

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 37 (1962-1963)

Artikel: Plongements différentiables dans le domaine stable.
Autor: Haefliger, André
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-28615>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Plongements différentiables dans le domaine stable

par ANDRÉ HAEFLIGER, Genève

En hommage à ARNOLD SHAPIRO

L'idée que les obstructions au plongement d'un polyèdre fini K dans l'espace euclidien se trouvent dans la cohomologie du carré symétrique réduit de K , remonte à VAN KAMPEN [5]. Cette idée a été reprise avec une grande extension par WU WEN TSUN [13] et ARNOLD SHAPIRO [6] indépendamment. Ces deux auteurs ont notamment comblé une lacune dans la démonstration de VAN KAMPEN [5] de la suffisance d'une condition nécessaire pour pouvoir plonger un complexe de dimension n dans R^{2n} . Tous deux s'appuient essentiellement sur le procédé fondamental imaginé par WHITNEY [11] pour éliminer les paires de points doubles isolés de signes opposés, dans le cas différentiable.

WU WEN TSUN a étudié dans [13] la cohomologie du produit symétrique réduit d'un complexe et d'une variété et il a défini des classes obstructions au plongement liées étroitement aux classes caractéristiques. Il a été d'autre part l'initiateur dans l'étude des isotopies [14], [15], [16]. De son côté ARNOLD SHAPIRO a suggéré dans [6] une méthode, pour l'étude des obstructions d'ordre supérieur, qu'il a développée dans des travaux non publiés, et il a donné une idée précise de ce qu'est le domaine stable.

Suivant le point de vue de VAN KAMPEN, SHAPIRO et WU, nous nous bornons à considérer ici exclusivement le cas différentiable. Cependant tous les théorèmes de cet article sont probablement aussi vrai pour les plongements de polyèdres finis dans une variété combinatoire. En revanche, les restrictions sur les dimensions (*domaine stable*) sont essentielles pour chacun des théorèmes énoncés ici, aussi bien dans le cas combinatoire que différentiable.

Au § 1, nous énonçons les théorèmes généraux, nous proposant d'en tirer les conséquences (même les plus immédiates) dans une publication ultérieure¹). Leur démonstration comprend deux parties distinctes, et suit le même plan que l'article [11] de H. WHITNEY consacré au plongement d'une variété de dimension n dans R^{2n} . Le but de la première partie (§ 2) est la construction d'une immersion convenable; elle utilise la classification des immersions de SMALE-HIRSCH (§ 4) et se trouve essentiellement dans HAEFLIGER-HIRSCH (§ 3). La seconde partie (§ 3 et § 4) consiste à déformer cette immersion en un plongement par une homotopie régulière d'immersions. Notre méthode est fortement influencée par celle qu'utilise A. SHAPIRO dans le cas de la première obstruction (§ 6); nous avons d'ailleurs grandement profité d'une conversation en mars 1960 avec ARNOLD SHAPIRO qui nous avait indiqué les principales idées géométriques de sa généralisation aux obstructions d'ordre supérieur.

¹) Voir mon exposé au séminaire Bourbaki, décembre 1962.

Les techniques du § 4 sont étendues pour couvrir le cas des isotopies (§ 5) et des variétés à bord (§ 6) où les restrictions de dimensions peuvent être affaiblies.

La lecture de cet article est indépendante de celle de [2]. C'est la théorie des immersions qui permet d'éviter ici la considération des singularités. La plupart des résultats de [2] peuvent s'obtenir comme conséquence des théorèmes de ce travail.

1. Enoncés des résultats

1.1. Etant donné un espace topologique X , on désigne par X^2 le produit topologique $X \times X$ et par Δ_X la diagonale de X^2 , c'est-à-dire l'ensemble des couples (x, x) , où $x \in X$.

Si Y est un autre espace topologique, une *application équivariante*

$$F: X^2 \rightarrow Y^2$$

est une application continue qui commute avec les symétries qui échangent les facteurs de X^2 et Y^2 : si $F(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, alors $F(x_2, x_1) = (y_2, y_1)$.

Une application $F: X^2 \rightarrow Y^2$ est une *application isovariante* si elle est équivariante et si de plus $F^{-1}(\Delta_Y) = \Delta_X$.

Une *homotopie équivariante* (resp. *isovariante*) $F_t: X^2 \rightarrow Y^2$ est une homotopie qui, pour chaque valeur du paramètre t , est une application équivariante (resp. isovariante).

Toute application continue $f: X \rightarrow Y$ détermine une application équivariante, à savoir $f^2: X^2 \rightarrow Y^2$. Si de plus f est biunivoque, alors f^2 est isovariante.

Si $f_t: X \rightarrow Y$ est une homotopie, alors f_t^2 est une homotopie équivariante. Si f_t est une isotopie, c'est-à-dire, si pour tout t , f_t est biunivoque, alors f_t^2 est une homotopie isovariante.

Si l'application f est homotope à une application biunivoque, alors il existe une homotopie équivariante de X^2 dans Y^2 reliant f^2 à une application isovariante.

Les théorèmes suivants montrent que la réciproque est vraie dans le cas différentiable et avec d'importantes restrictions de dimensions (domaine stable).

1.2. Sauf mention explicite du contraire, toutes les variétés, applications et plongements sont indéfiniment différentiables. Rappelons qu'un *plongement différentiable* (dans notre terminologie un plongement) d'une variété V dans une variété V' est une application différentiable f biunivoque de V dans V' qui est, en tout point de V , de rang égal à la dimension de V en ce point.

Deux plongements f_0 et f_1 de V dans V' sont *isotopes* s'il existe une homotopie f_t différentiable (c'est-à-dire que l'application F de $V \times [0, 1]$

dans V' définie par $F(x, t) = f_t(x)$ est différentiable) reliant f_0 à f_1 et qui est un plongement pour tout t . Si les applications f_0 et f_1 sont propres (c'est-à-dire si l'image inverse par f_0 et f_1 de tout compact de V' est un compact de V) et si f_t est indépendant de t en dehors d'un compact de V , cette définition équivaut à la suivante (cf. THOM [9]): il existe une isotopie h_t de V' sur V' , fixe en dehors d'un compact de V , telle que h_0 soit l'application identique de V' et que $f_1 = h_1 f_0$.

Une homotopie h_τ , $\tau \in [0, 1]$, reliant deux applications f_0 et f_1 de V dans M est homotope à une homotopie h'_τ reliant f_0 à f_1 s'il existe une application $h_{\tau,t}: V \rightarrow M$, $\tau, t \in [0, 1]$, telle que $h_{\tau,0} = h_\tau$, $h_{\tau,1} = h'_\tau$, $h_{0,t} = f_0$ et $h_{1,t} = f_1$.

1.3. Théorème 1. *Soient V une variété compacte (avec ou sans bord) de dimension n et V' une variété de dimension n' .*

a) *Supposons $2n' \geq 3(n+1)$. Une application continue f de V dans V' est homotope à un plongement f_1 si et seulement s'il existe une homotopie équivariante continue $H_t: V^2 \rightarrow V'^2$ reliant f^2 à une application isovariante H_1 . De plus on peut construire f_1 de sorte que f_1^2 et H_1 soient reliés par une homotopie isovariante.*

b) *Supposons $2n' > 3(n+1)$. Une homotopie f_τ reliant deux plongements f_0 et f_1 de V dans V' est homotope à une isotopie reliant f_0 à f_1 si et seulement s'il existe une homotopie équivariante continue $H_{\tau,t}: V^2 \rightarrow V'^2$, $\tau, t \in [0, 1]$, telle que $H_{\tau,0} = f_\tau^2$, $H_{0,t} = f_0^2$, $H_{1,t} = f_1^2$ et que $H_{\tau,1}$ soit une homotopie isovariante.*

1.4. Rappelons qu'une immersion f d'une variété V dans une variété V' est une application différentiable dont le rang en tout point de V est égal à la dimension de V en ce point. Deux immersions f_0 et f_1 sont *régulièrement homotopes* s'il existe une homotopie différentiable f_τ (appelée homotopie régulière) reliant f_0 à f_1 et qui est une immersion pour chaque valeur de τ . Remarquons que si $f: V \rightarrow V'$ est une immersion, l'application équivariante $f^2: V^2 \rightarrow V'^2$ est telle que Δ_V est ouvert dans $(f^2)^{-1}(\Delta_{V'})$.

Théorème 2. *Soit V une variété compacte (avec ou sans bord) de dimension n et soit V' une variété de dimension n' .*

a) *Supposons $2n' \geq 3(n+1)$. Une immersion f de V dans V' est régulièrement homotope à un plongement f_1 si et seulement s'il existe une homotopie équivariante continue $H_t: V^2 \rightarrow V'^2$ reliant f^2 à une application isovariante H_1 et telle que Δ_V soit ouvert dans $H_t^{-1}(\Delta_{V'})$ pour tout t . De plus on peut construire f_1 de sorte que f_1^2 et H_1 soient reliés par une homotopie isovariante.*

b) *Supposons $2n' > 3(n+1)$. Une homotopie régulière f_τ reliant deux plongements f_0 et f_1 de V dans V' est régulièrement homotope à une isotopie reliant f_0 à f_1 si et seulement s'il existe une homotopie équivariante continue*

$H_{\tau,t}: V^2 \rightarrow V'^2$ telle que $H_{\tau,0} = f_\tau^2$, $H_{0,t} = f_0^2$, $H_{1,t} = f_1^2$, que $H_{\tau,1}$ soit une homotopie isovariante et que Δ_V soit ouvert dans $H_{\tau,t}^{-1}(\Delta_{V'})$ pour tout τ, t .

1.5. *Compléments aux énoncés des théorèmes 1 et 2.* Pour ne pas surcharger les énoncés des théorèmes précédents, nous ajoutons séparément ci-dessous quelques précisions.

Dans les théorèmes 1, a) et 2, a), on peut supposer que V n'est pas forcément compacte, mais alors que f est une application propre dont la restriction à un voisinage d'un fermé A de V est déjà un plongement, le complémentaire de A dans V étant relativement compact. Si en plus des hypothèses du th. 1, a) ou du th. 2, b) on suppose que

$\alpha)$ H_t est fixe sur A^2 , alors l'homotopie f_t reliant f à f_1 pourra être supposée fixe sur A .

$\beta)$ Si de plus $H_t((V - A) \times A) \cap \Delta_V = \emptyset$ pour tout t , on pourra alors supposer de plus que $f_t(A) \cap f_t(V - A) = \emptyset$.

Dans les théorèmes 1, b) et 2, b), on a des précisions analogues en supposant que l'homotopie f_τ est une application propre dont la restriction à un voisinage de A est un plongement indépendant de τ , et que les conditions $\alpha)$ et $\beta)$ sont vérifiées pour $H_{\tau,t}$. Nous laissons au lecteur le soin de les énoncer complètement.

1.6. *Cas où la variété V' est l'espace numérique R^m .*

Les théorèmes 1 et 2 sont alors équivalents aux théorèmes suivants (cf. [1]).

Une application F de $V^2 - \Delta_V$ (produit $V \times V$ privé de sa diagonale) dans S^{m-1} (sphère unité dans R^m) sera dite équivariante si $F(x_1, x_2) = -F(x_2, x_1)$.

Théorème 1'. Soit V une variété compacte de dimension n . La correspondance qui associe à tout plongement f de V dans R^m l'application équivariante

$\bar{f}: V^2 - \Delta_V \rightarrow S^{m-1}$ définie par $\bar{f}(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{|f(x_1) - f(x_2)|}$ induit une appli-

cation de l'ensemble des classes d'isotopie des plongements de V dans R^m dans l'ensemble des classes d'homotopie équivariante de $V^2 - \Delta_V$ dans S^{m-1} .

Cette correspondance est surjective si $2m \geq 3(n+1)$; elle est bijective si $2m > 3(n+1)$.

Pour toute immersion f de V dans R^m , il existe un voisinage U de Δ_V dans V^2 tel que si $(x_1, x_2) \in U - \Delta_V$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$. L'application $\bar{f}(x_1, x_2) = (f(x_1) - f(x_2)) / |f(x_1) - f(x_2)|$ est ainsi définie sur $U - \Delta_V$.

Théorème 2'. Soit V une variété compacte de dimension n .

a) Supposons $2m \geq 3(n+1)$. Une immersion $f: V \rightarrow R^m$ est régulièrement homotope à un plongement f_1 si et seulement si l'application équivariante

$\bar{f}: U - \Delta_V \rightarrow S^{m-1}$ (où U est un voisinage convenable de Δ_V) peut s'étendre suivant une application équivariante $F: V^2 - \Delta_V \rightarrow S^{m-1}$. Le plongement f_1 peut être construit de sorte que \bar{f}_1 soit relié à F par une homotopie équivariante.

b) Supposons $2m > 3(n+1)$. Une homotopie régulière f_t reliant les plongements f_0 et f_1 de V dans R^m est régulièrement homotope à une isotopie reliant f_0 à f_1 si l'homotopie équivariante $\bar{f}_t: U - \Delta_V \rightarrow S^{m-1}$ (où U est un voisinage assez petit de Δ_V) peut s'étendre suivant une homotopie équivariante H_t de $V^2 - \Delta_V$ dans S^{m-1} telle que $H_0 = \bar{f}_0$ et $H_1 = \bar{f}_1$.

Nous laissons au lecteur le soin de formuler dans ce cas le complément 1.5.

1.7. *Remarques.* 1. L'espace quotient du produit $(V^2 - \Delta_V) \times S^{m-1}$ obtenu en identifiant (x_1, x_2, s) et $(x_2, x_1, -s)$, où $x_1, x_2 \in V$, $s \in S^{m-1}$, est un fibré E en sphères S^{m-1} dont la base V^* est le carré symétrique réduit de V (obtenu en identifiant dans $V^2 - \Delta_V$ les couples (x_1, x_2) et (x_2, x_1)).

Les applications équivariantes de $V^2 - \Delta_V$ dans S^{m-1} correspondent canoniquement aux sections du fibré E , et les classes d'homotopie d'applications équivariantes aux classes d'homotopie des sections de E . Ainsi par le théorème 1', le problème de la classification des plongements de V dans R^m est ramené, dans le domaine stable, à un problème classique de topologie algébrique, à savoir celui de la classification des classes d'homotopie des sections du fibré E .

On peut remarquer que dans le problème de l'existence d'un plongement d'une variété compacte V dans R^m , les obstructions sont des éléments de $H^{i+1}(V^*; \pi_i(S^{m-1}))$; pour l'existence d'une isotopie reliant deux plongements de V dans R^m , les obstructions se trouvent dans $H^i(V^*; \pi_i(S^{m-1}))$.

Remarquons enfin que les obstructions à construire un plongement régulièrement homotope à une immersion donnée sont des éléments du groupe de cohomologie à support compact $H_K^{i+1}(V^*; \pi_i(S^{m-1}))$.

2. Il serait facile d'obtenir le théorème d'approximation de [2] (et même pour le cas des variétés à bord) à partir des démonstrations du présent travail et du théorème d'approximation des immersions de M. HIRSCH (cf. [4], § 5).

2. Comment le théorème 1 se déduit du théorème 2.

2.1. Le pas essentiel de cette réduction utilise les résultats de HAEFLIGER-HIRSCH [3]. Pour montrer que le théorème 2 a) entraîne le théorème 1 a), nous utiliserons le fait suivant (loc. cit. 4.3, a)):

Soient V et V' des variétés de dimension n et n' resp. telles que $2n' \geq 3n + 1$. Soit $h: U(\Delta_V) \rightarrow V'^2$ une application isovariante d'un voisinage $U(\Delta_V)$

de Δ_V dans V'^2 , c'est-à-dire que si $h(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$, alors $h(x_2, x_1) = (y_2, y_1)$ et que $h(x_1, x_2) \in \Delta_V$ seulement si $x_1 = x_2$. Il existe alors une immersion f de V dans V' et une homotopie isovariante reliant les restrictions de f^2 et h à un voisinage assez petit de Δ_V et qui couvre une homotopie donnée reliant $f^2|_{\Delta_V}$ à $h|_{\Delta_V}$.

2.2. D'après ce résultat, en se plaçant dans les hypothèses du théorème 1, a), on peut remplacer f par une immersion, encore notée f , telle que les restrictions de f^2 et H_1 à un voisinage de Δ_V soient reliées par une homotopie isovariante.

Introduisons sur V et V' des métriques riemanniennes, et sur V^2 et V'^2 les métriques produits. Soit δ une fonction strictement positive définie sur Δ_V . Un δ -voisinage tubulaire U_δ de Δ_V est l'ensemble des extrémités des géodésiques dans V^2 issues des points x de Δ_V , normales à Δ_V et de longueur $\leq \delta(x)$. Si δ est assez petit, deux telles géodésiques issues de deux points distincts de Δ_V ne se rencontrent pas.

Soit, pour δ assez petit, une homotopie isovariante $H_t^\delta: U_\delta \rightarrow V'^2$ telle que, au voisinage de $t = 0$ et $t = 1$, H_t^δ soit la restriction de H_t à U_δ et que $H_t^\delta = H_t$ sur Δ_V .

Soit $\lambda(t)$ une fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, valant 1 pour $t = 0$ et $t = 1$, et telle que $0 < \lambda(t) < 1$ pour $0 < t < 1$.

Définissons une nouvelle homotopie équivariante H'_t en posant $H'_t = H_t$ en dehors de U_δ , $H'_t = H_t^\delta$ sur $U_{\lambda\delta}$. Pour un point z de $U_\delta - U_{\lambda\delta}$ situé sur une géodésique normale à Δ_V en x et coupant $\partial U_{\lambda\delta}$ et ∂U_δ en z_1 et z_2 resp., $H'_t(z)$ sera sur le segment géodésique dans V'^2 joignant les points $H_t^\delta(z_1)$ et $H_t(z_2)$ (si δ est assez petit, ce segment géodésique existe et dépend continuellement de ses extrémités) et partagera ce segment dans le même rapport que z partage le segment géodésique d'origine et d'extrémité z_1 et z_2 .

L'homotopie H'_t ainsi définie est équivariante; elle coïncide avec f^2 pour $t = 0$ et avec H_1 pour $t = 1$. De plus Δ_V est ouvert dans $H_t'^{-1}(\Delta_V)$. Ainsi toutes les hypothèses du théorème 2, a) sont vérifiées, de sorte qu'il entraîne le théorème 1, a).

On voit d'une manière analogue, en utilisant le théorème 4.3, b) de [3], que le théorème 1, b) est une conséquence du th. 1, a).

Les légères modifications à apporter à la démonstration précédente pour obtenir le complément 1.5 sont laissées au lecteur.

3. Construction d'un modèle de déformation éliminant des points doubles

Nous allons construire une immersion Φ d'une variété L dans une variété L' et une déformation Φ_t de cette immersion éliminant les points doubles de Φ . Ceci nous servira de modèle dans la démonstration du théorème 2.

3.1. Le modèle $\Phi : L \rightarrow L'$ sera construit à partir de 3 éléments :

1) Une variété compacte D (qui peut avoir un bord ∂D) munie d'une involution J sans point fixe: pour tout point $d \in D$, $Jd \neq d$ et $J^2d = d$.

2) Une fonction λ définie sur D , invariante par J (c.-à-d. $\lambda J = \lambda$), telle que $-1 \leq \lambda(d) < 1$, $\lambda^{-1}(-1) = \partial D$ et que λ n'ait pas de valeur critique sur $[-1, 0]$

3) Un fibré vectoriel L de base D .

Les dimensions des composantes connexes de D et des fibres de L peuvent varier.

Soit I l'intervalle $[-1, +1]$ et soit D' le quotient de $D \times I$ par la relation d'équivalence qui identifie les points (d, t) et $(Jd, -t)$. C'est un espace fibré de fibre I et de base D/J , le quotient de D obtenu en identifiant les points d et Jd .

Nous allons construire un fibré vectoriel L' sur D' de la manière suivante. Considérons d'abord le fibré $L \oplus_J L$ sur D image réciproque du fibré $L \times L$ par l'application antidiagonale $d \rightarrow (d, Jd)$ de D dans $D \times D$. Tout point de la fibre de $L \oplus_J L$ au-dessus de $d \in D$ est un couple (l_d, l_{Jd}) formé d'un vecteur $l_d \in L_d$ et d'un vecteur $l_{Jd} \in L_{Jd}$ (on désigne par L_d la fibre de L au-dessus de d). Le fibré L' est défini comme quotient du fibré $(L \oplus_J L) \times I$ de base $D \times I$ en identifiant (l_d, l_{Jd}, t) et $(-l_{Jd}, -l_d, -t)$.

Les classes des points (d, t) et (l_d, l_{Jd}, t) dans D' et L' seront désignées par $[d, t]$ et $[l_d, l_{Jd}, t]$ respectivement.

Définissons une immersion φ de D dans D' par $\varphi(d) = [d, \lambda(d)]$. D et D' étant identifiées aux sections nulles de L et L' , φ peut se prolonger suivant une immersion Φ de L dans L' définie par

$$\Phi(l_d) = [l_d, 0, \lambda(d)].$$

Les paires de points de L appliqués par Φ sur un même point de L' sont les paires de points se correspondant par J de la sous-variété

$$D_0 = \lambda^{-1}(0) \subset D \subset L.$$

Les deux nappes de $\Phi(L)$ qui se coupent le long de $\Phi(D_0)$ sont en position générale comme on le vérifie immédiatement (en tenant compte du fait que λ n'a pas de points critiques sur D_0).

3.2. Nous allons définir maintenant la déformation Φ_t .

Soit $\mu(d)$ une fonction sur D telle que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mu(d) < \lambda(d) + 1 \\ \mu(d) + \mu(Jd) &> 2\lambda(d) \\ \text{et } \mu(d) &= 0 \text{ si } \lambda(d) \leq -1/2. \end{aligned}$$

Une telle fonction existe; on peut prendre par exemple la fonction $\lambda(d) + 1/2$ et la multiplier par une fonction comprise entre 0 et 1, égale à 0 aux points d où $\lambda(d) \leq -1/2$ et à 1 où $\lambda(d) \geq 0$.

L'application $\varphi_t(d)$ de D dans D' définie par

$$\varphi_t(d) = [d, \lambda(d) - t\mu(d)]$$

pour $t \in [0, 1]$ est une homotopie régulière déformant $\varphi = \varphi_0$ en un plongement φ_1 . Il s'agit maintenant de la prolonger à L .

Réduisons le groupe structural de L au groupe orthogonal de façon à définir une métrique euclidienne dans les fibres de L . La longueur du vecteur $l_a \in L_a$ sera notée $|l_a|$. Soit $\alpha(x)$ une fonction paire d'une variable x , comprise entre 0 et 1 et telle que $\alpha(0) = 1$ et $\alpha(x) = 0$ pour $|x| \geq \epsilon > 0$.

Définissons

$$\Phi_t(l_a) = [l_a, 0, \lambda(d) - \alpha(|l_a|) t\mu(d)].$$

Φ_t est une homotopie régulière, égale à Φ pour $t = 0$ et qui est un plongement pour $t = 1$. De plus Φ_t est fixe en dehors d'un compact. (Comparer ces constructions avec celles de SHAPIRO [6], § 5 et 6.)

4. Démonstration du théorème 2, a) lorsque V n'a pas de bord

Les restrictions de dimensions exigées à chaque pas de la démonstration seront signalées par un astérisque dans la marge.

Nous utiliserons les notations suivantes. Le fibré des vecteurs tangents à une variété V sera noté $T(V)$. Si D est une sous-variété de V , alors $T(V; D)$ sera la restriction à D de $T(V)$, c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs de V dont l'origine appartient à D . Le fibré tangent à D s'identifie à un sous-fibré de $T(V; D)$; le fibré normal à D sera par définition le fibré quotient $N(V; D) = T(V; D)/T(D)$.

4.1. Soit f une immersion de V dans V' . Nous pouvons supposer que f est générique: en tout point $v' = f(v_1) = f(v_2)$, $v_1 \neq v_2$, l'espace tangent à V' est engendré par les images par df des espaces tangents à V en v_1 et v_2 (autrement dit, f^2 est transverse à la sous-variété Δ_V en tout point de $V^2 - \Delta_V$). De plus f n'a pas de point triple, ce qui est possible génériquement * si $2n' > 3n$ (cf. [2]).

Soit H_t l'homotopie équivariante reliant f^2 à une application isovariante H_1 et telle que Δ_V soit ouvert dans $H_t^{-1}(\Delta_{V'})$. Nous pouvons étendre la

définition de H_t à l'intervalle $[-1, +1] = I$ et, par une légère modification, obtenir une homotopie équivariante, encore notée H_t , qui vérifie en plus des hypothèses du th. 2, a) les 3 propriétés:

1) L'application $H: V^2 \times I \rightarrow V'^2$ définie par $H(v_1, v_2, t) = H_t(v_1, v_2)$ est transversale à Δ_V , en dehors de $\Delta_V \times I$. Alors

$$\Delta = H^{-1}(\Delta_V) - \Delta_V \times I$$

est une sous-variété fermée de $V \times V \times I$.

2) La projection p_1 de $V \times V \times I$ sur le premier facteur V , restreinte à Δ , est un plongement \mathfrak{P}_1 de Δ dans V . Il en sera alors de même pour la projection p_2 sur le deuxième facteur.

3) La restriction à Δ de la projection t de $V \times V \times I$ sur I est une fonction qui n'a pas de valeur critique sur $[-1, 0]$.

Pour que 1) et 3) soient vérifiés, aucune restriction de dimension n'est nécessaire. Pour 1), on utilise le théorème de transversalité de THOM (cf. [8]).

* Si l'on suppose que $2 \dim \Delta < \dim V$ (ce qui est certainement le cas si $2n' \geq 3(n+1)$), une adaptation simple des techniques de WHITNEY permet de réaliser la condition 2) (cf. [12], Chap. IV).

4.2. Comme au paragraphe 3, nous construisons un modèle $\Phi: L \rightarrow L'$ à partir des 3 éléments suivants:

- 1) La variété $D = p_1 \Delta = p_2 \Delta$ munie de l'involution $J = p_2 \mathfrak{P}_1^{-1}$.
- 2) La fonction λ , composé de \mathfrak{P}_1^{-1} avec la projection t .
- 3) Le fibré $L = N(V; D)$, le fibré normal à D dans V .

Remarquons que $D_0 = \lambda^{-1}(0)$ est la sous-variété de V formée des paires de points distincts de V qui ont même image par f .

4.3. On se propose de construire des difféomorphismes

$$\Psi: L_\varepsilon \rightarrow V \quad \text{et} \quad \Psi': L'_\varepsilon \rightarrow V',$$

où L_ε (resp. L'_ε) est un ε -voisinage tubulaire de D dans L (resp. de D' dans L'), tels que

- a) $f \Psi = \Psi' \Phi$ sur L_ε ,
- b) $\Psi(L'_\varepsilon)$ contient tous les points doubles de f ,
- c) $f(V - \Psi L_\varepsilon) \cap \Psi' L'_\varepsilon = \emptyset$.

Ceci fait l'homotopie f_t définie par

$$f_t = \begin{cases} \Psi' \Phi_t \Psi^{-1} & \text{sur } \Psi(L_\varepsilon) \\ f & \text{en dehors de } \Psi(L_\varepsilon) \end{cases}$$

sera une homotopie régulière reliant f à un plongement f_1 .

4.4. Nous allons d'abord construire des plongements

$$\psi : D \rightarrow V \text{ et } \psi' : D' \rightarrow V'$$

tels que :

- 1) $f\psi = \psi'\varphi$,
- 2) $f(V - \psi D) \cap \psi' D' = \emptyset$,
- 3) $\psi'(D')$ est transverse à $f(V)$ le long de $f(D)$.

Cette dernière condition signifie que pour tout point $d \in D$, les images par f et par ψ' des plans tangents à V en $\psi(d)$ et à D' en $\varphi(d)$ resp. se coupent suivant l'image par $f\psi$ du plan tangent à D en d .

p_1 et p_2 désignent toujours les projections de $V \times V \times I$ sur le premier et le second facteur resp.; de même soient p'_1 et p'_2 les projections de $V' \times V'$ sur le premier et le second facteur resp.

Le plongement ψ sera simplement l'inclusion de D dans V . Quant à ψ' , sa restriction ψ'_0 à φD est définie par la relation 1). Soit A l'ensemble des points de D' de la forme $[d, t]$, avec t compris entre 0 et $\lambda(d)$. En posant, pour tout point $[d, t]$ de A

$$\bar{\psi}'[d, t] = p'_1 H(d, Jd, \lambda(d) - t),$$

on définit une extension continue de ψ'_0 à A . Comme D' peut se rétracter sur A , on obtient finalement une application continue $\bar{\psi}'$ de D' dans V' qui prolonge ψ'_0 .

D'autre part, il est possible de construire une extension ψ'_1 de ψ'_0 à un petit voisinage U de φD dans D' de sorte que ψ'_1 soit un plongement et que $\psi'_1(U)$ coupe transversalement $f(V)$ le long de $f(D)$ (cf. SHAPIRO [6], * lemma 5.2; on utilise le fait que $\dim D < n' - n$). En appliquant finalement * le théorème de plongement de WHITNEY (cf. [10]), comme $2 \dim D' < \dim V'$, on peut obtenir un plongement ψ' de D' dans V' homotope à $\bar{\psi}'$, qui coïncide avec ψ'_1 au voisinage de D (la condition 3 est ainsi satisfaite) et qui ne rencontre pas fV en dehors de φD . Cette dernière condition est possible * car $\dim D' + \dim V < \dim V'$. La condition 2) est donc aussi vérifiée.

4.5. Désignons par $\underline{D'}$ l'image de D' par ψ' . La différentielle de f qui applique $T(V)$ dans $T(V')$ est notée, comme toujours, df .

Le pas suivant est la construction de représentations (cf. 7.2) d'espaces fibrés

$$\dot{\psi} : L \rightarrow T(V) \quad \dot{\psi}' : L' \rightarrow T(V')$$

qui prolongent ψ et ψ' , telles que

$$df \cdot \dot{\psi} = \dot{\psi}' \cdot \Phi,$$

$\dot{\psi}(L)$ et $\dot{\psi}'(L')$ étant complémentaires à $T(D)$ et $T(\underline{D'})$ resp.

La représentation $\dot{\psi}$ sera un relèvement de $L = N(V; D)$ dans $T(V; D)$; un tel relèvement est complètement déterminé par un champ de sous-espaces linéaires, le long de D , complémentaires à $T(D)$. Nous identifierons dorénavant $N(V; D)$ à son image par $\dot{\psi}$, donc à un sous-fibré de $T(V; D)$.

De même nous identifierons $N(V'; \underline{D}')$ à un sous-fibré de $T(V')$ par un relèvement de la projection naturelle de $T(V'; \underline{D}')$ sur $N(V'; \underline{D}')$, ce sous-fibré contenant l'image par df de $N(V; D)$. Ceci revient à construire le long de \underline{D}' (cf. appendice, 7.3) un champ de sous-espaces linéaires complémentaires à $T(\underline{D}')$ contenant $df(N(V; D))$; ce champ est complètement déterminé par ces conditions sur $f(D_0)$; on l'étend ensuite le long de $f(D)$, en tenant compte de la condition 3) de 4.4, et enfin sur \underline{D}' .

Construction de $\dot{\psi}'$. Soit ξ l'application $d \rightarrow \psi'[d, 0]$ de D dans V' . Remarquons que $\xi = \xi J$.

4.6. *Lemme:* Il existe une représentation $\dot{\xi}$ du fibré $N(V; D) \oplus_J N(V; D)$ dans $T(V')$ qui se projette sur ξ , telle que $\dot{\xi}(l_a, l_{Ja}) = -\dot{\xi}(l_{Ja}, l_a)$, et telle que pour $d \in D_0$, on ait $\dot{\xi}(l_a, l_{Ja}) = df(l_a) - df(l_{Ja})$.

Démonstration: Soient \mathfrak{P}_1 et \mathfrak{P}_2 les restrictions de p_1 et p_2 à Δ . Comme \mathfrak{P}_2 est un plongement de Δ dans V , le fibré $N(V^2 \times I, \Delta)$ est canoniquement isomorphe à la somme directe du fibré tangent à V restreint à $p_1 \Delta = D$, du fibré normal à $p_2 \Delta = D$ dans V et d'un fibré linéaire trivial T . Ainsi

$$N(V^2 \times I, \Delta) = \mathfrak{P}_1^{-1} N(V; D) \oplus \mathfrak{P}_2^{-1} N(V; D) \oplus \mathfrak{P}_1^{-1} T(D) \oplus T;$$

il existe donc un isomorphisme

$$N(V^2 \times I, \Delta) \rightarrow N(V; D) \oplus_J N(V; D) \oplus T(D) \oplus T$$

se projetant sur \mathfrak{P}_1 .

D'autre part H est transversal à Δ_V , sur Δ ; donc $N(V^2 \times I, \Delta)$ est canoniquement isomorphe à l'image inverse par H restreint à Δ du fibré $N(V'^2; \Delta_V) = p_1'^{-1} T(V')$ restreint à Δ_V . Vu l'isomorphisme ci-dessus, il existe une représentation

$$\mathcal{E}: N(V; D) \oplus_J N(V; D) \oplus T(D) \oplus T \rightarrow T(V')$$

se projetant sur $p_1 H \mathfrak{P}_1$.

Soit σ l'involution du fibré $N(V; D) \oplus_J N(V; D) \oplus T(D) \oplus T$ définie par $\sigma(l_a, l_{Ja}, t_a, e) = (l_{Ja}, l_a, t_{Ja}, e)$, où l_a et l_{Ja} sont des vecteurs normaux à D en d et Jd , t_a un vecteur tangent à D en d et t_{Ja} son image par la différentielle de J .

Comme H_t est équivariante, on a $\mathcal{E} \sigma = -\mathcal{E}$.

Enfin \mathcal{E} sur $N(V; D) \oplus_J N(V; D) \oplus 0$, restreint à D_0 , se réduit à $df \oplus_J (-df) \oplus 0$.

D'après la construction de ψ' (cf. 4.3), il existe une homotopie reliant $p'_1 H \mathfrak{P}_1^{-1}$ à l'application ξ de D dans V' , invariante par J et fixe sur D_0 . Il en résulte que \mathcal{E} est homotope à une représentation \mathcal{E}' se projetant sur ξ telle que $\mathcal{E}' \sigma = -\mathcal{E}'$, et égale à \mathcal{E} sur D_0 .

Pour obtenir l'application $\dot{\xi}$ cherchée, il suffit d'appliquer le lemme 7.4 en prenant pour E_1 le quotient de $T(D) \oplus T$ par la symétrie

$$(t_a, e) \rightarrow (-t_{Ja}, -e),$$

pour E_2 le quotient de $N(V; D) \oplus_J N(V; D)$ par la symétrie

$$(l_a, l_{Ja}) \rightarrow (-l_{Ja}, -l_a);$$

ce sont des fibrés de base D/J (cf. 3.1). Quant à E'_1 et E'_2 , ce seront les images réciproques par $\xi/J: D/J \rightarrow \underline{D}'$ des fibrés $T(\underline{D}')$ et $N(V'; \underline{D}')$.

* Le lemme peut s'appliquer car $\dim D < 2(n - \dim D)$.

4.7. Pour construire $\dot{\psi}'$, on remarque que L' est le quotient du fibré $(L \oplus_J L) \times [0, 1]$ de base $D \times [0, 1]$ par la relation d'équivalence qui identifie $(l_a, l_{Ja}, 0)$ et $(-l_{Ja}, -l_a, 0)$. Il suffira donc de construire une représentation

$$\chi: (L \oplus_J L) \times [0, 1] \rightarrow N(V'; \underline{D}')$$

telle que

1. χ se projette sur l'application $(d, t) \rightarrow \psi'[d, t]$
2. $\chi = \dot{\xi}$ sur $(L \oplus_J L) \times 0$
3. a) $\chi(l_a, 0, \lambda(d)) = df(l_a)$ pour $\lambda(d) \geq 0$
b) $\chi(0, -l_a, -\lambda(d)) = df(l_a)$ pour $\lambda(d) \leq 0$.

On construira d'abord la restriction χ_1 de χ au premier facteur

$$(L \oplus_J 0) \times [0, 1].$$

Les conditions 2 et 3, a) définissent déjà χ_1 sur $D \times \{0\}$ et sur les points $(d, \lambda(d))$, où $\lambda(d) \geq 0$. Les obstructions pour prolonger χ_1 à $D \times [0, 1]$ sont à valeur dans $\pi_i(V_{n'-\dim D', n-\dim D})$ pour $i \leq \dim D$ (cf. appendice, 7.2). Ces groupes sont tous nuls si

$$* \quad \dim D < n' - \dim D' - n + \dim D$$

c'est-à-dire $3n + 2 < 2n'$.

Enfin on prolongera χ_1 en χ en tenant compte des conditions 2 et 3, b). Ceci ne présente aucune difficulté car $D \times [0, 1]$ peut se rétracter par déformation sur l'union de $D \times [0]$ et des points $(d, \lambda(d))$, où $\lambda(d) \leq 0$.

On définira donc $\dot{\psi}' [l_a, l_{Ja}, t] = \begin{cases} \chi(l_a, l_{Ja}, t) & t \geq 0 \\ \chi(-l_{Ja}, -l_a, -t) & t \leq 0 \end{cases}$

4.8. *Construction de Ψ et Ψ' .* On construit d'abord Ψ sur L_ε , pour ε assez petit, de sorte que Ψ soit tangent à $\dot{\psi}$ le long de D (en utilisant une métrique riemannienne par exemple). Pour chaque point $d' \in D'$, il existe une application Ψ'_d dans V' d'un voisinage de d' dans L' de sorte que Ψ'_d soit tangent à $\dot{\psi}'$ le long de D et que $f\Psi = \Psi'_d\Phi$ aux points où les deux membres sont définis. Ceci résulte de ce que l'application f peut s'exprimer comme une application linéaire (ou un couple d'applications linéaires) dans des systèmes de coordonnées convenables en vertu du théorème des fonctions implicites. Utilisant la proposition 1.3, p.59 de [2], il est enfin possible de construire une application différentiable Ψ' , d'un voisinage de D' dans L' , telle que Ψ' soit tangent à $\dot{\psi}'$ le long de D' et que $f\Psi = \Psi'\Phi$. Si ε est assez petit, Ψ sera défini sur L'_ε et sera un difféomorphisme.

4.9. Il reste à vérifier que le plongement f_1 obtenu est tel que H_1 et f_1^2 sont reliés par une homotopie isovariante. Plus précisément:

Proposition. Il est possible de construire l'homotopie f_t de sorte qu'il existe une homotopie équivariante $P_{t,\tau}: V^2 \rightarrow V'^2$ dépendant des paramètres $t, \tau \in [0, 1]$ telle que a) $P_{t,0} = H_t$ b) $P_{t,1} = f_t^2$ c) $P_{0,\tau} = f^2$ d) $P_{1,\tau}$ est une homotopie isovariante.

Démonstration. Les conditions a), b) et c) définissent déjà $P_{t,\tau}$ pour $\tau = 0$ et 1 et pour $t = 1$.

Posons $P(x_1, x_2, t, \tau) = P_\tau(x_1, x_2, t) = P_{t,\tau}(x_1, x_2)$, où $(x_1, x_2) \in V^2$. Désignons par σ l'involution de $V^2, V^2 \times I$ ou $V^2 \times I^2$, suivant les cas, échangeant les deux premiers facteurs et soit σ' celle qui échange les facteurs de V'^2 . Une application de $V^2, V^2 \times I$ ou $V^2 \times I^2$ dans V'^2 sera dite équivariante si elle commute avec σ et σ' . On désigne par I le segment $[0, 1]$.

Soit $\nu(d)$ la fonction définie aux points de D où $\lambda(d) \geq 0$, égale à la valeur de t pour laquelle $\varphi_t(d) = \varphi_t(Jd)$. On a $\nu(d) = \nu(Jd)$. Soit Δ_τ la sous-variété de $V^2 \times I$ formée des triples $(d, Jd, (1 - \tau)\lambda(d) - \tau\nu(d))$, avec $\lambda(d) \geq 0$. Remarquons que

$$\Delta_0 = P_0^{-1}(\Delta_{V'}) - \Delta_V \times I \text{ et } \Delta_1 = P_1^{-1}(\Delta_{V'}) - \Delta_V \times I.$$

D'après la construction même de $\dot{\xi}$ (cf. 4.6), il existe une homotopie, dépendant du paramètre τ , de représentations de

$$N(V^2 \times I, \Delta_\tau) \text{ dans } N(V'^2, \Delta_{V'}),$$

se réduisant pour $\tau = 0$ et 1 aux représentations induites par $P_{t,0}$ et $P_{t,1}$ et commutant avec les involutions induites par σ et σ' .

Soit Δ_* la sous-variété de $V^2 \times I^2$ réunion des sous-espaces $\Delta_\tau \times \{\tau\}$. Il résulte de ce qui précède que l'application P déjà définie sur une partie de $V^2 \times I^2$ par les conditions a), b) et c) peut s'étendre au voisinage de Δ_* suivant une application équivariante, transverse à $\Delta_{V'}$ sur Δ_* .

D'autre part soit $\hat{\Delta}$ l'ensemble des points de $V^2 \times I^2$ de la forme

$$(d, Jd, t, \tau),$$

où $d \in D$ est tel que $\lambda(d) \geq 0$ et où t est compris entre 0 et $(1 - \tau)\lambda(d) - \tau\nu(d)$. D'après la construction de ψ' (cf. 4.4), l'application P , déjà construite sur la frontière de $\hat{\Delta}$, peut s'étendre à $\hat{\Delta}$ d'une manière équivariante. De plus, comme P est transverse à $\Delta_{V'}$ sur Δ_* et que

$$\dim \hat{\Delta} < \text{codim } \Delta_{V'} = n',$$

on peut s'arranger pour que $P(\hat{\Delta} - \Delta_*)$ ne rencontre pas $\Delta_{V'}$.

Finalement, on pourra définir l'application équivariante P sur un voisinage U du compact K , union de $V^2 \times I \times \{0\}$, de $V^2 \times I \times \{1\}$, de $V^2 \times \{0\} \times I$ et de $\hat{\Delta}$ de sorte que $P^{-1}(\Delta_{V'})$ soit l'union de Δ_* et de $(\Delta_{V'} \times I \times I) \cap U$. Or $V^2 \times I^2$ peut se rétracter par déformation sur un voisinage de K contenu dans U , chaque point se déplaçant sur un segment de la forme (x_1, x_2, t, I) . Cette rétraction, composée avec l'application P déjà définie de U dans V'^2 , donne une application équivariante, encore notée P , de $V^2 \times I^2$ dans V'^2 telle que $P^{-1}(\Delta_{V'})$ soit l'union de Δ_* et de $\Delta_{V'} \times I^2$. Alors P restreint à $V^2 \times \{1\} \times I$ est l'homotopie isovariante cherchée qui relie H_1 à f_1^2 .

4.10. *Démonstration du complément* (cf. 1.5). Supposons que f soit une immersion propre de V dans V' dont la restriction au fermé A est un plongement, et que H_t soit fixe sur A^2 . Alors $D \cap A$ ne rencontre pas $J(D \cap A)$. On peut construire la déformation $\Phi_t: L \rightarrow L'$ dans le modèle (cf. 3.2) de sorte qu'elle soit fixe sur un voisinage de $D \cap A$. Pour ε assez petit, la déformation f_t (cf. 4.3) sera aussi fixe au voisinage de A .

Si de plus $H_t((V - A) \times A) \cap \Delta_{V'} = \emptyset$, alors $D \cap A = \emptyset$. Donc pour ε assez petit, $\Psi(L_\varepsilon) \cap A = \emptyset$. Ainsi $f_t(A) \cap f_t(V - A) = \emptyset$. Dans ce dernier cas, la démonstration est inchangée si V a un bord contenu dans A .

4.11. *Un cas particulier*. La variété V n'est pas nécessairement connexe, et la démonstration précédente n'exclut pas le cas où les composantes connexes de V sont de dimensions différentes; il faut alors préciser que n est le maximum des dimensions des composantes connexes de V . Comme la dimension de la variété des points doubles de f peut être inférieure à $2n - n'$, il est parfois possible d'affaiblir les inégalités sur les dimensions, comme dans le cas suivant.

Théorème. Soient $V_i, i = 1, 2$ des variétés compactes de dimension n_i et soit A_i un fermé de V_i contenant ∂V_i . Soient f_i des plongements de V_i dans V' tels que $f_1(V_1) \cap f_2(A_2) = f_1(A_1) \cap f_2(V_2) = \emptyset$. Supposons qu'il existe une homotopie $H_t: V_1 \times V_2 \rightarrow V'^2$ telle que $H_1(V_1 \times V_2) \cap \Delta_{V'} = \emptyset$ et que

$$H_t((V_1 \times A_2) \cup (A_1 \times V_2)) \cap \Delta_{V'} = \emptyset.$$

Alors si $n_1 + n_2 + \max(n_1, n_2) + 3 \leq 2n'$, il existe une isotopie g_t de $f_1 = g_0$, fixe sur A_1 , et telle que $g_1(V_1) \cap f_2(V_2) = \emptyset$ et que $g_t(V_1) \cap f_2(A_2) = \emptyset$.

Il suffit dans la démonstration précédente de remplacer V par l'union disjointe de V_1 et V_2 , f par la réunion de f_1 et f_2 et de remarquer que $\dim D = n_1 + n_2 - n' + 1$.

5. Comment la démonstration du th. 2, b) (isotopie) se déduit de celle du th. 2, a).

Nous reprenons la démonstration du paragraphe précédent en indiquant à chaque pas les modifications nécessaires. Les numérotations des paragraphes se correspondent.

Soit I_0 le segment $[0, 1]$. Pour obtenir le th. 2, b), on applique en gros la démonstration du paragraphe 4 au cas où V est remplacé par $V \times I_0$ et V' par $V' \times I_0$ et f par l'application $f: V \times I_0 \rightarrow V' \times I_0$ définie par $f(x, \tau) = (f_\tau(x), \tau)$, où $\tau \in I_0$. Les restrictions de dimensions du th. 1, a) deviennent alors $2(n' + 1) \geq 3(n + 2)$, c'est-à-dire $2n' > 3(n + 1)$.

5.1. On suppose aussi que f est une immersion générique. Soit

$$H: V^2 \times I_0 \times I \rightarrow V'^2$$

l'application définie par $H(x_1, x_2, \tau, t) = H_{\tau, t}(x_1, x_2)$. Comme dans 4.1, I désigne le segment $[-1, +1]$ et l'on suppose H convenablement modifié de sorte que les conditions 1) et 3) de 4.1 soient vérifiées, 2) étant remplacé par la condition 2'): la projection $p_1: V^2 \times I_0 \times I \rightarrow V \times I_0$ définie par $p_1(x_1, x_2, \tau, t) = (x_1, \tau)$ restreinte à $\Delta = H^{-1}(\Delta_{V'}) - \Delta_{V'} \times I_0 \times I$ est un plongement; de plus le champ de vecteurs $\partial/\partial \tau$ défini sur $V^2 \times I_0 \times I$ n'est jamais tangent à Δ . Ceci revient à dire que la sous-variété $p_1(\Delta) = D$ de $V \times I_0$ est transverse au champ de vecteurs $\partial/\partial \tau$ de $V \times I_0$. Cette dernière condition peut être réalisée car

$$\dim D < \operatorname{codim} D.$$

5.2 et 5.3. On construit comme en 4.2 un modèle et il s'agit de définir des difféomorphismes

$$\Psi: L_\varepsilon \rightarrow V \quad \Psi: L'_\varepsilon \rightarrow V'$$

vérifiant les conditions a), b) c) de 4.3 et de plus

$$d) \quad \tau \cdot \Psi' [l_a, 0, t] = \tau \cdot \Psi (l_a)$$

où τ désigne les projections naturelles de $V \times I_0$ et $V' \times I_0$ sur I_0 .

5.4. On construit d'abord les plongements

$$\psi : D \rightarrow V \times I_0 \quad \text{et} \quad \psi' : D' \rightarrow V' \times I_0$$

vérifiant 1), 2), 3) de 4.4 et de plus

$$4) \quad \tau \cdot \psi' [d, t] = \tau \cdot \psi (d).$$

ψ est l'injection de D dans $V \times I_0$. Une application continue $\bar{\psi}'$ de A (cf. 4.4) dans $V' \times I_0$ vérifiant $f\psi = \bar{\psi}'\varphi$ et 4) est définie par $\bar{\psi}' [d, t] = (p'_1 H [\alpha(d), \alpha(Jd), \tau(d), \lambda(d) - t], \tau(d))$ où α est la projection naturelle de $V \times I_0$ sur V .

Ensuite $\bar{\psi}'$ est étendu à D' et est approché par un plongement ψ' de sorte que les conditions 1) à 4) soient vérifiées. Les modifications à apporter à 4.4 pour tenir compte de 4) ne présentent pas de difficultés particulières.

5.5. On doit construire ensuite, comme en 4.5, des représentations

$$\dot{\psi} : L \rightarrow T(V \times I_0) \quad \text{et} \quad \dot{\psi}' : L' \rightarrow T(V' \times I_0)$$

vérifiant, en plus des conditions énoncées en 4.5,

$$d \tau \cdot \dot{\psi}' [l_a, 0, t] = d \tau \cdot \dot{\psi} (l_a).$$

$\dot{\psi}$ sera un relèvement de $L = N(V \times I_0; D)$ dans $T(V \times I_0; D)$ tel que l'image de $\dot{\psi}$ contienne la restriction à D du champ de vecteurs $\partial/\partial \tau$ (on utilise la condition 2) de 5.1). On identifie $N(V \times I_0; D)$ à son image par $\dot{\psi}$. Ceci donne une décomposition en somme directe : $N(V \times I_0; D) = N_0 \oplus T_0$, où N_0 est l'ensemble des vecteurs où $d\tau$ s'annule et où T_0 est le fibré linéaire trivial engendré par le champ $\partial/\partial \tau$ restreint à D .

$N(V' \times I_0; \underline{D}')$ est aussi identifié à un sous-fibré de $T(V' \times I_0; \underline{D}')$ par un relèvement contenant le champ $\partial/\partial \tau$ restreint à \underline{D}' et l'image par df de $N(V \times I_0; D)$. Cette identification donne, comme plus haut, une décomposition :

$$N(V' \times I_0; \underline{D}') = N'_0 \oplus T'_0$$

où N'_0 est l'ensemble des vecteurs sur lesquels $d\tau$ s'annule et où T'_0 est engendré par $\partial/\partial \tau$ restreint à \underline{D}' .

5.6. Le lemme 4.6 est remplacé par le suivant :

Lemme. Il existe une représentation $\dot{\xi}$ de $N_0 \oplus_J N_0 \oplus T_0$ dans N'_0 qui se projette sur ξ , telle que $\dot{\xi}(l_a, l_{Ja}, \partial/\partial \tau(d)) = -\dot{\xi}(l_{Ja}, l_a, \partial/\partial \tau(Jd))$ et telle que pour $d \in D_0$, on ait

$$\dot{\xi}(l_a, l_{Ja}, \partial/\partial \tau(d)) = df(l_a + \partial/\partial \tau(d)) - df(l_{Ja} + \partial/\partial \tau(Jd)).$$

Dans cet énoncé, $\partial/\partial\tau(d)$ désigne le vecteur du champ $\partial/\partial\tau$ au point d . La démonstration est si proche de celle du lemme 4.6 que nous la laissons au lecteur.

5.7. Construisons le long de \underline{D}' un champ de vecteur qui associe à tout point $(d, t) \in D \times [0, 1]$ un vecteur $v(d, t)$ d'origine $\psi'[d, t]$, contenu dans $N(V' \times I_0, \underline{D}')$, tel que

$$\begin{aligned} \langle d\tau, v(d, t) \rangle &= 2 \\ v(d, 0) &= v(Jd, 0) \end{aligned}$$

et pour $d \in D_0$, $v(d, 0) = \partial f/\partial\tau(d) + \partial f/\partial\tau(Jd)$
(où $\partial f/\partial\tau(d)$ est l'image par df du vecteur $\partial/\partial\tau(d)$).

On construit ensuite une représentation

$$\chi : (N_0 \oplus_J N_0 \oplus T_0) \times [0, 1] \rightarrow N'_0$$

telle que

1. χ se projette sur l'application $(d, t) \rightarrow \psi'[d, t]$ de $D \times [0, 1]$ sur \underline{D}'
2. $\chi = \dot{\xi}$ sur $(N_0 \oplus_J N_0 \oplus T_0) \times \{0\}$.

$$3. \chi(l_a, 0, a \partial/\partial\tau(d), \lambda(d)) = df(l_a + 2a \partial/\partial\tau(d)) - a v(d, \lambda(d))$$

pour $\lambda(d) \geq 0$

$$\text{et } \chi(0, -l_a, -a \partial/\partial\tau(d), -\lambda(d)) = df(l_a + 2a \partial/\partial\tau(d)) - a v(d, -\lambda(d))$$

pour $\lambda(d) \leq 0$.

Comme dans 4.7, on construit d'abord la restriction χ_1 de χ à

$$(N_0 \oplus_J 0 \oplus T_0) \times [0, 1].$$

On définit enfin $\dot{\psi}'$ par la formule

$$\begin{aligned} \dot{\psi}'[l_a + a \partial/\partial\tau(d), l_{Ja} + b \partial/\partial\tau(Jd), t] &= \chi(l_a, l_{Ja}, \frac{a+b}{2} \partial/\partial\tau(d), t) + \\ &+ \frac{a-b}{2} v(d, t). \end{aligned}$$

5.8. Les difféomorphismes Ψ et Ψ' sont construits comme dans 4.8. Pour que la condition d) de 4.3 soit vérifiée, on remplace Ψ par l'application faisant correspondre à $[l_a, l_{Ja}, t]$, où $l_a, l_{Ja} \in N(V \times I_0, D)$, le point

$$(x', \tau') \in V' \times I_0,$$

où x' est la projection sur V' de $\Psi'[l_a, l_{Ja}, t]$ et $\tau' = \tau(d) + \tau \Psi(l_a) - \tau \Psi(l_{Ja})$. Cette application est encore un difféomorphisme pour ε assez petit, car elle est tangente à Ψ' le long de \underline{D}' et elle jouit de toutes les propriétés requises.

6. Démonstration du théorème 2, a) dans le cas d'une variété à bord

6.1. La démonstration du paragraphe 4 s'applique sans changement dans le cas où f est déjà un plongement au voisinage du bord ∂V de V , où H_t est fixe sur $(\partial V)^2$ et où $H_t((V - \partial V) \times \partial V) \cap \Delta_V = \emptyset$. En effet ces hypothèses entraînent que la variété D ne rencontre pas ∂V et donc que toutes les déformations peuvent être fixes sur un voisinage de ∂V (cf. 4.10).

6.2. Considérons ensuite le cas où f est un plongement au voisinage de ∂V et où H_t est fixe sur $(\partial V)^2$. Nous allons effectuer successivement deux déformations. La première f_t , fixe sur un voisinage de ∂V , déformera $f = f_0$ en une application f_1 telle que $f_1(V - \partial V) \cap f(\partial V) = \emptyset$. La seconde g_u , fixe sur un voisinage de ∂V , sera telle que $g_u(V - \partial V) \cap f(\partial V) = \emptyset$ et que g_1 soit un plongement.

Première déformation. Dans la démonstration du paragraphe 4, remplaçons V^2 par $(V - \partial V) \times \partial V$ et H_t par la restriction H_t^0 de H_t à

$$(V - \partial V) \times \partial V.$$

On peut supposer au départ que l'immersion f est générique, de sorte qu'en particulier l'ensemble F des paires de points distincts de $V - \partial V$ qui ont même image par f est une sous-variété fermée dont la dimension est $2n - n'$. Ainsi dans les conditions imposées à Δ dans 4.1, on pourra exiger encore que l'image de $\Delta = (H_t^0)^{-1} \Delta_V$ par la projection

$$p_1 : (V - \partial V) \times \partial V \rightarrow V - \partial V$$

ne rencontre pas F . Les constructions de 4 donnent alors une déformation régulière f_t^0 de f restreint à $V - \partial V$, fixe sur un voisinage de ∂V et telle que $f_1(V - \partial V) \cap f(\partial V) = \emptyset$. Alors $f_t(x) = f_t^0(x)$ pour $x \notin \partial V$ et $= f(x)$ pour $x \in \partial V$ est une homotopie régulière.

Pour construire la deuxième déformation g_u , il nous faut une homotopie équivariante convenable reliant $(f_1)^2$ à H_1 . Pour cela, définissons une application P d'une partie de $V^2 \times I^2$ dans V'^2 en posant

$$P(x_1, x_2, t, u) = \begin{cases} H_t(x_1, x_2) & \text{sur } V^2 \times I \times 0 \\ (f_t x_1, f_t x_2) & \text{sur } V^2 \times I \times 1 \\ (f x_1, f x_2) & \text{sur } V^2 \times 0 \times I \text{ et sur } (\partial V^2) \times I^2. \end{cases}$$

D'après 4.9, il est possible de construire f_t de sorte que l'application P soit aussi définie sur $[(V - \partial V \times \partial V) \cap (V \times V - \partial V)] \times I^2$, équivariante et telle que $P(x_1, x_2, 0, u) \notin \Delta_V$ pour $(x_1, x_2) \in (V - \partial V) \times \partial V$ et tout u . L'application P ainsi définie sur une partie K de $V^2 \times I^2$ peut se prolonger suivant une application équivariante dans V'^2 d'un voisinage U de K . Or

il existe une rétraction R de $V^2 \times I^2$ sur un voisinage arbitrairement petit de K et telle que $R(x_1, x_2, t, u) = (x_1, x_2, t', u)$. Alors $P \cdot R$ restreint à $V^2 \times 1 \times I$ donne une homotopie équivariante H_u reliant $(f_1)^2$ à H_1 , fixe sur $(\partial V)^2$, telle que $H_u((V - \partial V) \times \partial V) \cap \Delta_V = \emptyset$ et que Δ_V soit ouvert dans $H_u^{-1}(\Delta_V)$.

Nous sommes ainsi ramenés au premier cas.

6.3. Cas général. On considère la restriction de H_t à $(\partial V)^2$. Ceci permet de construire une homotopie régulière convenable f_t^0 déformant $f|_{\partial V}$ en un plongement f_1^0 . L'homotopie f_t^0 peut s'étendre suivant une homotopie régulière f_t de f (cf. THOM [9]). On se ramène au cas précédent 6.2 en construisant comme ci-dessus une homotopie équivariante $H_u : V^2 \rightarrow V'^2$, fixe sur $(\partial V)^2$ (ou dont la restriction à $(\partial V)^2$ est isovariante) et telle que

$$H_u(V - \partial V \times \partial V) \cap \Delta_V = \emptyset.$$

6.4. Affaiblissement des restrictions de dimensions pour les variétés à bord.

Théorème. Lorsque V est une variété à bord qui peut être construite par adjonction d'anses d'indices $\leq p$ (cf. SMALE [7]), alors

dans le th. 2, a), on peut supposer	$2n' \geq 3(p+1)$
2, b),	$2n' > 3(p+1)$
1, a),	$2n' \geq 2n + p + 1$
1, b),	$2n' > 2n + p + 1$

lorsque $p < n$.

Le passage du th. 2 au th. 1 se fait comme dans 2 en tenant compte de la remarque p. 240 de [3].

La raison de cette amélioration pour le th. 2 est que l'on est ramené essentiellement à séparer ou à plonger des disques de dimension au plus p .

6.5. L'idée de la démonstration est en gros la suivante.

Soit D^k le disque de rayon unité dans R^k . Une anse d'indice k est le produit $h_k = D^k \times D^{n-k}$. Supposons que $V = h_0 \cup h_{p_1} \cup \dots \cup h_{p_r}$ soit obtenu par adjonctions successives d'anses d'indices $p_k \leq p$. Posons $V_k = V_{k-1} \cup h_{p_k}$; on entend par là que la variété V_k est obtenue en collant l'anse h_{p_k} à la variété V_{k-1} par un difféomorphisme de $D^{p_k} \times D^{n-p_k}$ dans ∂V_{k-1} .

On suppose par récurrence qu'il existe une immersion f_{k-1} de V dans V' dont la restriction à V_{k-1} est un plongement et une homotopie équivariante $H_t^{k-1} : V^2 \rightarrow V'^2$, fixe sur $(V_{k-1})^2$, reliant f_{k-1}^2 à une application isovariante H_1^{k-1} , Δ_V étant ouvert dans $(H_t^{k-1})^{-1} \Delta_V$.

Posons $A^i = D^{p_i} \times \{0\}$, l'âme de l'anse h_{p_i} , et soit g la restriction de f_{k-1} à A^k . En utilisant la restriction de H_t^{k-1} à $V_{k-1} \times A_k$, on construit

comme dans 6.2 une homotopie régulière g_t de g , fixe sur un voisinage de ∂A^k de sorte que $g_t(A^k)$ évite successivement

$$f_{k-1}(A^0), f_{k-1}(V_0), f_{k-1}(A^1), f_{k-1}(V_1), \dots, f_{k-1}(A^{k-1})$$

et enfin $f_{k-1}(V_{k-1})$ par dilatation (pour séparer $g(A^k)$ de $f_{k-1}(A^i)$, on doit supposer $p_k + p_i + \max(p_k, p_i) \leq 2n'$, cf. 4.11). Ensuite on déforme l'immersion obtenue en un plongement g_1 de A^k dans V' tel que

$$g(A^k - \partial A^k) \cap f_{k-1}(V_{k-1}) = \emptyset$$

(il faudra supposer ici $3(p_k + 1) \leq 2n'$). On étend enfin l'homotopie régulière faisant passer de g à g_1 en une homotopie régulière de f_{k-1} , fixe sur V_{k-1} . On obtient ainsi une immersion f_k dont la restriction à V_k est un plongement et l'on construit une homotopie équivariante vérifiant les mêmes propriétés que H_{τ}^{k-1} , $k-1$ étant remplacé par k .

7. APPENDICE. Rappel sur les fibrés vectoriels.

7.1. Un fibré vectoriel $E \rightarrow B$ est un fibré localement trivial de base B , de fibre un espace vectoriel et de groupe structural le groupe linéaire des automorphismes de cet espace vectoriel; la dimension de la fibre peut varier d'une composante connexe de B à l'autre. Le rang de E est le maximum des dimensions des fibres de E et le rang de E en un point $b \in B$, noté $\text{rang}_b E$, est la dimension de la fibre E_b de E au-dessus de b .

7.2. Une représentation f d'un fibré vectoriel $E \rightarrow B$ dans un fibré vectoriel $E' \rightarrow B'$, se projetant sur une application f_0 de B dans B' , est une application fibrée f de E dans E' dont la restriction à chaque fibre E_b est une application linéaire *injective* dans $E_{f_0 b}$.

Il y a correspondance biunivoque entre les représentations de E dans E' se projetant sur f_0 et les représentations de E dans $f_0^{-1} E'$ (image réciproque de E' par f_0) se projetant sur l'identité de B . On peut donc se borner au cas où E' est un fibré de base B et où les représentations considérées se projettent sur l'identité de B .

Les applications linéaires injectives des fibres E_b de E dans les fibres E'_b de E' forment un espace fibré $L(E, E')$ de base B . Sa fibre au-dessus de b est la variété de STIEFEL $V_{\text{rang}_b E', \text{rang}_b E}$, où $V_{m,n}$ est l'espace des n -repères dans R^m . Les représentations de E dans E' correspondent biunivoquement aux sections de $L(E, E')$. Les classes d'homotopie de représentations de E dans E' correspondent biunivoquement aux classes d'homotopie de sections de $L(E, E')$.

7.3. Soit $0 \rightarrow E' \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} E'' \rightarrow 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels. Un relèvement de la projection j est une représentation r de E'' dans E telle que $j \cdot r$ soit l'identité. Un tel relèvement revient à se donner une section du fibré dont la fibre au-dessus de b est l'espace affine formé des sous-espaces linéaires de E_b complémentaires à E'_b . Ainsi, si B est un complexe et A un sous-complexe de B , tout relèvement de j déjà défini au-dessus de A peut s'étendre sur B .

7.4. *Lemme de factorisation.* Soit B un complexe et A un sous-complexe de B . Soient $E = E_1 \oplus E_2$ et $E' = E'_1 \oplus E'_2$ deux fibrés sommes directes de fibrés vectoriels, de base B . Soit σ un isomorphisme de E sur E' dont la restriction à A est somme directe $\sigma_1^0 \oplus \sigma_2^0$ de deux isomorphismes

$$\sigma_1^0 : E_1|_A \rightarrow E'_1|_A \text{ et } \sigma_2^0 : E_2|_A \rightarrow E'_2|_A.$$

Supposons que σ_1^0 puisse s'étendre suivant un isomorphisme σ_1 de E_1 sur E'_1 et que $\dim_b B < \text{rang}_b E_2$ pour tout $b \in B$. Alors il existe une représentation σ_2 de E_1 sur E'_1 prolongeant σ_2^0 et une homotopie de représentations, fixe sur A , reliant σ à $\sigma_1 \oplus \sigma_2$.

Démonstration. Soient $L(E, E')$, $L(E_1, E')$ et $L(E_1, E'_1)$ les fibrés sur B définis comme en 7.2; $L(E_1, E'_1)$ est considéré comme un sous-fibré de $L(E_1, E')$; par restriction à E_1 , on a une application fibrée $\varphi : L(E, E') \rightarrow L(E_1, E')$.

La représentation σ définit une section σ de $L(E, E')$; sa projection $\varphi(\sigma)$ dans $L(E_1, E')$, restreinte à A , peut s'étendre suivant une section σ_1 de $L(E_1, E'_1)$. Comme la fibre de $L(E_1, E')$ au-dessus de b est une variété de STIEFEL acyclique en dimensions inférieures à $\text{rang}_b E_2$ (cf. 7.2), il existe une homotopie, fixe sur A , qui déforme $\varphi(\sigma)$ en σ_1 . Cette homotopie peut se relever dans $L(E, E')$ et déforme σ en une section σ_0 égale à σ sur A , et qui se projette sur σ_1 . Cette section σ_0 correspond à une représentation de E dans E' dont la restriction à E_2 , composée avec la projection de E' sur E'_2 est l'isomorphisme σ_2 cherché.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. HAEFLIGER, *Differentiable imbeddings*, Bull. Amer. Math. Soc., 67 (1961), 109–112.
- [2] A. HAEFLIGER, *Plongements différentiables de variétés dans variétés*, Comment. Math. Helv., 36 (1961), 47–82.
- [3] A. HAEFLIGER et M. HIRSCH, *Immersions in the stable range*, Annals of Math. 75 (1962), 231–241.
- [4] M. HIRSCH, *Immersions of manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc., 93 (1959), 242–276.
- [5] E. R. VAN KAMPEN, *Komplexe in euklidischen Räumen*, Abh. Math. Sem. Hamburg, 9 (1932), 72–78, et 152–153 (Berichtigung).
- [6] A. SHAPIRO, *Obstructions to the imbedding of a complex in a euclidean space. I. The first obstruction*, Annals of Math., 66 (1957), 256–269.
- [7] S. SMALE, *Generalized Poincaré conjecture in dimensions greater than four*, Annals of Math., 74 (1961), 391–406.
- [8] R. THOM, *Quelques propriétés globales des variétés différentiables*, Comment. Math. Helv., 28 (1954), 17–86.
- [9] R. THOM, *La classification des immersions d'après SMALE*, Séminaire Bourbaki, décembre 1957, Paris.
- [10] H. WHITNEY, *Differentiable manifolds*, Annals of Math., 37 (1936), 645–680.
- [11] H. WHITNEY, *The self-intersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space*, Annals of Math., 45 (1944), 220–246.
- [12] H. WHITNEY, *Geometric integration theory*, Princeton University Press, 1957.
- [13] W. T. WU, *On the realization of complexes in euclidean spaces*, Acta Math. Sinica, 5 (1955), 505–552, 7 (1957), 79–101, et 8 (1959), 133–150.
En anglais, Scientia Sinica, 7 (1958), 251–297 et 365–387, 8 (1959), 133–150.
- [14] W. T. WU, *On the isotopy of C^r -manifolds of dimension n in euclidean $(2n+1)$ -space*, Science Record, N. S. 2 (1958), 271–275.
- [15] W. T. WU, *On the isotopy of a finite complex in a euclidean space. I, II*, Science Record, N. S. 3 (1959), 342–351.
- [16] W. T. WU, *On the isotopy of complexes in a euclidean space, I*, Scientia Sinica, 9 (1960), 21–46.

(Reçu le 26 avril 1962)