

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	36 (1961-1962)
<b>Artikel:</b>	Über die subnormalen Lösungen der Differentialgleichung $w'' + e^{-w} w' + \text{konst. } W = 0$ .
<b>Autor:</b>	Frei, Margrit
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-515612">https://doi.org/10.5169/seals-515612</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 15.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über die subnormalen Lösungen der Differentialgleichung

$$w'' + e^{-z} \cdot w' + \text{konst.} \cdot w = 0$$

von MARGRIT FREI, Zürich

*Herrn Rektor Dr. W. Rotach zum 60. Geburtstag gewidmet*

In meiner Dissertation<sup>1)</sup> wird der Begriff «subnormale Lösung» einer linearen Differentialgleichung eingeführt. Wir verstehen darunter ein partikuläres Integral, das wesentlich schwächer wächst als die allgemeine Lösung.

Nach dem dort bewiesenen *verschärften* Hauptsatz ist die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung

$$w'' + e^{-z} \cdot w' + \alpha \cdot w = 0, \quad \alpha \text{ konst. } \neq 0, \quad (1)$$

eine ganze Funktion unendlicher Ordnung. Und es gibt 2 positive Konstante  $c_1$  und  $c_2$ , so daß  $c_1 r < \log T(r) < c_2 r$  gilt. ( $T(r)$  ist die charakteristische Funktion der allgemeinen Lösung.) Die Differentialgleichung (1) besitzt höchstens 1 unabhängiges part. Integral  $w_0$  mit  $T(r, w_0) = \exp. o(r)$ , das ist eine subnormale Lösung. Solche schwach wachsende Integrale kommen tatsächlich vor. Zum Beispiel ist  $w_0 = e^z + 1$  (mit  $T(r, w_0) = r/\pi + O(1)$ ) ein part. Integral der Differentialgleichung

$$w'' + e^{-z} \cdot w' - w = 0 \quad (\alpha = -1). \quad (2)$$

Aber wir können zeigen, daß (2) einen Ausnahmefall darstellt.

Wir werden feststellen, daß die Differentialgleichung (1) nur für bestimmte, seltene Werte von  $\alpha$  eine subnormale Lösung zuläßt. Dabei zeigt sich eine merkwürdige Analogie zu den linearen Differentialgleichungen mit Polynomen als Koeffizienten. Für diese nämlich kann die Frage nach der Existenz eines subnormalen Integrals allgemein beantwortet werden. Denn aus einer Arbeit von PÖSCHEL [1]<sup>2)</sup> folgt, daß eine subnormale Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung mit Polynomen als Koeffizienten entweder ein Polynom oder eine ganze transzendente Funktion endlicher Wachstumsordnung ohne Nullstellen ist. Eine transzendente subnormale Lösung ist also nur möglich, wenn die Differentialgleichung *reduzibel* ist (vgl. PÓLYA [1]), ist doch eine *nullstellenfreie* ganze Funktion endlicher Wachstumsordnung schon

<sup>1)</sup> Siehe Comm. Math. Helv. Bd. 35, Jg. 1961, S. 201.

<sup>2)</sup> Für alle Zitate vgl. Literaturverzeichnis meiner oben erwähnten Dissertation.

Lösung einer linearen Differentialgleichung *erster* Ordnung mit Polynomen als Koeffizienten.

Aus der Existenz der subnormalen Lösung  $w_0 = e^z + 1$  der Differentialgleichung (2) folgt zwar nicht, daß die Differentialgleichung (2) reduzibel ist, denn  $w_0$  ist nicht Lösung einer linearen Differentialgleichung erster Ordnung mit ganzen Funktionen als Koeffizienten. Aber  $w_0$  ist ein «Polynom in  $e^z$ ». Und wir werden zeigen, daß jede subnormale Lösung der Differentialgleichungen (1) ein Polynom in  $e^z$  ist. Wir beweisen nämlich den

**Satz.** Die Differentialgleichungen

$$w'' + e^{-z} \cdot w' + \alpha \cdot w = 0 \quad \alpha \text{ konst., } \neq 0$$

besitzen dann und nur dann eine subnormale Lösung, wenn die Konstante  $\alpha = -n^2$ ,  $n$  natürliche Zahl, ist. Diese subnormale Lösung  $w_0$  ist dann ein Polynom  $n$ -ten Grades in  $e^z$ :  $w_0 = \sum_{k=0}^n a_k e^{kz}$ .

*Beweis.* Man sieht leicht ein, daß die Differentialgleichungen (1) nur transzendente Lösungen besitzen. Sie sind sämtliche mindestens vom Mitteltypus erster Ordnung, wobei sogar

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} T(r, w)/r > 0 \quad (3)$$

gilt, weil der einzige transzendenten Koeffizient von (1),  $e^{-z}$ , von vollkommen regelmäßigm Wachstum ist.

Das Wachstum einer eventuellen subnormalen Lösung  $w_0$  schätzen wir mit Hilfe der «charakteristischen Gleichung» von WIMAN ab. Nach den Ausführungen in § 1 meiner Dissertation gilt für eine Lösung der Differentialgleichung (1) für alle  $r$ ,  $r > 0$ , außerhalb einer  $r$ -Menge von endlichem logarithmischem Maß

$$[\nu(r)/\zeta]^2 \cdot (1 + \eta_2(\zeta)) + e^{-\zeta} \cdot \nu(r)/\zeta \cdot (1 + \eta_1(\zeta)) + \alpha = 0. \quad (4)$$

Dabei ist  $\zeta = r \cdot e^{i\varphi}$  eine Stelle auf dem Kreis  $|z| = r$ , wo der Betrag von  $w_0$  das Maximum  $M_0(r)$  erreicht, das heißt  $|w_0(\zeta)| = \max_{|z|=r} |w_0(z)|$ ;  $\nu(r)$  der Zentralindex. Wegen (3) werden die Größen  $|\eta_i| = O(r^{-1/4 + \varepsilon})$ ,  $\varepsilon > 0$ , also beliebig klein.

Für eine subnormale Lösung  $w_0$  ist

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \log_2 M_0(r)/r = 0, \text{ das heißt } \log_2 M(r) = o(r). \quad (5)$$

Außerhalb einer  $r$ -Menge von endlichem logarithmischem Maß unterliegt der Zentralindex  $\nu(r)$  der bekannten Bedingung:

$\nu(r) < [\log M(r)]^{1+\varepsilon}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Also gilt für  $w_0$ :

$$\log \nu(r)/r < \log_2 M_0(r) = o(r). \quad (6)$$

Maximalrichtungen einer subnormalen Lösung von (1) können also nach (4) außerhalb einer  $r$ -Menge von endlichem logarithmischem Maß nur im Gebiet

$$-\frac{1}{2}\pi - \varepsilon(r) < \varphi_{\max} < +\frac{1}{2}\pi + \varepsilon(r) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0 \quad (7)$$

liegen.

Weil in den Richtungen  $-\frac{1}{2}\pi \leq \varphi \leq +\frac{1}{2}\pi$  sämtliche Koeffizienten der Gleichung (4) beschränkt sind, sind dort auch die Quotienten  $\nu(r)/r$  beschränkt.

Nur in den Intervallen  $\frac{1}{2}\pi < \varphi \leq \frac{1}{2}\pi + \varepsilon(r)$  [bzw.  $-\frac{1}{2}\pi > \varphi \geq -\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$ ] kann  $\nu(r)/r$  unbeschränkt sein.

Für diese Richtungen vergleichen wir unter der Annahme, daß  $\nu(r)/r$  unbeschränkt sei, die *Beträge* in (4) und bekommen ohne prinzipielle Schwierigkeiten durch Rechnung für  $\nu/r$  außerhalb einer  $r$ -Menge von endlichem logarithmischem Maß die Abschätzung

$$1 - \vartheta_1(r) \leq \frac{e^{r \cdot \sin \varepsilon}}{\nu/r} \leq 1 + \vartheta_2(r) \quad \lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ i=1,2}} \vartheta_i(r) = 0 \quad (8)$$

Und ebenso durch Vergleich der *Realteile* der Glieder von (4) unter denselben Voraussetzungen und außerhalb derselben Ausnahmemenge

$$\frac{e^{r \cdot \sin \varepsilon}}{\nu/r} \cdot \cos r = \delta(r) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \delta(r) = 0 \quad (9)$$

(8) und (9) sind aber für ein  $\varepsilon > 0$  nur vereinbar, wenn  $\cos r = o(1)$ , das heißt für diejenigen  $r$ , die einem ungeraden Vielfachen von  $\frac{1}{2}\pi$  benachbart liegen. Diese  $r$  bilden eine Menge, die aus Teilintervallen  $\Delta r_n$  zusammengesetzt ist. Der Mittelpunkt von  $\Delta r_n$  liegt ungefähr bei  $r_n = (2n+1)\frac{1}{2}\pi$ . Das heißt in  $\Delta r_n$  gilt

$$r_n - o(1) < r < r_n + o(1), \text{ wo } \cos r = O[\sin(o(1))] = o(1). \quad (10)$$

Außerhalb der WIMANSchen Ausnahmeintervalle und der Intervalle  $\Delta r_n$  sind (8) und (9) unvereinbar, solange  $\varepsilon > 0$  und  $\nu/r$  unbeschränkt verlangt werden. Für  $\varepsilon \leq 0$  ist aber  $\nu/r$  nach oben gleichmäßig beschränkt. Also ist außerhalb den WIMANSchen und den  $\Delta r_n$ -Intervallen

$$\nu/r \text{ beschränkt.} \quad (11)$$

Im Innern eines Intervall, das zwischen zwei Punkten liegt, wo  $\nu/r$

gleichmäßig beschränkt ist, läßt sich  $\nu/r$  abschätzen, weil  $\nu(r)$  eine nicht abnehmende Funktion von  $r$  ist, nämlich

$r'$  liege im Intervall  $(r_{i-1}, r_i)$ , also  $r_{i-1} < r' < r_i$ , mit  $\nu(r_{i-1})/r_{i-1} \leq c_0$  und  $\nu(r_i)/r_i \leq c_0$ , dann ist  $\nu(r')/r' \leq \nu(r_i)/r_i \cdot r_i/r' \leq \nu(r_i)/r_i \cdot r_i/r_{i-1}$ .

Ist nun das betrachtete Intervall ein WIMANSCHES, so gilt  $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i/r_{i-1} = 1$ .

Ist das betrachtete Intervall ein  $\Delta r_n$ , so gilt  $\lim_{i \rightarrow \infty} r_i/r_{i-1} = 1$  ebenso, weil  $r_i = r_{i-1} + o(1)$ .

Also sind die Quotienten  $r_i/r'$  in beiden Fällen gleichmäßig beschränkt, also ist  $\nu/r$  auch innerhalb der Ausnahmeintervalle gleichmäßig beschränkt, wenn ihre Endpunkte nicht zur andern Ausnahmemenge gehören.

Wie steht es aber für ein  $r$  innerhalb einer Vereinigungsmenge der  $\Delta r_n$  und der WIMANSCHEN Intervalle? – Wenn das logarithmische Maß aller  $\Delta r_n$  zusammen auch endlich wäre, so dürften wir schließen, daß auch die Vereinigungsmenge der beiden Ausnahmemengen von endlichem logarithmischem Maß ist, und nach unsrern Überlegungen oben wäre dann  $\nu/r$  überall gleichmäßig beschränkt. Aber die Voraussetzung für  $\varepsilon$  bzw.  $\delta(r)$  ist zu schwach, daß daraus folgen würde, auch das logarithmische Maß der  $\Delta r_n$  ist endlich.

Es bleibt uns aber eine andere Möglichkeit,  $\nu/r$  abzuschätzen: Zu untersuchen, wie groß die Intervalle sind, die durch die Vereinigung von Komponenten der *beiden* Ausnahmemengen entstehen. Nach oben ist  $\nu/r$  dann beschränkt, wenn der Quotient  $r_i/r_{i-1}$ , der in dieser Abschätzung wesentliche Faktor, beschränkt ist. Unsere Frage lautet also: Können durch die beiden Sorten von Ausnahmeintervallen soviele aufeinanderfolgende Intervalle aneinandergehängt werden, daß das entstehende zusammengesetzte Intervall so groß ist, daß der Quotient  $r_i^*/r_{i-1}^*$  beliebig groß wird? (Wenn  $r_{i-1}^*$  und  $r_i^*$  die Endpunkte dieses Intervales sind.) – Der Logarithmus dieses Quotienten ist aber das logarithmische Maß der Vereinigungsmenge der aneinandergehängten Intervalle (beider Sorten); er ist also höchstens so groß wie die Summe der logarithmischen Maße der einzelnen Intervalle, die das neue Intervall bilden, also *endlich*, wenn dieses von *endlich* vielen Intervallen beider Sorten zusammengesetzt worden ist.

Könnte aber der Fall eintreten, daß von einem gewissen  $r > r_0$  an, die WIMANSCHEN Ausnahmeintervalle durch die  $\Delta r_n$  zu *einem* Intervall verbunden würden? – Das wäre der Fall, wenn von diesem  $r > r_0$  an die WIMANSCHEN Intervalle alle, zwei aufeinanderfolgende  $\Delta r_n$  trennende Zwischenräume, das ist die *Komplementärmenge* der  $\Delta r_n$  überdeckten. Das wäre aber nur möglich, wenn das logarithmische Maß dieser Komplementärmenge *endlich* wäre. – Schätzen wir also das logarithmische Maß der Komplementärmenge der  $\Delta r_n$  ab!

Es ist  $\langle r_k + o(1), r_{k+1} - o(1) \rangle$  das  $k$ -te Intervall dieser Menge, wenn  $r_k = (2k+1) \cdot \frac{1}{2}\pi$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Sein logarithmisches Maß also:

$$\begin{aligned} \log \frac{r_{k+1} - o(1)}{r_k + o(1)} &= \log \frac{(2k+3)\frac{1}{2}\pi - o(1)}{(2k+1)\frac{1}{2}\pi + o(1)} \geq \log \left[ 1 + \frac{\pi - o(1)}{(2k+1)\frac{1}{2}\pi + 1} \right] \\ &\geq \log \left[ 1 + \frac{1 - o(1)}{k + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} \right] > \log \left[ 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} \right]. \end{aligned}$$

Damit ist das logarithmische Maß der Komplementärmenge der  $\Delta r_n$  größer als

$$\log \prod_k^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{k+1} \right), \quad \text{das ist aber mit } \sum_k^{\infty} \frac{1}{k+1} \text{ divergent!}$$

Also wird die Komplementärmenge der  $\Delta r_n$  von den WIMANSCHEN Intervallen nicht bedeckt.

Der Quotient  $r_i^*/r_{i-1}^*$  ist somit für jedes ursprüngliche oder zusammengesetzte Ausnahmeintervall endlich und folglich gilt:

$$v/r \text{ ist für alle } r \text{ gleichmäßig beschränkt.} \quad (12)$$

$$\text{Das heißt } w_0 \text{ ist höchstens vom Mitteltypus erster Ordnung.} \quad (13)$$

(3) und (13) zusammen aber ergeben:

Wenn die Differentialgleichung (1) eine subnormale Lösung besitzt, so ist sie sogar *endlicher* Ordnung, nämlich vom

$$\text{Mitteltypus erster Ordnung.} \quad (14)$$

Warum muß nun aber eine Lösung erster Ordnung der Differentialgleichungen (1) ein *Polynom* in  $e^z$  sein?

Das können wir zeigen, indem wir eine besondere Eigenschaft nachweisen, die allen Lösungen von endlicher Wachstumsordnung einer Differentialgleichung  $w'' + a_1(z) \cdot w' + a_0(z) \cdot w = 0$  zukommt, wenn der transzendente Koeffizient  $a_1(z)$  wesentlich stärker wächst als  $a_0(z)$ .

Zur Vereinfachung der Untersuchung setzen wir noch voraus, daß der schwächer wachsende Koeffizient  $a_0$  ein Polynom sei.

Nehmen wir also an, die Differentialgleichung

$$w'' + a_1(z) \cdot w' + P(z) \cdot w = 0, \quad (15)$$

wo  $a_1$  ganz-transzendent und  $P(z)$  ein Polynom ist, besitze ein partikuläres Integral endlicher Ordnung  $w_0$ .

Dann gelten folgende Beziehungen:

I.  $m(r, w'_0/w_0) = O(\log r)$  für jedes  $r$ . Aus (15) folgt durch leichte Umformung

$$w_0/w'_0 = a_1(-1/P) + w''_0/w'_0 \cdot (-1/P),$$

und daraus nach Übergang zur Schmieungsfunktion

II.  $m(r, w_0/w'_0) \leq m(r, a_1) + O(\log r)$  für jedes  $r$ , weil die Schmieungsfunktion einer rationalen Funktion  $= O(\log r)$ . Andererseits können wir (15) auch umformen in

$$P \cdot w_0/w'_0 + w''_0/w'_0 = -a_1, \text{ also}$$

$$m(r, w_0/w'_0) + m(r, P) + m(r, w''_0/w'_0) \geq m(r, a_1) \text{ das heißt}$$

III.  $m(r, w_0/w'_0) \geq m(r, a_1) - O(\log r)$  für jedes  $r$ .

Für  $m(r, a_1)$  setzen wir noch  $T(r, a_1)$ , denn  $a_1$  ist ganz, und weil  $a_1$  transzendent ist, gilt  $\lim_{r \rightarrow \infty} \log r/T(r, a_1) = 0$ . Also dürfen wir für große  $r$

II. und III. zusammenfassen in

$$m(r, w_0/w'_0) \approx T(r, a_1) \text{ für } r > r_0. \quad (16)$$

Nach den bekannten Eigenschaften der charakteristischen Funktion gilt aber

$$\begin{aligned} m(w'_0/w_0) + N(w'_0/w_0) &= T(w'_0/w_0) = T(w_0/w'_0) + O(1) \\ &= m(w_0/w'_0) + N(w_0/w'_0) + O(1) \end{aligned}$$

(wenn wir für  $m(r, w, \infty)$  bzw.  $N(r, w, \infty)$ ,  $m(w)$  bzw.  $N(w)$  schreiben). Daraus bekommen wir

$$O(\log r) + N(w'_0/w_0) \approx T(r, a_1) + N(w_0/w'_0) \text{ für } r > r_0,$$

also

$$N(r, w'_0/w_0, \infty) \approx N(r, w_0/w'_0, \infty) + T(r, a_1) \text{ für } r > r_0. \quad (17)$$

Da  $w_0$  Lösung einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, deren Koeffizienten ganze Funktionen sind, so haben  $w_0$  und  $w'_0$  keine gemeinsame Nullstelle, weil die WRONSKISCHE Determinante dieser Differentialgleichung nirgends verschwindet. Und da  $w_0$  und alle ihre Ableitungen ganze Funktionen sind, haben  $w_0$  und  $w'_0$  keine Pole. Folglich ist

$N(r, w'_0/w_0, \infty) = N(r, 1/w_0, \infty)$ , das ist Nullstellenzahl von  $w_0$  in  $|z| < r$  und

$N(r, w_0/w'_0, \infty) = N(r, 1/w'_0, \infty)$ , das ist Nullstellenzahl von  $w'_0$  in  $|z| < r$ .

(17) bedeutet also

$$\text{Nullstellenzahl von } w_0 \approx \text{Nullstellenzahl von } w'_0 + T(r, a_1). \quad (18)$$

Das heißt  $w'_0$  hat weniger Nullstellen als  $w_0$ . Es besteht ein Unterschied, der etwa so groß ist wie  $T(r, a_1)$ .

In den Differentialgleichungen (1) ist aber  $T(r, a_1) = T(r, e^{-z}) = r/\pi$ . Also verliert die erste Ableitung eines Integrales endlicher Ordnung gegenüber  $w_0$   $r/\pi$  Nullstellen in  $|z| < r$ . Insbesondere wird also die Anzahl der Nullstellen eines subnormalen Integrals  $w_0$ , das ja nach (14) vom Mitteltypus erster Ordnung ist, beim Differenzieren *wesentlich* vermindert<sup>3)</sup>. Und wir haben

$$N(r, w'_0, 0) = N(r, w_0, 0) + O(\log r) - r/\pi. \quad (19)$$

Die Ableitung  $w'_0$  ihrerseits genügt aber der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$w''' + e^{-z}w'' - e^{-z} \cdot w' + \alpha w' = 0, \quad (20)$$

die aus der Differentialgleichung (1) durch Differentiation hervorgeht.

Wenn wir  $w'_0 = (w'_0/e^z) \cdot e^z = w_1 \cdot e^z$  setzen, so ist  $w_1$  eine ganze Funktion höchstens vom Mitteltypus erster Ordnung. In (20) setzen wir die entsprechenden Ableitungen von  $w'_0$ , ausgedrückt durch  $w_1$  und  $e^z$ , ein und bekommen nach Division durch  $e^z$

$$w'' + (2 + e^{-z}) \cdot w' + (\alpha + 1) \cdot w = 0 \quad (21)$$

als Differentialgleichung für  $w_1$ . Diese Differentialgleichung ist linear, zweiter Ordnung, und ihre Koeffizienten erfüllen die Voraussetzungen der Differentialgleichung (15). Sie besitzt in  $w_1$  ein partikuläres Integral *endlicher* Ordnung, daher verliert  $w_1$  bei der Differentiation Nullstellen. Es ist

$$N(r, w'_1, 0) = N(r, w_1, 0) - T(r, 2 + e^{-z}) + O(\log r).$$

Aber nach Definition ist  $N(r, w_1, 0) = N(r, w'_0, 0)$  und wegen den bekannten Regeln für die charakteristische Funktion einer ganzen Funktion gilt  $T(r, 2 + e^{-z}) = T(r, e^z) + O(1)$ , also nach (19)

$$N(r, w'_1, 0) = N(r, w_0, 0) - 2 \cdot r/\pi + O(\log r). \quad (22)$$

Nun substituieren wir  $w'_1$  mit  $e^z \cdot w_2$  und wiederholen dieses Verfahren. Mit Hilfe vollständiger Induktion zeigt man, daß nach  $n$ -maliger Wiederholung für  $w_{n+1}$  folgende Differentialgleichung gilt:

$$w'' + w'[2(n+1) + e^{-z}] + w \cdot [(n+1)^2 + \alpha] = 0. \quad (23)$$

Nach Seite 2 Mitte und wegen der Konstruktion der Funktion  $w_{n+1}$  muß (23) ein partikuläres Integral vom Mitteltypus erster Ordnung besitzen, dessen Nullstellenzahl gegenüber der Nullstellenzahl von  $w_0$  um  $(n+1) \cdot r/\pi$  vermindert ist:

$$N(r, w_{n+1}, 0) = N(r, w_0, 0) - (n+1) \cdot r/\pi + O(\log r). \quad (24)$$

<sup>3)</sup> Man kann sogar zeigen, daß 0 defekter Wert von  $w'_0$  wird.

## 8 M. FREI Über die subnormalen Lösungen der Differentialgleichung $w'' + e^{-z} \cdot w' + \text{konst.} \cdot w = 0$

Da  $w_0$  selbst vom Mitteltypus erster Ordnung ist, so gilt

$$N(r, w_0, 0) = O(r). \quad (25)$$

Somit existiert eine Konstante  $c \geq 0$ , so daß  $N(r, w_0, 0) \leq c \cdot r$ . Und also gibt es eine natürliche Zahl  $n$ , so daß

$$(n+1) \cdot r/\pi \geq N(r, w_0, 0) + O(\log r) \quad \text{gilt.}$$

Das heißt, nach *endlich* vielen Wiederholungen des oben beschriebenen Verfahrens bekommen wir eine Differentialgleichung vom Typ (23), die ein part. Integral vom Mitteltypus erster Ordnung *ohne* Nullstellen besitzt.

Das sei nach genau  $k$ -maliger Ausführung des Prozesses der Fall. Dann heißt das part. Integral  $w_k = e^{\beta z}$ ,  $\beta$  konst. Nach (23) ist  $w_k$  Lösung der Differentialgleichung

$$w'' + (2k + e^{-z})w' + (k^2 + \alpha) \cdot w = 0. \quad (26)$$

Darin setzen wir  $w_k = e^{\beta z}$  ein und bekommen die Beziehung

$$\beta^2 + (2k + e^{-z}) \cdot \beta + (k^2 + \alpha) \equiv 0.$$

Daraus folgt:  $\beta = 0$ , und deshalb  $k^2 + \alpha = 0$ .

Damit ein part. Integral von subnormalem Wachstum existiert, muß also *notwendig*

$$\alpha = -n^2, \quad n \text{ natürliche Zahl, sein.} \quad (27)$$

Diese Bedingung ist aber auch *hinreichend*: Wenn nämlich auf eine Differentialgleichung

$$w'' + e^{-z}w' - n^2 \cdot w = 0 \quad (28)$$

das oben beschriebene Verfahren  $n$ -mal ausgeübt wird, so erfüllt  $w_n$  die Differentialgleichung

$$w'' + (2n + e^{-z})w' + (n^2 - n^2)w = 0, \quad \text{also}$$

$$w'' + (2n + e^{-z})w' = 0.$$

Diese hat das part. Integral  $w_n = \text{konst.} \neq 0$ .

Sei  $w_n = c_1$ , d.i. die erste Integrationskonstante. Dann gilt  $w'_{n-1} = c_1 \cdot e^z$ , also  $w_{n-1} = c_1 \cdot e^z + c_2$  ( $c_2$  hängt von der entsprechenden Differentialgleichung ab),  $w'_{n-2} = e^z \cdot (c_1 \cdot e^z + c_2)$  usw. Es resultiert eine Funktion  $w_0$ , die wir durch Ausmultiplizieren auf die Form  $w_0 = \sum_{k=0}^n a_k e^{kz}$  bringen können. Q.e.d.