Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 38 (1963-1964)

Artikel: Invariante Funktionen über teilgeordneten algebraischen Halbstrukturen.

Autor: Rätz, Jürg

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-29439

Invariante Funktionen über teilgeordneten algebraischen Halbstrukturen

von JÜRG RÄTZ in Bern

Meinem verehrten Lehrer Herrn Prof. Dr. W. SCHERRER zum 70. Geburtstag gewidmet

Einleitung

Im Anschluß an ein Seminar über Integrationstheorie, welches im Sommersemester 1951 an der Universität Bern stattfand, wurden von H. HADWIGER, W. NEF und A. KIRSCH Untersuchungen zur invarianten Inhalts- und Integrationstheorie vorgenommen[1]). Dabei ist zwischen einigen inhaltstheoretischen und gewissen integrationstheoretischen Studien eine auffallend große methodische Ähnlichkeit zu bemerken. H. HADWIGER hat nun in einem Kolloquium über geordnete Strukturen, welches im Wintersemester 1958/59 im Mathematischen Seminar der Universität Bern abgehalten wurde, die Untersuchung einer Struktur angeregt, die er dort ein «Gefüge» nannte und die es gestattet, Inhaltstheorie und Integrationstheorie in einem allgemeineren Lichte zu sehen und vor denselben abstrakten Hintergrund zu stellen. Es ist das Ziel der vorliegenden Arbeit, einige Sätze der Theorie der Gefüge herzuleiten, deren Korollarien in den beiden genannten Theorien wichtigste Stützen bilden. Damit ist eine Theorie gewonnen, welche die Inhalts- und die Integrationstheorie als Spezialfälle enthält. Geeignete Beispiele lehren aber, daß das vorliegende Modell noch ganz andersartiger Deutungen fähig ist, und darin dürfte vor allem die Neuartigkeit bestehen.

Unser Vorgehen kann insofern als elementar bezeichnet werden, als es mit elementaren Begriffen operiert und im wesentlichen nur die Kenntnis der einfacheren Analysis der reellen Zahlen voraussetzt. An einer einzigen Stelle kommt eine auf dem Auswahlaxiom fußende Schlußweise vor.

Bekanntlich haben sich in neuerer Zeit zwei Richtungen in der abstrakten Inhaltstheorie abgezeichnet, nämlich die invarianzlos-verbandstheoretische und die invariante Theorie[2]). Unsere Ausführungen sind ganz der zweiten ver-

---

[1]) Vgl. [1] bis [12]. Zahlen in eckigen Klammern sollen stets auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit verweisen.

[2]) Vgl. etwa H. HADWIGER [13], p. 133/4. Für die erstgenannte Richtung verweisen wir auf P. R. HALMOS [20], K. MAYRHOFER [21], O. HAUPT – G. AUMANN – C. PAUC [22], C. CARATHEODORY [23], G. BIRKHOFF [24] und für weitergehende Verallgemeinerungen V. GLIVENKO [25] und KY FAN [26].

bunden und folgen im großen den bekannten grundlegenden Ideen von S. BANACH [14] und A. TARSKI [15, 16], die seit ihrem Bestehen schon in mannigfacher Weise benützt wurden[3]).

Zum Aufbau der Arbeit: Im ersten Kapitel stellen wir die benötigten Hilfsbegriffe und Bezeichnungen und im zweiten den Begriff des Gefüges bereit, während die hauptsächliche Entwicklung im dritten Kapitel untergebracht ist. Das vierte Kapitel enthält einige Beispiele zur Theorie der Gefüge. Da die Paragraphen 12 und 19 die Zusammenstellung der Hauptergebnisse umfassen, kann hier auf eine solche verzichtet werden.

An dieser Stelle möchte ich den Herren Professoren HADWIGER und NEF herzlich danken für alle Förderungen, die mir zur Abfassung dieser Arbeit von ihnen zuteil wurden, sei es im kritischen Gespräch oder durch die Lektüre der von ihnen publizierten Arbeiten auf diesem Gebiete der Mathematik. Besonders danke ich aber Herrn Professor HADWIGER für die Anregung zu dieser Untersuchung überhaupt.

1. Kapitel: Hilfsbegriffe und Bezeichnungen

§ 1. Ordnungs- und Äquivalenzrelationen

Ist Z eine Menge von Elementen $x, y, z, \ldots$ beliebiger Natur, so können einer zweistelligen Relation R in Z unter anderem folgende Eigenschaften zukommen, wobei die nachfolgenden Formelzeilen stets für alle in Betracht fallenden Elemente von Z Gültigkeit besitzen sollen:

(R1) $x R x$ *(Reflexivität)*
(R2) $x R y,\ y R z \Longrightarrow x R z$ *(Transitivität)*
(R3) $x R y,\ y R x \Longrightarrow x = y$ *(Antisymmetrie)*
(R4) $x, y \in Z \Longrightarrow x R y$ und/oder $y R x$ *(Vergleichbarkeit)*
(R5) $x R y \Longrightarrow y R x$ *(Symmetrie)*

Im Anschluß an diese Eigenschaften legen wir fest:

Def. 1.1: *Eine zweistellige Relation R in der Menge Z heißt*

a) *Quasiordnung, wenn sie* (R1), (R2) *erfüllt,*
b) *Teilordnung, wenn sie* (R1), (R2), (R3) *erfüllt,*
c) *Totalordnung, wenn sie* (R1), (R2), (R3), (R4) *erfüllt,*
d) *Äquivalenz, wenn sie* (R1), (R2), (R5) *erfüllt.*

[3]) Vgl. etwa H. HAHN [17], S. BANACH [18], J. v. NEUMANN [19] sowie einige der Arbeiten [1] bis [13].

Die Menge Z *heißt dann durch die Relation* R a) *quasigeordnet,* b) *teilgeordnet,* c) *totalgeordnet. Relationen der Typen* a), b), c) *nennen wir fortan Ordnungsrelationen.*

Die Ordnungsrelationen heben sich i.a. von den Äquivalenzrelationen durch das Fehlen der Symmetrieeigenschaft (R 5) ab. Dies bringen wir in der Bezeichnung dadurch zum Ausdruck, daß wir für Ordnungsrelationen das Zeichen $\leqslant$, für Äquivalenzrelationen dagegen das Zeichen $\sim$ (oder Abarten derselben) verwenden. Bekanntlich induziert jede Äquivalenzrelation $\sim$ in der Menge Z eine Partition von Z in disjunkte Klassen, die sogenannten *Äquivalenzklassen* ($\sim$-Klassen).

Def. 1.2: *Eine Äquivalenzrelation* $\sim$ *und eine Quasiordnungsrelation* $\leqslant$ *in der Menge* Z *heißen verträglich, wenn stets gilt:*

$$x \leqslant y, \; x' \sim x, \; y' \sim y \Longrightarrow x' \leqslant y' .$$

Mühelos beweist man nun den nachfolgenden

Satz 1.3: *Ist die Menge* Z *durch die Relation* $\leqslant$ *quasigeordnet, so gilt:* a) *Die durch* $x \sim y \Longleftrightarrow x \leqslant y, \; y \leqslant x$ *erklärte Relation* $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation in* Z. b) $\sim$ *und* $\leqslant$ *sind verträglich.*

Sei nun W eine Teilmenge von Z und R_Z eine zweistellige Relation in Z. Sind $x, y \in W$ und setzt man $x R_W y \Longleftrightarrow x R_Z y$, so ist R_W eine zweistellige Relation in W, und es ist leicht festzustellen, daß sich die Gültigkeit von (R 1) bis (R 5) von R_Z auf R_W vererbt. So ergibt sich eine natürliche Möglichkeit, der Teilmenge W eine Relation R_W aufzuprägen. Wo wir nichts Gegenteiliges bemerken, sollen Teilmengen stets diese Relation aufweisen.

Den letzten Teil des Paragraphen widmen wir der Theorie der teilgeordneten Mengen. Schon zu Beginn sei an das hier gültige *Dualitätsprinzip* erinnert[4]).

Def. 1.4: Z *sei eine durch* $\leqslant$ *teilgeordnete Menge. Dann heißt*

a) $x \in Z$ *maximales Element von* Z, *wenn gilt:* $y \in Z, \; x \leqslant y \Longrightarrow x = y$;

b) $x \in Z$ *kleinstes Element von* Z, *wenn gilt:* $x \leqslant y$ *für alle* $y \in Z$;

c) $x \in Z$ *obere Schranke von* $W (\subset Z)$, *wenn gilt:* $y \leqslant x$ *für alle* $y \in W$;

d) *die kleinste obere Schranke von* $W (\subset Z)$ *das Supremum von* W;

e) *eine totalgeordnete Teilmenge* W *von* Z *eine Kette von* Z.

Es ist klar, wie die dualen Begriffe (minimales und größtes Element, untere Schranke, Infimum) erklärt werden müssen. Elemente der genannten Art brauchen nicht zu existieren. Existiert aber ein kleinstes (größtes) Element, so ist dieses im Hinblick auf (R 3) eindeutig bestimmt, und es rechtfertigt sich die Schreibweise *sup* W (*inf* W) für das Supremum (Infimum) von W.

---

[4]) Vgl. etwa H. Hermes [27], p. 7.

Schließlich erwähnen wir das mit dem Auswahlaxiom gleichwertige

Zornsche Lemma: *Besitzt jede nichtleere Kette einer nichtleeren teilgeordneten Menge Z ein Supremum in Z, dann gibt es mindestens ein maximales Element in Z.*[5])

In der Betrachtung der teilgeordneten Mengen ist der Begriff des *Abschließungsprozesses* von großem Nutzen für eine einfache Sprechweise:

Def. 1.5: *Ist Z eine durch $\leqslant$ teilgeordnete Menge, so heißt eine Abbildung Φ von Z in sich ein Abschließungsoperator in Z, wenn für alle Elemente von Z gilt:*

(C1) $x \leqslant \Phi x$ *(Extensivität)*
(C2) $\Phi\Phi x \leqslant \Phi x$ *(Idempotenz)*
(C3) $x \leqslant y \Longrightarrow \Phi x \leqslant \Phi y$ *(Isotonie)*

Ein Element $x \in Z$ heißt Φ-abgeschlossen, wenn $\Phi x = x$.

Aus (C1), (C2) und (R3) ergibt sich $\Phi\Phi x = \Phi x$, das heißt die Φ-Abgeschlossenheit von Φx. Ebenso leicht folgt:

Satz 1.6: *Φx ist das kleinste Φ-abgeschlossene Element, das größer ist als x, genauer: das kleinste Element der Menge $\{y \mid \Phi y = y, x \leqslant y\}$.*

§ 2. Pseudometrik und Metrik

Es sei Z wiederum eine Menge von Elementen $x, y, z, \ldots$ beliebiger Natur. Hier studieren wir reellwertige Funktionen d über $Z \times Z$, denen unter anderem die folgenden Eigenschaften zukommen können (die nachfolgenden Formelzeilen gelten für alle Elemente von Z):

(M1) $d(x, x) = 0$
(M2) $d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$
(M3) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$
(M4) $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(y, z)$
(M5) $d(x, y) = d(y, x)$
(M6) $d(x, y) \geqslant 0$

Durch einfache Überlegungen wird ersichtlich, daß die Postulatensysteme {(M1), (M4)} und {(M1), (M3), (M5)} gleichwertig sind und alle genannten Eigenschaften außer (M2) nach sich ziehen. Hingegen ist {(M1), (M3)} echt schwächer als {(M1), (M4)}[6]). In diesem Sinne nennen wir (M4) die *starke*,

---

[5]) Vgl. H. Hermes [27], p. 136ff.

[6]) Um dies einzusehen, wähle man $Z = [0, 1]$; $d(x, y) = x - y\ [x \geqslant y]$; $d(x, y) = 1\ [x < y]$. Vgl. P. Alexandroff – H. Hopf [28], p. 29.

(M 3) die *schwache Dreiecksungleichung*. Im Anschluß an die obige Liste setzen wir fest:

Def. 2.1: [7]) *Jede reellwertige Funktion* d *über* $Z \times Z$, *die einem der Postulatensysteme* $\{(M1), (M4)\}$ *oder* $\{(M1), (M3), (M5)\}$ *genügt, heißt eine Pseudometrik auf* Z. *Ist außerdem* (M2) *erfüllt, so heißt* d *eine Metrik auf* Z. *Die Menge* Z *heißt durch die Funktion* d *pseudometrisiert beziehungsweise metrisiert oder bezüglich* d *ein pseudometrischer beziehungsweise metrischer Raum.*

Durch die nächste Aussage verbinden wir die bisherigen Ausführungen unseres Paragraphen mit denjenigen des vorigen:

Satz 2.2: *Ist* d *eine Pseudometrik auf der Menge* Z, *so wird durch die Setzung* $x \sim y \Longleftrightarrow d(x, y) = 0$ *eine Äquivalenzrelation* $\sim$ *in* Z *definiert.*

Der Beweis darf seiner Einfachheit wegen übergangen werden.

§ 3. Bezeichnungen

In Anbetracht der Tatsache, daß in § 1 Entwicklungen angebahnt wurden, auf die mehrfach und in gänzlich verschiedener Weise zurückgegriffen werden wird, verwendeten wir bisher eine in bezug auf die nun festzulegende Bezeichnungsart völlig neutrale Symbolik. Für das Nachstehende erweist sich dies nicht mehr als nötig, und wir bezeichnen fortan wie folgt (die genannten Begriffe werden zu gegebener Zeit weiter unten erklärt werden):

$\mathfrak{M}$: Grundmenge mit den Elementen A, B, C, D, E, O und den Teilmengen (insbesondere invariante Felder) $\mathfrak{E}, \mathfrak{F}, \mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{N}, \mathfrak{S}, \mathfrak{T}$.

$*$: Halbverknüpfung auf $\mathfrak{M}$.

Γ: Kommutative Gruppe eineindeutiger Abbildungen von $\mathfrak{M}$ auf sich mit den Transformationen σ, τ, ξ, η und den Γ-Komplexen $\Delta, \Theta, \mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \Pi, \mathrm{P}, \mathrm{T}, \Omega, \mathrm{I}_n$. ι bezeichne das neutrale Element von Γ.

$\mathfrak{B}$: Menge der Belegungen f, g, h, i, o über $\mathfrak{M}$.

a, b, c, d, ε: reelle Zahlen (ε wird im üblichen Sinne verwendet).

$k, l, m, n, p, q, r, s, t$: nichtnegative ganze Zahlen.

$\mathbf{R}$: Menge der reellen Zahlen. $\mathbf{U}, \mathbf{V}$: Teilmengen von $\mathbf{R}$.

$\varkappa, \lambda, \mu, \nu, \pi, \varrho$: Indices.

$\varphi, \chi, \psi, \omega$: invariante Funktionen.

$\square$: Gefüge.

$\oplus$: Menge von invarianten Systemen $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$.

---

[7]) Vielerorts finden sich in dieser Definition unnötige Postulate wie z.B. (M 6). Unseres Wissens hat A. Lindenbaum [29], p. 211, erstmals ein minimales Postulatensystem für die Metrik aufgestellt. Vgl. auch G. Aumann [30], p. 83.

§ 4. Der Begriff der algebraischen Halbstruktur

Def. 4.1: *Eine Halbverknüpfung* $*$ *auf einer Grundmenge* $\mathfrak{M}$ *ist eine eindeutige Abbildung einer gewissen Teilmenge* $\mathfrak{D}$ *von* $\mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$ *in* $\mathfrak{M}$. *Zwei Elemente* $A, B \in \mathfrak{M}$ *heißen in dieser Reihenfolge verknüpfbar, in Zeichen* $A * B$ *def, wenn das Paar* (A, B) *zu* $\mathfrak{D}$ *gehört;* $A * B$ *heißt das dabei resultierende Element.*

Ist insbesondere $\mathfrak{D} = \mathfrak{M} \times \mathfrak{M}$, so ist $*$ eine *Verknüpfung* auf $\mathfrak{M}$. Die durch die Definition 4.1 realisierte Verallgemeinerung besteht also im Verzicht auf die allgemeine Ausführbarkeit der Verknüpfung.

Def. 4.2: *Eine algebraische Halbstruktur* $\langle \mathfrak{M}; *_1, \ldots, *_n \rangle$ *besteht aus der Grundmenge* $\mathfrak{M}$ *und den Halbverknüpfungen* $*_1, \ldots, *_n$ *auf* $\mathfrak{M}$.

§ 5. Die Transformationsgruppe

Dadurch, daß wir eine Gruppe von Transformationen einer Grundmenge in Betracht ziehen und die Invarianz gewisser Funktionen gegenüber jenen Transformationen fordern, verpflichten wir uns der invarianten Richtung im Sinne der Einleitung.

Wir beschränken uns in der vorliegenden Arbeit auf kommutative Transformationsgruppen. Es zeigt sich, daß allein dadurch noch keine Garantie für eine positive Beantwortung der Existenzfrage gegeben ist, wie dies an anderen Orten der Fall ist[8]). Die Kommutativität wird an entscheidenden Stellen der Theorie wichtige Schlüsse gestatten.

Sei nun Γ eine kommutative Gruppe eineindeutiger Abbildungen einer Grundmenge $\mathfrak{M}$ auf sich und ι das neutrale Element von Γ. Es bezeichne σA das σ-Bild des Elementes $A \in \mathfrak{M}$. A und σA nennen wir Γ-*gleich*, in Zeichen $A \cong \sigma A$. Selbstverständlich ist die Γ-Gleichheit $\cong$ eine Äquivalenzrelation in $\mathfrak{M}$.

Der folgende Hilfsbegriff dient hauptsächlich beweistechnischen Zwecken: Ist jedem Index ν einer endlichen nichtleeren Indexmenge $\{1, \ldots, n\}$ eindeutig eine Transformation $\tau_\nu \in \Gamma$ zugeordnet, so ist dadurch ein Γ-*Komplex* $\mathsf{N} = [\tau_1, \ldots, \tau_n]$ gegeben. Die Mächtigkeit der Indexmenge soll *Mächtigkeit* $|\mathsf{N}|$ *des* Γ-*Komplexes* N *heißen*, so daß in unserem Falle also $|\mathsf{N}| = n$ gilt. Ergänzend definieren wir den *leeren* Γ-*Komplex* Θ als die leere Teilmenge von Γ; $|\Theta| = 0$. Für eine natürliche Zahl n sei speziell $\mathsf{I}_n = [\tau_\nu = \iota \mid \nu = 1, \ldots, n]$; die Mächtigkeit ist somit direkt als Index angeschrieben. Da bei der Bildung eines Γ-Komplexes verschiedenen Indices dieselbe Transformation zugeordnet

[8]) Vgl. [1], p. 351; [4], Satz 5, p. 316; [6], Satz 6.10, p. 221; unser § 24 enthält ein entsprechendes Gegenbeispiel.

sein kann, braucht $[\tau_1, \ldots, \tau_n]$ keine Menge im üblichen Sinne zu sein, weshalb wir eckige statt geschweifter Klammern verwenden und in Anlehnung an analoge Situationen «Komplex» sagen[9]). Für Θ ist die Unterscheidung zwischen Menge und Komplex unerheblich. Ein Γ-Komplex ist somit eindeutig dadurch charakterisiert, daß gesagt ist, welche Transformationen mit welchen Vielfachheiten in ihm enthalten sind. Demgemäß heißen zwei Γ-Komplexe M, N *gleich*, in Zeichen $\mathsf{M} = \mathsf{N}$, wenn sie dieselben Transformationen mit denselben Vielfachheiten enthalten. Ist $\mathsf{N} = [\tau_1, \ldots, \tau_n]$ und $\sigma \in \Gamma$, so bezeichne $\sigma\mathsf{N}$ den Γ-Komplex $[\sigma\tau_1, \ldots, \sigma\tau_n]$. Ausgehend von zwei Γ-Komplexen $\mathsf{M} = [\sigma_1, \ldots, \sigma_m]$, $\mathsf{N} = [\tau_1, \ldots, \tau_n]$ erklären wir noch folgende Bildungen:

a) $\mathsf{M} \wedge \mathsf{N}$ ist der größte gemeinsame Γ-Komplex von M und N; er umfaßt die gemeinsamen Transformationen von M und N in der kleineren der beiden Vielfachheiten.

b) $\mathsf{M} + \mathsf{N} = [\sigma_1, \ldots, \sigma_m, \tau_1, \ldots, \tau_n]$; $\mathsf{M} + \Theta = \mathsf{M}$.

c) $\mathsf{M} \cdot \mathsf{N} = [\tau_1\sigma_1, \ldots, \tau_1\sigma_m, \ldots, \tau_n\sigma_1, \ldots, \tau_n\sigma_m]$; $\mathsf{M} \cdot \Theta = \Theta$.

Man verifiziert leicht, daß die soeben definierten Operationen $+$ und $\cdot$ assoziativ und kommutativ und in ihrer Verbindung distributiv sind; insbesondere ist

$$\mathsf{M} \cdot \mathsf{N} = \mathsf{N} \cdot \mathsf{M} \tag{1}$$

eine Folge der Kommutativität von Γ. Außerdem gilt für die Mächtigkeiten:

$$|\mathsf{M} + \mathsf{N}| = |\mathsf{M}| + |\mathsf{N}|, \tag{2}$$

$$|\mathsf{M} \cdot \mathsf{N}| = |\mathsf{M}| \cdot |\mathsf{N}|. \tag{3}$$

§ 6. Der Begriff der Belegung

Def. 6.1: *Eine Belegung f über einer Grundmenge $\mathfrak{M}$ ist eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}$ in die Menge der nichtnegativen ganzen Zahlen, die aber für höchstens endlich viele $A \in \mathfrak{M}$ nicht verschwindet. Spezielle Belegungen sind: Nullbelegung o mit $o(A) = 0$ [alle $A \in \mathfrak{M}$] und Charakteristik i_A von $A \in \mathfrak{M}$ mit $i_A(D) = 1$ $[D = A]$, $i_A(D) = 0$ $[D \neq A]$. Zwei Belegungen f, g über $\mathfrak{M}$ heißen gleich, in Zeichen $f = g$, wenn $f(A) = g(A)$ [alle $A \in \mathfrak{M}$].*

Auf ganz natürliche Weise läßt sich in der Menge $\mathfrak{B}$ der Belegungen über $\mathfrak{M}$ eine Addition einführen:

$$(f + g)(A) = f(A) + g(A) \quad [\text{alle } A \in \mathfrak{M}]. \tag{4}$$

Offensichtlich ist $\mathfrak{B}$ bezüglich dieser Addition eine kommutative Halbgruppe

---

[9]) Vgl. etwa E. Kamke [31], p. 45.

mit dem neutralen Element o. Mit Rücksicht auf die Gültigkeit der Beziehung

$$f = \sum_{A \in \mathfrak{M}} f(A) i_A \tag{5}$$

kann diese Halbgruppe durch die Menge $\{o, i_A \mid A \in \mathfrak{M}\}$ erzeugt werden. Nach der Definition 6.1 ist die in (5) auftretende Summe endlich; fortan wird die Summationsklausel $A \in \mathfrak{M}$ meistens weggelassen.

Nach diesen einleitenden Bemerkungen und im Anschluß an § 5 ziehen wir nun eine kommutative Gruppe eineindeutiger Abbildungen der Grundmenge $\mathfrak{M}$ auf sich in Betracht und beschreiben deren Wirkung auf die Belegungen über $\mathfrak{M}$ wie folgt: Für jede Belegung $f \in \mathfrak{B}$ und jede Transformation $\tau \in \Gamma$ gelte:

$$f^\tau : A \to f(\tau^{-1}A) \quad [\textit{alle } A \in \mathfrak{M}] . \tag{6}$$

Durch einfachste Überlegungen überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Aussagen:

$$f \in \mathfrak{B},\ \tau \in \Gamma \implies f^\tau \in \mathfrak{B} , \tag{7}$$

$$\tau \in \Gamma \implies o^\tau = o , \tag{8}$$

$$A \in \mathfrak{M},\ \tau \in \Gamma \implies i_A^\tau = i_{\tau A} , \tag{9}$$

$$f, g \in \mathfrak{B};\ \tau \in \Gamma \implies (f + g)^\tau = f^\tau + g^\tau . \tag{10}$$

Simultane Wirkung der Addition und der Gruppe Γ in $\mathfrak{B}$ führt zu einem weiteren nützlichen Hilfsbegriff:

Def. 6.2: *Ist* N *ein* Γ*-Komplex und* f *eine Belegung über* $\mathfrak{M}$, *so heißt die Bildung*

$$\mathsf{N} \cdot f = \begin{cases} f^{\tau_1} + \dots + f^{\tau_n}, & \text{falls } \mathsf{N} = [\tau_1, \dots, \tau_n] , \\ o , & \text{falls } \mathsf{N} = \Theta \end{cases} \tag{11}$$

die Vervielfachung von f *mit dem* Γ*-Komplex* N.

Für $\mathsf{I}_n \cdot f$ schreiben wir in naheliegender Weise auch nf. Offenbar gelten die folgenden Beziehungen:

$$f \in \mathfrak{B} \implies \mathsf{N} \cdot f \in \mathfrak{B} \tag{12}$$

$$f, g \in \mathfrak{B} \implies \mathsf{N} \cdot (f + g) = \mathsf{N} \cdot f + \mathsf{N} \cdot g \tag{13}$$

$$f \in \mathfrak{B} \implies (\mathsf{M} + \mathsf{N}) \cdot f = \mathsf{M} \cdot f + \mathsf{N} \cdot f \tag{14}$$

Die Iteration des Vervielfachungsprozesses führt auf die in § 5 definierte Komplexmultiplikation: Sind $\mathsf{M} = [\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ und $\mathsf{N} = [\tau_1, \dots, \tau_n]$ zwei Γ-Komplexe, so gilt im Hinblick auf (1):

$$\mathsf{M} \cdot (\mathsf{N} \cdot f) = \sum_{\mu=1}^{m} \sum_{\nu=1}^{n} f^{\tau_\nu \sigma_\mu} = (\mathsf{M} \cdot \mathsf{N}) \cdot f = (\mathsf{N} \cdot \mathsf{M}) \cdot f = \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{\mu=1}^{m} f^{\sigma_\mu \tau_\nu} = \mathsf{N} \cdot (\mathsf{M} \cdot f) \tag{15}$$

Künftighin können also solche Klammern ohne Einbuße an Klarheit weggelassen werden.

2. Kapitel: Der Begriff des Gefüges

In diesem Kapitel befassen wir uns mit einer Konzeption, die geeignet erscheint, eine Theorie über invariante Funktionen zu algebraisieren. Der algebraische Standpunkt ist hier insofern hervorgehoben, als daß keine Voraussetzungen metrischer oder topologischer Art von vorneherein gemacht werden. Spätere Ausführungen lassen aber erkennen, daß unter Ausnützung der algebraischen Situation eine Pseudometrik gewonnen werden kann (§ 10).

§ 7. Die Postulate des Gefüges

$\langle \mathfrak{M}, * \rangle$ sei eine algebraische Halbstruktur, Γ eine kommutative Gruppe eineindeutiger Abbildungen von $\mathfrak{M}$ auf sich (bezüglich der Komposition) und $\lesssim$ eine zweistellige Relation in der Menge der Belegungen über $\mathfrak{M}$. Durch Zusammenfassung dieser Grundgegebenheiten entsteht ein *Gefüge* $\langle \mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim \rangle$, wenn folgende Postulate erfüllt sind[10]):

(I) $A * B \; def \Longrightarrow B * A \; def$

(II) $A * B, \; A * C, \; B * C \; def \Longleftrightarrow (A * B) * C \; def$

(III) $\exists \; O \in \mathfrak{M} \;\; mit \;\; A * O \; def, \; A * O = A \; [alle \; A \in \mathfrak{M}]$

(IV) $f \lesssim f; \; f \lesssim g, \; g \lesssim h \Longrightarrow f \lesssim h$

(V) $i_A \lesssim i_B, \; i_B \lesssim i_A \Longrightarrow i_A = i_B$

(VI) $f \lesssim g, \; f' \lesssim g' \Longrightarrow f + f' \lesssim g + g'$

(VII) $f + f' \lesssim g + g', \; g \lesssim f \Longrightarrow f' \lesssim g'$

(VIII) $A * B \; def \Longrightarrow i_{A * B} \lesssim i_A + i_B \lesssim i_{A * B}$

(IX) $f \lesssim g, \; \tau \in \Gamma \Longrightarrow f^\tau \lesssim g^\tau$

(X) $A * B \; def, \; \tau \in \Gamma \Longrightarrow \tau A * \tau B \; def$

Ein kurzes Wort zu einigen Postulaten: (III) besagt die Existenz eines neutralen Elementes O in der Halbstruktur $\langle \mathfrak{M}, * \rangle$. Nach (IV) ist die Menge $\mathfrak{B}$ der Belegungen durch $\lesssim$ quasigeordnet und die Menge der Charakteristiken i_A im Hinblick auf (V) teilgeordnet. Die drei letzten Postulate sind Verträglichkeitsforderungen zwischen $*$, Γ und $\lesssim$. Im übrigen ist es das Ziel des nächsten Paragraphen, den Gehalt der Postulate anhand einfacher Folgerungen zu präzisieren.

[10]) Für die Bezeichnungen sei an § 3 erinnert. Es sind dies bis auf geringfügige Änderungen die Postulate, die H. HADWIGER in dem in der Einleitung genannten Kolloquium vorgeschlagen hat.

§ 8. Einfache Folgerungen aus den Gefügepostulaten

Satz 8.1: *Erklärt man für* $f, g \in \mathfrak{B}$

$$f \sim g \Longleftrightarrow f \lesssim g,\ g \lesssim f\,, \tag{16}$$

so ist $\sim$ *eine mit* $\lesssim$ *verträgliche Äquivalenzrelation in* $\mathfrak{B}$. *Sie hat überdies die Eigenschaften:*

$$f \sim g,\ f' \sim g' \Longrightarrow f + f' \sim g + g'\,, \tag{17}$$

$$f + f' \sim g + g',\ f \sim g \Longrightarrow f' \sim g'\,, \tag{18}$$

$$f \sim g,\ \tau \in \Gamma \Longrightarrow f^\tau \sim g^\tau\,. \tag{19}$$

Beweis: Die erste Behauptung folgt aus (IV) und Satz 1.3; (17), (18), (19) ergeben sich aus (VI), (VII), (IX) und (16).

Nun lassen wir einige Aussagen über die Halbverknüpfung folgen:

$$(A * B) * C \ def \Longleftrightarrow A * (B * C) \ def\,, \tag{20}$$

$$A * B \ def \Longrightarrow A * B = B * A\,, \tag{21}$$

$$(A * B) * C \ def \Longrightarrow (A * B) * C = A * (B * C)\,, \tag{22}$$

$$A * B \ def,\ A * C \ def,\ A * B = A * C \Longrightarrow B = C\,. \tag{23}$$

Beweise: (20): (II) und (I) gestatten folgende Schlüsse: $(A * B) * C \ def \Longleftrightarrow \Longleftrightarrow A * B,\ A * C,\ B * C \ def \Longleftrightarrow B * C,\ B * A,\ C * A \ def \Longleftrightarrow (B * C) * A \ def \Longleftrightarrow A * (B * C) \ def$.– (21): Aus (I) folgt $B * A \ def$. Mit (VIII) und der Transitivität von $\sim$ ergibt sich $i_{A * B} \sim i_{B * A}$ und hieraus mit (V) die Behauptung. – (22): Mit (20) resultiert $A * (B * C) \ def$, mit (VIII), (17) und der Transitivität von $\sim$ weiter $i_{(A * B) * C} \sim i_{A * (B * C)}$ und daraus mit (V) die Behauptung. – (23): Nach (VIII) und der Transitivität von $\sim$ ist $i_A + i_B \sim \sim i_A + i_C$ und nach der Reflexivität von $\sim$ und (18) sodann $i_B \sim i_C$, also nach (V) $B = C$, wzbw.

Wir verabreden die folgende Sprechweise: $A_1 * \ldots * A_n \ def$ bedeute fortan, daß $A_1, \ldots, A_n$ für jede Art der Klammersetzung verknüpfbar seien und das resultierende Element von der Klammersetzung unabhängig sei. Es gilt dann:

$$A_1 * \ldots * A_n \ def \Longleftrightarrow A_\mu * A_\nu \ def \ (\mu \neq \nu;\ \mu, \nu = 1, \ldots, n)\,. \tag{24}$$

Ein einfacher Induktionsbeweis stellt diese Aussage sicher. Ebenso leicht zeigt man: Bezeichnet $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ eine Indexpermutation, so gilt:

$$A_1 * \ldots * A_n \ def \Longrightarrow A_{\nu_1} * \ldots * A_{\nu_n} \ def,\ A_1 * \ldots * A_n = A_{\nu_1} * \ldots * A_{\nu_n}\,. \tag{25}$$

Somit ist unsere Halbverknüpfung über ihrer Definitionsmenge assoziativ und kommutativ. Durch die nächste Aussage erfährt Postulat (III) eine Verschärfung:

Satz 8.2: *Es gibt genau ein neutrales Element* $O \in \mathfrak{M}$. *Dieses erfüllt die Beziehung*

$$i_O \sim o \tag{26}$$

und ist Fixelement jeder Transformation von Γ, *das heißt, es gilt:*

$$\tau \in \Gamma \Longrightarrow \tau O = O\,. \tag{27}$$

Beweis: Sind O und O' neutrale Elemente im Sinne von (III), so gilt

$$O' * O \, def, \; O' * O = O' \quad \text{und} \quad O * O' \, def, \; O * O' = O$$

und wegen (21) $O' = O$, womit die Einzigkeit feststeht. Nach (III) und (VIII) folgt $i_A + o = i_A = i_A * o \sim i_A + i_O$, also $i_A + o \sim i_A + i_O$, und (18) liefert $o \sim i_O$. Die Anwendung von (26), (8), (19) und (9) ergibt $i_O \sim o = = o^\tau \sim i_O^\tau = i_{\tau O}$, also $i_O \sim i_{\tau O}$ oder mit (V) $O = \tau O$, wzbw.

An dieser Stelle sei auf den Begriff der *Kategorie* von Eilenberg und MacLane hingewiesen[11]) und bemerkt, daß eine algebraische Halbstruktur, die unseren Postulaten (I), (II), (III) nebst den Bedingungen (20), (21), (22) genügt, nicht notwendig eine Kategorie ist und umgekehrt eine Kategorie nicht notwendig diese Postulate und Bedingungen erfüllen muß. Trotzdem besitzen die Betrachtungen dieser beiden Begriffe einige Berührungspunkte. So erbringen zum Beispiel (20) und (22) den direkten Nachweis des einen Kategorienpostulates, und (23) besagt im Hinblick auf (I) und (21), daß jedes Element der Grundmenge *regulär* im Sinne von M. Hasse [34] ist.

Unter Heranziehung des in § 5 bereitgestellten Begriffes des Γ-Komplexes erklären wir hier in völliger Analogie zur Def. 6.2:

Def. 8.3: *Ist* N *ein* Γ*-Komplex und* $A \in \mathfrak{M}$, *so heißt die Bildung*

$$\mathsf{N} \cdot A = \begin{cases} \tau_1 A * \ldots * \tau_n A, & \text{falls } \mathsf{N} = [\tau_1, \ldots, \tau_n]\,, \\ O & \text{, falls } \mathsf{N} = \Theta \end{cases} \tag{28}$$

die Vervielfachung von A *mit dem* Γ*-Komplex* N *unter der ausdrücklichen Voraussetzung* $\tau_1 A * \ldots * \tau_n A \, def$, *was von nun an durch die Anschrift stets impliziert werde.*

Ebenfalls im Anschluß an die Γ-Komplexe resultieren zwei nützliche Aussagen:

$$f \lesssim g \Longrightarrow \mathsf{N} \cdot f \lesssim \mathsf{N} \cdot g\,, \tag{29}$$

$$i_{\mathsf{N} \cdot A} \sim \mathsf{N} \cdot i_A\,. \tag{30}$$

Beweise: Für $\mathsf{N} = \Theta$ wird (29) trivial, und (30) geht in die schon als richtig erkannte Beziehung (26) über. Für $\mathsf{N} \neq \Theta$ folgt (29) aus (IX) und (VI), (30) aus (VIII) und (9).

---

11) Vgl. S. Eilenberg – S. MacLane [32], C. Ehresmann [33], M. Hasse [34].

Die Quasiordnungsrelation $\lesssim$ in der Menge $\mathfrak{B}$ der Belegungen ist verantwortlich für eine Teilordnung in der Grundmenge $\mathfrak{M}$:

Satz 8.4: *Erklärt man für* $A, B \in \mathfrak{M}$

$$A \leqslant B \iff i_A \lesssim i_B\,, \tag{31}$$

dann ist $\leqslant$ *eine Teilordnungsrelation in der Grundmenge* $\mathfrak{M}$.

Beweis: Diese Aussage folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß die Menge der Charakteristiken durch $\lesssim$ teilgeordnet ist.

Diese Teilordnungsrelation besitzt die folgenden einfach zu beweisenden Verträglichkeitseigenschaften:

$$A \leqslant B,\ A' \leqslant B',\ A * A'\ def,\ B * B'\ def \Longrightarrow A * A' \leqslant B * B'\,, \tag{32}$$

$$A * A'\ def,\ B * B'\ def,\ A * A' \leqslant B * B',\ B \leqslant A \Longrightarrow A' \leqslant B'\,, \tag{33}$$

$$A \leqslant B,\ \sigma \in \Gamma \Longrightarrow \sigma A \leqslant \sigma B\,. \tag{34}$$

Damit ist $\langle \mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim \rangle$ eine teilgeordnete algebraische Halbstruktur. Für die Verträglichkeit zwischen $*$ und Γ gilt noch:

$$A * B\ def,\ \tau \in \Gamma \Longrightarrow \tau(A * B) = \tau A * \tau B\,. \tag{35}$$

Beweis: Nach (X) ist $\tau A * \tau B\ def$. Durch Anwendung von (9), (VIII), (19) und (10) ergibt sich $i_{\tau(A\,*\,B)} = i^{\tau}_{A\,*\,B} \sim (i_A + i_B)^{\tau} = i^{\tau}_A + i^{\tau}_B = i_{\tau A} + i_{\tau B} \sim i_{\tau A\,*\,\tau B}$ oder also mit der Transitivität von $\sim$ und (V) die Behauptung.

§ 9. Normierte Gefüge

Durch eine Zusatzforderung greifen wir eine ganz spezielle Klasse von Gefügen heraus, die eine weitgehend selbständige Theorie besitzen und sich durch das Vorhandensein einer Eigenschaft auszeichnen, welche dem archimedischen Axiom verwandt ist. Dadurch wird ein relativer Beschränktheitsbegriff erzeugt (vgl. Def. 9.1).

Es seien im folgenden $\square = \langle \mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim \rangle$ ein Gefüge und $E \in \mathfrak{M}$ ein nichtneutrales und definites Element, so daß also gilt:

$$E \neq O,\ O \leqslant E\,. \tag{36}$$

Def. 9.1: *Ein Element* $A \in \mathfrak{M}$ *heißt E-beschränkt, wenn es passende Vervielfachungen von* i_E *so gibt, daß gilt:*

$$i_O \lesssim i_A + \Pi \cdot i_E \lesssim \mathrm{P} \cdot i_E\,. \tag{37}$$

Ist jedes Element A *von* $\mathfrak{M}$ *E-beschränkt, so heißt* E *ein Normelement des Gefüges* $\square$.

Nachdem ein bestimmtes Normelement E in einem Gefüge $\square$ fest gewählt und dadurch ausgezeichnet ist, daß man es zur Normierung heranzieht, heißt das Gefüge $\square$ *normiert* oder kurz ein *n-Gefüge*, und E spielt die Rolle einer fünften unabänderlich gedachten Grundgegebenheit, was wir durch die Schreibweise $\square = \langle \mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim, E \rangle$ zum Ausdruck bringen.

Satz 9.2: *Ist* $\square$ *ein n-Gefüge, so gilt:* a) *Jeder* Γ*-Komplex* N *erfüllt die Beziehung*

$$o \lesssim \mathsf{N} \cdot i_E \,. \tag{38}$$

b) *Zu je endlich vielen Elementen* $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{M}$ *gibt es zwei* Γ*-Komplexe* Π, P *mit*

$$i_O \lesssim i_{A_\nu} + \Pi \cdot i_E \lesssim \mathsf{P} \cdot i_E \; (\nu = 1, \ldots, n) \,, \tag{39}$$

$$i_{A_\nu} \lesssim \mathsf{P} \cdot i_E \qquad (\nu = 1, \ldots, n) \,. \tag{40}$$

(40) besagt also die Existenz einer Belegung, die endlich viele vorgegebene Charakteristiken simultan majorisiert.

Beweis: (38): Aus (36), (31) und (26) ergibt sich mit (16) und Satz 8.1 $o \lesssim i_E$. Daraus folgt mit (8) und (29) die Behauptung (38). – (39): Nach (37) gibt es Π_ν, P_ν mit $i_O \lesssim i_{A_\nu} + \Pi_\nu \cdot i_E \lesssim \mathsf{P}_\nu \cdot i_E (\nu = 1, \ldots, n)$. Mit Rücksicht auf (38) gilt mit $\Pi = \Pi_1 + \ldots + \Pi_n$, $\mathsf{P} = \Pi + \mathsf{P}_1 + \ldots + \mathsf{P}_n$ wegen (VI) und (14) auch (39). – (40): Im Hinblick auf (39) genügt es, zu bemerken, daß $i_{A_\nu} \lesssim i_{A_\nu} + \Pi \cdot i_E$ gilt.

3. Kapitel: Invariante Funktionen über normierten Gefügen

In den folgenden Paragraphen wird ein kurzer Abriß der Theorie der n-Gefüge und der invarianten Funktionen über ihnen gegeben, mit bewußter Beschränkung auf deren Hauptsätze. Die Theorie ist noch mancher Erweiterung fähig, was jedoch im Rahmen der vorliegenden Arbeit nicht gezeigt werden kann.

§ 10. Belegungsäquivalenz

Im ganzen Paragraphen bedeute $\square = \langle \mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim, E \rangle$ ein festgedachtes n-Gefüge. Wir entwickeln aus den Grundgegebenheiten heraus eine Pseudometrik und daraus sodann eine Äquivalenzrelation in der Grundmenge $\mathfrak{M}$. Diese erlangt ihre volle Bedeutung erst bei weiterem Ausbau der Theorie. Die hier gegebene Einführung ist bereits für den Weiterausbau angelegt; der Mehraufwand gegenüber einer direkten Behandlung ist gering und wird durch allgemeinere Einsichten gerechtfertigt.

Satz 10.1: *Für jedes geordnete Paar (A, B) von Elementen von $\mathfrak{M}$ existiert die reelle Zahl*

$$a(A,B) = \inf p/n[\mathsf{N}_1 \cdot i_A \lesssim \mathsf{N}_2 \cdot i_B + \Pi \cdot i_E\,;\ |\mathsf{N}_1| = |\mathsf{N}_2| = n > 0, |\Pi| = p > 0]. \quad (41)$$

Beweis: Mit (26), (39), (40) schließt man auf das Bestehen von Beziehungen $o \lesssim i_B + \Pi \cdot i_E$, $i_A \lesssim \mathsf{P} \cdot i_E$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit darf $|\mathsf{P} + \Pi| > 0$ angenommen werden, da dies durch Addition von i_E zur rechten Seite einer der Beziehungen erzwingbar ist. Durch Addition ergibt sich nach (VI) $i_A \lesssim i_B + (\mathsf{P} + \Pi) \cdot i_E$, womit die Realisierbarkeit der Klausel in (41) erwiesen ist. Da 0 eine untere Schranke für die in Frage stehenden Zahlen p/n ist, so folgt die Existenz des Infimums, also die Behauptung.

Satz 10.2: *Die soeben definierte Funktion a hat folgende Eigenschaften:*

$$A \in \mathfrak{M},\ \tau \in \Gamma \implies a(A, \tau A) = 0\,, \quad (42)$$

$$A, B \in \mathfrak{M};\ A \leqslant B \implies a(A, B) = 0\,, \quad (43)$$

$$A, B, C \in \mathfrak{M} \implies a(A, C) \leqslant a(A, B) + a(B, C)\,, \quad (44)$$

$$A,B,C,D \in \mathfrak{M}; A*C\,def, B*D\,def \implies a(A*C, B*D) \leqslant a(A,B) + a(C,D), \quad (45)$$

$$A,B,C,D \in \mathfrak{M}; A*C\,def, B*D\,def \implies a(A,B) \leqslant a(A*C, B*D) + a(D,C). \quad (46)$$

Beweis: (42): Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl n mit $1/n < \varepsilon$. Nach (38), (9) und (VI) gilt dann $n i_A^\tau \lesssim n i_{\tau A} + i_E$, womit (42) erledigt ist. Völlig analog ist das Vorgehen bei (43), wenn man $i_A \lesssim i_B$ bedenkt. – (44): Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es die Beziehungen

$\mathsf{N}_1 \cdot i_A \lesssim \mathsf{N}_2 \cdot i_B + \Pi \cdot i_E, |\mathsf{N}_1| = |\mathsf{N}_2| = n > 0, |\Pi| = p > 0, p/n < a(A,B) + \varepsilon/2,$
$\mathsf{M}_1 \cdot i_B \lesssim \mathsf{M}_2 \cdot i_C + \mathsf{P} \cdot i_E, |\mathsf{M}_1| = |\mathsf{M}_2| = m > 0, |\mathsf{P}| = r > 0, r/m < a(B,C) + \varepsilon/2.$
Es folgt daraus $\mathsf{M}_1 \cdot \mathsf{N}_1 \cdot i_A \lesssim \mathsf{M}_1 \cdot \mathsf{N}_2 \cdot i_B + \mathsf{M}_1 \cdot \Pi \cdot i_E$, $\mathsf{N}_2 \cdot \mathsf{M}_1 \cdot i_B \lesssim \mathsf{N}_2 \cdot \mathsf{M}_2 \cdot i_C + \mathsf{N}_2 \cdot \mathsf{P} \cdot i_E$ und mit (1), (VI), (VII) $\mathsf{M}_1 \cdot \mathsf{N}_1 \cdot i_A \lesssim \mathsf{N}_2 \cdot \mathsf{M}_2 \cdot i_C + (\mathsf{M}_1 \cdot \Pi + \mathsf{N}_2 \cdot \mathsf{P}) \cdot i_E$. Nach (41) ergibt sich daraus $a(A, C) \leqslant (p/n) + (r/m) < a(A, B) + a(B,C) + \varepsilon$. Da ε beliebig war, so resultiert die Behauptung (44). – (45)[12]: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es Beziehungen $\mathsf{N}_1' \cdot i_A \lesssim \mathsf{N}_2' \cdot i_B + \Pi' \cdot i_E$, $|\mathsf{N}_1'| = |\mathsf{N}_2'| = n' > 0$, $|\Pi'| = p' > 0$, $p'/n' < a(A, B) + \varepsilon$, $\mathsf{M}_1' \cdot i_C \lesssim \mathsf{M}_2' \cdot i_D + \mathsf{P}' \cdot i_E$, $|\mathsf{M}_1'| = |\mathsf{M}_2'| = m' > 0$, $|\mathsf{P}'| = r' > 0$, $r'/m' < a(C, D) + \varepsilon$. Durch Vervielfachung mit $\mathsf{I}_{m'}$ bzw. $\mathsf{I}_{n'}$ und die Setzungen $n = m'n'$, $p = m'p'$, $r = n'r'$ folgt die Existenz von Beziehungen $\mathsf{N}_1 \cdot i_A \lesssim \mathsf{N}_2 \cdot i_B + \Pi \cdot i_E$, $\mathsf{N}_3 \cdot i_C \lesssim \mathsf{N}_4 \cdot i_D + \mathsf{P} \cdot i_E$ mit $|\mathsf{N}_1| = |\mathsf{N}_2| = |\mathsf{N}_3| = |\mathsf{N}_4| = n > 0$, $|\Pi| = p > 0$, $|\mathsf{P}| = r > 0$, $p/n = p'/n'$, $r/n = r'/m'$. Mit $\mathsf{N}_1 = [\xi_1, \ldots, \xi_n]$, $\mathsf{N}_2 = [\eta_1, \ldots, \eta_n]$, $\mathsf{N}_3 = [\sigma_1, \ldots, \sigma_n]$, $\mathsf{N}_4 = [\tau_1, \ldots, \tau_n]$ bilden wir für $q = 2, 3, \ldots$ die Γ-Komplexe

[12]) Dieser Beweis ist einem unpublizierten Beweis von H. HADWIGER für Lemma (d) in [5], p. 118, nachgebildet.

$\omega_q = [\xi_1^{a_1} \ldots \xi_n^{a_n} \eta_1^{b_1} \ldots \eta_n^{b_n} \sigma_1^{c_1} \ldots \sigma_n^{c_n} \tau_1^{d_1} \ldots \tau_n^{d_n} \mid 1 \leqslant a_\nu, b_\nu, c_\nu, d_\nu \leqslant q$ natürliche Zahlen $(\nu = 1, \ldots, n)]$.

Es ist $|\omega_q| = q^{4n}$. Aus den beiden letzten Belegungsrelationen erhält man durch Vervielfachung mit ω_q und (VI): (a) $\omega_q \cdot \mathsf{N}_1 \cdot i_A + \omega_q \cdot \mathsf{N}_3 \cdot i_C \lesssim \omega_q \cdot \mathsf{N}_2 \cdot i_B + + \omega_q \cdot \mathsf{N}_4 \cdot i_D + \omega_q \cdot (\Pi + \mathsf{P}) \cdot i_E$. Eine Transformation von ω_q gehört sicher dann zu $\xi_\nu \omega_q \wedge \tau_\nu \omega_q$, wenn simultan die folgenden Bedingungen erfüllt sind: $2 \leqslant a_\nu \leqslant q$, $2 \leqslant c_\nu \leqslant q$; $1 \leqslant a_\lambda, c_\lambda \leqslant q (\lambda \neq \nu)$; $1 \leqslant b_\lambda, d_\lambda \leqslant q (\lambda = 1, \ldots, n)$. Somit gilt $|\xi_\nu \omega_q \wedge \sigma_\nu \omega_q| \geqslant q^{4n-2}(q-1)^2$ $(\nu = 1, \ldots, n)$. Demzufolge enthält der Γ-Komplex $\omega_q \cdot \mathsf{N}_1 \wedge \omega_q \cdot \mathsf{N}_3$ gewiß einen Teilkomplex K_1 mit $|\mathsf{K}_1| = nq^{4n-2}(q-1)^2 = k > 0$. Es gilt also $\omega_q \cdot \mathsf{N}_1 = \mathsf{K}_1 + \Lambda_1$, $\omega_q \cdot \mathsf{N}_3 = \mathsf{K}_1 + \Lambda_3$ und analog $\omega_q \cdot \mathsf{N}_2 = \mathsf{K}_2 + \Lambda_2$, $\omega_q \cdot \mathsf{N}_4 = \mathsf{K}_2 + \Lambda_4$ mit $|\mathsf{K}_1| = |\mathsf{K}_2| = k$, $|\Lambda_1| = |\Lambda_2| = |\Lambda_3| = |\Lambda_4| = l = nq^{4n} - k > 0$. Nach dieser Zerspaltung der Γ-Komplexe in (a) lautet (a) unter Anwendung von (VIII): (b) $\mathsf{K}_1 \cdot i_{A*C} + \Lambda_1 \cdot i_A + \Lambda_3 \cdot i_C \lesssim \mathsf{K}_2 \cdot i_{B*D} + \Lambda_2 \cdot i_B + \Lambda_4 \cdot i_D + \omega_q \cdot (\Pi + \mathsf{P}) \cdot i_E$. Aus (38), (39), (40) läßt sich leicht auf die Existenz eines Γ-Komplexes T mit $o \lesssim i_A + \mathsf{T} \cdot i_E$, $o \lesssim i_C + \mathsf{T} \cdot i_E$, $i_B \lesssim \mathsf{T} \cdot i_E$, $i_D \lesssim \mathsf{T} \cdot i_E$ schließen. Aus (b), (38), (VI), (VII) folgt dann (c) $\mathsf{K}_1 \cdot i_{A*C} \lesssim \mathsf{K}_2 \cdot i_{B*D} + \Delta \cdot i_E$ mit $\Delta = \mathsf{T} \cdot \cdot (\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 + \Lambda_4) + \omega_q \cdot (\Pi + \mathsf{P})$. Ist $|\mathsf{T}| = t$, so folgert man aus (2) und (3) $s = |\Delta| = 4lt + q^{4n}(p + r)$. Beachtet man, daß t ausschließlich von A, B, C, D abhängig ist, so resultiert die Konvergenzaussage $s/k \to (p + r)/n$ $(q \to \infty)$. Wegen $(p + r)/n < a(A, B) + a(C, D) + 2\varepsilon$ gibt es ein passendes q mit $(s/k) < a(A, B) + a(C, D) + 2\varepsilon$. Da ε beliebig gewählt war, so folgt nach (c) und (41) die Behauptung (45). – (46): Dieser Beweis verläuft in großen Zügen analog zum vorigen und kann jenem leicht nachgebildet werden.

Satz 10.3: *Die Funktion*

$$d(A, B) = Max\,\{a(A, B),\ a(B, A)\} \tag{47}$$

ist eine Pseudometrik auf der Grundmenge $\mathfrak{M}$ mit den zusätzlichen Eigenschaften

$$A \in \mathfrak{M},\ \tau \in \Gamma \Longrightarrow d(A, \tau A) = 0\,, \tag{48}$$

$$A, B, C, D \in \mathfrak{M};\ A*C\,def,\ B*D\,def \Longrightarrow d(A*C, B*D) \leqslant d(A, B) + d(C, D)\,, \tag{49}$$

$$A, B, C, D \in \mathfrak{M};\ A*C\,def,\ B*D\,def \Longrightarrow d(A, B) \leqslant d(A*C, B*D) + d(C, D)\,. \tag{50}$$

Beweis: (48) folgt aus (42) und (M1) hieraus durch die Setzung $\tau = \iota$. (M3): Mit Rücksicht auf (44) gilt $d(A, C) \leqslant Max\,\{a(A, B) + a(B, C), a(C, B) + a(B, A)\} \leqslant d(A, B) + d(B, C)$. — (M5) ergibt sich direkt aus (47). Somit ist d in der Tat eine Pseudometrik auf $\mathfrak{M}$. Die Nachweise von (49) und (50) verlaufen im Hinblick auf (45) und (46) gleich wie derjenige von (M3).

Mit Satz 10.3 ist die Möglichkeit gegeben, mit Hilfe der Pseudometrik auf bekannte Weise der Grundmenge $\mathfrak{M}$ eine Topologie aufzuprägen: Die Mengen

$\mathfrak{S}(A;c) = \{D \in \mathfrak{M} \mid d(A,D) < c\}$ mit $A \in \mathfrak{M}$, $c > 0$ bilden nämlich eine Basis einer Topologie, in welcher die $\mathfrak{S}(A;c)$ offen, die $\mathfrak{T}(A;c) = \{D \in \mathfrak{M} \mid d(A,D) \leqslant c\}$ dagegen abgeschlossen ausfallen[13]); wir nennen sie im folgenden die *d-Topologie*. Diesem Gesichtspunkt kommt aber in der vorliegenden Arbeit nicht primäre Bedeutung zu; wir werden nur gelegentlich diesbezügliche Hinweise geben. An dieser Stelle sei lediglich bemerkt, daß durch (49) die Stetigkeit der Abbildung $(A, B) \to A * B$ garantiert wird. Die algebraische Halbstruktur $\langle \mathfrak{M}, * \rangle$ ist somit «topologisch» im Sinne der topologischen Algebra. Das Vorhandensein einer Pseudometrik wird hier in einer anderen Hinsicht verwendet:

Def. 10.4: *Die gemäß Satz* 2.2 *durch den Ansatz*

$$A \approx B \Longleftrightarrow d(A, B) = 0 \tag{51}$$

definierte Äquivalenzrelation in der Grundmenge $\mathfrak{M}$ *heiße Belegungsäquivalenz.*

Die Erklärungen (41) und (47) ergeben die folgende Kennzeichnung der Belegungsäquivalenz:

Satz 10.5: *Zwei Elemente A, B der Grundmenge eines n-Gefüges* $\square$ *sind genau dann belegungsäquivalent, wenn sich zu jedem* $\varepsilon > 0$ *Vervielfachungen so angeben lassen, daß gilt:*

$$\left.\begin{array}{l} \mathsf{N}_1 \cdot i_A \precsim \mathsf{N}_2 \cdot i_B + \Pi \cdot i_E;\ |\mathsf{N}_1| = |\mathsf{N}_2| = n > 0,\ |\Pi| = p > 0;\ p/n < \varepsilon \\ \mathsf{M}_1 \cdot i_B \precsim \mathsf{M}_2 \cdot i_A + \mathsf{P} \cdot i_E;\ |\mathsf{M}_1| = |\mathsf{M}_2| = m > 0,\ |\mathsf{P}| = r > 0;\ r/m < \varepsilon. \end{array}\right. \tag{52}$$

Nach den Vorbereitungen ist es nun leicht, wichtige Eigenschaften der Belegungsäquivalenz zu erkennen:

$$A \in \mathfrak{M},\ \tau \in \Gamma \Longrightarrow A \approx \tau A, \tag{53}$$

$$A, B, C, D \in \mathfrak{M};\ A*C\ def,\ B*D\ def,\ A \approx B,\ C \approx D \Longrightarrow A * C \approx B * D, \tag{54}$$

$$A, B, C, D \in \mathfrak{M};\ A*C\ def,\ B*D\ def,\ A * C \approx B * D,\ C \approx D \Longrightarrow A \approx B, \tag{55}$$

$$A \approx B,\ |\mathsf{M}| = |\mathsf{N}| \Longrightarrow \mathsf{M} \cdot A \approx \mathsf{N} \cdot B, \tag{56}$$

$$\mathsf{M} \cdot A \approx \mathsf{N} \cdot B,\ |\mathsf{M}| = |\mathsf{N}| > 0 \Longrightarrow A \approx B. \tag{57}$$

In naheliegender Weise kann man (54), (55), (56), (57) mit *Additions-*, *Subtraktions-*, *Multiplikations-* und *Divisionssatz* ansprechen.

Beweise: (53), (54), (55) ergeben sich mühelos aus (48), (49), (50), wenn man (M6) bedenkt. (56) folgt induktiv aus (53) und (54). — (57): Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es nach Satz 10.5 eine Beziehung $\Lambda_1 \cdot i_{\mathsf{M} \cdot A} \precsim \Lambda_2 \cdot i_{\mathsf{N} \cdot B} + \Pi \cdot i_E$ mit $|\Lambda_1| = |\Lambda_2| = l > 0$, $|\Pi| = p > 0$, $p/l < \varepsilon$. Nach (29) und (30) resul-

[13]) Für die hier auftretenden topologischen Begriffe verweisen wir auf irgendein einführendes Werk der mengentheoretischen Topologie, insbesondere etwa N. BOURBAKI [35], chapitre I.

tiert $\Lambda_1 \cdot \mathsf{M} \cdot i_A \lesssim \Lambda_2 \cdot \mathsf{N} \cdot i_B + \Pi \cdot i_E$. Wegen $p/nl \leqslant p/l < \varepsilon$ folgt $a(A, B) = 0$, wobei $n = |\mathsf{M}| = |\mathsf{N}|$. Analog ergibt sich $a(B, A) = 0$ und damit die Behauptung (57), wzbw.

§ 11. Invariante Felder, Funktionen und Systeme

Im ganzen Paragraphen bedeute $\square = \langle \mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim, E \rangle$ ein fest gedachtes n-Gefüge.

Def. 11.1: *Ein zu $\square$ gehöriges invariantes Feld («i-Feld») ist eine Teilmenge $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{M}$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(F1) $A, B \in \mathfrak{F};\ A * B \; def \Longrightarrow A * B \in \mathfrak{F}$ *(Additivität)*[14],

(F2) $A \in \mathfrak{F};\ \tau \in \Gamma \Longrightarrow \tau A \in \mathfrak{F}$ *(Γ-Freiheit)*,

(F3) $E, O \in \mathfrak{F}$ *(Normalität)*.

Vorerst schließen wir einige nützliche Begriffsbildungen um das i-Feld an:

Def. 11.2: *Unter dem durch eine nichtleere Teilmenge $\mathfrak{N}$ von $\mathfrak{M}$ erzeugten i-Feld verstehen wir die Menge der Aggregate* $\mathsf{K} \cdot E * \mathsf{M}_1 \cdot A_1 * \ldots * \mathsf{M}_n \cdot A_n$ *mit* $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{N};\ n = 1, 2, \ldots$.

Man verifiziert leicht, daß der Übergang von einer Menge zum erzeugten i-Feld ein Abschließungsprozeß ist. Die i-Felder sind dabei die abgeschlossenen Elemente, und nach Satz 1.6 ist das von $\mathfrak{N}$ erzeugte i-Feld das kleinste aller i-Felder, welches $\mathfrak{N}$ umfaßt.

Def. 11.3: *Erfüllt eine Teilmenge $\mathfrak{F}'$ eines i-Feldes $\mathfrak{F}$ schon die Feldpostulate* (F1), (F2), (F3), *so heißt $\mathfrak{F}'$ ein Unterfeld von $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}$ ein Oberfeld von $\mathfrak{F}'$.*

Zwei in einem gewissen Sinne extremale i-Felder sind von vorneherein ausgezeichnet:

1. Das durch die Menge $\{E\}$ erzeugte i-Feld $\mathfrak{E} = \{\mathsf{N} \cdot E \mid |\mathsf{N}| = 0, 1, 2, \ldots\}$, welches wir das *Normfeld* nennen[15]),

2. das *universelle i-Feld $\mathfrak{M}$;* in der Tat erfüllt $\mathfrak{M}$ die Feldpostulate (F1), (F2), (F3).

Die Extremalität von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{M}$ besteht nun darin, daß jedes zu $\square$ gehörige i-Feld $\mathfrak{F}$ der Relation $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{F} \subset \mathfrak{M}$ genügt, so daß $\mathfrak{E}$ als das kleinste, $\mathfrak{M}$ hingegen als das größte i-Feld in Erscheinung tritt.

---

[14]) Die Wahl der Bezeichnung «additiv» erfolgt ohne Präjudiz für eine noch vorzunehmende konkrete Deutung der Halbverknüpfung $*$.

[15]) Es sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß $|\mathsf{N}|$ unter Umständen nur endlich vieler Werte fähig ist, da für zu große $|\mathsf{N}|$ die Vervielfachungen nicht unbedingt gebildet werden können.

Der Übergang von der Grundmenge $\mathfrak{M}$ zu einem beliebigen i-Feld $\mathfrak{F}$ legt eine neue Begriffsbildung für die Belegungen nahe:

Def. 11.4: *Eine Belegung* $f \in \mathfrak{B}$ *heißt dem i-Feld* $\mathfrak{F}$ *assoziiert, in Zeichen* $f \div \mathfrak{F}$, *wenn gilt:* $f(A) = 0$[*alle* $A \in \mathfrak{M} - \mathfrak{F}$].

Man überzeugt sich dann leicht von der Gültigkeit der folgenden Aussagen:

$$f, g \div \mathfrak{F} \Longrightarrow (f + g) \div \mathfrak{F}\,, \tag{58}$$

$$f \div \mathfrak{F} \Longrightarrow \mathsf{N} \cdot f \div \mathfrak{F}\,. \tag{59}$$

An dieser Stelle kann nun die Erklärung des Hauptbegriffes unserer Ausführungen erfolgen:

Def. 11.5: *Eine invariante Funktion («i-Funktion»)* φ *ist eine über einem i-Feld* $\mathfrak{F}$ *erklärte reellwertige Funktion mit den folgenden Eigenschaften:*

$f, g \div \mathfrak{F};\ f \lesssim g \Longrightarrow \Sigma f(A)\, \varphi(A) \leqslant \Sigma g(A)\, \varphi(A)$ (*Belegungsmonotonie*)[16]), (I1)

$A \in \mathfrak{F};\ \tau \in \Gamma \Longrightarrow \varphi(\tau A) = \varphi(A)$ (Γ-*Invarianz*), (I2)

$\varphi(E) = 1$ (*Normiertheit*). (I3)

Def. 11.6: *Ein dem n-Gefüge* $\square$ *assoziiertes invariantes System («i-System»)* $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ *entsteht durch Zusammenfassung eines zu* $\square$ *gehörigen i-Feldes* $\mathfrak{F}$ *und einer i-Funktion* φ *über* $\mathfrak{F}$. *Die Elemente von* $\mathfrak{F}$ *heißen im i-System* $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ *bewertbar.*

Anschließend an die soeben genannten obligatorischen Postulate für i-Felder und i-Funktionen kennzeichnen wir eine Eigenschaft, die einem i-Feld überdies zukommen kann:

(F4) *Das i-Feld* $\mathfrak{F}$ *besitzt die Eindeutigkeitseigenschaft, wenn für beliebige i-Systeme* $\langle \mathfrak{G}, \psi \rangle$ *und* $\langle \mathfrak{H}, \omega \rangle$ *gilt:* $\psi(A) = \omega(A)$ [*alle* $A \in \mathfrak{F} \frown \mathfrak{G} \frown \mathfrak{H}$].

Im folgenden befassen wir uns mit Eigenschaften der i-Funktionen, also mit den Folgerungen aus den Funktionspostulaten (I1), (I2), (I3).

Satz 11.7: *Ist* φ *eine i-Funktion über dem i-Feld* $\mathfrak{F}$, *so gilt:*

$$f, g \div \mathfrak{F};\ f \sim g \Longrightarrow \Sigma f(A)\, \varphi(A) = \Sigma g(A)\, \varphi(A)\,, \tag{60}$$

$$f \div \mathfrak{F} \Longrightarrow \Sigma(\mathsf{N} \cdot f)\,(A)\, \varphi(A) = |\mathsf{N}|\, \Sigma f(A)\, \varphi(A)\,, \tag{61}$$

$$A, B \in \mathfrak{F};\ A * B \; def \Longrightarrow \varphi(A * B) = \varphi(A) + \varphi(B)\,, \tag{62}$$

$$\varphi(O) = 0\,, \tag{63}$$

$$A, B \in \mathfrak{F};\ A \leqslant B \Longrightarrow \varphi(A) \leqslant \varphi(B)\,, \tag{64}$$

$$A \in \mathfrak{F};\ O \leqslant A \Longrightarrow \varphi(A) \geqslant 0\,, \tag{65}$$

---

[16]) Für das Summensymbol vgl. die Bemerkung nach (5). Statt $\Sigma f(A)\varphi(A)$ schreiben wir gelegentlich knapper $\Sigma f \varphi$.

$$A, B \in \mathfrak{F} \Longrightarrow |\varphi(A) - \varphi(B)| \leqslant d(A, B), \tag{66}$$

$$A, B \in \mathfrak{F};\ A \approx B \Longrightarrow \varphi(A) = \varphi(B). \tag{67}$$

An anderen Orten wird (62) als *Additivität,* (64) als *Monotonie,* (65) als *Definitheit* und (67) als *Äquivalenzinvarianz* bezeichnet[17]). (66) bringt zum Ausdruck, daß jede i-Funktion bezüglich der d-Topologie über dem betreffenden i-Feld gleichmäßig stetig ist.

Beweise: (60) ist eine triviale Folgerung von (16) und (I 1), und (61) folgt ebenfalls mit einfachen Schlüssen aus (I 1) und (I 2) unter Berücksichtigung von (6) und (59). — (62): Nach (VIII) ist $i_{A * B} \sim i_A + i_B$ und nach (60) sodann $\varphi(A * B) = \varphi(A) + \varphi(B)$. Setzt man hierin $A = B = O$, so resultiert (63). — (64): Nach (31) ist $i_A \lesssim i_B$, und mit (I 1) folgt $\varphi(A) \leqslant \varphi(B)$. — (65): folgt aus (63) und (64). — (66): Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Beziehung $\mathsf{N}_1 \cdot i_A \lesssim \mathsf{N}_2 \cdot i_B + \Pi \cdot i_E$ mit $|\mathsf{N}_1| = |\mathsf{N}_2| = n > 0$, $|\Pi| = p > 0$, $p/n < a(A, B) + \varepsilon$. Aus (I 1), (I 3) und (61) ergibt sich $n\varphi(A) \leqslant n\varphi(B) + p$ und hieraus $\varphi(A) < \varphi(B) + a(A, B) + \varepsilon$. Da ε beliebig war, so gilt

$$\varphi(A) \leqslant \varphi(B) + a(A, B) \text{ und analog dazu } \varphi(B) \leqslant \varphi(A) + a(B, A).$$

Mit Rücksicht auf (47) folgt $|\varphi(A) - \varphi(B)| \leqslant d(A, B)$. — (67) ist im Hinblick auf (51) eine triviale Folgerung von (66).

Für beweistechnische Zwecke wird sich noch die folgende Sachlage als nützlich erweisen:

Satz 11.8: *Ist $\mathfrak{F}$ ein i-Feld und $f \div \mathfrak{F}$, so gibt es eine durch f eindeutig bestimmte natürliche Zahl n und eindeutig bestimmte Elemente $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{F}$ mit*

$$f + i_O = i_{A_1} + \cdots + i_{A_n}. \tag{68}$$

Ist außerdem φ eine reellwertige Funktion über $\mathfrak{F}$ mit $\varphi(O) = 0$, so gilt:

$$\Sigma f(A)\,\varphi(A) = \varphi(A_1) + \cdots + \varphi(A_n). \tag{69}$$

Beweis: Im Hinblick auf (5) ist f eine Summe von eindeutig durch f bestimmten Charakteristiken von Elementen von $\mathfrak{F}$. Durch die Addition von i_O wird erzwungen, daß deren Anzahl positiv ist. Wegen $\varphi(O) = 0$ folgt auch (69), wzbw.

Von (62) und (64) gibt es eine Art Umkehraussage:

Satz 11.9: *Ist $*$ eine Verknüpfung und $\mathfrak{F}$ ein i-Feld, so ist jede monotone und additive reellwertige Funktion über $\mathfrak{F}$ belegungsmonoton.*

Beweis: Seien $f, g \div \mathfrak{F}$; $f \lesssim g$; φ über $\mathfrak{F}$ monoton und additiv. Nach (68) gilt $f + i_O = i_{A_1} + \cdots + i_{A_n}$, $g + i_O = i_{B_1} + \cdots + i_{B_m}$, also nach Vor-

[17]) Für diese Benennung in der Inhaltstheorie vgl. [36], Abschnitt II.

aussetzung auch $i_{A_1} + \ldots + i_{A_n} \lesssim i_{B_1} + \ldots + i_{B_m}$. Da $*$ eine Verknüpfung ist, so führt (VIII) auf $i_{A_1 * \cdots * A_n} \lesssim i_{B_1 * \cdots * B_m}$, die Monotonie auf $\varphi(A_1 * \ldots * A_n) \leqslant \varphi(B_1 * \ldots * B_m)$ und die Additivität auf $\varphi(A_1) + \ldots + \varphi(A_n) \leqslant \varphi(B_1) + \ldots + \varphi(B_m)$. Berücksichtigt man nun, daß (69) aus (63), das heißt letzten Endes aus (62) folgt, so resultiert mit (69) $\Sigma f(A)\varphi(A) \leqslant \Sigma g(A)\varphi(A)$, also die Belegungsmonotonie von φ, wzbw.

Schließlich formalisieren wir einen im folgenden oft vorkommenden Sachverhalt:

Def. 11.10: *Ein i-System* $\langle \mathfrak{G}, \psi \rangle$ *heißt Fortsetzung des i-Systems* $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$, *in Zeichen* $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle \preceq \langle \mathfrak{G}, \psi \rangle$, *wenn gilt:* $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$; $\psi(A) = \varphi(A)$ [*alle* $A \in \mathfrak{F}$]. *Diese beiden i-Systeme heißen gleich, wenn* $\mathfrak{F} = \mathfrak{G}$, $\psi(A) = \varphi(A)$ [*alle* $A \in \mathfrak{F}$].

Ohne Mühe beweist man:

Satz 11.11: *Die Menge* $\oplus$ *der dem n-Gefüge* $\square$ *assoziierten i-Systeme wird durch die Relation* $\preceq$ *teilgeordnet.*

Zum Schluß treffen wir die Abmachung, ein i-System, dessen i-Feld das universelle Feld $\mathfrak{M}$ ist, ein *universelles i-System* zu nennen.

§ 12. Allgemeine Fragestellungen

Nach der Einführung des Begriffes des i-Systems ist es jetzt ganz natürlich, die folgenden Hauptfragen der Theorie zu stellen:

A. *Gibt es zu jedem n-Gefüge ein assoziiertes i-System?*

Für die Formulierung weiterer Fragen erachten wir die nachfolgende Begriffsskala als zweckmäßig[18]): Ein Element A der Grundmenge $\mathfrak{M}$ eines n-Gefüges $\square$ heißt a) *absolut bewertbar*, wenn für je zwei zu $\square$ gehörige i-Systeme $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ und $\langle \mathfrak{G}, \psi \rangle$ mit $A \in \mathfrak{F}$, $A \in \mathfrak{G}$ gilt: $\varphi(A) = \psi(A)$; b) *unbedingt bewertbar* bzw. *unbedingt unbewertbar*, wenn für jedes zu $\square$ gehörige i-System $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ gilt: $A \in \mathfrak{F}$ bzw. $A \notin \mathfrak{F}$. Falls die Existenz von i-Systemen gesichert ist, lauten die weiteren Fragen:

B. *Gibt es absolut bewertbare Elemente in* $\mathfrak{M}$?

C. *Gibt es unbedingt bewertbare und unbedingt unbewertbare Elemente in* $\mathfrak{M}$?

Es ist das Ziel der anschließenden Entwicklung, diese Fragen zu beantworten und bei positiver Beantwortung eine Charakterisierung der betreffenden Elemente zu geben.

---

[18]) Sie ist einem Vorgehen in der Inhaltstheorie nachgebildet. Vgl. H. HADWIGER [13], p. 124.

§ 13. Ober- und Unterfunktion einer invarianten Funktion

In diesem Paragraphen konstruieren wir zwei einer i-Funktion zugeordnete reellwertige Funktionen, die über der ganzen Grundmenge erklärt sind und uns weitere Konstruktionen ermöglichen.

Wir setzen voraus, daß $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ ein dem n-Gefüge $\square = \langle \mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim, E \rangle$ assoziiertes i-System sei, betrachten Belegungsrelationen der folgenden zwei Typen:

$$f_1 + \mathsf{M} \cdot i_D \lesssim f_2 \quad \text{mit} \quad f_1, f_2 \div \mathfrak{F};\ D \in \mathfrak{M};\ |\mathsf{M}| = m > 0\,, \tag{70}$$

$$g_1 \lesssim g_2 + \mathsf{N} \cdot i_D \quad \text{mit} \quad g_1, g_2 \div \mathfrak{F};\ D \in \mathfrak{M};\ |\mathsf{N}| = n > 0 \tag{71}$$

und ordnen jeder solchen Beziehung die reelle Zahl

$$a_D = [\Sigma f_2(A)\,\varphi(A) - \Sigma f_1(A)\,\varphi(A)]/m\,, \tag{72}$$

$$b_D = [\Sigma g_1(A)\,\varphi(A) - \Sigma g_2(A)\,\varphi(A)]/n \tag{73}$$

zu[16]). Die Mengen der auf diese Weise zum Element $D \in \mathfrak{M}$ gehörigen reellen Zahlen bezeichnen wir mit $\mathbf{U}_D$ und $\mathbf{V}_D$.

Satz 13.1: *Die Mengen* $\mathbf{U}_D$ *und* $\mathbf{V}_D$ *sind für jedes* $D \in \mathfrak{M}$ *nichtleer, und aus* $a_D \in \mathbf{U}_D$, $b_D \in \mathbf{V}_D$ *folgt* $b_D \leqslant a_D$.

Beweis: Nach (37) gilt mit passenden Γ-Komplexen $i_O \lesssim i_D + \Pi \cdot i_E \lesssim \mathsf{P} \cdot i_E$. Setzt man $f_1 = \Pi \cdot i_E$, $f_2 = \mathsf{P} \cdot i_E$, $\mathsf{M} = \mathsf{I}_1$, $g_1 = i_O$, $g_2 = \Pi \cdot i_E$, $\mathsf{N} = \mathsf{I}_1$, so sind (70) und (71) realisiert und somit $\mathbf{U}_D$ und $\mathbf{V}_D$ nichtleer. — Sind $a_D \in \mathbf{U}_D$, $b_D \in \mathbf{V}_D$, so entspringen a_D und b_D den Beziehungen $f_1 + \mathsf{M} \cdot i_D \lesssim f_2$ und $g_1 \lesssim g_2 + \mathsf{N} \cdot i_D$. Daraus folgt $\mathsf{N} \cdot f_1 + \mathsf{N} \cdot \mathsf{M} \cdot i_D \lesssim \mathsf{N} \cdot f_2$, $\mathsf{M} \cdot g_1 \lesssim \mathsf{M} \cdot g_2 + \mathsf{M} \cdot \mathsf{N} \cdot i_D$ und wegen (VI), (1), (IV), (VII) $\mathsf{N} \cdot f_1 + \mathsf{M} \cdot g_1 \lesssim \mathsf{N} \cdot f_2 + \mathsf{M} \cdot g_2$. Nach (58), (59), der Belegungsmonotonie von φ und (61) ergibt sich $n\,\Sigma f_1(A)\,\varphi(A) + m\,\Sigma g_1(A)\,\varphi(A) \leqslant n \Sigma f_2(A)\,\varphi(A) + m \Sigma g_2(A)\,\varphi(A)$ oder nach (72) und (73) $b_D \leqslant a_D$, wzbw.

Satz 13.1 lehrt außerdem, daß die nichtleeren Zahlenmengen $\mathbf{U}_D$ und $\mathbf{V}_D$ einseitig beschränkt sind. Diese Sachlage ist hinreichend für die Existenz der Zahlen $\mathit{inf}\,\mathbf{U}_D$ und $\mathit{sup}\,\mathbf{V}_D$, was Anlaß gibt zu folgender

Def. 13.2:[19]) *Die für alle* $D \in \mathfrak{M}$ *gemäß* $\overline{\varphi}(D) = \mathit{inf}\,\mathbf{U}_D$ *bzw.* $\underline{\varphi}(D) = \mathit{sup}\,\mathbf{V}_D$ *erklärte Funktion heißt die zum i-System* $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ *gehörige Ober- bzw. Unterfunktion.*

Im folgenden leiten wir einige Eigenschaften der Ober- und Unterfunktion her, die unter anderem erkennen lassen, daß diese zwei neu konstruierten Funktionen keine i-Funktionen im Sinne unserer Theorie sind, da ihnen die Additi-

---

[19]) Vgl. A. Tarski [16], Def. 1.25, p. 52. In der inhaltstheoretischen Studie [36], Abschnitt VI, wurde gleich vorgegangen.

vität (62), also erst recht die Belegungsmonotonie (I 1) im allgemeinen nicht zukommt. Es gelten die folgenden Beziehungen:

$$D \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \underline{\varphi}(D) \leqslant \overline{\varphi}(D)\,, \tag{74}$$

$$A \in \mathfrak{F} \Longrightarrow \overline{\varphi}(A) = \underline{\varphi}(A) = \varphi(A)\,, \tag{75}$$

$$A\,, B \in \mathfrak{M};\ A^*B\,def \Longrightarrow \underline{\varphi}(A) + \underline{\varphi}(B) \leqslant \underline{\varphi}(A^*B);\ \varphi(A^*B) \leqslant \overline{\varphi}(A) + \overline{\varphi}(B)\,, \tag{76}$$

$$A\,, B \in \mathfrak{M};\ A \approx B \Longrightarrow \overline{\varphi}(A) = \overline{\varphi}(B),\ \underline{\varphi}(A) = \underline{\varphi}(B)\,, \tag{77}$$

$$A \in \mathfrak{M},\ \tau \in \Gamma \Longrightarrow \overline{\varphi}(\tau A) = \overline{\varphi}(A),\ \underline{\varphi}(\tau A) = \underline{\varphi}(A)\,. \tag{78}$$

Beweise: (74) folgt unmittelbar aus Satz 13.1 und Def. 13.2. — (75): Wegen $A \in \mathfrak{F}$ ist die Klausel (71) durch die Setzung $g_1 = i_A,\ g_2 = i_O,\ \mathsf{N} = \mathsf{I}_1,\ D = A$ erfüllt. Die gemäß (73) resultierende reelle Zahl ergibt sich zu $b_A = \varphi(A)$. Nach Def. 13.2 gilt $\varphi(A) \leqslant \underline{\varphi}(A)$ und analog $\overline{\varphi}(A) \leqslant \varphi(A)$. Mit (74) folgt hieraus die Behauptung. — (76): Nach Satz 13.1 ist die Existenz von Beziehungen $h_1 \lesssim h_2 + \mathsf{M} \cdot i_A,\ g_1 \lesssim g_2 + \mathsf{N} \cdot i_B$ mit $h_1, h_2, g_1, g_2 \div \mathfrak{F};\ |\mathsf{M}| = = m > 0,\ |\mathsf{N}| = n > 0$ sichergestellt. Es folgt mit (13) und (29) $\mathsf{N} \cdot h_1 \lesssim \mathsf{N} \cdot h_2 + + \mathsf{N} \cdot \mathsf{M} \cdot i_A,\ \mathsf{M} \cdot g_1 \lesssim \mathsf{M} \cdot g_2 + \mathsf{M} \cdot \mathsf{N} \cdot i_B$ und wegen (VI), (1) und (VIII) $\mathsf{N} \cdot h_1 + \mathsf{M} \cdot g_1 \lesssim \mathsf{N} \cdot h_2 + \mathsf{M} \cdot g_2 + \mathsf{M} \cdot \mathsf{N} \cdot i_{A^*B}$. Dies ist eine Beziehung vom Typus (71) und liefert gemäß (73) die Zahl $b_{A^*B} = [\Sigma h_1 \varphi - \Sigma h_2 \varphi]/m + + [\Sigma g_1 \varphi - \Sigma g_2 \varphi]/n = b_A + b_B$. Wegen $b_{A^*B} \leqslant \underline{\varphi}(A^*B)$ gilt für alle zu Beginn gesetzten Beziehungen $b_A + b_B \leqslant \underline{\varphi}(A^*B)$, woraus sich leicht die erste Behauptung ergibt. Für die zweite verläuft der Beweis analog. — (77): Seien $A \approx B$ und $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann besteht nach (52) eine Beziehung (d) $\mathsf{M}_1 \cdot i_B \lesssim \mathsf{M}_2 \cdot i_A + \mathsf{P} \cdot i_E$ mit $|\mathsf{M}_1| = |\mathsf{M}_2| = m > 0,\ |\mathsf{P}| = r > 0, r/m < \varepsilon$. Wegen der Realisierbarkeit der Klausel (70) existiert eine weitere Beziehung (e) $f_1 + \mathsf{N} \cdot i_A \lesssim f_2$ mit $f_1, f_2 \div \mathfrak{F};\ |\mathsf{N}| = n > 0$. Durch Iteration der Vervielfachungen in (d) und (e) folgt unter Anwendung von (VI), (1), (IV) und (VII): (f) $\mathsf{M}_2 \cdot f_1 + \mathsf{N} \cdot \mathsf{M}_1 \cdot i_B \lesssim \mathsf{M}_2 \cdot f_2 + \mathsf{N} \cdot \mathsf{P} \cdot i_E$. (f) ist eine Klausel vom Typus (70), und da aus ihr die Zahl $a_B = [\Sigma f_2 \varphi - \Sigma f_1 \varphi]/n + (r/m)$ resultiert, so gilt (g) $\overline{\varphi}(B) < [\Sigma f_2 \varphi - \Sigma f_1 \varphi]/n + \varepsilon$. (e) ist vom Typus (70) und von ε unabhängig, also folgt aus (g): $\overline{\varphi}(B) \leqslant \overline{\varphi}(A) + \varepsilon$. Da ε beliebig gewählt wurde, so folgt $\overline{\varphi}(B) \leqslant \overline{\varphi}(A)$. Auf entsprechende Art und Weise ergibt sich $\overline{\varphi}(A) \leqslant \overline{\varphi}(B)$, also insgesamt die erste Behauptung. Für die zweite verläuft der Beweis analog. — (78) folgt wegen (53) aus (77).

Die Bedeutung der Ober- und Unterfunktion tritt ein erstes Mal in der folgenden Aussage hervor:

Satz 13.3: *Voraussetzung: Es seien $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ und $\langle \mathfrak{G}, \psi \rangle$ zwei dem n-Gefüge $\Box$ assoziierte i-Systeme mit $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle \leq \langle \mathfrak{G}, \psi \rangle$. Behauptungen:*

a) *Für alle Elemente $D \in \mathfrak{M}$ gilt:*

$$\underline{\varphi}(D) \leqslant \underline{\psi}(D) \leqslant \overline{\psi}(D) \leqslant \overline{\varphi}(D)\,; \tag{79}$$

b) *Für alle Elemente* $A \in \mathfrak{G}$ *gilt:*

$$\underline{\varphi}(A) \leqslant \psi(A) \leqslant \overline{\varphi}(A)\,. \tag{80}$$

Die Behauptung b), die sich im Hinblick auf (75) als einfaches Korollar der Behauptung a) erweist, besagt die Existenz zweier Schranken für die i-Funktionswerte, die einem Element A in beliebigen Fortsetzungen von $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ zugeordnet werden können. Die Behauptung a) bringt zahlenmäßig zum Ausdruck, daß ein umfassenderes i-System in einem gewissen Sinne feiner bewertet als ein weniger umfassendes.

Beweis: Wegen $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{G}$ ist jede auf das i-Feld $\mathfrak{F}$ bezogene Klausel vom Typus (70) oder (71) auch auf das i-Feld $\mathfrak{G}$ bezogen, und die Zahlenmengen U_D und V_D sind für $\mathfrak{G}$ umfassender als für $\mathfrak{F}$. Daraus ergibt sich mit der Def. 13.2 $\underline{\varphi}(D) \leqslant \underline{\psi}(D)$, $\overline{\psi}(D) \leqslant \overline{\varphi}(D)$ und mit (74) die Behauptung.

§ 14. Existenzkriterium und Normsystem

Es sei $\square = \langle \mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim, E \rangle$ ein n-Gefüge. Wir nehmen in diesem Paragraphen zu der in § 12 gestellten Frage **A**, der Existenzfrage für i-Systeme, Stellung. Ein Existenzkriterium, das anschließend aufgestellt wird, soll die Einsicht darüber vermitteln, welche Sachverhalte in unserer Struktur für Existenz oder Nichtexistenz maßgebend sind. Man wird dadurch auf ganz natürliche Weise zu einem i-System geführt, dem in der Theorie eine ausgezeichnete Stellung zukommt, nämlich dem *Normsystem.*

Existenzkriterium 14.1:[20]) *Zum n-Gefüge* $\square$ *gibt es genau dann ein i-System, wenn gilt:*

$$\mathsf{M} \cdot i_E \lesssim \mathsf{N} \cdot i_E \Longrightarrow |\mathsf{M}| \leqslant |\mathsf{N}|\,. \tag{81}$$

Beweis: Sei $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ ein i-System und $\mathsf{M} \cdot i_E \lesssim \mathsf{N} \cdot i_E$. Wegen $\mathsf{M} \cdot i_E$, $\mathsf{N} \cdot i_E \div \mathfrak{F}$ und (I1) folgt mit (61) und (I3): $|\mathsf{M}| \leqslant |\mathsf{N}|$. Also ist (81) erfüllt. — Sei umgekehrt (81) erfüllt. Dann gilt: $\mathsf{M} \cdot E = \mathsf{N} \cdot E \Longrightarrow |\mathsf{M}| = |\mathsf{N}|$. In der Tat: $i_{\mathsf{M}\cdot E} = i_{\mathsf{N}\cdot E}$, daraus nach (30) und Satz 8.1 $\mathsf{M} \cdot i_E \sim \mathsf{N} \cdot i_E$ und hieraus nach (16) und (81) $|\mathsf{M}| = |\mathsf{N}|$. Auf Grund dieser Sachlage ist durch

$$\chi(\mathsf{N} \cdot E) = |\mathsf{N}| \tag{82}$$

auf eindeutige Weise über dem Normfeld $\mathfrak{E}$ eine reellwertige Funktion χ erklärt, welche trivialerweise Γ-invariant und normiert ist. Wir zeigen, daß χ auch belegungsmonoton ist. Seien $f, g \div \mathfrak{E}$; $f \lesssim g$. Mit $f' = f + i_O = i_{\mathsf{M}_1 \cdot E} + \cdots + i_{\mathsf{M}_l \cdot E} \sim$

[20]) Vgl. A. Tarski [16], Satz 1.58, p. 56; H. Hadwiger – W. Nef [4], p. 308; W. Nef [6], p. 219ff.

$(\mathsf{M}_1 + \ldots + \mathsf{M}_l) \cdot i_E$, $g' = g + io = i_{\mathsf{N}_1 \cdot E} + \ldots + i_{\mathsf{N}_q \cdot E} \sim (\mathsf{N}_1 + \ldots + \mathsf{N}_q) \cdot i_E$ folgt $(\mathsf{M}_1 + \ldots + \mathsf{M}_l) \cdot i_E \lesssim (\mathsf{N}_1 + \ldots + \mathsf{N}_q) \cdot i_E$ und daraus nach (81) und (2) $|\mathsf{M}_1| + \ldots + |\mathsf{M}_l| \leqslant |\mathsf{N}_1| + \ldots + |\mathsf{N}_q|$ oder $\Sigma f'(A)\,\chi(A) \leqslant \Sigma g'(A)\,\chi(A)$. Mit der direkt aus (82) folgenden Beziehung $\chi(O) = 0$ ergibt sich schließlich $\Sigma f(A)\,\chi(A) \leqslant \Sigma g(A)\,\chi(A)$. Somit ist $\langle \mathfrak{E}, \chi \rangle$ ein i-System und das Kriterium bewiesen.

Ist die Existenzbedingung (81) erfüllt, so nennt man das im Beweis des Kriteriums konstruierte i-System $\langle \mathfrak{E}, \chi \rangle$ das *Normsystem.* Offensichtlich wird $\langle \mathfrak{E}, \chi \rangle$ von jedem beliebigen i-System fortgesetzt.

Aus (81) ergibt sich weiter die Unmöglichkeit der Beziehung $E \approx O$. Wäre sie nämlich erfüllt, so würde mit (67) der Widerspruch $1 = \chi(E) = \chi(O) = 0$ folgen.

§ 15. Permanenzsatz und abgeschlossene Hülle

Hier stellen wir den Permanenzsatz der Belegungsmonotonie bereit, der ein i-System auf Grund von Eigenschaften der Ober- und Unterfunktionen zu einem neuen i-System fortzusetzen gestattet. Der Kerngehalt dieses Satzes besteht in der Tatsache, daß sich die Belegungsmonotonie (I1) auf das neue System überträgt. Allerdings läßt sich i.a. das Fernziel, die Konstruktion universeller i-Systeme, allein mit diesem Satz nicht erreichen; dazu wird sich ein im folgenden noch zu entwickelnder typischer Fortsetzungsprozeß eignen.

Permanenzsatz 15.1:[21]) *Voraussetzungen:* 1) $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ *sei ein zum n-Gefüge* $\square$ *gehöriges i-System;* 2) $\mathfrak{F}^* = \{A \in \mathfrak{M} \mid \overline{\varphi}(A) = \underline{\varphi}(A)\}$; 3) $\varphi^*(A) = \overline{\varphi}(A) = \underline{\varphi}(A)$ [*alle* $A \in \mathfrak{F}^*$]. *Behauptung:* $\langle \mathfrak{F}^*, \varphi^* \rangle$ *ist ein zu* $\square$ *gehöriges i-System mit* $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle \leq \langle \mathfrak{F}^*, \varphi^* \rangle$.

Beweis: $\mathfrak{F}^*$ ist additiv nach (76) und (74), Γ-frei nach (78), und es gilt $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}^*$ nach (75); also sind $O, E \in \mathfrak{F}^*$, und es ist $\mathfrak{F}^*$ ein i-Feld. φ^* ist Γ-invariant nach (78) und eine Fortsetzung von φ nach (75), also normiert. Es bleibt die Belegungsmonotonie von φ^* nachzuweisen. Seien $f, g \div \mathfrak{F}^*$; $f \lesssim g$. Nach Satz 11.8 gilt $f' = f + io = i_{A_1} + \ldots + i_{A_n}$, $g' = g + io = i_{B_1} + \ldots + i_{B_m}$ mit $A_1, \ldots, A_n$, $B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{F}^*$. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen $\varphi^*(A_\nu) = \underline{\varphi}(A_\nu)$ gibt es $f_{\nu 1}, f_{\nu 2} \div \mathfrak{F}$ mit (h) $f_{\nu 1} \lesssim f_{\nu 2} + \Pi_\nu \cdot i_{A_\nu}$; $|\Pi_\nu| = p_\nu > 0$ und (i) $[\Sigma f_{\nu 1}\varphi - \Sigma f_{\nu 2}\varphi]/p_\nu > \varphi^*(A_\nu) - \varepsilon\,(\nu = 1, \ldots, n)$. Analog dazu gibt es $g_{\mu 1}, g_{\mu 2} \div \mathfrak{F}$ mit (j) $g_{\mu 1} + \mathsf{P}_\mu \cdot i_{B_\mu} \lesssim g_{\mu 2}$; $|\mathsf{P}_\mu| = r_\mu > 0$ und (k) $[\Sigma g_{\mu 2}\varphi - \Sigma g_{\mu 1}\varphi]/r_\mu < \varphi^*(B_\mu) + \varepsilon\,(\mu = 1, \ldots, m)$. Wir bilden die Γ-Komplexe $\mathsf{K}_\nu = \Pi_1 \cdot \ldots \cdot \Pi_{\nu-1} \cdot \Pi_{\nu+1} \cdot \ldots \cdot \Pi_n\,(\nu = 1, \ldots, n)$, $\Pi = \Pi_1 \cdot \ldots \cdot \Pi_n$, $\Lambda_\mu =$

[21]) Vgl. A. TARSKI [16], insbesondere pp. 54/55, wo die analoge Bildung natürliche Erweiterung genannt wird. Für eine andersartige Herleitung vgl. [36], Satz 9.

$= \mathsf{P}_1 \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}_{\mu-1} \cdot \mathsf{P}_{\mu+1} \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}_m (\mu = 1, \ldots, m)$, $\mathsf{P} = \mathsf{P}_1 \cdot \ldots \cdot \mathsf{P}_m$ mit den Mächtigkeiten $|\Pi| = p$, $|\mathsf{K}_\nu| = p/p_\nu (\nu = 1, \ldots, n)$, $|\mathsf{P}| = r$, $|\Lambda_\mu| = r/r_\mu (\mu = 1, \ldots, m)$. Aus (h) folgt dann $\mathsf{K}_\nu \cdot f_{\nu 1} \lesssim \mathsf{K}_\nu \cdot f_{\nu 2} + \Pi \cdot i_{A_\nu} (\nu = 1, \ldots, n)$ und hieraus mit (VI) und (13) $\mathsf{K}_1 \cdot f_{11} + \ldots + \mathsf{K}_n \cdot f_{n1} \lesssim \mathsf{K}_1 \cdot f_{12} + \ldots + \mathsf{K}_n \cdot f_{n2} + \Pi \cdot f'$ und entsprechend $\Lambda_1 \cdot g_{11} + \ldots + \Lambda_m \cdot g_{m1} + \mathsf{P} \cdot g' \lesssim \Lambda_1 \cdot g_{12} + \ldots + \Lambda_m \cdot g_{m2}$. Durch Weitervervielfachung dieser Beziehungen und Berücksichtigung von (VI), $f' \lesssim g'$, (1), (29) und (VII) schließt man auf $\mathsf{P} \cdot (\mathsf{K}_1 \cdot f_{11} + \ldots + \mathsf{K}_n \cdot f_{n1}) + \Pi \cdot (\Lambda_1 \cdot g_{11} + \ldots + \Lambda_m \cdot g_{m1}) \lesssim \mathsf{P} \cdot (\mathsf{K}_1 \cdot f_{12} + \ldots + \mathsf{K}_n \cdot f_{n2}) + \Pi \cdot (\Lambda_1 \cdot g_{12} + \ldots + \Lambda_m \cdot g_{m2})$. Alle hier vorkommenden Belegungen sind dem i-Feld $\mathfrak{F}$ assoziiert, und mit (I1) und (61) folgt

$$r \sum_{\nu=1}^{n} (p/p_\nu) \Sigma f_{\nu 1} \varphi + p \sum_{\mu=1}^{m} (r/r_\mu) \Sigma g_{\mu 1} \varphi \leqslant r \sum_{\nu=1}^{n} (p/p_\nu) \Sigma f_{\nu 2} \varphi + p \sum_{\mu=1}^{m} (r/r_\mu) \Sigma g_{\mu 2} \varphi$$

oder $\sum_{\nu=1}^{n} [\Sigma f_{\nu 1} \varphi - \Sigma f_{\nu 2} \varphi]/p_\nu \leqslant \sum_{\mu=1}^{m} [\Sigma g_{\mu 2} \varphi - \Sigma g_{\mu 1} \varphi]/r_\mu$. Hieraus und aus (i), (k) entspringt die Ungleichung $\sum_{\nu=1}^{n} \varphi^*(A_\nu) - n\varepsilon < \sum_{\mu=1}^{m} \varphi^*(B_\mu) + m\varepsilon$. Dabei sind m, n von ε unabhängig, und es gilt $\sum_{\nu=1}^{n} \varphi^*(A_\nu) \leqslant \sum_{\mu=1}^{m} \varphi^*(B_\mu)$ und mit Rücksicht auf $\varphi^*(O) = 0$ und (69) $\Sigma f(D) \varphi^*(D) \leqslant \Sigma g(D) \varphi^*(D)$, womit die Belegungsmonotonie von φ^* feststeht. Es sei noch vermerkt, daß sich im Falle $n = 1$ bzw. $m = 1$ vieles vereinfacht; insbesondere ist $\mathsf{K}_1 = \mathsf{I}_1$ bzw. $\Lambda_1 = \mathsf{I}_1$ zu setzen.

Das mit Satz 15.1 konstruierte i-System $\langle \mathfrak{F}^*, \varphi^* \rangle$ heißt die *abgeschlossene Hülle* des i-Systems $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$.

Der Permanenzsatz garantiert, daß der Übergang von einem i-System zu seiner abgeschlossenen Hülle insofern die Ausgangssituation reproduziert, als daß dabei wieder ein i-System entsteht. Dadurch wird die Möglichkeit eröffnet, diesen Übergang zu iterieren, und es stellt sich folgendes heraus:

Satz 15.2: *Ist* $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ *ein i-System und* $\langle \mathfrak{F}^*, \varphi^* \rangle$ *dessen abgeschlossene Hülle, so gilt für alle Elemente der Grundmenge* $\mathfrak{M}$:

$$\overline{\varphi^*}(A) = \overline{\varphi}(A); \quad \underline{\varphi^*}(A) = \underline{\varphi}(A). \tag{83}$$

Beweis: Die Beziehung (l) $\underline{\varphi}(A) \leqslant \underline{\varphi^*}(A)$ [*alle* $A \in \mathfrak{M}$] ergibt sich aus Satz 15.1 und (79). — Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es $f_1, f_2 \div \mathfrak{F}^*$ mit (m) $f_1 \lesssim f_2 + \mathsf{T} \cdot i_A$; $|\mathsf{T}| = t > 0$; $[\Sigma f_1 \varphi^* - \Sigma f_2 \varphi^*]/t > \underline{\varphi^*}(A) - \varepsilon$, wobei A ein beliebiges fest gedachtes Element von $\mathfrak{M}$ bedeutet. Ist $f_1' = f_1 + io = i_{A_1} + \ldots + i_{A_n}$, $f_2' = f_2 + io = i_{B_1} + \ldots + i_{B_m}$, so gilt mit Rücksicht auf die Definition von φ^*: $[\sum_{\nu=1}^{n} \underline{\varphi}(A_\nu) - \sum_{\mu=1}^{m} \overline{\varphi}(B_\mu)]/t > \underline{\varphi^*}(A) - \varepsilon$ (n). Nun gibt es weiter $f_{\nu 1}, f_{\nu 2}, g_{\mu 1}, g_{\mu 2} \div \mathfrak{F}$ mit (o) $f_{\nu 1} \lesssim f_{\nu 2} + \Pi_\nu \cdot i_{A_\nu}$; $|\Pi_\nu| = p_\nu > 0$ und (p) $[\Sigma f_{\nu 1}\varphi - \Sigma f_{\nu 2}\varphi]/p_\nu > \varphi^*(A_\nu) - \varepsilon/(m+n)$ sowie (q) $g_{\mu 1} + \mathrm{P}_\mu \cdot i_{B_\mu} \lesssim g_{\mu 2}$; $|\mathrm{P}_\mu| = r_\mu > 0$ und (r) $[\Sigma g_{\mu 2}\varphi - \Sigma g_{\mu 1}\varphi]/r_\mu < \varphi^*(B_\mu) + \varepsilon/(m+n)$, wobei $\nu = 1, \ldots, n$; $\mu = 1, \ldots, m$. Durch dasselbe Vorgehen wie im Beweis von Satz 15.1 erreicht man mit denselben Γ-Komplexen wie dort: $\mathrm{P} \cdot (\mathrm{K}_1 \cdot f_{11} + \ldots + \mathrm{K}_n \cdot f_{n1}) + \Pi \cdot (\Lambda_1 \cdot g_{11} + \ldots + \Lambda_m \cdot g_{m1}) + \Pi \cdot \mathrm{P} \cdot f_2' \lesssim \mathrm{P} \cdot (\mathrm{K}_1 \cdot f_{12} + \ldots + \mathrm{K}_n \cdot f_{n2}) + \Pi \cdot (\Lambda_1 \cdot g_{12} + \ldots + \Lambda_m \cdot g_{m2}) + \mathrm{P} \cdot \Pi \cdot f_1'$. Mit (m) ergibt sich $f_1' \lesssim f_2' + \mathrm{T} \cdot i_A$. Aus den zwei letzten Beziehungen folgt mit (1), (29), (VI) und (VII): $\mathrm{P} \cdot (\mathrm{K}_1 \cdot f_{11} + \ldots + \mathrm{K}_n \cdot f_{n1}) + \Pi \cdot (\Lambda_1 \cdot g_{11} + \ldots + \Lambda_m \cdot g_{m1}) \lesssim \mathrm{P} \cdot (\mathrm{K}_1 \cdot f_{12} + \ldots + \mathrm{K}_n \cdot f_{n2}) + \Pi \cdot (\Lambda_1 \cdot g_{12} + \ldots + \Lambda_m \cdot g_{m2}) + \Pi \cdot \mathrm{P} \cdot \mathrm{T} \cdot i_A$. Dies ist eine Klausel vom Typus (71), und es folgt:

$$\underline{\varphi}(A) \geqslant \frac{1}{t}\{\sum_{\nu=1}^{n}[\Sigma f_{\nu 1}\varphi - \Sigma f_{\nu 2}\varphi]/p_\nu - \sum_{\mu=1}^{m}[\Sigma g_{\mu 2}\varphi - \Sigma g_{\mu 1}\varphi]/r_\mu\}$$ und hieraus mit

(p), (r) und (n): $\underline{\varphi}(A) > [\sum_{\nu=}^{n}\varphi^*(A_\nu) - \sum_{\mu=1}^{m}\varphi^*(B_\mu)]/t - \varepsilon/t > \underline{\varphi^*}(A) - 2\varepsilon$. Da ε beliebig gewählt wurde, so gilt $\underline{\varphi}(A) \geqslant \underline{\varphi^*}(A)$, also in Verbindung mit (l) die Behauptung. Für $\overline{\varphi}$ geht alles analog. Da schließlich A ein beliebiges Element der Grundmenge war, so ist der Satz vollumfänglich bewiesen.

Satz 15.3: *Der Übergang von einem i-System zu seiner abgeschlossenen Hülle ist ein Abschließungsprozeß im Sinne von Def. 1.5.*

Beweis: Nach Satz 11.11 ist die Relation $\leq$ zwischen i-Systemen eine Teilordnung. (C1) folgt aus Satz 15.1, (C2) aus (83) und (C3) aus (79).

Nun haben wir Anschluß an die Betrachtung über Abschließungsprozesse in § 1 und nennen von nun an ein i-System genau dann *abgeschlossen*, wenn es mit seiner abgeschlossenen Hülle übereinstimmt. Nach der allgemeinen Erörterung ist die abgeschlossene Hülle eines i-Systems $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ das kleinste abgeschlossene Obersystem von $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$. Durch diese Sachlage erscheint die Benennung «abgeschlossene Hülle» durchaus natürlich.

§ 16. Fortsetzungssatz

Aufbauend auf einer Idee von S. BANACH[22]) konstruieren wir in diesem Paragraphen Fortsetzungen eines i-Systems, welche in der Lage sind, ganz bestimmte vorgegebene Elemente der Grundmenge zu bewerten. Es gilt nämlich der folgende

---

[22]) [14], Théorème 14, p. 16.

Fortsetzungssatz 16.1: *Voraussetzungen:* 1) $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ *sei ein abgeschlossenes dem n-Gefüge* $\square = \langle \mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim, E \rangle$ *assoziiertes i-System;* 2) $C \in \mathfrak{M}$, $C \notin \mathfrak{F}$; 3) $\mathfrak{F}'$ *sei das durch* $\mathfrak{F} \cup \{C\}$ *erzeugte i-Feld. Behauptungen:* a) *Ist* $\underline{\varphi}(C) \leqslant a \leqslant \bar{\varphi}(C)$, *so ist durch den Ansatz*

$$\varphi'(A * \mathsf{N} \cdot C) = \varphi(A) + |\mathsf{N}|\, a \,[A \in \mathfrak{F}] \tag{84}$$

in eindeutiger Weise eine i-Funktion φ' *über* $\mathfrak{F}'$ *erklärt.* b) $\langle \mathfrak{F}', \varphi' \rangle$ *ist die einzige Fortsetzung von* $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ *auf* $\mathfrak{F}'$ *mit* $\varphi'(C) = a$. c) *Auf diese Weise erhält man alle Fortsetzungen von* $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ *auf* $\mathfrak{F}'$. d) *Zu jeder reellen Zahl a mit* $\underline{\varphi}(C) \leqslant a \leqslant \bar{\varphi}(C)$ *gibt es mindestens ein abgeschlossenes i-System* $\langle \mathfrak{G}, \psi \rangle$, *welches dem n-Gefüge* $\square$ *assoziiert ist und den Bedingungen* $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle \lesssim \langle \mathfrak{G}, \psi \rangle$; $C \in \mathfrak{G}$; $\psi(C) = a$ *genügt.*

Als unmittelbare Folgerung dieses Satzes ergibt sich die Einsicht, daß im Falle $\underline{\varphi}(C) < \bar{\varphi}(C)$ kontinuierlich viele verschiedene i-Systeme existieren, die das i-System $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ auf das i-Feld $\mathfrak{F}'$ fortsetzen.

Beweis: aa) *Eindeutigkeit von* φ': Sei $A * \mathsf{N} \cdot C = B * \mathsf{M} \cdot C \,[A, B \in \mathfrak{F}]$. Es gilt zu zeigen: $\varphi(A) + |\mathsf{N}|a = \varphi(B) + |\mathsf{M}|a$. — 1. *Fall:* $|\mathsf{M}| > |\mathsf{N}|$. Dann ist $\mathsf{M} = \mathsf{N}' + \mathsf{T}$ mit $|\mathsf{N}'| = |\mathsf{N}|$ und $|\mathsf{T}| = t > 0$. Nach (56) ist $\mathsf{N}' \cdot C \approx \mathsf{N} \cdot C$, also nach (55) $A \approx B * \mathsf{T} \cdot C$. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es also nach (52) eine Beziehung $\Pi_1 \cdot i_A \lesssim \Pi_2 \cdot i_{B*\mathsf{T}\cdot C} + \mathsf{P} \cdot i_E$; $|\Pi_1| = |\Pi_2| = p > 0$, $|\mathsf{P}| = r > 0$; $r/p < \varepsilon$. (VIII) und (30) liefern hieraus $\Pi_1 \cdot i_A \lesssim \Pi_2 \cdot i_B + \mathsf{P} \cdot i_E + \Pi_2 \cdot \mathsf{T} \cdot i_C$. Wegen $A, B, E \in \mathfrak{F}$ ist dies eine Klausel vom Typus (71), und es folgt $\underline{\varphi}(C) \geqslant [p\varphi(A) - p\varphi(B) - r\varphi(E)]/pt$ und daraus $\underline{\varphi}(C) > [\varphi(A) - \varphi(B)]/t - \varepsilon/t$. Da ε beliebig gewählt war, so schließt man auf $\underline{\varphi}(C) \geqslant [\varphi(A) - \varphi(B)]/t$. Eine völlig analoge Argumentation führt auf die Beziehung $\bar{\varphi}(C) \leqslant [\varphi(A) - \varphi(B)]/t$. Mit Rücksicht auf (74) ergibt sich $\bar{\varphi}(C) = \underline{\varphi}(C)$, also mit der Abgeschlossenheit von $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ auch $C \in \mathfrak{F}$, im Widerspruch zur Voraussetzung 2) des Satzes. Damit ist die Unmöglichkeit des Falles $|\mathsf{M}| > |\mathsf{N}|$ und gleichzeitig des Falles $|\mathsf{M}| < |\mathsf{N}|$ dargetan, und es bleibt: 2. *Fall:* $|\mathsf{M}| = |\mathsf{N}|$. Aus $A * \mathsf{N} \cdot C = B * \mathsf{M} \cdot C$ folgt mit (56) und (55) $A \approx B$ und hieraus mit (67) $\varphi(A) = \varphi(B)$, also auch $\varphi(A) + |\mathsf{N}|a = \varphi(B) + |\mathsf{M}|a$, womit die Eindeutigkeit von φ' feststeht.

ab) φ' *ist eine i-Funktion über* $\mathfrak{F}'$: Die Normiertheit (I 3) ist trivial verifizierbar. — (I 2): Nach (X) und (35) gilt: $\varphi'(\tau(A * \mathsf{N} \cdot C)) = \varphi'(\tau A * \tau(\mathsf{N} \cdot C)) = \varphi(\tau A) + |\tau \mathsf{N}|a = \varphi(A) + |\mathsf{N}|a = \varphi'(A * \mathsf{N} \cdot C)$. — Es bleibt die Belegungsmonotonie (I 1) nachzuweisen: Seien $f', g' \div \mathfrak{F}'$, $f' \lesssim g'$. Setzt man $f' + io = \sum_{\nu=1}^{n} i_{A_\nu * \mathsf{K}_\nu \cdot C}$, $g' + io = \sum_{\mu=1}^{m} i_{B_\mu * \Lambda_\mu \cdot C}$, $f = \sum_{\nu=1}^{n} i_{A_\nu}$, $g = \sum_{\mu=1}^{m} i_{B_\mu}$, $\mathsf{K} = \mathsf{K}_1 + \ldots + \mathsf{K}_n$, $\Lambda = \Lambda_1 + \ldots + \Lambda_m$, so gilt offenbar (s) $f + \mathsf{K} \cdot i_C \lesssim g + \Lambda \cdot i_C$

mit $f, g \dotdiv \mathfrak{F}$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann hier $|\mathsf{K}| = k > 0$, $|\Lambda| = l > 0$ vorausgesetzt werden, da dies durch beidseitige Addition von i_C erzwingbar ist. — 1. *Fall:* $l \geqslant k$: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Beziehung (t) $g_1 \lesssim g_2 + \mathsf{T} \cdot i_C$; $g_1, g_2 \dotdiv \mathfrak{F}$; $|\mathsf{T}| = t > 0$ mit (u) $[\Sigma g_1 \varphi - \Sigma g_2 \varphi]/t > \underline{\varphi}(C) - \varepsilon$. Wird (s) mit T und (t) mit K vervielfacht, so ergibt sich mit (VI) und (VII): (v) $\mathsf{T} \cdot f + \mathsf{K} \cdot g_1 \lesssim \mathsf{T} \cdot g + \mathsf{K} \cdot g_2 + \mathsf{T} \cdot \Lambda \cdot i_C$. (v) ist vom Typus (71), und es gilt $\underline{\varphi}(C) \geqslant [\Sigma f \varphi - \Sigma g \varphi]/l + [\Sigma g_1 \varphi - \Sigma g_2 \varphi] k/lt$ oder unter Heranziehung von (u) $\underline{\varphi}(C) > [\Sigma f \varphi - \Sigma g \varphi]/l + (k/l)\,(\underline{\varphi}(C) - \varepsilon)$ und daraus $l\underline{\varphi}(C) > \Sigma f \varphi - \Sigma g \varphi + k\underline{\varphi}(C) - k\varepsilon$. Da diese Ungleichung für alle $\varepsilon > 0$ gilt, so folgt (w) $\Sigma g \varphi + l\underline{\varphi}(C) \geqslant \Sigma f \varphi + k\underline{\varphi}(C)$. Wegen $a - \underline{\varphi}(C) \geqslant 0$, $l \geqslant k > 0$ hat man (x) $la - l\underline{\varphi}(C) \geqslant ka - k\underline{\varphi}(C)$, und durch Addition von (w) und (x) ergibt sich $\Sigma g \varphi + la \geqslant \Sigma f \varphi + ka$. Nach den Vorbereitungen schließt man hieraus mühelos auf $\Sigma g' \varphi' \geqslant \Sigma f' \varphi'$. Im 2. *Fall* $(l < k)$ verläuft der Beweis analog, womit (I1) nachgewiesen ist.

b) Aus (84) folgt $\varphi'(C) = a$. Sei $\langle \mathfrak{F}', \omega \rangle$ ein i-System mit $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle \precsim \langle \mathfrak{F}', \omega \rangle$ und $\omega(C) = a$. Es gilt dann nach (62) $\omega(A * \mathsf{N} \cdot C) = \omega(A) + |\mathsf{N}|\,\omega(C) = \varphi(A) + |\mathsf{N}|\,a = \varphi'(A * \mathsf{N} \cdot C)$; also stimmen ω und φ' überein.

c) Sei $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle \precsim \langle \mathfrak{F}', \omega \rangle$. Aus (80) folgt $\underline{\varphi}(C) \leqslant \omega(C) \leqslant \overline{\varphi}(C)$. Wegen $\omega(A * \mathsf{N} \cdot C) = \varphi(A) + |\mathsf{N}|\,\omega(C)$ hat ω dieselbe Gestalt wie φ' nach (84) und der aus (80) folgenden Ungleichung.

d) Man setze $\langle \mathfrak{G}, \psi \rangle = \langle \mathfrak{F}'^*, \varphi'^* \rangle$, und das gesuchte abgeschlossene i-System ist gefunden.

§ 17. Das absolute i-System

Durch die Bemerkung nach dem Satz 16.1 wird man belehrt, daß der in Satz 16.1 d) durchgeführte Fortsetzungprozeß keineswegs eindeutig zu sein braucht, was dazu führen kann, daß hinreichend große i-Felder unter Umständen die Eindeutigkeitseigenschaft (F4) nicht mehr besitzen. Es ist daher sinnvoll, nach dem größten i-Feld mit der Eindeutigkeitseigenschaft zu fragen und das zugehörige i-System innerhalb der axiomatischen Theorie zu kennzeichnen. Ausgehend vom Normfeld $\mathfrak{E}$ und der Bezeichnung $\langle \mathfrak{E}^*, \chi^* \rangle$ für die abgeschlossene Hülle des Normsystems $\langle \mathfrak{E}, \chi \rangle$ gilt der folgende

Satz 17.1:[23]) *Ist die Existenzbedingung* (81) *erfüllt, so ist* $\mathfrak{E}^*$ *das größte i-Feld mit der Eindeutigkeitseigenschaft, m.a. W. kein echtes Oberfeld von* $\mathfrak{E}^*$ *besitzt die Eindeutigkeitseigenschaft.*

Beweis: Das Erfülltsein von (81) gewährleistet die Existenz des Normsystems.

---

[23]) Vgl. A. Tarski [15], insbesondere pp. 229/230.

Für ein beliebiges i-System $\langle\mathfrak{F},\varphi\rangle$ gilt $\langle\mathfrak{E},\chi\rangle \precsim \langle\mathfrak{F},\varphi\rangle$, und aus (80) folgt die fundamentale Beziehung

$$\underline{\chi}(A) \leqslant \varphi(A) \leqslant \overline{\chi}(A) \ [\textit{alle } A \in \mathfrak{F}]\,. \tag{85}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar die Eindeutigkeitseigenschaft von $\mathfrak{E}^*$. Sei nun $\mathfrak{G}$ ein echtes Oberfeld von $\mathfrak{E}^*$. Dann existiert ein Element $C \in \mathfrak{G} - \mathfrak{E}^*$, und mit Rücksicht auf (83) gilt $\underline{\chi^*}(C) = \underline{\chi}(C) < \overline{\chi}(C) = \overline{\chi^*}(C)$. Nach dem Fortsetzungssatz 16.1 gibt es sodann kontinuierlich viele voneinander verschiedene i-Systeme, die $\langle\mathfrak{E}^*,\chi^*\rangle$ auf das durch $\mathfrak{E}^* \cup \{C\}$ erzeugte i-Feld $\mathfrak{H}$ fortsetzen. Wegen $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ besitzt $\mathfrak{G}$ somit die Eindeutigkeitseigenschaft nicht, wzbw.

Bedenkt man, daß die Funktionen $\overline{\chi}$ und $\underline{\chi}$ im Falle ihrer Existenz über der ganzen Grundmenge $\mathfrak{M}$ definiert sind, so läßt sich der Gehalt der Ungleichung (85) etwa in folgende Worte kleiden: Die Zahlen $\overline{\chi}(A)$ und $\underline{\chi}(A)$ stellen für jedes A in $\mathfrak{M}$ Schranken für die Werte $\varphi(A)$ dar, die dem Element A durch beliebige i-Funktionen φ zugeordnet werden können. Daß diese Schranken die bestmöglichen sind, lehrt der Fortsetzungssatz 16.1. Da sie nur von den fünf Grundgegebenheiten $\mathfrak{M}$, $*$, Γ, $\precsim$, E der Theorie abhängig sind, können sie in diesem Sinne als *absolute Schranken* angesprochen werden. Nach Satz 17.1 besteht $\mathfrak{E}^*$ genau aus denjenigen Elementen der Grundmenge, denen in jedem i-System, zu dessen Feld sie gehören, ein und derselbe Funktionswert zugeordnet wird, der überdies mit den absoluten Schranken übereinstimmt. Wir legen deshalb fest: $\langle\mathfrak{E}^*,\chi^*\rangle$ heiße das *absolute i-System.*

§ 18. Universelle i-Systeme

Die in § 16 angebahnte Entwicklung soll hier zur Konstruktion universeller i-Systeme weitergeführt werden. Es sei aber schon vorgängig betont, daß dazu das Auswahlaxiom beansprucht werden muß.

Satz 18.1:[24]) *Jedes i-System kann zu einem universellen i-System fortgesetzt werden.*

Beweis: Seien $\langle\mathfrak{F},\varphi\rangle$ ein zum n-Gefüge $\square = \langle\mathfrak{M}, *, \Gamma, \precsim, E\rangle$ gehöriges i-System, $\oplus$ die Menge aller zu $\square$ gehörigen i-Systeme und

$$\ominus = \{\langle\mathfrak{G},\psi\rangle \in \oplus \mid \langle\mathfrak{F},\varphi\rangle \precsim \langle\mathfrak{G},\psi\rangle\}\,.$$

Nach Satz 11.11 ist $\ominus$ durch $\precsim$ teilgeordnet und wegen $\langle\mathfrak{F},\varphi\rangle \in \oplus$ nicht-

[24]) Vgl. S. Banach [14], Théorèmes 15, 16.

leer. Seien ferner $\triangle$ eine nichtleere Kette von $\ominus$ und $\mathfrak{F}_o = \cup\, \mathfrak{G}\, [\langle \mathfrak{G}, \psi \rangle \in \triangle]$. Man überzeugt sich leicht davon, daß $\mathfrak{F}_o$ ein i-Feld ist. Durch die Festlegung $\varphi_o(A) = \psi(A)\ [A \in \mathfrak{G};\ \langle \mathfrak{G}, \psi \rangle \in \triangle]$ ist in eindeutiger Weise über $\mathfrak{F}_o$ eine i-Funktion φ_o definiert. Somit gehört $\langle \mathfrak{F}_o, \varphi_o \rangle$ zu $\ominus$. Gewiß ist $\langle \mathfrak{F}_o, \varphi_o \rangle$ eine obere Schranke von $\triangle$; genauer ist $\langle \mathfrak{F}_o, \varphi_o \rangle = sup\ \triangle$. Wir haben jetzt nachgewiesen, daß $\ominus$ induktiv geordnet ist, und nach dem ZORNschen Lemma besitzt $\ominus$ mindestens ein maximales Element $\langle \mathfrak{H}, \omega \rangle$. $\langle \mathfrak{H}, \omega \rangle$ ist ein universelles i-System. In der Tat: Wir treffen die Gegenannahme und unterscheiden zwei Fälle:

1) $\langle \mathfrak{H}, \omega \rangle$ nicht abgeschlossen;
2) $\langle \mathfrak{H}, \omega \rangle$ abgeschlossen.

Im Falle 1) liefert der Permanenzsatz 15.1 und im Falle 2) der Fortsetzungssatz 16.1 den Widerspruch zur Maximalität von $\langle \mathfrak{H}, \omega \rangle$. $\langle \mathfrak{H}, \omega \rangle = \langle \mathfrak{M}, \omega \rangle$ ist also ein universelles i-System, welches das ursprüngliche i-System $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ fortsetzt, und die Existenz eines solchen war die Behauptung.

Als einfaches Korollar dieses Fortsetzungssatzes und des Existenzkriteriums 14.1 ergibt sich der

Existenzsatz 18.2:[25]) *Notwendig und hinreichend für die Existenz eines dem n-Gefüge* $\square$ *assoziierten universellen i-Systems ist die Bedingung*

$$\mathsf{M} \cdot i_E \precsim \mathsf{N} \cdot i_E \Longrightarrow |\mathsf{M}| \leqslant |\mathsf{N}| \,. \tag{81}$$

§ 19. Beantwortung der Kardinalfragen

Wir beziehen uns auf die Vorbereitungen in § 12 und stellen die gewonnenen Resultate wie folgt zusammen:

A. *Zum n-Gefüge* $\square$ *gibt es dann und nur dann ein assoziiertes i-System, wenn die das Wechselspiel zwischen* Γ, $\precsim$ *und E beschreibende Bedingung* (81) *erfüllt ist* (vgl. § 14).

B. *Genau die im absoluten i-System* $\langle \mathfrak{E}^*, \chi^* \rangle$ *bewertbaren Elemente der Grundmenge* $\mathfrak{M}$ *sind absolut bewertbar* (vgl. § 17).

C. *Genau die Elemente des Normfeldes* $\mathfrak{E}$ *sind unbedingt bewertbar; dagegen gibt es keine unbedingt unbewertbaren Elemente in der Grundmenge* $\mathfrak{M}$ (vgl. §§ 14, 18).

Die zuletzt erwähnte Sachlage kann man als Lösbarkeit des allgemeinen Bewertungsproblems in unserem Sinne bezeichnen.

---

[25]) Vgl. A. TARSKI [16], Satz 1.58, p. 56.

4. Kapitel: Beispiele

Die nachfolgenden Ausführungen haben zum Zweck, die im vorigen Kapitel entwickelte allgemeine Theorie an Beispielen zu illustrieren. Gleichzeitig werden noch Fragen beantwortet, die sich im Laufe der Theorie gestellt haben mögen. Insbesondere wird die Existenz invarianter Funktionen über normierten Gefügen belegt.

§ 20. Deckungsmonotone Inhaltsoperatoren

Es sei R ein *abstrakter Raum* mit den Elementen $x, y, z, \ldots$, Γ eine *kommutative Gruppe* eineindeutiger Abbildungen von R auf sich und E ($\emptyset \neq E \subset R$) eine ein für allemal ausgezeichnete *Einheitsmenge*. Eine Teilmenge A von R heiße *E-beschränkt*[26]), wenn endlich viele Transformationen $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \in \Gamma$ so existieren, daß für die Γ-Bilder $\sigma_\varrho E = \{\sigma_\varrho x \mid x \in E\}$ von E gilt: $A \subset \bigcup_{\varrho=1}^{r} \sigma_\varrho E$. Trivialerweise sind E und $\emptyset$ E-beschränkt; mit A, B sind $A \cup B$ und τA (für jedes $\tau \in \Gamma$) E-beschränkt. Es bezeichne nun $\mathfrak{M}$ die Menge der E-beschränkten Teilmengen $A, B, C, \ldots$ von R. Zwei solche seien genau dann verknüpfbar, wenn sie disjunkt sind, und in diesem Falle gelte $A * B = A \cup B$. Jede Transformation aus Γ erzeugt offenbar einen Automorphismus in der Menge $\mathfrak{M}$, und ohne Einbuße an Klarheit kann gesagt werden, daß Γ eine kommutative Gruppe eineindeutiger Abbildungen von $\mathfrak{M}$ auf sich sei. Genau genommen werden zunächst Automorphismen in der Menge aller Teilmengen von R erzeugt, von denen man sodann die Restriktionen auf $\mathfrak{M}$ bildet. Im Anschluß an die Bezeichnung $[A]$ für die charakteristische Funktion der Menge $A \in \mathfrak{M}$ definieren wir eine binäre Relation $\precsim$ zwischen den Belegungen über $\mathfrak{M}$ wie folgt:

$$f \precsim g \Longleftrightarrow \sum_{A \in \mathfrak{M}} f(A)[A](x) \leqslant \sum_{A \in \mathfrak{M}} g(A)[A](x) \quad [\textit{alle } x \in R].$$

Wir behaupten nun, daß die Begriffsfünfheit $\langle \mathfrak{M}, *, \Gamma, \precsim, E \rangle$ ein n-Gefüge sei. Dazu sind zunächst die Postulate des Gefüges nach § 7 zu verifizieren. Dies bereitet keine Schwierigkeiten, und wir begnügen uns mit einigen Hinweisen: Das nach (III) geforderte neutrale Element O ist die leere Teilmenge von R. Bei den Nachweisen von (VIII), (IX), (X) bedenke man $[A * B] = [A] + [B]$; $[\tau A](x) = [A]\,(\tau^{-1}x)$; $A \cap B = \emptyset \Longrightarrow \tau A \cap \tau B = \emptyset$. Daß die Einheitsmenge E ein Normelement im Sinne von § 9 ist, ersieht man aus der aus $A \subset \bigcup_{\varrho=1}^{r} \sigma_\varrho E$ folgenden Beziehung $i_O \precsim i_A \precsim \sum_{\varrho=1}^{r} i_E^{\sigma_\varrho}$. Es liegt also ein n-Gefüge

---

[26]) Daß hier die in § 9 eingeführte Benennung gebraucht werden darf, wird sich weiter unten rechtfertigen.

vor. Die nach Satz 8.4 in der Grundmenge $\mathfrak{M}$ induzierte Teilordnungsrelation ist die mengentheoretische Inklusion, so daß also $A \leqslant B \Longleftrightarrow A \subset B$ gilt.

Nun durchschreiten wir kurz die im dritten Kapitel dargelegte Theorie und halten die wichtigsten Positionen für das vorliegende Beispiel fest. Die Belegungsäquivalenz von Mengen wird an anderen Orten *Deckungsäquivalenz* genannt[27]). Die Spezialisierung der Begriffe i-Feld, i-Funktion und i-System führt auf die Begriffe *Inhaltsfeld*, *Inhaltsoperator* und *Inhaltssystem*[28]). Zur Definition des Inhaltsoperators bemerken wir, daß dieser in der Inhaltstheorie meistens als reellwertige Funktion mit den Eigenschaften Additivität (62), Γ-Invarianz (I2), Normiertheit (I3) und Definitheit (65) gekennzeichnet wird. Die aus der Belegungsmonotonie (I1) durch Spezialisierung hervorgehende Eigenschaft, die sogenannte *Deckungsmonotonie*, erscheint demnach in der axiomatischen Inhaltstheorie als fakultative Eigenschaft eines Inhaltsoperators. Es war aber ein Anliegen der beiden inhaltstheoretischen Studien [3] und [36] zu zeigen, daß die bekannten klassischen sowie gewisse in der axiomatischen Theorie ausgezeichnete Inhaltsoperatoren diese Eigenschaft besitzen, weshalb die durch (I1) geforderte Beschränkung auf deckungsmonotone Inhaltsoperatoren nicht als Störung empfunden werden muß[29]). — Es existieren Inhaltsfelder ohne die Eindeutigkeitseigenschaft[30]), wodurch der Beweis dafür erbracht ist, daß (F4) von (F1), (F2), (F3) logisch unabhängig ist. — Ober- und Unterfunktion eines Inhaltsoperators heißen *äußerer* und *innerer Inhalt* oder *Ober*- und *Unterinhalt*[31]). — Aus den Ausführungen von § 14 ist die Bedeutung der aus (81) hervorgehenden Bedingung (y) $\sum_{\tau \in \mathsf{M}} [\tau E](x) \leqslant \sum_{\tau \in \mathsf{N}} [\tau E](x)$ [*alle* $x \in R$] $\Longrightarrow |\mathsf{M}| \leqslant |\mathsf{N}|$ klar ersichtlich; sie wurde beispielsweise für die translationsinvariante Theorie der euklidischen Räume mit dem halbabgeschlossenen Einheitswürfel als Einheitsmenge als erfüllt nachgewiesen[32]). Die Benennung *Normsystem* findet sich auch in der Inhaltstheorie[33]). — Eine Bemerkung zum Permanenzsatz und dessen Ideenkreis wurde früher angeführt[21]). — In der translationsinvarianten Theorie der euklidischen Räume ist das absolute

---

27) [3], Def. 3, p. 135; [36], Abschnitt I.

28) Vgl. [6], p. 206; [36], Abschnitt II; für euklidische Räume speziell [3], p. 123; [13], p. 96.

29) Bekanntlich kommt diese Beschränkung derjenigen auf zerlegungsmonotone Inhaltsoperatoren gleich, sobald eine gewisse Auslegbarkeitseigenschaft gewährleistet ist (vgl. [36], Satz 8). In jedem Fall ist sie weniger einschneidend als die Beschränkung auf Inhaltsfelder mit der Körpereigenschaft (vgl. [36], Satz 3).

30) Vgl. H. HADWIGER [13], p. 122 und p. 135, Anm. 24. Das dort konstruierte Inhaltssystem mit dem LEBESGUEschen Feld ist nach allgemeinen Sätzen deckungsmonoton. Für eine analoge Sachlage vgl. S. BANACH [14], Théorème 20, p. 27, wo erstmals eine Frage dieser Art behandelt wurde.

31) Vgl. Fußnote 19.

32) H. HADWIGER [3], Hilfssatz 2, p. 128.

33) [13], p. 130.

Inhaltssystem bekannt als das TARSKIsche *System*[34]). — Die universellen Inhaltssysteme pflegt man auch als BANACHsche *Systeme*[35]) zu bezeichnen.

Nach diesem kurzen Gang, der den Anschluß an die allgemeine Theorie gewährleisten sollte, versetzt uns diese in die Lage, die Hauptresultate der Inhaltstheorie wie folgt zu formulieren:

A. *Genau dann, wenn die Grundgegebenheiten der Bedingung* (y) *genügen, gibt es deckungsmonotone Inhaltsoperatoren.*

Für den Fall, daß die Existenz deckungsmonotoner Inhaltsoperatoren gesichert ist, ergibt sich weiter:

B. *Genau die im absoluten System* $\langle \mathfrak{C}^*, \chi^* \rangle$ *meßbaren E-beschränkten Mengen sind absolut meßbar.*

C. *Genau die endlichen Vervielfachungen der Einheitsmenge E sind unbedingt meßbar. Dagegen gibt es keine unbedingt unmeßbaren E-beschränkten Mengen,* positiv gewendet: *Jede E-beschränkte Teilmenge des abstrakten Raumes R kann deckungsmonoton ausgemessen werden.* Da dies zudem mit einem einzigen (universellen) Inhaltssystem realisiert werden kann, so ist damit das allgemeine Inhaltsproblem bei kommutativer Transformationsgruppe als lösbar erkannt.

§ 21. Lineare Gefüge und lineare *i*-Systeme

Wir treffen in diesem Paragraphen die Vorbereitungen für eine wichtige Gattung von Beispielen, die unter einem einheitlichen Gesichtspunkt behandelt werden können.

Wir betrachten einen durch die Relation $\leqslant$ teilgeordneten Vektorraum $\mathfrak{M}$ über dem Körper $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen, in welch ersterem eine kommutative Transformationsgruppe Γ wirkt. Dabei sollen die folgenden Verträglichkeiten bestehen:

(V 1) $\quad A, B, C \in \mathfrak{M};\ A \leqslant B \Longrightarrow A + C \leqslant B + C\,,$

(V 2) $\quad A, B \in \mathfrak{M};\ a \in \mathbf{R};\ A \leqslant B;\ a \geqslant 0 \Longrightarrow aA \leqslant aB\,,$

(V 3) $\quad A, B \in \mathfrak{M};\ A \leqslant B \Longrightarrow -B \leqslant -A\,,$

(V 4) $\quad A, B \in \mathfrak{M};\ \tau \in \Gamma;\ A \leqslant B \Longrightarrow \tau A \leqslant \tau B\,,$

(V 5) $\quad A, B \in \mathfrak{M};\ a, b \in \mathbf{R};\ \tau \in \Gamma \Longrightarrow \tau(aA + bB) = a\tau A + b\tau B\,.$

Insbesondere wird also durch (V 5) die Linearität der Transformationen von Γ ausgesagt. Als einfache Folgerungen von (V 1), (V 2), (V 3) und der Definition des Vektorraumes ergeben sich:

---

[34]) Für die Benennung vgl. Fußnote 23, für den Begriff [3], p. 142; [13], p. 127.

[35]) Vgl. Fußnote 24 und [13], p. 131.

$$A, B, C, D \in \mathfrak{M};\ A \leqslant B,\ C \leqslant D \Longrightarrow A + C \leqslant B + D, \tag{86}$$

$$A, B, C, D \in \mathfrak{M};\ A + C \leqslant B + D,\ B \leqslant A \Longrightarrow C \leqslant D, \tag{87}$$

$$A \in \mathfrak{M};\ a, b \in \mathbf{R};\ O \leqslant A;\ a \leqslant b \Longrightarrow aA \leqslant bA. \tag{88}$$

Bezeichnet f eine Belegung über $\mathfrak{M}$, so ist klar, was man unter dem Element $\sum_{A \in \mathfrak{M}} f(A)\, A$ von $\mathfrak{M}$ zu verstehen hat. Identifiziert man die Halbverknüpfung $*$ mit der Addition $+$ in $\mathfrak{M}$ und setzt $f \lesssim g \Longleftrightarrow \Sigma f(A) A \leqslant \Sigma g(A) A$, so ist mühelos einzusehen, daß $\langle \mathfrak{M}, +, \Gamma, \lesssim \rangle$ ein Gefüge ist. Die induzierte Teilordnung in der Grundmenge $\mathfrak{M}$ fällt mit der gegebenen Teilordnung $\leqslant$ zusammen. Läßt sich weiter mit einem festen Element E von $\mathfrak{M}$ mit $O \leqslant E$, $O \neq E$ für jedes A aus $\mathfrak{M}$ die Beziehung (37) erfüllen, so heißt $\langle \mathfrak{M}, +, \Gamma, \lesssim, E \rangle$ ein *lineares n-Gefüge*. Ferner nennen wir ein zu einem linearen n-Gefüge gehöriges i-System $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ *linear*, wenn $\mathfrak{F}$ ein linearer Unterraum von $\mathfrak{M}$ und φ über $\mathfrak{F}$ linear ist; entsprechend heißen $\mathfrak{F}$ *lineares i-Feld* und φ *lineare i-Funktion*.

Wir beweisen im folgenden zwei Sätze, die den Anschluß der hier stattfindenden Betrachtung an die allgemeine Theorie herstellen.

Satz 21.1: *Voraussetzung: Es seien $\square$ ein lineares n-Gefüge und $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ ein zu $\square$ gehöriges nicht notwendig lineares i-System. Behauptung: Es gibt ein kleinstes durch $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ eindeutig bestimmtes zu $\square$ gehöriges lineares i-System $\langle \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\varphi} \rangle$ mit $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle \leq \langle \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\varphi} \rangle$.*

Wir nennen $\langle \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\varphi} \rangle$ die *lineare Hülle* von $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$. Offenbar ist der Übergang zur linearen Hülle ein Abschließungsprozeß.

Beweis:[36]) Wir beweisen vorerst die Hilfsaussage $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m \in \mathfrak{F}$; $a_1, \ldots, a_n,\ b_1, \ldots, b_m \in \mathbf{R}$; $\sum_{\nu=1}^{n} a_\nu A_\nu \leqslant \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu B_\mu \Longrightarrow \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(A_\nu) \leqslant \sum_{\mu=1}^{m} b_\mu \varphi(B_\mu)$.

a) Seien vorerst die a_ν, b_μ natürliche Zahlen. Dann folgt die Behauptung unmittelbar aus der Belegungsmonotonie von φ. — b) a_ν, b_μ ganze Zahlen: Der Effekt von Null als Vorfaktor ist trivial. Dadurch, daß in der Voraussetzung alle Glieder mit negativen Vorfaktoren auf die andere Seite geschafft werden, läßt sich dieser Fall auf a) zurückführen. — c) a_ν, b_μ rationale Zahlen: Durch Multiplikation der Voraussetzung mit einem passenden Generalnenner wird die Situation von b) hergestellt, und es folgt auch hier die behauptete Ungleichung. — d) Es seien nun die a_ν, b_μ beliebige reelle Zahlen. Zu $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_m$ gibt es nach (39) ein Element $C = \Pi \cdot E \in \mathfrak{F}$ mit $O \leqslant C$; $O \leqslant A_\nu + C$ $(\nu = 1, \ldots, n)$; $O \leqslant B_\mu + C (\mu = 1, \ldots, m)$. Zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ gibt es rationale Zahlen $a'_\nu, a''_\nu, b'_\mu, b''_\mu$ mit $a_\nu - \varepsilon < a'_\nu \leqslant a_\nu \leqslant a''_\nu < a_\nu + \varepsilon$ $(\nu = 1, \ldots, n)$;

[36]) Der hier vorgetragene Gedankengang ist zum Teil dem Beweis des Satzes 2 in [36] nachgebildet.

$b_\mu - \varepsilon < b'_\mu \leqslant b_\mu \leqslant b''_\mu < b_\mu + \varepsilon$ $(\mu = 1, \ldots, m)$. Die Voraussetzung wird nach (V1) und (88) zu $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a'_\nu (A_\nu + C) + \sum\limits_{\mu=1}^{m} b'_\mu C \leqslant \sum\limits_{\mu=1}^{m} b''_\mu (B_\mu + C) + \sum\limits_{\nu=1}^{n} a''_\nu C$. Nach Fall c) und unter Berücksichtigung der aus (65) folgenden Beziehungen $\varphi(A_\nu + C) \geqslant 0, \varphi(B_\mu + C) \geqslant 0$, $\varphi(C) \geqslant 0$ resultiert $\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(A_\nu) \leqslant \sum\limits_{\mu=1}^{m} b_\mu \varphi(B_\mu) +$ $+ c\varepsilon$ mit $c = \sum\limits_{\nu=1}^{n} \varphi(A_\nu) + \sum\limits_{\mu=1}^{m} \varphi(B_\mu) + 2(m+n)\varphi(C)$. Da $c \geqslant 0$ von ε unabhängig ist und ε beliebig gewählt wurde, so gilt auch hier die behauptete Ungleichung, und die Hilfsaussage ist bewiesen. – Wir konstruieren nun das gesuchte lineare i-System: $\tilde{\mathfrak{F}}$ sei der durch $\mathfrak{F}$ erzeugte lineare Unterraum von $\mathfrak{M}$, also in der Tat ein lineares i-Feld, das $\mathfrak{F}$ umfaßt. Nach der Hilfsaussage ist durch die Anschrift $\tilde{\varphi}(\sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu A_\nu) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} a_\nu \varphi(A_\nu)$ über $\tilde{\mathfrak{F}}$ eindeutig eine lineare monotone Γ-invariante Funktion definiert, die über $\mathfrak{F}$ mit φ übereinstimmt. Im Hinblick auf Satz 11.9 ist $\tilde{\varphi}$ eine i-Funktion und insgesamt $\langle \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\varphi} \rangle$ ein lineares i-System mit $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle \leq \langle \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\varphi} \rangle$; offenbar ist es das kleinste dieser Art, wzbw.

Mit ganz ähnlichen Überlegungen überzeugt man sich von der Richtigkeit der folgenden Beziehungen für die Ober- und Unterfunktion eines nicht notwendig linearen i-Systems:

$$A \in \mathfrak{M};\ a \in \mathbf{R};\ a \geqslant 0 \Longrightarrow \bar{\varphi}(aA) = a\bar{\varphi}(A),\ \underline{\varphi}(aA) = a\underline{\varphi}(A)\,, \tag{89}$$

$$A \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \bar{\varphi}(-A) = -\underline{\varphi}(A)\,. \tag{90}$$

Daraus ergibt sich unmittelbar der

Satz 21.2: *Sind $\square$ ein lineares n-Gefüge und $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ ein zu $\square$ gehöriges nicht notwendig lineares i-System, so ist die abgeschlossene Hülle $\langle \mathfrak{F}^*, \varphi^* \rangle$ von $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ ein lineares i-System.*

Als Folgerung der beiden letzten Sätze resultiert die Beziehung $\langle \tilde{\mathfrak{F}}, \tilde{\varphi} \rangle \leq \langle \mathfrak{F}^*, \varphi^* \rangle$ für die lineare und die abgeschlossene Hülle eines nicht notwendigerweise linearen i-Systems. Ferner läßt sich mit Satz 15.3 mühelos die Gültigkeit von $\langle \tilde{\mathfrak{F}}^*, \tilde{\varphi}^* \rangle = \langle \mathfrak{F}^*, \varphi^* \rangle$ bestätigen.

Zur Konstruktion linearer i-Systeme kann folgendes bemerkt werden:

1. In der allgemeinen Theorie ist an drei Stellen die Rede von der Konstruktion eines i-Systems: Beim Existenzkriterium 14.1, beim Permanenzsatz 15.1 und beim Fortsetzungssatz 16.1. Ist nun das in Betracht gezogene n-Gefüge linear, so vermittelt Satz 21.2 die Einsicht, daß die Sätze 15.1 und 16.1 insbesondere aus einem vorgegebenen linearen i-System ein ebensolches hervorgehen lassen, wodurch die Theorie der linearen i-Systeme gegenüber der allgemeinen Theorie eine gewisse Selbständigkeit erlangt.

2. Mit Satz 21.1 kann aus dem Erfülltsein der Existenzbedingung (81) unter Heranziehung des Normsystems ein lineares i-System gewonnen werden. Dadurch erscheint (81) als eine auch für lineare i-Systeme kompetente Existenzbedingung.

§ 22. Invariante Integrale

Sei R ein *abstrakter Raum* und Γ eine *kommutative Gruppe* eineindeutiger Abbildungen von R auf sich. Wir betrachten reellwertige Funktionen $A, B, C, \ldots$ über R. Durch die Setzung $(\tau A)(x) = A(\tau x)$ [*alle* $x \in R$] wird die Wirkung einer Transformation $\tau \in \Gamma$ auf die Funktion A beschrieben. Es bezeichne E eine ein für allemal festgelegte beschränkte nichtnegative reellwertige *Einheitsfunktion*, welche nicht identisch verschwinden soll. $\mathfrak{M}$ sei die folgende Funktionenmenge: Eine reellwertige Funktion A über R gehöre genau dann zu $\mathfrak{M}$, wenn endlich viele Transformationen $\sigma_1, \ldots, \sigma_m \in \Gamma$ existieren, die der Bedingung $|A(x)| \leqslant \sum_{\mu=1}^{m} (\sigma_\mu E)(x)$ [*alle* $x \in R$] genügen. Die soeben zum Ausdruck gebrachte Beschränktheit von A bezüglich E nennen wir fortan *E-Beschränktheit*[26]). Offensichtlich ist $\mathfrak{M}$ ein Vektorraum über dem Körper der reellen Zahlen. Ähnlich wie in § 20 legt man sich zurecht, daß Γ als kommutative Gruppe eineindeutiger Abbildungen von $\mathfrak{M}$ auf sich aufgefaßt werden kann. Wegen der Beziehung $[\tau(aA + bB)](x) = (aA + bB)(\tau x) = aA(\tau x) + bB(\tau x) = a(\tau A)(x) + b(\tau B)(x)$ [*alle* $x \in R$] erscheint jede Transformation $\tau \in \Gamma$ als eine lineare Transformation des Vektorraumes $\mathfrak{M}$. Weiter sei durch

$$A \leqslant B \Longleftrightarrow A(x) \leqslant B(x) \quad [\textit{alle } x \in R]$$

eine zweistellige Relation zwischen den Funktionen von $\mathfrak{M}$ erklärt, von der man leicht nachweist, daß sie $\mathfrak{M}$ teilordnet und den Verträglichkeitsforderungen (V 1) bis (V 4) von § 21 genügt. Nach den Ausführungen von § 21 liegt nun im dort besprochenen Sinne ein Gefüge vor. Aus der Definition von $\mathfrak{M}$ ergibt sich $i_O \lesssim i_A + \sum_{\mu=1}^{m} i_E^{\overset{\sigma}{\mu}} \lesssim 2 \sum_{\mu=1}^{m} i_E^{\overset{\sigma}{\mu}}$, also die Tatsache, daß die Einheitsfunktion E ein Normelement ist. Demzufolge stellt die Fünfheit $\langle \mathfrak{M}, +, \Gamma, \lesssim, E \rangle$ ein lineares n-Gefüge dar.

Es werden nun ganz kurz die Hauptbegriffe der Theorie gemustert. Die Belegungsäquivalenz von Funktionen heißt an anderen Orten *Deckungsäquivalenz*[37]), und die Spezialisierung der Begriffe lineares i-Feld, lineare i-Funktion und lineares i-System führt auf *Integralfeld*, *Integral* und *Integrationssystem*[38]). Die lineare Hülle $\langle \tilde{\mathfrak{E}}, \tilde{\chi} \rangle$ des Normsystems wird auch etwa als das *elementare*

---

[37]) [5], p. 117.

[38]) [1], p. 350; [4], p. 307; [5], p. 120; [7], p. 162.

Integrationssystem bezeichnet[39]). Im übrigen beachte man die Bemerkungen am Schluß des letzten Paragraphen. Es ergeben sich die folgenden Hauptaussagen der invarianten Integrationstheorie:

A. *Notwendig und hinreichend für die Existenz von Integrationssystemen ist die Bedingung* $\sum_{\tau\in\mathsf{M}} (\tau E)(x) \leqslant \sum_{\tau\in\mathsf{N}} (\tau E)(x)$ [*alle* $x \in R$] $\Longrightarrow |\mathsf{M}| \leqslant |\mathsf{N}|$.

Unter Voraussetzung der Existenz von Integrationssystemen gilt weiter:

B. *Genau die Funktionen von* $\mathfrak{E}^*$ *sind in unserem Sinne absolut integrierbar.*

C. *Genau die Funktionen von* $\tilde{\mathfrak{E}}$ *sind unbedingt integrierbar. Jede E-beschränkte reellwertige Funktion über dem abstrakten Raum* R *ist integrierbar.*

§ 23. Limitierung beschränkter Zahlenfolgen

Die dem § 22 zugrunde gelegte Situation wird wie folgt spezialisiert: R sei die Menge der natürlichen Zahlen, Γ die triviale nur aus ι bestehende Transformationsgruppe und E die charakteristische Funktion von R. Die Menge $\mathfrak{M}$ enthält sodann genau die beschränkten abzählbaren Folgen reeller Zahlen. Es liegt somit nach dem Vorangehenden ein lineares n-Gefüge vor. Die in § 10 betrachtete Pseudometrik ist hier sogar eine Metrik, und die Belegungsäquivalenz erweist sich mit der Gleichheit identisch: $A \approx B \Longleftrightarrow A = B$. Nur nebenbei sei bemerkt, daß die Metrik im hier betrachteten Fall die Gestalt $d(A, B) = \sup_\nu |a_\nu - b_\nu|$ besitzt[40]). Das Normfeld besteht aus den konstanten Folgen mit ganzzahligen nichtnegativen Gliedern, das i-Feld $\tilde{\mathfrak{E}}$ aus allen konstanten Folgen überhaupt. Die Existenzbedingung (81) ist trivialerweise erfüllt. Für die absoluten Schranken gemäß § 17 ergibt sich $A = (a_\nu) \Longrightarrow \overline{\chi}(A) = \sup_\nu a_\nu$, $\underline{\chi}(A) = \inf_\nu a_\nu$, womit sich genau die konstanten Folgen als zum linearen i-Feld $\mathfrak{E}^*$ gehörig herausstellen, das hier mit $\tilde{\mathfrak{E}}$ übereinstimmt. Eine Folge heiße *fastkonstant*, wenn sie von einem gewissen Index an konstant verläuft. Aus dem i-Feld $\mathfrak{F}$ der fastkonstanten Folgen läßt sich ein lineares i-System $\langle\mathfrak{F}, \varphi\rangle$ herstellen, wenn man jeder fastkonstanten Folge die betreffende Konstante als φ-Wert zuordnet. Für die Ober- und Unterfunktionen von φ erhält man

$$A = (a_\nu) \Longrightarrow \overline{\varphi}(A) = \lim \sup a_\nu, \quad \underline{\varphi}(A) = \lim \inf a_\nu. \tag{91}$$

Somit umfaßt das i-Feld $\mathfrak{F}^*$ genau die konvergenten Folgen reeller Zahlen, und φ^* ordnet diesen den gewöhnlichen Grenzwert zu[41]).

---

[39]) [4], p. 309.

[40]) Vgl. L. A. Ljusternik–W. I. Sobolew [37], pp. 9, 10, 16, 33. Dort wird diese Gestalt verwendet, und die Grundmenge erweist sich bezüglich der Metrik als ein nichtseparabler Banachscher Raum.

[41]) Vgl. Ky Fan [26], exemple 1, p. 138.

Im folgenden wird nun ein Zugang zu gewissen Fragen der Limitierungstheorie erörtert[42]). Bezeichnet $\mathfrak{G}$ das *Wirkungsfeld* der *Limitierungsvorschrift* ψ, so haben wir folgende Eigenschaften in Betracht zu ziehen: (L 1) *Permanenzbedingung* und (L 2) *Erweiterungsbedingung*. Von den fakultativen Eigenschaften fassen wir ins Auge: (L 3) *Additivität* von $\mathfrak{G}$ und ψ im Sinne von (F 1) und (62) bzw. (L 3′) *Linearität* von $\mathfrak{G}$ und ψ im Sinne von § 21 und schließlich (L 4) *Monotonie* von ψ im Sinne von (64). Man stellt unter Berücksichtigung der Tatsache $\Gamma = \{\iota\}$ mühelos fest, daß sich durch Zusammenfassung von $\mathfrak{G}$ und ψ ein i-System $\langle \mathfrak{G}, \psi \rangle$ ergibt, falls (L 1), (L 2), (L 3), (L 4) erfüllt sind. Mit (L 3′) statt (L 3) ist $\langle \mathfrak{G}, \psi \rangle$ ein lineares i-System; die Unterscheidung zwischen diesen beiden Fällen ist wegen § 21 für die zu beantwortende Hauptfrage unnötig. (L 1) und (L 2) besagen, daß jedes solche *Limitierungssystem* $\langle \mathfrak{G}, \psi \rangle$ eine echte Fortsetzung des vorgängig betrachteten linearen i-Systems $\langle \mathfrak{F}^*, \varphi^* \rangle$ darstellt. Nach (91), (83) und (80) gilt

$$A \in \mathfrak{G}\,;\; A = (a_\nu) \Longrightarrow \lim \mathit{inf}\, a_\nu \leqslant \psi(A) \leqslant \lim \mathit{sup}\, a_\nu\,, \tag{92}$$

und aus den Sätzen 18.1 und 21.2 folgt das Hauptergebnis: *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen kann durch ein lineares und monotones Verfahren limitiert werden. Der dabei erhaltene verallgemeinerte Grenzwert genügt der Ungleichung* (92)[43]).

Nicht zuletzt war es ein Anliegen dieser Betrachtung zur Limitierungstheorie, zu zeigen, daß erstens die faktische Ausschaltung der Gruppe Γ durch die Setzung $\Gamma = \{\iota\}$ nicht notwendig eine völlige Entartung der Theorie bedeuten muß und zweitens die lineare Hülle i.a. von der abgeschlossenen Hülle verschieden ist, wie dies am i-System $\langle \mathfrak{F}, \varphi \rangle$ der fastkonstanten Folgen ersehen werden kann.

§ 24. Zwei Gegenbeispiele

Es sollen hier anhand ganz einfacher Beispiele folgende Aussagen belegt werden:

1. *Es gibt Gefüge ohne Normelement.*
2. *Nicht in jedem n-Gefüge ist die Existenzbedingung* (81) *erfüllt.*

Damit ist in beiden Fällen eine logische Unabhängigkeit nachgewiesen.

---

[42]) Vgl. etwa K. KNOPP [38], insbesondere pp. 479/480.

[43]) Auf etwas andere Weise erzielte S. BANACH [39], p. 34, im wesentlichen dasselbe Resultat. Der dort gegebene Beweis beruht auf einem allgemeinen Fortsetzungssatz für spezielle Linearformen ([39], p. 27), ([18], p. 226), der dem HAHN-BANACHschen Ideenkreis angehört. Es ist bemerkenswert, daß man dort ohne Monotonieeigenschaft der Linearformen auskommt. Dies liegt daran, daß in der linearen Struktur ganz andersartige Möglichkeiten von vorneherein gegeben sind; die dort vorkommenden subadditiven positiv-homogenen Funktionen gestatten die Schlüsse derjenigen Art zu ziehen, die bei uns aus Monotonieforderungen erwachsen. Für etwas speziellere Sätze von diesem Typ vgl. H. HAHN [17], p. 217; S. BANACH [18], p. 212; N. BOURBAKI [40], chapitre II, p. 101.

Zu 1: $\mathfrak{M}$: Menge der abzählbaren Folgen reeller Zahlen mit höchstens endlich vielen von Null verschiedenen Gliedern. $*$, Γ, $\lesssim$ seien gleich erklärt wie in § 23. Gewiß ist $\langle\mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim\rangle$ ein Gefüge. Jedoch läßt sich mit keinem Element $E \in \mathfrak{M}$ die Bedingung (37) für alle $A \in \mathfrak{M}$ erfüllen.

Zu 2: $\mathfrak{M}$: Menge der reellen Zahlen; $*$: Addition; Γ: Gruppe der Dilatationen $\tau_c\colon A \to cA$ [$c > 0$ reell]; $f \lesssim g \Longleftrightarrow \Sigma f(A)A \leqslant \Sigma g(A)A$; $E = 1$. Ohne Mühe verifiziert man, daß $\langle\mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim, E\rangle$ ein n-Gefüge ist. Die in der Grundmenge $\mathfrak{M}$ induzierte Teilordnungsrelation ist die gewöhnliche Ordnung der reellen Zahlen. Für die Γ-Komplexe $\mathsf{M} = [\tau_{1/2}, \tau_{1/2}]$, $\mathsf{N} = [\iota]$ ergibt sich $\mathsf{M} \cdot i_E \lesssim \mathsf{N} \cdot i_E$; jedoch ist $2 = |\mathsf{M}| > |\mathsf{N}| = 1$, womit (81) verletzt ist. — Es liegt hier ein Beispiel vor, in welchem offenbar die Gruppe Γ für das Nichterfülltsein der Existenzbedingung verantwortlich ist[44]).

§ 25. Eine Kennzeichnung der reellen Logarithmusfunktion

Es handelt sich hier darum, mit gewissen Sätzen unserer Theorie das folgende bekannte Resultat der reellen Analysis zu bestätigen:

Ist $\mathfrak{M}$ die Menge der positiven reellen Zahlen und $E > 1$, so gibt es genau eine reellwertige Funktion φ über $\mathfrak{M}$, die den Bedingungen

$$A, B \in \mathfrak{M} \Longrightarrow \varphi(AB) = \varphi(A) + \varphi(B);\ A \leqslant B \Longrightarrow \varphi(A) \leqslant \varphi(B);\ \varphi(E) = 1 \qquad (93)$$

genügt. Es ist somit $\varphi(A) = {}^{E}\log A$ [*alle* $A \in \mathfrak{M}$].

Beweis: $*$ sei die Multiplikation in $\mathfrak{M}$ und $\Gamma = \{\iota\}$. Für die Ordnungsrelation $\lesssim$ zwischen den Belegungen über $\mathfrak{M}$ legen wir fest:

$$f \lesssim g \Longleftrightarrow \prod_{D \in \mathfrak{M}} D^{f(D)} \leqslant \prod_{D \in \mathfrak{M}} D^{g(D)}.$$

Man überzeugt sich mühelos davon, daß $\langle\mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim, E\rangle$ ein n-Gefüge mit erfüllter Existenzbedingung (81) darstellt und daß für jede Zahl $A \in \mathfrak{M}$ die absoluten Schranken $\bar{\chi}(A)$ und $\underline{\chi}(A)$ übereinstimmen. Mit (85) resultiert die Behauptung, wenn man bedenkt, daß im vorliegenden Fall die i-Funktionen durch (93) charakterisiert werden.

§ 26. Drehungsinvariante Eibereichfunktionale[45])

Es sei R die euklidische Ebene mit dem fest gedachten Ursprung z, und es bezeichne $\mathfrak{M}$ die Menge der nichtleeren beschränkten abgeschlossenen und

[44]) Auf ein ähnliches von H. Wielandt stammendes Gegenbeispiel wird in [4], p. 308, Fußnote 4, hingewiesen.

[45]) Dieses Beispiel verdanken wir Herrn H. Hadwiger.

konvexen Teilmengen («Eibereiche») von R. $*$ bedeute die MINKOWSKIsche Addition bezüglich z, also in vektorieller Schreibweise

$$A * B = \{x + y \mid x \in A,\ y \in B\}.$$

Bekanntlich ist $\langle \mathfrak{M}, * \rangle$ eine kommutative Halbgruppe mit dem neutralen Element $O = \{z\}$.[46]). Weiter erwähnen wir zwei Verträglichkeitsaussagen zwischen $*$ und der mengentheoretischen Inklusion:

$$A \subset B, C \subset D \Longrightarrow A * C \subset B * D, \tag{94}$$

$$A * C \subset B * D,\ B \subset A \Longrightarrow C \subset D. \tag{95}$$

(94) ist klar und (95) eine einfache Folgerung bekannter Eigenschaften der sogenannten Stützfunktion[47]). Setzt man nA für die n-malige Verknüpfung von A mit sich selbst und $0A = O[\mathit{alle}\ A \in \mathfrak{M}]$, so verstehe man unter $S(f) = \sum_{A \in \mathfrak{M}} f(A) A$ die MINKOWSKIsche Summe aller $A \in \mathfrak{M}$ mit $f(A) \neq 0$ unter Berücksichtigung der Vielfachheit $f(A)$. Für die Relation $\lesssim$ bestehe der Ansatz $f \lesssim g \Longleftrightarrow S(f) \subset S(g)$, so daß sich die in $\mathfrak{M}$ induzierte Teilordnungsrelation mit der Inklusion identifiziert. Ist schließlich Γ die (kommutative) Gruppe der Drehungen der Ebene R um z und E die Einheitskreisscheibe um z, so ergibt sich leicht, daß $\langle \mathfrak{M}, *, \Gamma, \lesssim, E \rangle$ ein n-Gefüge darstellt. Bei der Überprüfung der Postulate stütze man sich auf (94), (95), $S(f + g) = S(f) * S(g)$, $S(i_A) = A$, $\tau(A * B) = \tau A * \tau B$. Die E-Beschränktheit jedes Eibereiches A beruht auf $\tau E = E\ [\mathit{alle}\ \tau \in \Gamma]$ und der Tatsache, daß eine passende äußere Parallelmenge[48]) $A_p = A * pE$ mit ganzzahliger Spanne p den Ursprung z einschließt und A_p ihrerseits Teilmenge einer hinreichend großen Kreisscheibe rE um z ist. Die Existenzbedingung ist erfüllt, und es kann nach den absoluten Schranken gefragt werden. Es gilt die Beziehung $\overline{\chi}(A) = \underline{\chi}(A)\ [\mathit{alle}\ A \in \mathfrak{M}]$, und mit (85) folgt:

Über der Menge $\mathfrak{M}$ der ebenen Eibereiche gibt es genau eine reellwertige MINKOWSKI-additive monotone drehungsinvariante Funktion, die der Einheitskreisscheibe den Wert 1 zuordnet.

Nun sind bekanntlich Umfang c und mittlere Breite b zwei reellwertige MINKOWSKI-additive monotone drehungsinvariante Eibereichfunktionale mit $c(E) = 2\pi$ und $b(E) = 2$. Nach dem soeben bewiesenen Satz gilt $\chi^*(A) = c(A)/2\pi = b(A)/2$ für jeden ebenen Eibereich A, und als Korollar ergibt sich die von CAUCHY entdeckte Beziehung $c(A) = \pi b(A)$.[49])

---

[46]) Vgl. [13], p. 142 und [41], p. 12.

[47]) Vgl. [13]: p. 145 (39) und p. 199 (1); [41]: p. 11 (5) und p. 13 (15); [42]: p. 24 unten.

[48]) Vgl. [13], p. 147 und [41], p. 17.

[49]) Vgl. [13]: p. 208 (36), p. 210b), p. 212 (44); [42]: p. 48 (1), p. 65 (3).

LITERATURVERZEICHNIS

[1] A. KIRSCH: *Über Zerlegungsgleichheit von Funktionen und Integration in abstrakten Räumen.* Math. Ann. *124* (1952) 343–363.
[2] H. HADWIGER und A. KIRSCH: *Zerlegungsinvarianz des Integrals und absolute Integrierbarkeit.* Portugaliae Math. *11* (1952) 57–67.
[3] H. HADWIGER: *Absolut meßbare Punktmengen im euklidischen Raum.* Comm. Math. Helv. *28* (1954) 119–148.
[4] H. HADWIGER und W. NEF: *Zur axiomatischen Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen.* Math. Z. *60* (1954) 305–319.
[5] H. HADWIGER: *Deckungsaequivalenz und Zerlegungsaequivalenz bei Funktionen in abstrakten Räumen und invariante Integration.* Archiv d. Math. *5* (1954) 115–122.
[6] W. NEF: *Zerlegungsaequivalenz von Mengen und invarianter Inhalt.* Math. Ann. *128* (1954) 204–227.
[7] W. NEF: *Zerlegungsaequivalenz von Funktionen und invariante Integration.* Comm. Math. Helv. *28* (1954) 162–172.
[8] W. NEF: *Über lineare Formen, die gegenüber einer abelschen Gruppe linearer Transformationen invariant sind.* Archiv d. Math. *7* (1956) 250–258.
[9] W. NEF: *Invariante Linearformen.* Math. Nachr. *15* (1956) 123–140.
[10] W. NEF: *Über die Fortsetzung monotoner Linearformen.* Math. Z. *66* (1956) 129–142.
[11] W. NEF: *Monotone Linearformen auf teilgeordneten Vektorräumen.* Monatshefte Math. *60* (1956) 190–197.
[12] W. NEF: *Über monotone Linearformen, die im* LEBESGUE*schen Sinne stetig sind.* Archiv d. Math. *8* (1957) 334–335.
[13] H. HADWIGER: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.
[14] S. BANACH: *Sur le problème de la mesure.* Fund. Math. *4* (1923) 7–33.
[15] A. TARSKI: *Über das absolute Maß linearer Punktmengen.* Fund. Math. *30* (1938) 218–234.
[16] A. TARSKI: *Algebraische Fassung des Maßproblems.* Fund. Math. *31* (1938) 47–66.
[17] H. HAHN: *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen.* J. reine angew. Math. *157* (1926) 214–229.
[18] S. BANACH: *Sur les fonctionnelles linéaires I, II.* Studia Math. *1* (1929) 211–216, 223–239.
[19] J. v. NEUMANN: *Zur allgemeinen Theorie des Maßes.* Fund. Math. *13* (1929) 73–116, Zusatz 333.
[20] P. R. HALMOS: *Measure Theory.* New York: Van Nostrand 1950.
[21] K. MAYRHOFER: *Inhalt und Maß.* Springer, Wien 1952.
[22] O. HAUPT, G. AUMANN und C. PAUC: *Differential- und Integralrechnung.* 3 Bände. W. de Gruyter, Berlin 1948/1950/1955.
[23] C. CARATHEODORY: *Maß und Integral und ihre Algebraisierung.* Birkhäuser, Basel 1956.
[24] G. BIRKHOFF: *Lattice Theory.* Amer. Math. Soc., New York 1948.
[25] V. GLIVENKO: *Géométrie des systèmes de choses normées.* Amer. J. Math. *58* (1936) 799–828.
[26] KY FAN: *Le prolongement des fonctionnelles continues sur un espace semi-ordonné.* Revue Scientifique (Revue Rose) *82* (1944) 131–139.
[27] H. HERMES: *Einführung in die Verbandstheorie.* Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955.
[28] P. ALEXANDROFF und H. HOPF: Topologie I. Springer, Berlin 1935.
[29] A. LINDENBAUM: *Contributions à l'étude de l'espace métrique I.* Fund. Math. *8* (1926) 209–222.
[30] G. AUMANN: *Reelle Funktionen.* Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.
[31] E. KAMKE: *Mengenlehre.* Sammlung Göschen. W. de Gruyter, Berlin 1955 (3. Aufl.).
[32] S. EILENBERG und S. MACLANE: *General theory of natural equivalences.* Trans. Amer. Math. Soc. *58* (1945) 231–294.
[33] C. EHRESMANN: *Gattungen von lokalen Strukturen.* J. ber. Deutsche Math. Ver. *60* (1957) 49–77.
[34] M. HASSE: *Einige Bemerkungen über Graphen, Kategorien und Gruppoide.* Math. Nachr. *22* (1960) 255–270.

[35] N. BOURBAKI: *Topologie générale.* Hermann, Paris 1951.
[36] H. HADWIGER und J. RÄTZ: *Zur Deckungsmonotonie von Inhaltsoperationen.* Erscheint demnächst in den Math. Nachrichten.
[37] L. A. LJUSTERNIK – W. I. SOBOLEW: *Elemente der Funktionalanalysis.* Akademie-Verlag, Berlin 1955.
[38] K. KNOPP: *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen.* Springer, Berlin 1931 (3. Aufl.).
[39] S. BANACH: *Théorie des opérations linéaires.* Warszawa 1932.
[40] N. BOURBAKI: *Espaces vectoriels topologiques.* Hermann, Paris 1953.
[41] H. HADWIGER: *Altes und Neues über konvexe Körper.* Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1955.
[42] T. BONNESEN und W. FENCHEL: *Theorie der konvexen Körper.* Ergebnisse der Math. und ihrer Grenzgebiete, Bd. *3.* Springer, Berlin 1934.

(Eingegangen, den 16. März 1963)