung braucht «Widerspruch» nicht «nachweisbarer Widerspruch» zu sein; man vermißt dann aber eine genauere Erklärung.

Warum soll denn «Widerspruch» in meiner Theorie etwas Besonderes heißen? Das Wort «Widerspruch» bedeutet genau das, was es besagt und was es in der klassischen Mathematik schon immer bedeutet hat. Ein Widerspruch braucht ebensowenig ein nachweisbarer Widerspruch zu sein, wie ein Mord ein nachweisbarer Mord zu sein braucht.

Eine besondere Erklärung sollte hier eigentlich überflüssig sein; eine bloß *formale* Erklärung hat hier selbstverständlich keinen Sinn. Es sei aber auf das in Nr. 12 Gesagte verwiesen.

Eine reelle Zahl ist genau dann irrational, wenn die Annahme, sie sei rational, einen Widerspruch enthält. Ebenso bildet ein System von Mengen genau dann *keine* Menge, wenn die Annahme, es entspreche ihr eine Menge, einen Widerspruch enthält.

In beiden Fällen ist es nicht notwendig, daß *wir* den Widerspruch *nachweisen* können. Es gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten: Die Annahme ist entweder widerspruchsvoll oder sie ist es nicht.

Wenn die Annahme, eine bestimmte positive reelle Zahl sei rational, *keinen* Widerspruch enthält, dann *gibt es* zwei natürliche Zahlen, deren Quotient gleich dieser Zahl ist, gleichgültig, ob wir sie finden können oder nicht. Wenn es solche Zahlen nicht geben würde, dann wäre die gemachte Annahme widerspruchsvoll, weil sie den Tatsachen widersprechen würde.

Wenn die Annahme, ein bestimmtes System von Mengen bilde eine Menge, *keinen* Widerspruch enthält, dann *gibt es* eine Menge, welche genau die Mengen dieses Systems als Elemente besitzt. Nur solche Mengen gehören dem Gesamtsystem Σ an; dieses ist also eindeutig und widerspruchsfrei bestimmt.

Die Widerspruchsfreiheit der Geometrie stützt sich auf die der Arithmetik, diese auf die der Mengenlehre, und diese stützt sich auf die Logik. Die Logik ist nach Voraussetzung an sich schon widerspruchsfrei, sonst wäre es keine Logik.

Es ist klar, daß es sich hier stets um eine *absolute Widerspruchsfreiheit* handelt und nicht nur um eine formale; ebenso aber auch um eine *absolute Logik* und nicht nur um eine formale.

53.

In § 9 meint der Verfasser, ganz unbeschränkt Vereinigungen und Durchschnitte von Systemen bilden zu können. Er hat keine Skrupel, was nicht-prädikative Definitionen hier betrifft, so daß er es nicht nötig findet, Stufenunterscheidungen zu machen.

Schon in § 4, S. 690, der «Grundlegung» wurde bemerkt: «Durch die axiomatische Auffassung, nach der die Mengen nur Dinge und nicht Zusammenfassungen bedeuten, wird insbesondere erreicht, daß man nunmehr diese Dinge in beliebiger Weise anschaulich zusammenfassen kann, ohne in die Gefahr eines Zirkels zu geraten.» Das bedeutet aber gerade, daß man ganz unbeschränkt Vereinigungen und Durchschnitte von Systemen bilden kann. Eine Menge gehört der Vereinigung gegebener Systeme an, wenn sie wenigstens einem dieser Systeme angehört; sie gehört ihrem Durchschnitt an, wenn sie allen diesen Systemen angehört. Das ist ganz eindeutig.

Die Unterscheidung zwischen Mengen und Systemen von Mengen kann man, wenn man will, als eine Stufenunterscheidung ansehen, die allerdings tatsächlicher und nicht nur nomineller Natur ist. Diese reicht hier vollständig aus.

Die Systeme müssen in jedem Fall eindeutig und widerspruchsfrei definiert sein; ob oder wie weit dies auch mit nichtprädikativen Definitionen erreicht werden kann, braucht hier nicht untersucht zu werden. Ob eine spezielle Definition brauchbar ist oder nicht, muß im einzelnen Fall geprüft werden. Ein System von Mengen ist gegeben, wenn von jeder Menge eindeutig feststeht, ob sie dem System angehört oder nicht.

Ein in der «Grundlegung» S. 705 gegebenes Beispiel einer nichtprädikativen Definition wird unten in Nr. 62 noch näher besprochen.

54.

In Kap. 3, das von der Bildung von Mengen handelt, führt er die Begriffe «zirkelfrei» und «zirkelhaft» ein. Eine Menge M soll zirkelfrei heißen, wenn sie und die darin wesentlichen Mengen vom Begriff zirkelfrei unabhängig sind, das heißt die Definition von M liefert immer dieselbe Menge, gleichgültig, welche Mengen als zirkelfrei bezeichnet werden.

Dabei wurden zuvor alle Mengen ausgeschaltet, in denen eine in sich selbst wesentliche Menge wesentlich ist, also alle Mengen, die schon «in grober Weise» zirkelhaft sind, insbesondere alle sich selbst enthaltenden Mengen.

Weiter müßte es korrekterweise heißen: «... unabhängig sind, das heißt so definiert werden *können*, daß ihre Definition immer dieselbe Menge liefert, gleichgültig, welche Mengen als zirkelfrei bezeichnet werden.» Eine zirkelfreie Menge kann auch zirkelhaft definiert werden; ferner muß eine Menge, in der eine zirkelhafte Menge wesentlich ist, als zirkelhaft gelten, auch wenn sie als Ganzes vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist.

Sonderbar ist es hier, daß der Begriff zirkelfrei keinen Zusammenhang mit der Urbeziehung β hat.

Der Begriff zirkelfrei bezieht sich auf Mengen, und diese werden durch die Urbeziehung β festgelegt. Insofern besteht also doch ein Zusammenhang mit dieser Beziehung.

55. Der Begriff zirkelfrei ist, wie in Nr. 61 noch besonders gezeigt wird, von größter Wichtigkeit. Daß er von solchen nicht verstanden wird, die nicht einsehen, daß man ohne Widerspruch von allen Mengen reden kann, ist wohl begreiflich. Es seien jedoch noch einige Erläuterungen und Beispiele gegeben.

Die Mengen, in denen eine in sich selbst wesentliche Menge wesentlich ist, seien als «zirkuläre» Mengen bezeichnet. Wenn es, nach *Ausschluß* der zirkulären Mengen, für eine bestimmte Menge *und für jede in ihr wesentliche Menge* eine Definition gibt, in welcher der Begriff zirkelfrei gar nicht vorkommt, dann ist sie zirkelfrei. So ist die Nullmenge zirkelfrei, da man sie als «Menge ohne Elemente» definieren kann. Ebenso ist die Einsmenge zirkelfrei, welche als einziges Element die Nullmenge enthält. Man sieht, daß man so fortfahrend viele weitere zirkelfreie Mengen bilden kann. Man könnte diese als «unproblematische» Mengen bezeichnen.

Es geht nun aber nicht an, einfach alle nicht zirkulären Mengen als zirkelfrei zu betrachten; damit würden die Paradoxien, die wesentlich auf verborgenen Zirkeln beruhen, nicht beseitigt.

Eine «Menge aller nicht zirkulären Mengen» kann es nicht geben: wäre sie nicht zirkulär, so müßte sie sich selbst enthalten und deshalb zirkulär sein; wäre sie aber zirkulär, so müßte in ihr eine in sich selbst wesentliche Menge wesentlich sein, was ebenfalls unmöglich ist.

Wirklich zirkelfreie Mengen, in deren Definition auch kein versteckter Zirkel enthalten ist, sollte man aber doch stets zu einer «neuen» Menge zusammenfassen können. Was sollte einen daran hindern? Ein Hinderungsgrund könnte nur ein Zirkel sein, also eine «Beziehung auf sich selbst», so daß etwa die «neue» Menge auch sich selbst enthalten, also doch eine «alte» Menge sein müßte.

Ein solcher Zirkel müßte notwendig in der Definition der gesuchten Menge enthalten sein, da ja ihre Elemente alle zirkelfrei sind. Dann kann aber die neue Menge, wenn sie existiert, nicht als zirkelfrei betrachtet werden, sie wäre notwendig zirkelhaft. Als *zirkelhafte* Menge ist sie aber tatsächlich eine *neue* Menge; es kann nicht folgen, daß sie als solche zu den alten, den zirkelfreien Mengen gehören müßte. Wenn also eine eindeutig bestimmte Menge von zirkelfreien Mengen nur in zirkelhafter Weise definiert werden kann, so ist sie zirkelhaft; ihrer Existenz als zirkelhafte Menge steht aber nichts im Wege, der Zirkel ist in diesem Falle erfüllbar. Wenn aber eine Menge von zirkelfreien Mengen zirkelfrei definiert werden kann, dann ist sie zirkelfrei.

Insbesondere ist die «Menge aller zirkelfreien Mengen» eine zirkelhafte Menge, da sie sonst sich selbst enthalten müßte. Es ist dies ein einfaches Beispiel einer zirkelhaften Menge, die nicht schon «in grober Weise» zirkelhaft ist. In ihrer Definition kommt auch tatsächlich der Begriff zirkelfrei vor.

Man könnte vielleicht meinen, daß sich diese Menge als «Menge aller der Mengen, in deren Definition auch kein irgendwie versteckter Zirkel enthalten ist» doch auch explizit, also in zirkelfreier Weise definieren ließe. Tatsächlich enthält aber auch diese Definition einen versteckten Zirkel, da sie auf einen solchen hinweist. In ähnlicher Weise kann man sich bekanntlich nicht vornehmen, an keinen weißen Elefanten zu denken, ohne doch an einen solchen zu denken.

56. Eine Menge von zirkelfreien Mengen ist also zirkelhaft, wenn ihre Definition notwendig den nur zirkelhaft zu erklärenden Begriff zirkelfrei enthält, wobei eine Umschreibung dieses Begriffs durch diesen selbst zu ersetzen ist. Wenn die Menge zirkelfrei ist, so muß sie sich ohne Bezugnahme auf diesen Begriff, also von ihm unabhängig definieren lassen. Diese Bedingung ist, wie sich zeigt, auch hinreichend dafür, daß die Menge als zirkelfrei betrachtet werden kann.

Dies ist allerdings nicht so zu verstehen, daß *wir* eine solche Menge stets ohne Verwendung eines Zirkels definieren könnten. Das ist schon bei der Menge aller natürlichen Zahlen und ebenso bei jeder unendlichen Menge nicht der Fall, da *wir* in diesem Falle nicht alle Elemente einzeln aufzählen können. Die zirkelfreien Mengen können aber trotzdem durch ein bloßes Aufweisen der Elemente gegeben *gedacht* werden, ohne daß dadurch ein logischer Widerspruch entsteht. Bei den zirkelhaften Mengen, deren Elemente zirkelfrei sind, ist dies nicht möglich, weil hier eben in der Definition notwendig der Begriff zirkelfrei vorkommen muß.

Daß es Systeme von Mengen gibt, die nicht durch bloßes Aufweisen dieser Mengen gegeben werden können, zeigt auch das System aller Mengen. Hier muß die Definition notwendig den Begriff alle enthalten, da sonst kein Grund vorhanden wäre, das System doch noch zu erweitern. Man vergleiche dazu Nr. 60.

57. Es fragt sich noch, wie man erkennen kann, daß der Begriff zirkelfrei in der Definition einer Menge *notwendig* vorkommen muß; eine solche Menge ist dann, auch wenn sie nur zirkelfreie Elemente besitzt, als zirkelhaft zu betrachten. Der Begriff könnte aber auch nur *scheinbar* auftreten; so ist eine Menge, welche weder ein zirkelfreies noch ein zirkelhaftes Element besitzt, die Nullmenge, also zirkelfrei.

Um zu entscheiden, ob eine Funktion $f(x)$ die Größe x, die vielleicht aus der Beziehung $x = f(x)$ bestimmt werden soll, tatsächlich oder nur scheinbar enthält, wird man x *variieren* und zusehen, ob dabei $f(x)$ immer denselben Wert ergibt oder nicht. Im letzteren Fall ist die tatsächliche Abhängigkeit der Funktion $f(x)$ von der Größe x gesichert.

In gleicher Weise kann man entscheiden, ob die Definition einer Menge tatsächlich oder nur scheinbar den Begriff zirkelfrei enthält: man läßt diesen Begriff *variieren* und sieht zu, ob man dann auf Grund der Definition immer dieselbe Menge erhält oder nicht. Im letzteren Fall ist die tatsächliche Abhängigkeit gesichert.

Das *Variieren* des Begriffs geschieht so, daß man beliebige Mengen als zirkelfrei, die andern als zirkelhaft *bezeichnet*, auch wenn dies mit der endgültigen Festsetzung nicht übereinstimmt.

Wenn *keine* Menge als zirkelfrei bezeichnet wird, dann ist die «Menge aller zirkelfreien Mengen» die Nullmenge; wenn lediglich die Nullmenge als zirkelfrei bezeichnet wird, ist es die Einsmenge, also etwas anderes. Dies zeigt, daß die gegebene Definition tatsächlich vom Begriff zirkelfrei abhängig ist.

Man kann also diese Probe ausführen, auch wenn man über die endgültige Festsetzung des Begriffs noch gar nichts weiß.

Wenn die Definition einer Menge vom Begriff zirkelfrei abhängig ist, so ist die definierte Menge noch nicht notwendig zirkelhaft; es könnte ja für dieselbe Menge noch eine andere Definition geben, die diesen Begriff nicht enthält. So ist die «Menge aller zirkelfreien leeren Mengen» die Einsmenge und also zirkelfrei, obschon die gegebene Definition nicht vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist; werden alle Mengen als zirkelhaft bezeichnet, so erhält man die Nullmenge, also etwas anderes.

Es soll also eine Menge, wie es in der «Grundlegung» S. 702 angegeben ist, dann «vom Begriff zirkelfrei unabhängig» heißen, wenn sie *so definiert werden kann*, daß die Definition immer dieselbe Menge liefert, gleichgültig, welche Mengen als zirkelfrei bezeichnet werden.

Eine gegebene nicht zirkuläre Menge *ist* dann *zirkelfrei*, wenn nicht nur sie selbst, sondern auch jede in ihr wesentliche Menge vom Begriff zirkelfrei unabhängig ist.

Daß diese Definition trotz ihrer Zirkelhaftigkeit einwandfrei ist, wurde in § 14 der «Grundlegung» gezeigt. Die vorliegenden Ausführungen dienen nur zur Erläuterung.

58. Herr Skolem fährt nun fort:

Außerdem ist die doppelte Anwendung des Begriffes zirkelfrei, einmal beliebig variierend, um die Wirkung auf Definitionen zu untersuchen, und einmal konstant oder endgültig, natürlich geeignet, zur Verwirrung zu führen. Um die Sache klar zu machen, müßte man ausdrücklich das eine Mal «variierend zirkelfrei» und das andere Mal «endgültig zirkelfrei» sagen. Tut man das aber, so scheint es, daß man zu andern Ergebnissen kommt als der Verfasser.

Es ist ein Unterschied, ob man eine Menge *endgültig* als *zirkelfrei* bezeichnet, oder ob man sie als «endgültig zirkelfrei» bezeichnet. Wenn man solche Dinge verwechselt, entsteht natürlich Verwirrung.

Die *endgültig* als zirkelfrei bezeichneten Mengen *heißen* und *sind* zirkelfrei, während die *vorläufige* bloße *Bezeichnung* variiert werden kann.

Um eine Größe x aus einer Beziehung $x = f(x)$ herzuleiten, kann man x zunächst *variieren*, bis man einen Wert findet, welcher der Beziehung genügt; dies ist dann ein *endgültiger* Wert von x.

Wenn man aber, um den Zirkel zu vermeiden oder «um die Sache klar zu machen», das «x auf der rechten Seite» mit z und das «x auf der linken Seite» mit y bezeichnet, so erhält man eine Beziehung $y = f(z)$, aus der man im allgemeinen weder y noch z bestimmen kann. Ebenso darf man auch nicht das gesuchte zirkelfrei das eine Mal durch «variierend zirkelfrei» und das andere Mal durch «endgültig zirkelfrei» ersetzen, sonst erhält man eben ein anderes oder gar kein Ergebnis.

59.

Satz 11 sagt aus, daß die Gesamtheit der zirkelfreien Mengen eine zirkelhafte Menge ist.

Genauer besagt Satz 11, daß die Menge aller zirkelfreien Mengen existiert und zirkelhaft ist, das heißt daß die entsprechende Gesamtheit eine zirkelhafte Menge *bildet*.

Es ist aber klar, daß die Gesamtheit der endgültig zirkelfreien Mengen wieder eine endgültig zirkelfreie Menge sein muß, sofern sie überhaupt eine Menge ist; denn die beliebig variierte vorläufige Verteilung der Etiketten «zirkelfrei» und «zirkelhaft» kann ja eben keinen Einfluß haben auf die Existenz der endgültig zirkelfreien Mengen.

Es ist selbstverständlich, daß die vorläufige Verteilung der Etiketten *keinen Einfluß* auf die *Existenz* irgendeiner Menge haben kann; sie kann nur dazu dienen, zu *prüfen*, ob eine bestimmt definierte Menge zirkelfrei oder zirkelhaft ist.

Es ist nun schwer zu sagen, was Herr SKOLEM mit seiner Ausdrucksweise wirklich *gemeint* hat.

Es könnte vielleicht folgendes gemeint sein: Die endgültig zirkelfreien Mengen sind vom Begriff zirkelfrei unabhängig; die beliebig variierte vorläufige Verteilung der Etiketten spielt also bei ihrer Definition gar keine Rolle, sie sind ohnedies eindeutig bestimmt. Das stimmt nun zwar für *jede einzelne* zirkelfreie Menge, und auch ihre *Gesamtheit* ist als Ganzes *eindeutig bestimmt.* Aus der eindeutigen Bestimmtheit folgt aber nicht die Zirkelfreiheit. Die Gesamtheit der zirkelfreien Mengen als Ganzes kann nicht ohne Bezugnahme auf den Begriff zirkelfrei definiert werden; die Definition ist von diesem Begriff abhängig und deshalb *zirkelhaft.* Werden *zur Prüfung* die Etiketten «zirkelfrei» und «zirkelhaft» anders verteilt, so ergibt die Definition «Gesamtheit aller zirkelfreien Mengen» auf die Etiketten bezogen *andere* Gesamtheiten, auch wenn die *endgültige* Gesamtheit eindeutig festliegt.

Ebenso ist die Definition der *Menge* aller zirkelfreien Mengen vom Begriff zirkelfrei abhängig und diese Menge ist also *zirkelhaft;* bei der *Prüfung* erhält man *verschiedene* Mengen, *endgültig* nur eine *einzige.*

Es hilft nun gar nichts, anstatt von der Gesamtheit der zirkelfreien Mengen von der «Gesamtheit der endgültig zirkelfreien Mengen» zu sprechen. Die «endgültig zirkelfreien Mengen» sind die zirkelfreien Mengen und nichts anderes; man hat genau dasselbe wie vorher.

Wenn man aber den Ausdruck «endgültig zirkelfrei» *beibehalten* und *damit* prüfen will, ob die endgültig zirkelfreien Mengen zusammen wieder eine endgültig zirkelfreie Menge bilden, dann muß man nun eben *diesen* Begriff variieren, also Mengen als «endgültig zirkelfrei» *bezeichnen,* die es in Wirklichkeit nicht sind und umgekehrt, wie man vorher Mengen vorläufig als zirkelfrei *bezeichnet* hat, die es in Wirklichkeit nicht sind und umgekehrt. Das Resultat ist wiederum dasselbe. Es kommt hier ja nicht darauf an, wie der Begriff benannt, sondern wie er definiert wird. Dies schließt allerdings nicht aus, daß es auch *schlechte Benennungen* gibt.

Wenn jedoch der Ausdruck «endgültig zirkelfrei» bedeuten soll, daß dieser Begriff *nicht variiert* werden darf und auch nicht gleich dem durch das Variieren vorher schon eindeutig bestimmten Begriff zirkelfrei gesetzt werden soll, so fragt es sich, wie er dann überhaupt zu definieren ist. Andere Definitionen können natürlich andere Resultate ergeben. Wenn Herr SKOLEM den Begriff so definiert, daß die Gesamtheit der endgültig zirkelfreien Mengen, wenn sie eine Menge bildet, wieder eine endgültig zirkelfreie Menge sein muß, dann müßte diese sich selbst enthalten und könnte also als nicht zirkuläre Menge gar nicht existieren. Dies zeigt aber nur, daß eine solche Definition *äußerst unzweckmäßig* ist.

60. Es mag auffallen, daß es Mengen oder Gesamtheiten von Mengen gibt, die nur mit Bezugnahme auf einen bestimmten logischen Begriff definiert werden können. Das ist nun aber eine Tatsache, und den Tatsachen muß man sich fügen.

Die genannte Tatsache ist wohl ungewohnt; sie findet sich aber nicht nur beim Begriff zirkelfrei, sondern schon beim Begriff alle (vgl. Nr. 56).

Wenn der Begriff Menge eindeutig definiert ist, dann ist die Gesamtheit aller Mengen eindeutig bestimmt; sie als solche abzulehnen, hat keine Berechtigung.

Man kann aber die Gesamtheit aller Mengen nicht ohne Bezugnahme auf den Begriff alle definieren, also nicht so, daß man sich etwa die Mengen, ohne daß dieser Begriff verwendet wird, einzeln vorgewiesen denkt. Andernfalls könnte man nämlich ohne Widerspruch immer noch neue Mengen finden; es wären dies also niemals alle Mengen. Wenn man aber von der Gesamtheit aller Mengen spricht und somit den Begriff alle verwendet, dann gibt es keine neue Menge mehr, denn dies wäre ein direkter Widerspruch.

Es kommt natürlich auch hier nur auf den Begriff an und nicht auf seine Benennung. Die Gesamtheit der sich nicht enthaltenden Mengen ist die Gesamtheit *aller* solcher Mengen; der Begriff alle steckt hier schon im Wort Gesamtheit. Bei der axiomatischen Darstellung liegt der Begriff alle im Vollständigkeitsaxiom.

61. Der Begriff *alle* ist ein altbekannter logischer Begriff, der für die Mathematik von größter Bedeutung ist. Wenn man nicht von *allen* natürlichen Zahlen, von *allen* reellen Zahlen, von *allen* Mengen reden darf, wird man nie zu einer sauberen Mathematik gelangen.

Der Begriff *unendlich* ist auch ein altbekannter Begriff, der von größter Wichtigkeit ist und speziell in der Mathematik seine eigentliche, streng logische Bedeutung erhält. Eine Beschränkung auf das Endliche, insbesondere auf endliche Mengen, würde den größten Teil der Mathematik ausschließen.

Der Begriff *zirkelfrei* ist nun ebenfalls ein logischer Begriff, der sich speziell auf die Mengen und damit auch auf die ganze Mathematik bezieht und vor allem für die *Begründung* der Mathematik und besonders des *Unendlichen* in der Mathematik von größter Bedeutung ist. Ohne diesen Begriff wird es nicht gelingen, die Existenz des Unendlichen und der höheren Mächtigkeiten sicherzustellen.

Es ist dies nun allerdings ein *neuer* logischer Begriff. Darf es aber in der Logik, abgesehen von den *formalen* Methoden, die ja in reichstem Maße ausgebaut worden sind, nichts wirklich *Neues* geben? Die Logik selbst ändert sich zwar nicht; unser *Wissen* von der Logik kann sich jedoch ändern. Es ist doch klar, daß man etwas Neues haben *muß*, wenn man sieht, daß die bisherigen Methoden nicht genügen, um zum Unendlichen zu gelangen, und zwar braucht man nicht nur irgend etwas willkürlich oder künstlich neu Konstruiertes, sondern etwas, das sich aus der Natur der Sache ergibt und ihr angemessen ist.

Ein wirklicher Zugang zum Unendlichen, bedeutet das nichts? Weshalb sperrt man sich dagegen?

Die Korrektheit und Brauchbarkeit eines logischen Begriffs ist unabhängig davon, daß es Menschen gibt, die ihn nicht verstehen oder nicht verstehen wollen. Ein *haltbarer Einwand* gegen den Begriff zirkelfrei ist meines Wissens *nie* erhoben worden.

Wenn man sich klar macht, was der eigentliche *Unterschied* ist zwischen den gewöhnlichen Mengen, wie sie in der Analysis und in der Geometrie dauernd gebraucht werden, und den paradoxen Mengen oder Gesamtheiten von Mengen, besonders den Gesamtheiten, denen keine Menge entspricht, dann wird man notwendig auf den Begriff zirkelfrei geführt. Weshalb läßt sich die Menge aller natürlichen Zahlen bilden, aber nicht die Menge aller Ordnungszahlen? Der Grund ist der, daß die natürlichen Zahlen sämtlich zirkelfrei sind, die Ordnungszahlen jedoch nicht. Die *endlichen* Ordnungszahlen sind zirkelfrei; die Menge der *endlichen* Ordnungszahlen läßt sich bilden und ist ebenfalls zirkelfrei, aber *nicht endlich*. Die Menge der *abzählbaren* Ordnungszahlen läßt sich bilden und ist zirkelfrei, aber *nicht abzählbar*. Es gibt noch viele weitere zirkelfreie Ordnungszahlen. Die Menge aller *zirkelfreien* Ordnungszahlen existiert ebenfalls, sie ist aber *nicht zirkelfrei*. Es folgen auf diese noch weitere nicht zirkelfreie Ordnungszahlen. Die Menge aller *existierenden* Ordnungszahlen müßte *nicht existierend* sein; diese läßt sich also nicht bilden. Daß sich die Menge aller zirkelfreien *oder zirkelhaften* Ordnungszahlen nicht bilden läßt, ist, eben wegen der Zirkelhaftigkeit dieser letzteren, nicht verwunderlich.

Wer glaubt, diesen Unterschied zwischen «gewöhnlichen» und «paradoxen» Mengen wesentlich anders erklären oder festlegen zu können, ohne jedoch brauchbare Mengen auszuschließen, der möge es versuchen. *Es geht aber nicht an*, diesen Unterschied einfach undefiniert auf sich beruhen zu lassen. Bekannte Behauptungen, wie etwa die der Nichtexistenz einer größten Mächtigkeit, gelten für zirkelfreie, aber nicht für beliebige Mengen und müssen deshalb auch entsprechend formuliert werden. Es geht aber auch nicht an, nur einige Beispiele von Mengen als nichtparadox und deshalb zulässig zu *erklären*, selbst wenn man gar nicht weiß, ob sie es wirklich *sind*.

Solange man nicht zeigen kann, daß es unendlich viele Dinge gibt, muß *jede unendliche Menge* als *paradox* erscheinen. Wenn man diese aber sämtlich ausschließt, bleibt sehr wenig übrig.

In der «Grundlegung» (S. 712) wird gezeigt, daß die Menge aller zirkelfreien Mengen eine *unendliche* Menge ist, daß es also unendliche Mengen und daher auch *unendlich viele Dinge gibt*.

62.

In der Definition der «festen» Gesamtheit S. 705 spielt der Ausdruck «innerer Widerspruch» eine wesentliche Rolle. Was heißt eigentlich das?

Die erwähnte Definition lautet so: «Unter einer *festen* Gesamtheit ist eine solche zu verstehen, die *vollständig und eindeutig und ohne inneren Widerspruch* definiert ist.»

Diese Erklärung wird dort durch *zwei Beispiele* vorbereitet, die hier wiederholt seien: «Man wird zum Beispiel die Gesamtheit aller sich nicht selbst enthaltenden Mengen als feste Gesamtheit zu bezeichnen haben, obwohl sie keine Menge bildet. Dagegen ist offenbar die Gesamtheit aller derjenigen Elemente der Einsmenge, welche mit der Menge, welche diese Gesamtheit als Elemente enthält, identisch sind, keine feste Gesamtheit, obwohl nur das eine zirkelfreie Element der Einsmenge in Frage steht.»

Das *erste Beispiel* zeigt, daß auch «paradoxe» Gesamtheiten als *feste* Gesamtheiten zu gelten haben, sofern sie nur eindeutig und widerspruchsfrei definiert sind.

Aus Axiom I folgt, daß für jede Menge M eindeutig entschieden ist, ob sie sich selbst enthält oder nicht, ob also $M \beta M$ gilt oder nicht. Im System aller Mengen ist daher die Gesamtheit der sich nicht selbst enthaltenden Mengen eindeutig und widerspruchsfrei festgelegt; es sind dies genau die Mengen M, für die $M \beta M$ nicht gilt. Diese ergeben demnach eine *feste* Gesamtheit.

Einen *Widerspruch* erhält man erst, wenn man verlangt, daß diese Gesamtheit eine *Menge* bilden müsse. Das wird hier aber nicht verlangt. Es folgt vielmehr, daß *nicht jede feste Gesamtheit* von Mengen eine *Menge* bildet.

Das *zweite Beispiel* war anscheinend für den Referenten zu schwierig; er hätte sonst bemerken müssen, daß die Definition hier einen *inneren Widerspruch* enthält.

Rein äußerlich, nach der bloßen Form der Definition, ist der Widerspruch noch nicht ersichtlich. Es wird gesagt, welche Mengen der Gesamtheit angehören sollen und welche nicht; dadurch scheint die Gesamtheit, die ja auch leer sein darf, bestimmt zu sein.

Nun enthält aber die Definition dieser Gesamtheit eine Bezugnahme auf diese Gesamtheit selbst, die zu einem in diesem Falle unerfüllbaren Zirkel und somit zu einem «inneren Widerspruch» führt. Es gibt keine Gesamtheit, welche der gegebenen Definition genügt.

Der Widerspruch ergibt sich in folgender Weise: Die Einsmenge enthält als Element lediglich die Nullmenge. Eine Gesamtheit von Elementen der Einsmenge kann also nur entweder leer oder mit der Nullmenge identisch sein; die Menge, welche diese Gesamtheit als Elemente enthält, ist dann entweder die Nullmenge oder die Einsmenge. Wäre nun die gesuchte Gesamtheit leer, so müßte sie nach der gegebenen Definition die Nullmenge enthalten, da diese ein Element der Einsmenge ist. Wäre sie aber gleich der Nullmenge, so müßte sie leer sein, weil die Einsmenge kein Element der Einsmenge ist. Beides ist also unmöglich; die Definition enthält tatsächlich einen Widerspruch.

Die gesuchte Gesamtheit ist in diesem Fall *keine feste* Gesamtheit, da sie, wenn sie leer wäre, die Nullmenge sein müßte, und wenn sie die Nullmenge wäre, leer sein müßte. Die Nullmenge wird zwar auch als «leere Menge» bezeichnet, sie ist aber keine «leere Gesamtheit».

Dieses Beispiel zeigt nun auch deutlich, daß solche Widersprüche keineswegs an den Begriff des Unendlichen oder gar des Überabzählbaren gebunden sind, sondern schon bei sehr einfachen endlichen Mengen und Gesamtheiten auftreten können, sobald man es eben mit zirkelhaften, also «nicht-prädikativen» Definitionen zu tun hat. Um die Paradoxien auszuschließen, genügt es also *nicht*, sich auf *endliche Mengen* zu beschränken; man muß vielmehr die *widerspruchsvollen Definitionen* ausschalten.

Der Ausdruck «innerer Widerspruch» findet sich übrigens schon in der Abhandlung [4] (S. 677), die der «Grundlegung» unmittelbar vorangeht, die aber Herr SKOLEM, wie schon bemerkt, offenbar nicht beachtet hat. Es wird in [4] gezeigt, daß es formal widerspruchsfreie Axiomensysteme gibt, also solche, die keinen formal feststellbaren Widerspruch enthalten, die aber trotzdem, sogar in erkennbarer Weise, widerspruchsvoll, also eben mit einem «inneren Widerspruch» behaftet sind. Darauf wurde auch in der «Grundlegung» S. 685 deutlich hingewiesen.

Daß in der Definition einer festen Gesamtheit kein äußerer, also direkt sichtbarer Widerspruch enthalten sein darf, ist selbstverständlich; die Gesamtheit wäre sonst nicht vollständig und eindeutig definiert. Auf das bei impliziten oder «nicht-prädikativen» Definitionen mögliche Vorkommen von inneren Widersprüchen mußte aber besonders hingewiesen werden, weil hier der *Anschein* erweckt werden kann, die gesuchte Gesamtheit sei eindeutig bestimmt.

Im übrigen ist hier aber die Unterscheidung von inneren und äußeren Widersprüchen nicht von besonderer Wichtigkeit. Dies ergibt sich auch aus der zusätzlichen Bemerkung: «An die Stelle des ZERMELOschen Begriffs ‚definit' tritt also hier der Begriff *fest* oder *widerspruchsfrei*.» Weiter heißt es: «Eine feste Gesamtheit von Mengen ist identisch mit der Gesamtheit der Mengen eines Systems (§ 7).» In § 7 heißt es von den Teilsystemen von Σ: «Ein solches ist stets vollständig bestimmt, wenn von jeder Menge eindeutig entschieden ist, ob sie ihm angehört oder nicht.»

Damit dürfte genügend klargelegt sein, was unter einer «festen Gesamtheit» zu verstehen ist.

63. E. ZERMELO nennt in [17], S. 263, eine Aussage *definit*, wenn «über deren Gültigkeit oder Ungültigkeit die Grundbeziehungen des Bereiches vermöge der Axiome und der allgemeingültigen logischen Gesetze ohne Willkür entscheiden».

Diese Erklärung wird gelegentlich als «zu unscharf» abgelehnt. Eine Ablehnung ist insofern gerechtfertigt, als die Erklärung keinen Sinn hat, solange man nicht weiß, ob sich aus den Axiomen nicht ein Widerspruch ergibt. Dies wird aber bei ZERMELO nicht gezeigt.

Meistens wird jedoch die Schwierigkeit bei den «allgemeingültigen logischen Gesetzen» gesucht. Solange man die Logik mit Antinomien belastet, ist das begreiflich. Anstatt aber nun die Antinomien aufzuklären und eine absolute Logik anzuerkennen, die eo ipso widerspruchsfrei ist, hat man spezielle «logische Gesetze» ausgesucht, von denen man *annimmt*, sie *seien* widerspruchsfrei, und hat dies wohl auch in besonderen Fällen zu beweisen versucht, wobei aber solche «Beweise» *ohne absolute Logik* doch wohl äußerst prekär sind.

Der Begriff «definit» wird dann durch einen derart engen Begriff ersetzt, daß von den Teilmengen einer unendlichen Menge nur noch die wenigsten übrigbleiben, nämlich tatsächlich höchstens nur abzählbar viele. Diese Gesamtheit wird dann aber trotzdem in einem übertragenen Sinn als «überabzählbar» *bezeichnet!*

So läßt sich dann die ganze «formale Mengenlehre» in einem nur abzählbaren Bereich «realisieren», der also von den tatsächlichen Mengen mit ihren höheren Mächtigkeiten so gut wie nichts enthält. Aber auch von diesem winzigen Bruchstück wird nicht gezeigt, daß es widerspruchsfrei ist.

Warum läßt man nicht *alle* Teilmengen einer Menge zu, soweit sie nicht widerspruchsvoll definiert sind? Schon die Teilmengen der natürlichen Zahlenreihe ergeben dann ein *tatsächlich* überzählbares System, das also *unendlich* viel mehr enthält als die ganze künstliche Pseudo-Mengenlehre!

Wenn man aber solche Beschränkungen vornimmt, wie steht es dann mit der *Erfüllbarkeit des* HILBERT*schen Vollständigkeitsaxioms in der Geometrie? Hat hier nun also* HILBERT *plötzlich unrecht?* Wie kann man dann noch von der ebenen oder der räumlichen euklidischen Geometrie reden, ohne, um Eindeutigkeit zu erhalten, jedesmal hinzuzufügen, welche willkürlich eingeschränkte man gerade meint?

64.

In § 17 wird das Auswahlprinzip «bewiesen» durch die Berufung auf Einführbarkeit ohne Widerspruch. Alles geht also sehr leicht.

In der Tat läßt sich ein Tresor sehr viel leichter öffnen, wenn man den richtigen Schlüssel benutzt, als wenn man es mit Stemmeisen versucht.

Gar so leicht habe ich es mir aber nicht gemacht, sonst wäre ich freilich nicht durchgekommen. Ich habe mir immerhin die Mühe genommen, *zuerst* die Antinomien *richtig* zu lösen und *dann* die *volle* Mengenlehre, das heißt die Lehre von den *reinen* Mengen, aufzubauen.

Wenn man genau weiß, wo der Feind steht, dann kann man ihn an dieser Stelle erledigen und braucht ihn an andern Stellen nicht zu fürchten.

In § 17 wird tatsächlich gezeigt, daß die Bildung einer Auswahlmenge *im Bereich der zirkelfreien Mengen* mit keinem Zirkel verknüpft und *deshalb* unter den gegebenen Voraussetzungen immer möglich ist. Das ZERMELOsche Auswahl*axiom*, welches die Existenz einer Auswahl*menge* postuliert, ist hier also *erfüllt*. Im Bereich *aller* Mengen ist es aber, wie man an einem Beispiel (vgl. [9] S. 173) sehen kann, *falsch*, da die «ausgewählten» Elemente nicht immer eine Menge zu bilden brauchen.

65.

FINSLERS Arbeit ist natürlich ein wohlgemeinter Versuch, die klassische Mengenlehre in ihrem vollen Umfange zu retten. Man muß aber wohl sagen, daß der Versuch verfehlt ist.

Dies letztere dürfte wohl nicht stimmen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] R. BAER: *Über ein Vollständigkeitsaxiom in der Mengenlehre.* Math. Zeitschrift 27 (1928) 536–539.

[2] R. BAER: *Bemerkungen zu der Erwiderung von Herrn P. Finsler.* Math. Zeitschrift 27 (1928) 543.

[3] P. FINSLER: *Gibt es Widersprüche in der Mathematik?* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 34 (1926) 143–155.

[4] P. FINSLER: *Formale Beweise und die Entscheidbarkeit.* Math. Zeitschrift 25 (1926) 676–682.

[5] P. FINSLER: *Über die Grundlegung der Mengenlehre. Erster Teil. Die Mengen und ihre Axiome.* Math. Zeitschrift 25 (1926) 683–713 («Grundlegung»).

[6] P. FINSLER: *Über die Grundlegung der Mathematik.* Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 36 (1927) *18.*

[7] P. FINSLER: *Erwiderung auf die vorstehende Note des Herrn R. Baer.* Math. Zeitschrift 27 (1928) 540–542 («Erwiderung»).

[8] P. FINSLER: *Die Existenz der Zahlenreihe und des Kontinuums.* Comm. Math. Helv. 5 (1933) 88–94.

[9] P. FINSLER: *A propos de la discussion sur les fondements des mathématiques.* Les entretiens de Zurich sur les fondements et la méthode des sciences mathématiques, 6–9 décembre 1938, (1941) 162–180.

[10] P. FINSLER: *Gibt es unentscheidbare Sätze?* Comm. Math. Helv. 16 (1944) 310–320.

[11] P. FINSLER: *Die Unendlichkeit der Zahlenreihe.* Elemente der Mathematik 9 (1954) 29–35.

[12] A. FRAENKEL: *Einleitung in die Mengenlehre.* Berlin. 2. Aufl. (1923), 3. Aufl. (1928).

[13] A. FRAENKEL: *Referate* im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 54, Jahrgang 1928 (1932) 90.

[14] G. FREGE: *Die Grundlagen der Arithmetik.* Breslau (1884).

[15] TH. SKOLEM: *Referat* im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 52, Jahrgang 1926 (1935) 192–193.

[16] H. WEYL: *Mathematics and Logic.* The American Mathematical Monthly 53 (1946) 2–13.

[17] E. ZERMELO: *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I.* Math. Annalen 65 (1908) 261–281.

(Eingegangen den 21. Mai 1963)