Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 36 (1961-1962)

Artikel: Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises.

Autor: Strebel, Kurt

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515629

Zur Frage der Eindeutigkeit extremaler quasikonformer Abbildungen des Einheitskreises

von KURT STREBEL, Freiburg/Schweiz

Einleitung

1. Eine quasikonforme Abbildung F des Einheitskreises $|Z| < 1$ auf den Einheitskreis $|W| < 1$ induziert eine topologische Abbildung des Randes $|Z| = 1$ auf den Rand $|W| = 1$. Es ist daher naheliegend, bei einer gegebenen topologischen Abbildung T der Kreisperipherie $|Z| = 1$ auf die Kreisperipherie $|W| = 1$ nach einer diese Randabbildung induzierenden quasikonformen Abbildung kleinster maximaler Dilatation, das heißt nach einer zu T gehörigen extremalen quasikonformen Abbildung des Einheitskreises zu fragen. Aus bekannten Eigenschaften quasikonformer Abbildungen[1]) folgt, daß eine extremale Abbildung F_0 existiert, wenn es überhaupt eine quasikonforme Abbildung F gibt, die auf dem Rande mit T übereinstimmt. Alle zu T gehörigen quasikonformen Abbildungen F des Einheitskreises, deren maximale Dilatation K unterhalb einer festen Schranke liegt, bilden eine normale Familie. Eine Minimalfolge $F_1, F_2, \ldots$ von Vergleichsabbildungen, deren Glieder also eine maximale Dilatation $K_1, K_2, \ldots$ haben, die monoton fällt gegen die untere Grenze K_0 der maximalen Dilatation aller Vergleichsabbildungen, enthält eine im abgeschlossenen Einheitskreis gleichmäßig konvergente Teilfolge, und deren Limes F_0 ist eine quasikonforme Abbildung von $|Z| < 1$ auf $|W| < 1$, mit der maximalen Dilatation K_0, die auf $|Z| = 1$ mit T übereinstimmt.

Nachdem die Existenz einer extremalen quasikonformen Abbildung erwiesen ist, stellt sich die Frage, ob sie auch eindeutig bestimmt sei, oder ob es topologische Abbildungen T des Randes $|Z| = 1$ auf $|W| = 1$ gibt, die mehrere extremale quasikonforme Abbildungen mit derselben kleinsten maximalen Dilatation K_0 (die natürlich eindeutig bestimmt ist) zulassen. Dies ist, wenn keine zusätzlichen Forderungen an die extremale Abbildung gestellt werden, in der Tat der Fall.

2. Bildet man ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet G der $z = x + iy$ – Ebene, etwa das Innere einer Jordankurve, mittels der Abbildung $w = f_0(z) = K_0 x + iy, K_0 \geq 1$, die wir die Streckung von G parallel zur x-Achse mit dem Faktor K_0 nennen wollen, auf ein Gebiet H der

---

[1]) Für die Definition und die hier verwendeten Eigenschaften vgl. etwa L. V. AHLFORS: On quasiconformal mappings. J. d'analyse math. Vol. III, 1953/54.

$w = u + iv$ – Ebene ab, ferner G und H konform auf die Einheitskreise $|Z| < 1$ bzw. $|W| < 1$, so erhält man durch Zusammensetzung

$$Z \to z \xrightarrow{f_0} w \to W$$

eine K_0-quasikonforme Abbildung F_0 von $|Z| < 1$ auf $|W| < 1$, welche eine topologische Abbildung von $|Z| = 1$ auf $|W| = 1$ induziert. Es ist leicht zu sehen, daß unter allen quasikonformen Abbildungen F:

$$|Z| < 1 \to |W| < 1,$$

die auf dem Rande mit F_0 übereinstimmen, F_0 die einzige extremale ist.

Es liegt nahe, diesen Gedanken zu verallgemeinern, indem man an Stelle eines schlichten Gebietes G eine einfach zusammenhängende hyperbolische RIEMANNsche Fläche R über der z-Ebene durch eine Streckung f_0 auf eine Fläche S über der w-Ebene abbildet. Es zeigt sich dann folgendes: Hat die Fläche R endlichen Inhalt $|R|$, so läßt die induzierte Abbildung T der Kreisperipherie nur eine, nämlich eben die zusammengesetzte Abbildung $Z \to z \xrightarrow{f_0} w \to W$ als quasikonforme Abbildung kleinster maximaler Dilatation zu[2]). Ist hingegen $|R| = \infty$, so kann es mehrere Extremalabbildungen geben. Es wird eine Klasse von Flächen R mit $|R| = \infty$ angegeben, für die dieselbe Situation besteht wie im Falle $|R| < \infty$. Durch Beispiele wird gezeigt, daß die Bedingungen, durch welche die Klasse definiert ist, nicht beliebig gelockert werden dürfen, indem dann entweder nicht nur eine Extremalabbildung existiert, oder, wenn es nur eine gibt, diese nicht durch die betrachtete Streckung erhalten wird.

Extremale quasikonforme Abbildung von Überlagerungsflächen endlichen Inhalts

3. R sei eine einfach zusammenhängende RIEMANNsche Fläche über der z-Ebene, von endlichem Flächeninhalt $|R| < \infty$ (gemessen in der Metrik der Grundebene). Das bedeutet, daß es eine konforme Abbildung Φ der Fläche R auf den Einheitskreis $|Z| < 1$ gibt, deren Umkehrfunktion Φ^{-1} im Einheitskreis regulär ist und endliches Dirichletintegral hat. Als lokalen Parameter für die Fläche R verwenden wir in der Umgebung eines regulären Punktes derselben stets den Spurparameter z; die Windungspunkte können wir in den Betrachtungen im allgemeinen außer acht lassen. Sind P und P' zwei Punkte der Fläche, so definieren wir ihren Abstand $\varrho(P, P')$ als die untere Grenze

[2]) Ein Beweis dieses Satzes unter speziellen Verhältnissen findet sich auch bei M. OZAWA: On an approximation theorem in a family of quasiconformal mappings. Kodai Math. Sem. Rep. Vol. 11, 1959. Der Beweis des Haupt-Theorem 3 dieser Arbeit scheint mir jedoch nicht korrekt und in dieser Weise prinzipiell undurchführbar.

der Längen (in der Metrik der Grundebene) aller P und P' auf R verbindenden Kurven. Unter einem Randweg γ verstehen wir eine stetige Abbildung eines halboffenen Intervalles in die Fläche R, wobei das offene Ende gegen den Rand von R geht: $P(t), a \leq t < b, P(t) \to$ Rand von R für $t \to b$, und unter einem Querschnitt von R eine topologische Abbildung eines offenen Intervalles in die Fläche R, wobei beide Enden gegen den Rand von R gehen. Von zwei Randwegen $\gamma : P(t), a \leq t < b$, und $\gamma' : P'(t'), a' \leq t' < b'$, für welche $\lim\limits_{\substack{t \to b \\ t' \to b'}} \varrho(P(t), P'(t')) = 0$ ist, sagen wir, ihre Enden haben den Abstand null, und dasselbe sagen wir von zwei Querschnitten, wenn es sowohl für die beiden oberen als auch für die beiden unteren Enden (bezüglich der Parameterintervalle) gilt.

Die Menge aller Punkte P der Fläche R, deren Spur z einen gegebenen Imaginärteil $\operatorname{Im} z = y$ hat, zerfällt, wenn sie nicht leer ist und keinen Windungspunkt der Fläche enthält, in ein System γ_y von höchstens abzählbar vielen Querschnitten γ_y^λ der Fläche. Liegen Windungspunkte der Fläche über der Geraden, was höchstens für abzählbar viele y der Fall sein kann, so treten an Stelle der Querschnitte verzweigte Kurven auf, die aber keine geschlossenen Ringe enthalten: Da wir uns auf Aussagen «fast überall» beschränken können, lassen wir im folgenden diese y-Werte weg. Wir bezeichnen die Summe der Längen aller Querschnitte der Systeme γ_y mit $l(y) = |\gamma_y| = \sum\limits_\lambda |\gamma_y^\lambda|$. Φ sei eine feste konforme Abbildung von R auf $|Z| < 1$. Für die Länge $\Lambda(y)$ des Bildes $\Phi(\gamma_y)$ des Systems γ_y erhalten wir

$$\Lambda(y) = \sum_\lambda \int_{\gamma_y^\lambda} \left| \frac{dZ}{dz} \right| dx \equiv \int_{\gamma_y} \left| \frac{dZ}{dz} \right| dx,$$

und mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung

$$\Lambda^2(y) \leq l(y) \int_{\gamma_y} \left| \frac{dZ}{dz} \right|^2 dx .$$

Da der Inhalt $|R| = \int\limits_{y_1}^{y_2} l(y)\, dy$, $y_1 = \inf\limits_{z\in R} \operatorname{Im} z$, $y_2 = \sup\limits_{z\in R} \operatorname{Im} z$ der Fläche R endlich ist, ist $l(y) < \infty$ fast überall. Es ist daher sinnvoll, durch $l(y)$ zu dividieren und über y zu integrieren, und aus

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{\Lambda^2(y)}{l(y)} dy \leq \iint_R \left| \frac{dZ}{dz} \right|^2 dx\, dy = \pi$$

folgt $\Lambda(y) < \infty$ fast überall. Für fast alle y ist daher die Länge des Bildes $\Phi(\gamma_y^\lambda)$ jedes Querschnittes γ_y^λ der Fläche R, der über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$

liegt, endlich, und die beiden Enden von $\Phi(\gamma_y^\lambda)$ konvergieren somit gegen je einen Punkt auf $|Z| = 1$. Dasselbe gilt natürlich für die geradlinigen Querschnitte irgendeiner Richtung der z-Ebene.

Umgekehrt betrachten wir zwei gegen denselben Randpunkt Z_0, $|Z_0| = 1$, konvergierende Randwege Γ und Γ' von $|Z| < 1$. γ und γ' seien ihre Φ^{-1}-Bilder auf R. Für die Länge $l(\varrho)$ der Φ^{-1}-Bilder der in $|Z| < 1$ liegenden Bogen der Kreise $|Z - Z_0| = \varrho$, deren Länge $\Lambda(\varrho) < \pi\varrho$ ist, gilt

$$l(\varrho) = \int \left|\frac{dz}{dZ}\right| \varrho\, d\vartheta, \qquad |Z - Z_0| = \varrho e^{i\vartheta},$$

und somit für jedes $\varepsilon > 0$

$$\int_0^\varepsilon \frac{l^2(\varrho)}{\varrho}\, d\varrho \leq \pi \iint \left|\frac{dz}{dZ}\right|^2 \varrho\, d\varrho\, d\vartheta \leq \pi\, |R|.$$

Es kann daher für kein $\varepsilon > 0$ und alle $0 < \varrho \leq \varepsilon\, l(\varrho)$ größer als eine feste positive Zahl sein, das heißt es gibt mindestens eine Folge von Radien $\varrho_n \to 0$, für die $l(\varrho_n) \to 0$ geht: Die Enden der Randwege γ und γ' haben auf R den Abstand null. Damit ist der Beweis erbracht für folgenden

Hilfssatz: Ist R eine einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der z-Ebene, von endlichem Flächeninhalt, und Φ eine konforme Abbildung von R auf das Innere des Einheitskreises $|Z| < 1$, und bezeichnen wir mit $\gamma_y = \{\gamma_y^\lambda\}$ das System aller über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ liegenden Querschnitte von R, so sind deren Bilder $\Phi(\gamma_y^\lambda)$ für fast alle y Querschnitte von $|Z| < 1$, deren beide Enden gegen je einen Punkt auf $|Z| = 1$ konvergieren. Bezeichnen wir mit $\Gamma = \Phi(\gamma_y^\lambda)$ einen Querschnitt, dessen Enden gegen Z_1 und Z_2 auf $|Z| = 1$ konvergieren, und mit Γ' einen beliebigen Querschnitt von $|Z| < 1$, mit denselben Endpunkten Z_1 und Z_2, so haben die respektiven Enden der Querschnitte $\gamma' = \Phi^{-1}(\Gamma')$ und $\gamma_y^\lambda = \Phi^{-1}(\Gamma)$ auf der Fläche R den Abstand null. Für deren Längen gilt daher $|\gamma'| \geq |\gamma_y^\lambda|$, und Gleichheit gilt nur, wenn γ' und γ_y^λ dieselbe Spur haben.

Dieselbe Aussage gilt für jede Richtung der Ebene. Ferner bleibt der erste Teil des Satzes bestehen, wenn man auf einer beliebigen Fläche eine Schar paralleler Strecken betrachtet, die einen Flächenteil mit endlichem Inhalt überstreichen, und der zweite, wenn die Betrachtungen sich auf einen Teil der Fläche beschränken, der endlichen Inhalt hat.

4. Wir bilden die z-Ebene vermittels der affinen Abbildung f_0:

$$w = K_0 x + iy, K_0 \geq 1,$$

auf die w-Ebene ab. Die Abbildung f_0 erzeugt durch «Mitdeformieren» von R eine Fläche S über der w-Ebene und eine K_0-quasikonforme Abbildung von

R auf S, wobei den Punkten der Fläche R mit der Spur z die Punkte der Fläche S mit der Spur $w = K_0 x + iy$ entsprechen. Diese Abbildung, die bis auf eine Decktransformation der Fläche S eindeutig bestimmt ist, wobei wir, falls es mehrere gibt, eine davon auszeichnen wollen, nennen wir «Streckung der Fläche R parallel zur x-Achse mit dem Faktor K_0» und bezeichnen sie wieder mit f_0. Die Fläche S ist wiederum einfach zusammenhängend, und es gibt daher eine konforme Abbildung Ψ von S auf den Einheitskreis oder die punktierte W-Ebene. Die zusammengesetzte Abbildung F_0:

$$Z \xrightarrow{\Phi^{-1}} z \xrightarrow{f_0} w \xrightarrow{\Psi} W$$

ist K_0-quasikonform. Insbesondere ist somit das Bild von S in der W-Ebene der Einheitskreis $|W| < 1$, und F_0 induziert eine topologische Abbildung von $|Z| = 1$ auf $|W| = 1$. Wir behaupten nun den folgenden

Satz 1. *Ist R eine einfach zusammenhängende Fläche über der z-Ebene, und f_0: $w = K_0 x + iy, K_0 \geq 1$, eine Streckung von R auf die Fläche S, sind ferner Φ und Ψ konforme Abbildungen von R und S auf die Einheitskreise $|Z| < 1$ bzw. $|W| < 1$, so ist die zusammengesetzte Abbildung $F_0 = \Psi f_0 \Phi^{-1}$ unter allen quasikonformen Abbildungen F von $|Z| < 1$ auf $|W| < 1$, die auf dem Rand $|Z| = 1$ mit F_0 übereinstimmen, diejenige (eindeutig bestimmte) kleinster maximaler Dilatation.*

Beweis: Sei F eine quasikonforme Abbildung der maximalen Dilatation K von $|Z| < 1$ auf $|W| < 1$, die auf $|Z| = 1$ mit F_0 übereinstimmt. Die zusammengesetzte Abbildung f: $z \xrightarrow{\Phi} Z \xrightarrow{F} W \xrightarrow{\Psi^{-1}} w$ ist eine K-quasikonforme Abbildung von R auf S; denn die zur Abschätzung der maximalen Dilatation von f heranzuziehenden topologischen Quadrate von R dürfen so gewählt werden, daß sie und ihre f-Bilder keinen Windungspunkt von R bzw. S enthalten, und dann ist deren Modulverhältnis offenbar gleich demjenigen der entsprechenden topologischen Quadrate in $|Z| < 1$ und $|W| < 1$.

Sei γ_y^λ ein Querschnitt von R über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$, dessen Φ^{-1}-Bild Γ konvergiert und somit zwei Randpunkte auf $|Z| = 1$ bestimmt. Es konvergieren dann auch das F_0 und das F-Bild von Γ in $|W| < 1$, und zwar gegen dieselben Punkte auf $|W| = 1$. Das f_0-Bild von γ_y^λ ist ein Horizontalquerschnitt $f_0(\gamma_y^\lambda)$ von S über der Geraden $\operatorname{Im} w = y$, dessen Länge $|f_0(\gamma_y^\lambda)| = K_0 |\gamma_y^\lambda|$ ist. Somit gilt für die Länge des f-Bildes von γ_y^λ

$$|f(\gamma_y^\lambda)| \geq K_0 |\gamma_y^\lambda|,$$

und Gleichheit gilt nur, wenn die Spur von $f(\gamma_y^\lambda)$ gleich der Spur von $f_0(\gamma_y^\lambda)$ ist. Diese Aussage gilt für alle Querschnitte γ_y^λ über $\operatorname{Im} z = y$ für fast alle y.

Wir wählen nun y so, daß über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ kein Windungspunkt von R liegt, jeder der entsprechenden Querschnitte γ_y^λ von R ein konvergentes Z-Bild hat, die Gesamtlänge aller Querschnitte

$$l(y) = \sum_\lambda |\gamma_y^\lambda| < \infty$$

und f auf γ_y absolut stetig ist. Dies ist für fast alle y erfüllt. Dann folgt nach der Längen-Flächen-Methode:

$$K_0 l(y) \leq L(y) = \int_{\gamma_y} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| dx,$$

$$K_0^2 l^2(y) \leq L^2(y) \leq l(y) \int_{\gamma_y} \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^2 dx,$$

und nach Division durch $l(y)$ und Integration über y

$$K_0^2 \,|\, R \,|\, \leq \int_{y_1}^{y_2} \frac{L^2(y)}{l(y)}\, dy \leq \iint_R \left| \frac{\partial w}{\partial x} \right|^2 dx\; dy \leq$$

$$\leq \iint_R (|\, p \,| + |\, q\,|)^2\, dx\, dy \leq K \iint_R (|\, p\,|^2 - |\, q\,|^2)\, dx\, dy \leq K \,|\, S \,| = K K_0 \,|\, R\,|,$$

wo $dw = p\, dz + q\, d\bar{z}$ ist.

Daraus ergibt sich zunächst $K \geq K_0$. Sei $K = K_0$: Dann gilt überall in der letzten Ungleichung das Gleichheitszeichen, also fast überall in der vorangehenden. Somit ist für fast alle y

(1) $L(y) = K_0 l(y)$, und für alle diese y-Werte mit Ausnahme wieder höchstens einer Nullmenge hat das f-Bild jedes Querschnittes γ_y^λ dieselbe Spur wie das f_0-Bild; $f(\gamma_y^\lambda)$ ist also insbesondere ein Horizontalquerschnitt, seine Länge dieselbe wie die des f_0-Bildes und auf γ_y^λ gilt $\frac{\partial w}{\partial x} = u_x \geq 0$,

(2) $\left| \frac{\partial w}{\partial x} \right| = u_x =$ konst für fast alle x. Wegen der Totalstetigkeit von u als Funktion von x, und der Länge und Lage von $f(\gamma_y^\lambda)$, ist auf γ_y^λ $u = K_0 x$.

Daher ist für fast alle y die Spur w des Punktes $f(P)$, wenn z die Spur des Punktes P ist, $w = K_0 x + iy$. Aus Stetigkeitsgründen muß dies nun für alle Punkte der Fläche gelten. Ist nämlich P ein beliebiger Punkt von R, so können wir ihn durch einen Punkt P' gleichzeitig so annähern, daß für diesen die Gleichung $w' = K_0 x' + iy'$ gilt und $\varrho(P, P')$ und $\varrho(f(P), f(P'))$ beliebig klein ist. Es muß daher auch $w = K_0 x + iy$ gelten. Die Abbildung f hat daher die Spur $w(z) = K_0 x + iy$ und stimmt also mit f_0 bis auf eine Decktransformation von S überein. Daher müssen F und F_0 bis auf eine lineare Transformation des Einheitskreises $|\, W \,| < 1$ übereinstimmen, und da sie auf dem Rand identisch sind, ist $F = F_0$.

Wir haben folgenden etwas allgemeineren Satz bewiesen:

Satz 1'. *Die Abbildung* $f_0(z) = K_0 x + iy$, $K_0 \geq 1$, *bilde die Fläche* R *endlichen Inhaltes auf die Fläche* S *ab.* f *sei eine* K*-quasikonforme Abbildung von* R *auf* S, *die jeden Horizontalquerschnitt* γ_y^λ *für fast alle* y *in einen Querschnitt von* S *abbildet, dessen beide Enden von denjenigen des* f_0*-Bildes von* γ_y^λ *den Abstand null haben. Dann ist* $K > K_0$ *außer für* $f = f_0$.

Extremale quasikonforme Abbildung einer Klasse von Überlagerungsflächen unendlichen Inhaltes

5. R sei eine einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche der z-Ebene. Wir wählen eine Gerade $\operatorname{Im} z = y_0$, über welcher Punkte der Fläche, aber keine Windungspunkte liegen. Ein System $\gamma_{y_0} = \{\gamma_{y_0}^\lambda\}$ von Querschnitten der Fläche R über dieser Geraden zerlegt die Fläche in endlich oder unendlich viele Teilgebiete, und es ist für jedes derselben bestimmt, ob es sich an mindestens einen der Querschnitte $\gamma_{y_0}^\lambda$ nach oben anschließe. Die Gesamtheit aller mit dieser Eigenschaft behafteten Teilgebiete bezeichnen wir mit $G_{y_0} = \{G_{y_0}^\mu\}$. Das System γ_{y_0} sei nun so gewählt, daß jedes Teilgebiet $G_{y_0}^\mu$ ganz oberhalb der Geraden $\operatorname{Im} z = y_0$ liegt. Zum Beispiel hat das System *aller* über der Geraden $\operatorname{Im} z = y_0$ liegenden Querschnitte der Fläche diese Eigenschaft; γ_{y_0} braucht aber nicht dieses maximale System zu sein. Für $y > y_0$ bezeichnen wir das System aller über $\operatorname{Im} z = y$ und in G_{y_0} liegenden Querschnitte von R mit $\gamma_y = \{\gamma_y^\nu\}$ und die an diese Querschnitte nach oben anschließenden Teilgebiete von R mit $G_y = \{G_y^\varrho\}$.

Dann gilt folgendes: Das System G_y liegt ganz oberhalb $\operatorname{Im} z = y$, denn es ist ein Teil von G_{y_0}, da $\gamma_y \subset G_{y_0}$ ist, und γ_y ist das System *aller* Querschnitte von G_{y_0} über $\operatorname{Im} z = y$. Der zwischen den Geraden $\operatorname{Im} z = y_0$ und $\operatorname{Im} z = y$ gelegene Teil von G_{y_0} ist $G_{y_0} - G_y$. Haben die Querschnittssysteme γ_y eine beschränkte Länge $|\gamma_y| = \Sigma |\gamma_y^\nu| \leq M$, so wollen wir G_{y_0} einen «Arm» der Fläche R nennen.

Definition: Ist $\gamma_{y_0} = \{\gamma_{y_0}^\lambda\}$ ein System von Querschnitten der Fläche R über der Geraden $\operatorname{Im} z = y_0$, so daß in der durch γ_{y_0} erzeugten Zerlegung von R die an diese Querschnitte $\gamma_{y_0}^\lambda$ nach oben anschließenden Teilgebiete $G_{y_0}^\mu$ ganz oberhalb der Geraden $\operatorname{Im} z = y_0$ liegen, ist die Summe der Längen der Querschnitte der $G_{y_0}^\mu$, die über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$ liegen, für $y \geq y_0$ beschränkt, jedoch der Inhalt des Systems $G_{y_0} = \{G_{y_0}^\mu\}$ aller dieser Teilgebiete unendlich, so nennen wir dieses System G_{y_0} einen oberen Arm der Fläche R, abgetrennt durch das Querschnittssystem γ_{y_0}.

Entsprechend definieren wir einen unteren, rechten und linken Arm der Fläche, und fassen die ersten zwei unter «Vertikalarme», die letzteren unter «Horizontalarme» zusammen. Ein einfaches Beispiel einer Fläche mit zwei vertikalen Armen ist das Streifengebiet $|Re\, z| < M$, einer solchen mit zwei horizontalen Armen der Streifen $|\operatorname{Im} z| < M$. Bei $ax + b_1 < \operatorname{Im} z < ax + b_2$ kann man für $a \neq 0$ von Horizontal- oder Vertikal-Armen sprechen. Vier Arme hat das kreuzförmige Gebiet aller z, für die $|Re\, z| < M$ oder $|\operatorname{Im} z| < M$ ist. In allen diesen Fällen ist R schlicht, was jedoch nicht verlangt wird.

6. Die Fläche R besitze nun mindestens einen Arm, etwa einen oberen Arm G_{y_0}. Sie ist dann offenbar hyperbolisch. Wir bezeichnen wieder mit f_0 die Streckung von R parallel zur x-Achse mit dem Faktor $K_0 > 1$ auf die Fläche S, und mit Φ und Ψ je eine konforme Abbildung von R bzw. S auf das Innere des Einheitskreises $|Z| < 1$ bzw. $|W| < 1$. Von einer quasikonformen Abbildung $f: R \to S$ sagen wir, sie stimme auf dem Rand von R mit f_0 überein, wenn die induzierten Abbildungen F und F_0 von $|Z| < 1$ auf $|W| < 1$ auf dem Rande $|Z| = 1$ übereinstimmen.

Sei f eine quasikonforme Abbildung von R auf S, die auf dem Rand von R mit f_0 übereinstimmt. Die Systeme γ_y überstreichen für $y_0 < y < y_1$ den Teil $G_{y_0} - G_{y_1}$ der Fläche R, dessen Inhalt $|G_{y_0} - G_{y_1}| \leq M(y_1 - y_0)$ ist, und daher besteht für die $f(\gamma_y)$ dieselbe Situation bezüglich der $f_0(\gamma_y)$ wie im Falle einer Fläche R endlichen Inhaltes: Für fast alle y haben die Enden der Querschnitte $f(\gamma_y^\nu)$ von S von den Enden der Horizontalquerschnitte $f_0(\gamma_y^\nu)$ den Abstand null. Wir nennen $d(y) = \sup\limits_{P \in \gamma_y} |\operatorname{Im} w - y|$, wo w die Spur des Punktes $f(P)$ ist, die (vertikale) Abweichung des f-Bildes von γ_y vom f_0-Bild von γ_y. Es gilt der folgende

Hilfssatz: (Ungleichung von GRÖTZSCH[3]) Die Abweichung $d(y)$ von $f(\gamma_y)$ von $f_0(\gamma_y)$ ist für $y \geq y_0 + M\sqrt{K K_0}$ höchstens gleich $M K K_0$.

Beweis: Die Abweichung $d(y)$ ist für $y \geq y_0$ eine nach unten halbstetige Funktion. Ist nämlich $d(y) > d_0$ für ein gewisses $y \geq y_0$, so gibt es einen Punkt P auf γ_y und ein $\varepsilon > 0$, so daß für die Spur w von $f(P)$ gilt: $|\operatorname{Im} w - y| > d_0 + \varepsilon$. Wir wählen eine Umgebung V von $f(P)$, deren Spur einen Durchmesser $< \varepsilon/2$ hat, und eine ebensolche Umgebung U von P, so daß außerdem $f(U) \subset V$ ist. Dann schneidet für alle hinreichend kleinen Δy das Querschnittssystem $\gamma_{y+\Delta y}$ $(y + \Delta y \geq y_0)$ die Umgebung U, und es gibt somit ein $P' \in \gamma_{y+\Delta y}$, so daß für die Spur w' von $f(P')$ gilt

$$|\operatorname{Im} w' - (y + \Delta y)| = |\operatorname{Im} w' - \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} w - y - \Delta y|$$

[3]) Vergleiche auch die Arbeit des Verfassers: Eine Abschätzung der Länge gewisser Kurven bei quasikonformer Abbildung. Ann. Acad. Sci. Fenn. 243, 1957.

$$\geq |\operatorname{Im} w - y| - |\operatorname{Im} w' - \operatorname{Im} w| - |\Delta y| > d_0 + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = d_0,$$

und daher $d(y + \Delta y) = \sup\limits_{P' \in \gamma_{y+\Delta y}} |\operatorname{Im} w' - (y + \Delta y)| > d_0$. Wenn somit die Abweichung $d(y)$ für eine überall dichte Menge von Werten y nach oben beschränkt ist, so ist sie es für alle. Wir betrachten nun nur mehr die Werte y, für deren Querschnitte γ_y^* das f-Bild und das f_0-Bild an den Enden den Abstand null haben. Sei $y > y_0$ und es gebe ein $y_1 > y$ und einen Punkt P auf γ_y, dessen Bild $f(P)$ eine Spur w hat mit einem Imaginärteil

$$\operatorname{Im} w > y_1 > y .$$

Das System von Querschnitten $f(\gamma_y)$ liegt entweder ganz in G_{y_0} oder dann schneidet es $f_0(\gamma_{y_0})$. Lassen wir den zweiten Fall weg, den wir nachher betrachten, so hat $f(\gamma_y)$ mit dem Querschnittssystem $f_0(\gamma_{y_1})$ Punkte gemeinsam, und es gibt daher Punkte von $f(G_y)$, die nicht in $f_0(G_{y_1})$ liegen. Für

$$0 < \Delta y < y_1 - y$$

hat nun auch $f(\gamma_{y+\Delta y})$ mindestens einen Punkt mit $f_0(\gamma_{y_1})$ gemeinsam: Andernfalls wäre $f_0(G_{y_1}) \subset f(G_{y+\Delta y}) \subset f(G_y)$, was einen Widerspruch bedeutet. Schneidet $f(\gamma_y)$ das System $f_0(\gamma_{y_2})$, $y > y_2 \geq y_0$, so muß aus analogen Gründen auch $f(\gamma_{y+\Delta y})$ für $0 > \Delta y > y_2 - y$ das System $f_0(\gamma_{y_2})$ treffen.

Eine obere Schranke für die Abweichung $d(y)$ kann nun aus der Ungleichung $\frac{\lambda'}{\lambda} \leq K$ erhalten werden, wo λ und λ' die extremalen Längen[4]) einer Kurvenmenge auf R und deren f-Bildmenge auf S darstellen und K die maximale Dilatation von f ist, wenn man λ'/λ nach unten durch gewisse geometrische Größen abschätzt. Wir nehmen den ersten der oben betrachteten Fälle und wählen als Kurvenschar auf R die Querschnittssysteme γ_η im Intervall $y \leq \eta \leq y + \Delta y < y_1$. Da die Länge jedes Systems $|\gamma_\eta| \leq M$ ist, schließt man auf bekannte Weise $\lambda \leq \frac{M}{\Delta y}$. Die extremale Länge λ' der Bilder $f(\gamma_\eta)$ schätzen wir nach unten ab, indem wir im Streifen $G_{y+\Delta y} - G_{y_1}$ den Wert der Metrik $\varrho = 1$ wählen, außerhalb null. Damit wird die ϱ-Länge fast jedes $f(\gamma_\eta)$ mindestens $2(y_1 - y - \Delta y)$ und der Inhalt der von den Kurven überstrichenen Fläche höchstens $K_0 M(y_1 - y - \Delta y)$. Für die extremale Länge λ' erhalten wir daher

$$\lambda' \geq \frac{4(y_1 - y - \Delta y)^2}{K_0 M(y_1 - y - \Delta y)},$$

[4]) Für die Definition und die verwendeten Bezeichnungen vgl. L. AHLFORS und A. BEURLING: Conformal invariants and function theoretic nullsets. Acta Math. 83, 1950.

und aus $K \geq \frac{\lambda'}{\lambda}$

$$K \geq \frac{4(y_1 - y - \Delta y)\Delta y}{K_0 M^2}.$$

Für $\Delta y = \frac{y_1 - y}{2}$ folgt

$$y_1 - y \leq M\sqrt{KK_0}.$$

Ebenso erhalten wir bei einer Abweichung nach unten $y - y_2 \leq M\sqrt{KK_0}$. Ist nun $y \geq y_0 + M\sqrt{KK_0}$, so kann man in beiden Ausdrücken zur oberen Grenze übergehen, woraus die Behauptung folgt.

Das Resultat für die Horizontalabweichung $d(x)$ in einem Horizontalarm der Fläche R ist dasselbe, und der Beweis verläuft analog.

7. Satz 2 (Minimumsatz): *Besitzt die Fläche R einen Arm, so minimisiert die Abbildung f_0 unter allen quasikonformen Abbildungen $f: R \to S$, die auf dem Rande von R mit f_0 übereinstimmen, die maximale Dilatation.*

Beweis: Die Fläche R habe einen oberen Arm G_{y_0}. Für die Länge $L(y)$ des f-Bildes der Querschnittssysteme γ_y von G_{y_0}, $y \geq y_0$, erhalten wir

$$L(y) = \int_{\gamma_y} \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right| dx,$$

$$K_0^2 l^2(y) \leq L^2(y) \leq l(y) \int_{\gamma_y} \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2 dx,$$

wobei $l(y) = |\gamma_y|$ die Länge des Systems γ_y von Horizontalquerschnitten bezeichnet. Daher ist für $y_2 > y_1 \geq y_0 + M\sqrt{KK_0}$

$$\begin{aligned}
K_0^2 \int_{y_1}^{y_2} l(y)\,dy &\leq \int_{y_1}^{y_2}\int_{\gamma_y} \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2 dx\,dy \leq \int_{y_1}^{y_2}\int_{\gamma_y} (|p| + |q|)^2\,dx\,dy \\
&\leq K \int_{y_1}^{y_2}\int_{\gamma_y} (|p|^2 - |q|^2)\,dx\,dy \leq K\,|f(G_{y_1} - G_{y_2})| \\
&\leq K K_0 |G_{y_1} - G_{y_2}| + 2M\sqrt{KK_0}\cdot M K_0,
\end{aligned}$$

somit

$$K_0^2 |G_{y_1} - G_{y_2}| \leq KK_0 |G_{y_1} - G_{y_2}| + \text{konst}.$$

Da für $y_2 \to \infty$ $|G_{y_1} - G_{y_2}| \to \infty$ geht, erhalten wir $K_0 \leq K$.

Um den Minimumsatz im Falle eines Horizontalarmes zu beweisen, bilden wir die Fläche R durch die Abbildung $z^* = h(z) = K_0 z$ auf eine Fläche R^* ab. hf_0^{-1} ist eine Streckung der Fläche S längs der imaginären Achse mit dem Faktor K_0 auf die Fläche R^*, und hf^{-1} eine K-quasikonforme Abbildung von S auf R^*, die auf dem Rande von S mit hf_0^{-1} übereinstimmt. Damit besteht hier dieselbe Situation wie oben, und es folgt $K \geq K_0$.

Ein besonders einfaches Beispiel einer Fläche R mit einem oberen Arm ist das Gebiet $R = \{z;\ \operatorname{Im} z < 0$ oder $|\operatorname{Re} z| < 1\}$. Sein Rand sind die 4 Halbgeraden $\{z;\ \operatorname{Im} z = 0, |z| \geq 1\}$, $\{z;\ |\operatorname{Re} z| = 1, \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Bilden wir R mittels der Abbildung $w = f_0(z) = K_0 x + iy$, $K_0 \geq 1$, auf das Gebiet $S = \{w;\ \operatorname{Im} w < 0$ oder $|\operatorname{Re} w| < K_0\}$ ab, so erfüllt jede Abbildung f der Form

$$f(z) = \begin{cases} K_0 x + iy & y \geq 0 \\ K_0 x + i g(y) & y < 0\,, \end{cases}$$

wo g eine reelle, stetig differenzierbare Funktion von y ist und den Bedingungen genügt: $g(0) = 0$, $1 \leq g'(y) \leq K_0^2$, die Randbedingung und ist K_0-quasikonform. Denn für die Dilatation $K(z)$ an einer beliebigen Stelle z erhalten wir $K(z) = \dfrac{|p| + |q|}{|p| - |q|}$ mit $p = \frac{1}{2}(K_0 + g'(y))$, $q = \frac{1}{2}(K_0 - g'(y))$. Daraus folgt $K(z) = \dfrac{K_0}{g'}$ für $g' \leq K_0$ bzw. $\dfrac{g'}{K_0}$ für $g' \geq K_0$, also $K(z) = \operatorname{Max}\left(\dfrac{K_0}{g'}, \dfrac{g'}{K_0}\right) \leq K_0$. f ist daher zugleich mit f_0 für die durch f_0 induzierte Randabbildung extremale quasikonforme Abbildung.

Das Beispiel kann natürlich modifiziert werden, da man zum Beispiel den Arm der Fläche beliebig wählen oder auch mehrere Halbebenen geeignet anfügen kann.

8. Die Fläche R habe einen oberen Arm G_{y_0}, f und f_0 haben dieselbe Bedeutung wie oben und es sei $K = K_0$, Integrieren wir von einer beliebigen Stelle $y_1 > y_0$ weg, so erhalten wir

$$K_0^2\, |G_{y_1} - G_y| \leq \int_{y_1}^{y} \frac{L^2(y)}{l(y)}\, dy \leq K_0^2\, |G_{y_1} - G_y| + \text{konst}\,.$$

Daraus folgt: Zu jedem $\varepsilon > 0$ und y_1 gibt es ein $y > y_1$, so daß

$$L(y) < K_0\, l(y) + \varepsilon$$

ist. Wäre nämlich für ein gewisses y_1 und $\varepsilon > 0$ $L(y) \geq K_0 l(y) + \varepsilon$ für alle $y \geq y_1$, so wäre

$$\int_{y_1}^{y} \frac{L^2(y)}{l(y)}\, dy \geq K_0^2 \int_{y_1}^{y} l(y)\, dy + 2K_0\, \varepsilon(y - y_1) = K_0^2\, |G_{y_1} - G_y| + 2K_0 \varepsilon (y - y_1)\,,$$

was für $y \to \infty$ einen Widerspruch ergibt.

Hilfssatz: Ist G_{y_0} ein oberer Arm der Fläche R, f_0 die Horizontalstreckung von R auf S mit dem Faktor K_0, und f eine K_0-quasikonforme Abbildung von R auf S, die auf dem Rande von R mit f_0 übereinstimmt, so gibt es eine Folge von Querschnittssystemen γ_{y_n} von G_{y_0}, $y_n \to \infty$ für $n \to \infty$, für die die Länge $|f(\gamma_{y_n})|$ sich von $|f_0(\gamma_{y_n})|$ um beliebig wenig unterscheidet. Insbesondere geht dann auch die Abweichung von $f(\gamma_{y_n})$ von $f_0(\gamma_{y_n})$, das heißt von y_n, mit $n \to \infty$ gegen null, denn sie ist für $\varepsilon < 2M$ kleiner als $\sqrt{\varepsilon M}$.

Entsprechendes gilt für einen unteren Arm. Für einen horizontalen Arm, zum Beispiel einen rechten, gilt: Es gibt eine Folge von Querschnittssystemen γ_{u_n}, $u_n \to \infty$ für $n \to \infty$, der Bildfläche S über der $w = u + iv$-Ebene, deren f- und f_0-Urbilder sich in der Länge beliebig wenig unterscheiden:

$$|f_0^{-1}(\gamma_{u_n})| \leq |f^{-1}(\gamma_{u_n})| \leq |f_0^{-1}(\gamma_{u_n})| + \varepsilon_n,$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Daraus folgt dann wiederum dasselbe für die Abweichung. Bei diesem Hilfssatz sowie bei demjenigen von Nr.6 wird übrigens nur die unendliche Länge des Armes, nicht der unendlich große Inhalt benützt.

9. Satz 3 (Eindeutigkeitssatz): *Die Fläche R über der z-Ebene besitze mindestens einen Arm, und anderseits sei es möglich, höchstens 4 Arme, einen oberen, unteren, rechten und linken, die wir bzw. mit G_{y_0}, $G_{\bar{y}_0}$, G_{x_0}, $G_{\bar{x}_0}$ bezeichnen, durch entsprechende Querschnittssysteme $\gamma_{y_0}, \gamma_{\bar{y}_0}, \gamma_{x_0}, \gamma_{\bar{x}_0}$ so abzutrennen, daß der Rest der Fläche R endlichen Inhalt habe:*

$$|R - G_{y_0} - \ldots - G_{\bar{x}_0}| < \infty.$$

Ist dann f_0 eine Streckung der Fläche R auf die Fläche S, parallel zur x-Achse, mit dem Faktor $K_0 \geq 1$, und *$f \neq f_0$ eine quasikonforme Abbildung von R auf S, die auf dem Rande von R mit f_0 übereinstimmt, so ist die maximale Dilatation K von f größer als K_0.*

Beweis: Da die Fläche R m ndestens einen Arm unendlichen Inhaltes besitzt, ist $K \geq K_0$. Sei nun $K = K_0$. Wir wollen zunächst zeigen, daß jeder Horizontalquerschnitt von R durch f auf einen ebensolchen Querschnitt von S abgebildet wird. Wir geben zu diesem Zwecke eine Folge von positiven Zahlen $\varepsilon_n \to 0$, $n = 1, 2, \ldots$ und wählen dann in den Vertikalarmen G_{y_0} und $G_{\bar{y}_0}$ Folgen von Querschnittssystemen γ_{y_n} und $\gamma_{\bar{y}_n}$, die mit $n \to \infty$ gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ gehen und deren f-Bilder von den f_0-Bildern um weniger als ε_n abweichen und eine Länge $|f(\gamma_{y_n})| < |f_0(\gamma_{y_n})| + \varepsilon_n$ haben, dasselbe für die $\gamma_{\bar{y}_n}$. In den Horizontalarmen wählen wir in S solche Vertikal-Querschnittssysteme γ_{u_n} und $\gamma_{\bar{u}_n}$, so daß dasselbe von deren f-Urbildern δ_{x_n} bzw. $\delta_{\bar{x}_n}$ gilt, $u_n = K_0 x_n$, $\bar{u}_n = K_0 \bar{x}_n$.

Die durch die letzteren abgetrennten Gebietssysteme bezeichnen wir mit

G_{u_n} und $D_{x_n} = f^{-1}(G_{u_n})$ bzw. $G_{\bar{u}_n}$ und $D_{\bar{x}_n} = f^{-1}(G_{\bar{u}_u})$, und den Rest der Fläche mit

$$R_n = R - G_{v_n} - G_{\bar{v}n} - D_{x_n} - D_{\bar{x}_n}.$$

Für jedes n ist der Inhalt $|R_n| < \infty$. Wir betrachten die (unverzweigten) Horizontalquerschnitte von R_n und unterscheiden dabei folgende Arten:

a) Diejenigen, deren beide Endpunkte auf dem Rand von R liegen. Für die Länge L der f-Bilder derselben gilt $L \geq K_0 l$, wobei (immer außer höchstens für eine Ordinatenmenge vom Maß null) das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn das f- und das f_0-Bild des betreffenden Querschnittes in der w-Ebene dieselbe Spur haben.

b) Diejenigen, für die das nicht zutrifft. Diese Horizontalquerschnitte von R_n haben also mindestens einen ihrer Endpunkte auf einem der δ-Querschnitte von R. Wir schließen diejenigen davon aus, deren Länge höchstens $2\,\varepsilon_n$ ist. Sie überstreichen eine Punktmenge E_n^1 auf der Fläche R_n, deren Inhalt kleiner als $2 \cdot 2\,\varepsilon_n(M + \varepsilon_n)$ ist. Für die Länge L der Bilder der übrigen gilt $L \geq K_0(l - 2\,\varepsilon_n) \geq 0$. Sie überstreichen eine Ordinatenmenge, deren Gesamtmaß höchstens $2(M + \varepsilon_n)$ ist.

Nehmen wir nun an, es gebe einen (unverzweigten) Horizontalquerschnitt Γ_y von R über der Geraden $\operatorname{Im} z = y$, so daß $f(\Gamma_y)$ kein Horizontalquerschnitt von S ist. Dann gibt es zwei Punkte P_1 und P_2 auf Γ_y, deren Bilder $Q_i = f(P_i)$ Spuren w_i haben mit $|\operatorname{Im}(w_1 - w_2)| > 0$. Für hinreichend große n liegen die Punkte P_1, P_2 in R_n, und es läßt sich ein $\varepsilon_0 > 0$ und ein $\Delta y > 0$ angeben, so daß folgendes gilt: Wir betrachten eine vertikale Strecke α der Länge Δy mit Mittelpunkt P_1 auf R. Dann ist die Länge L des f-Bildes jedes durch α gehenden Horizontalquerschnittes von R_n

$$L \geq K_0\left((l - 2\varepsilon_n) + \varepsilon_0\right),$$

und da die rechte Seite positiv ist, folgt daraus

$$L^2 \geq K_0^2(l^2 + 2l(-2\varepsilon_n + \varepsilon_0)).$$

Bezeichnen wir die Punktmenge von R_n, die von diesen Querschnitten überstrichen wird, mit E_n^2, und die von den übrigen Horizontalquerschnitten von R_n überstrichene mit $E_n^3 + E_n^4$, wobei der erste Summand die Querschnitte betrifft, deren beide Enden auf dem Rand von R liegen, der zweite diejenigen, die mindestens ein Ende auf einem δ-Querschnitt von R haben. Auf die einzelnen Querschnittsmengen wenden wir die Längen-Flächen-Methode an. Wir erhalten daraus für

$$E_n^2: \qquad K_0^2 \int l\,dy + K_0^2\, 2(-2\varepsilon_n + \varepsilon_0)\Delta y \leq \int \frac{L^2}{l}\,dy \leq \iint_{E_n^2} \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2 dx\,dy$$

$$\leq K_0 \iint\limits_{E_n^2} (\,|\,p\,|^2 - |\,q\,|^2)\, dx\, dy\,,$$

$$E_n^3: \quad K_0^2 \int l\, dy \leq \int \frac{L^2}{l}\, dy = \iint\limits_{E_n^3} \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2 dx\, dy \leq K_0 \iint\limits_{E_n^3} (\,|\,p\,|^2 - |\,q\,|^2)\, dx\, dy\,,$$

$$E_n^4: \quad K_0^2 \int l\, dy - K_0^2\, 4\varepsilon_n\, 2(M + \varepsilon_n) \leq \int \frac{L^2}{l}\, dy \leq \iint\limits_{E_n^4} \left|\frac{\partial w}{\partial x}\right|^2 dx\, dy$$

$$\leq K_0 \iint\limits_{E_n^4} (\,|\,p\,|^2 - |\,q\,|^2)\, dx\, dy\,.$$

Durch Summation der Beiträge ergibt sich für die Inhalte $|\,E_n^i\,|$

$$K_0^2 (\,|\,E_n^2\,| + |\,E_n^3\,| + |\,E_n^4\,|\,) + K_0^2\, 2\, \Delta y(-\,2\,\varepsilon_n + \varepsilon_0) - K_0^2\, 8\,\varepsilon_n (M + \varepsilon_n)$$

$$\leq K_0 \iint\limits_{E_n^2 + E_n^3 + E_n^4} (\,|\,p\,|^2 - |\,q\,|^2)\, dx\, dy\,,$$

und daraus

$$K_0^2\, |\,R_n\,| + K_0^2 \{2\, \Delta y(-\,2\,\varepsilon_n + \varepsilon_0) + 8\,\varepsilon_n (M + \varepsilon_n) - 4\,\varepsilon_n (M + \varepsilon_n)\}$$

$$\leq K_0^2\, |\,R_n\,| + 2\, M\, \varepsilon_n\, K_0\,.$$

Für $n \to \infty$ folgt daraus, da sich die Glieder $K_0^2\, |\,R_n\,|$ wegheben,

$$K_0^2\, 2\, \Delta y\, \varepsilon_0 \leq 0$$

und somit ein Widerspruch.

Es wird daher jeder unverzweigte Horizontalquerschnitt von R durch f auf einen ebensolchen von S abgebildet. Dann gilt dies aber auch für verzweigte Horizontalquerschnitte. Ist nämlich Γ_v ein solcher, so betrachten wir ein schlichtes Intervall desselben, dessen Endpunkte Windungspunkte von R sind (oder einer davon ein Randpunkt von R). Dieses Intervall läßt sich beliebig durch unverzweigte Horizontalquerschnitte Γ_{y}, von R annähern, für die der Satz gilt. Somit gilt aus Stetigkeitsgründen die Aussage auch für das betrachtete schlichte Intervall des verzweigten Querschnittes, und da alle diese an den Windungspunkten zusammenhängen, für den ganzen verzweigten Horizontalquerschnitt.

Um die entsprechende Aussage für die Vertikalquerschnitte zu erhalten, bilden wir R mittels der konformen Abbildung $z^* = h(z) = K_0 z$ auf die Fläche R^* über der z^*-Ebene ab und betrachten dann die quasikonformen Abbildungen $h f_0^{-1}$ und $h f^{-1}$. Die erste ist eine Streckung von S längs der imaginären Achse um den Faktor K_0 auf R^*, die zweite eine K_0-quasikonforme Abbildung von S auf R^*, die auf dem Rande mit $h f_0^{-1}$ übereinstimmt. Daher werden die Vertikalquerschnitte von S durch $h f^{-1}$ auf ebensolche von R^* abgebildet, also auch die Vertikalquerschnitte von R durch f auf solche von S.

Wir wollen nun zeigen, daß die Abbildung f die Spur $w_0 = K_0 x + iy$ hat. Es genügt offenbar, dies fast überall zu zeigen.

Die Horizontalquerschnitte von R im oberen und unteren Arm und die Vertikalquerschnitte in den seitlichen Armen (wenn solche vorhanden sind) werden auf ebensolche Querschnitte von S abgebildet mit derselben Ordinate bzw. Abszisse, da f und f_0 auf dem Rande identisch sind. Wenden wir auf einen Abschnitt, das heißt den zwischen zwei Abszissen x_1 und x_2 gelegenen Teil eines seitlichen Armes die früheren Betrachtungen, die für Flächen endlichen Inhaltes angestellt wurden, an, so folgt, daß $v = y$ ist auf den Vertikalquerschnitten der seitlichen Arme. Sei nun Γ_y ein beliebiger Horizontalquerschnitt von R. Trifft er einen Vertikalquerschnitt eines seitlichen Armes, so wird er durch f auf einen Horizontalquerschnitt derselben Ordinate abgebildet. Trifft er aber keinen solchen, so ist dies wegen der Übereinstimmung von f und f_0 auf dem Rande von R erst recht der Fall. Ebenso beweisen wir für die Vertikalquerschnitte, daß sie durch f auf ebensolche mit der K_0-fachen Abszisse abgebildet werden. Daraus folgt die Behauptung, und daher stimmen f und f_0 bis auf eine Decktransformation von S überein. Daraus folgt schließlich wie oben, daß $f = f_0$ ist.

10. Als Beispiel betrachten wir den Parallelstreifen $R\colon 0 < \operatorname{Im} z < 1$ der z-Ebene mit den beiden Randgeraden $\Gamma_0\colon \operatorname{Im} z = 0$ und $\Gamma_1\colon \operatorname{Im} z = 1$, und den damit identischen Streifen S in der w-Ebene: $0 < \operatorname{Im} w < 1$, mit den Randgeraden $\Delta_0\colon \operatorname{Im} w = 0$ und $\Delta_1\colon \operatorname{Im} w = 1$. $h_j(x) = ax + b_j$ $(j = 0, 1)$, $a > 0$ sei eine lineare Abbildung von Γ_j auf Δ_j. Gesucht ist die extremale quasikonforme Abbildung von R auf S, die auf Γ_j mit h_j identisch ist.

Die (wohlbestimmte) affine Abbildung f der z- auf die w-Ebene, die auf den Γ_j mit den h_j übereinstimmt, ist $f(z) = ax + (b_1 - b_0)y + b_0 + iy$. Ist die Dilatation dieser Abbildung K_0, so gibt es zwei Ähnlichkeitstransformationen $z^* = \varphi(z)$ und $w^* = \psi(w)$, so daß die Abbildung f die Produktdarstellung hat

$$f = \psi^{-1} f_0 \varphi$$

wo $f_0(z^*) = K_0 x^* + iy^*$ die Streckung des z^*-Streifens auf den w^*-Streifen längs der reellen Achse mit dem Faktor K_0 ist. f ist also die extremale quasikonforme Abbildung von R auf S mit der Randabbildung

$$f(z) = ax + (b_1 - b_0)\,y + b_0 + iy\,, \quad y = 0, 1\,.$$

Satz 4. *In der Klasse der quasikonformen Selbstabbildungen des Streifens* R: $0 < \operatorname{Im} z < 1$, *die auf dem Rande mit der affinen Abbildung* $f(z) = ax + (b_1 - b_0)\,y + b_0 + iy$, $a > 0$, *übereinstimmen, ist* f *die eindeutig bestimmte extremale quasikonforme Abbildung.*

Als Korollar dazu erhalten wir folgenden Drehungssatz: Wir betrachten einen Kreisring $r < |z| < R$, und quasikonforme Selbstabbildungen f desselben, die den äußeren Kreis punktweise festhalten, hingegen den inneren Kreis in sich um einen gewissen Winkel rotieren: $f(\mathrm{Re}^{i\vartheta}) = \mathrm{Re}^{i\vartheta}$, $f(\mathrm{re}^{i\vartheta}) = \mathrm{re}^{i(\vartheta+\vartheta_0)}$. Die extremale quasikonforme Abbildung des Kreisringes auf sich selber mit dieser Randabbildung ist diejenige, der in der Ebene des $\log z$ die lineare Abbildung des Parallelstreifens entspricht:

$$w = f(z) = |z| \exp i\vartheta_0 \frac{\log|z| - \log R}{\log r - \log R}.$$

11. Zum Schlusse sei noch ein Beispiel von Flächen gegeben, bei welchen die Streckung f_0 nicht die extremale quasikonforme Abbildung mit der durch sie induzierten Randabbildung darstellt. R sei die Fläche $\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$, $|z| > 0$. Sie stellt im Falle $\alpha_2 - \alpha_1 \leq 2\pi$ ein Winkelgebiet der z-Ebene mit Scheitel im Nullpunkt dar, im Falle $\alpha_2 - \alpha_1 > 2\pi$ ist es ein nicht-schlichtes Winkelgebiet. Wir bilden R ab mittels der Abbildung f_0: $w = K_0 x + iy$, $K_0 \geq 1$. Die Bildfläche S ist das Winkelgebiet $|w| > 0, \beta_1 < \arg w < \beta_2$, wobei die beiden Argumente β_1 und β_2 der Randstrahlen durch f_0 eindeutig bestimmt sind: Liegt $\alpha_j, j = 1, 2$, im Intervall $k\pi \leq \alpha_j < (k+1)\pi$, k ganz, so ist offenbar auch $k\pi \leq \beta_j < (k+1)\pi$ und es gilt $\operatorname{cotg} \beta_j = K_0 \operatorname{cotg} \alpha_j$. Die durch f_0 induzierte Abbildung der beiden Randstrahlen $\arg z = \alpha_j$ auf die Randstrahlen $\arg w = \beta_j$ ist gegeben durch

$$|w| = (\sin^2 \alpha_j + K_0^2 \cos^2 \alpha_j)^{\frac{1}{2}} |z| = c_j |z|.$$

Wir suchen eine extremale quasikonforme Abbildung von R auf S, die auf den Randstrahlen mit f_0 übereinstimmt. Zu diesem Zwecke nehmen wir an, f sei eine solche Abbildung und K deren maximale Dilatation. Wir öffnen die beiden Winkel mit Hilfe der beiden Potenzoperationen $z^* = z^n$, $w^* = w^n$, wodurch sie in die Winkelgebiete R^*: $|z^*| > 0$, $\alpha_1^* = n\alpha_1 < \arg z^* < n\alpha_2 = \alpha_2^*$ und S^*: $|w^*| > 0$, $\beta_1^* = n\beta_1 < \arg w^* < n\beta_2 = \beta_2^*$ übergehen. Die gegebene Abbildung $|w| = c_j |z|$ $(j = 1, 2)$ der Randstrahlen von R auf diejenigen von S induziert die Abbildung $|w^*| = c_j^n |z^*|$ der Randstrahlen von R^* auf diejenigen von S^*. Wir unterteilen die Winkel R^* und S^* je in n gleiche Winkel

$$\alpha_1^* + (k-1)\,\Delta\alpha < \arg z^* < \alpha_1^* + k\Delta\alpha$$

bzw.

$$\beta_1^* + (k-1)\,\Delta\beta < \arg w^* < \beta_1^* + k\Delta\beta,$$

$k = 1, 2, \ldots, n$; $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$; $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$, und definieren eine lineare Abbildung der trennenden Strahlen $\arg z^* = \alpha_1^* + j\Delta\alpha$ auf die Strahlen

$\arg w^* = \beta_1^* + j\Delta\beta$, $j = 0, 1, \ldots, n$, durch die Gleichung

$$| w^* | = c_1^{n-j} c_2^j | z^* | .$$

Das ergibt im Teilwinkel mit der Nummer k im wesentlichen dieselbe Situation wie im ursprünglichen Winkel, nämlich bis auf den gemeinsamen Faktor $c_1^{n-k} c_2^{k-1}$, so daß eine extremale Abbildung dieses Teilwinkels auf den entsprechenden Teilwinkel der w^*-Ebene symbolisch in der Form $c_1^{n-k} c_2^{k-1} f$ geschrieben werden kann. Das System aller dieser n Abbildungen, die auf den Strahlen $\arg z^* = \alpha_1^* + j\Delta\alpha (j = 1, \ldots, n-1)$ stetig zusammenhängen, ist eine K-quasikonforme Abbildung von R^* auf S^*, und die dadurch induzierte Abbildung von R auf S bezeichnen wir mit f_n, $f_1 = f$. Die Abbildung f_n ist, da sie dieselbe maximale Dilatation besitzt wie f, eine extremale quasikonforme Abbildung von R auf S mit der durch f_0 induzierten Randabbildung. Auf den unterteilenden Strahlen $\arg z = \alpha_1 + \frac{j}{n} \Delta\alpha$, $j = 0, 1, \ldots, n$, hat sie die Form

$$\arg w = \beta_1 + \frac{j}{n} \Delta\beta, \; | w | = c_1^{\frac{n-j}{n}} c_2^{\frac{j}{n}} | z | .$$

Wir behaupten: Die Folge f_n konvergiert auf R, gleichmäßig über jedem Kreisring $0 < r_1 \leq | z | \leq r_2 < \infty$ gegen die Abbildung

$$f_\infty : \arg z = \alpha_1 + \delta\Delta\alpha \to \begin{cases} \arg w = \beta_1 + \delta\Delta\beta \\ | w | = c_1^{1-\delta} c_2^\delta | z | \end{cases}, \quad 0 \leq \delta \leq 1 .$$

Beweis: Sei E die Menge der Punkte von R über dem Kreisring

$$0 < r_1 \leq | z | \leq r_2 < \infty$$

bei gegebenem r_1 und r_2. f_∞ ist eine quasikonforme Abbildung von R auf S, die auf dem Rand von R mit f und außerdem auf den Strahlen $\arg z = \alpha_1 + \frac{j}{n} \Delta\alpha$, $j = 0, \ldots, n$ mit f_n übereinstimmt. Für die Abbildungen f_n, $n = 1, 2, \ldots, \infty$, gilt in E eine HÖLDER-Bedingung der Form

$$| f_n(z_1) - f_n(z_2) | \leq A \, | z_1 - z_2 |^B$$

mit von n unabhängigen Konstanten $A, B > 0$. Gegeben $\varepsilon > 0$. Wir wählen $d > 0$ so, daß $A \cdot d^B < \varepsilon$ ist. Dann ist für $z_1, z_2 \in E$, $| z_1 - z_2 | \leq d$, $| f_n(z_1) - f_n(z_2) | < \varepsilon$ unabhängig von n. Nun wählen wir N so groß, daß für $n > N$ zu jedem Punkt $z \in E$ ein $z_0^{(n)} \in E$ auf einem Strahl $\arg z_0^{(n)} = \alpha_1 + \frac{j}{n} \Delta\alpha$ existiert, für den $| z_0^{(n)} - z | < d$ ist. Dann gilt für $n > N$, $z \in E$ beliebig

$$| f_n(z) - f_\infty(z) | \leq | f_n(z) - f_n(z_0^{(n)}) | + | f_\infty(z_0^{(n)}) - f_\infty(z) |$$
$$< A | z - z_0^{(n)} |^B + A | z_0^{(n)} - z |^B < 2\varepsilon .$$

Da f_n K-quasikonform ist für jedes n, ist daher die maximale Dilatation von f_∞ höchstens gleich K. Wegen der Voraussetzung über f kann sie aber nicht kleiner als K sein, also ist sie gleich K: f_∞ ist eine extremale quasikonforme Abbildung von R auf S mit der durch f_0 induzierten Randabbildung. Durch Übergang zum Logarithmus, $\zeta = \log z$, $\omega = \log w$, erhalten wir aus den beiden Winkelgebieten Parallelstreifen $-\infty < \operatorname{Re}\zeta < \infty, \alpha_1 < \operatorname{Im}\zeta < \alpha_2$ bzw. $-\infty < \operatorname{Re}\omega < \infty$, $\beta_1 < \operatorname{Im}\omega < \beta_2$, und f_∞ induziert die affine Abbildung

$$\varphi_\infty : \begin{cases} \operatorname{Im}\omega = \beta_1 + \dfrac{\Delta\beta}{\Delta\alpha}(\operatorname{Im}\zeta - \alpha_1) \\[2ex] \operatorname{Re}\omega = \operatorname{Re}\zeta + \dfrac{\alpha_2 - \operatorname{Im}\zeta}{\Delta\alpha}\log c_1 + \dfrac{\operatorname{Im}\zeta - \alpha_1}{\Delta\alpha}\log c_2 . \end{cases}$$

Die induzierte Randabbildung ist eine Translation um $\log c_1$ bzw. $\log c_2$. Die extremale quasikonforme Abbildung der Streifen ist somit eindeutig bestimmt und gleich φ_∞. Ist insbesondere $\Delta\alpha = \pi$, so ist auch $\Delta\beta = \pi$ und $c_1 = c_2$. Die Abbildung hat dann die Form $\operatorname{Im}\omega = \operatorname{Im}\zeta + (\beta_1 - \alpha_1)$, $\operatorname{Re}\omega = \operatorname{Re}\zeta + \log c_1$, das heißt $\omega = \zeta + \text{konst}$, ist also konform.

Satz 5. Die extremale quasikonforme Abbildung eines Winkelgebietes $R: |z| > 0$, $\alpha_1 < \arg z < \alpha_2$ auf das Winkelgebiet $S = f_0(R)$, wo $w = f_0(z) = K_0 x + iy$, $K_0 \geq 1$, mit der durch f_0 induzierten Abbildung der beiden Randstrahlen $\arg z = \alpha_j (j = 1, 2)$ auf die Randstrahlen $\arg w = \beta_j$ von S, die die Form $|w| = c_j |z|$ besitzt, ist eindeutig bestimmt. Sie ist gegeben durch

$$\arg w = \beta_1 + \delta\Delta\beta$$
$$|w| = c_1^{1-\delta} c_2^{\delta} |z| ,$$

wo $\arg z = \alpha_1 + \delta\Delta\alpha$, $0 \leq \delta \leq 1$, $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$, $\Delta\beta = \beta_2 - \beta_1$ ist.

Da ein Winkelgebiet $0 < \alpha_1 < \arg z < \alpha_2 < \pi$ eine Fläche mit einem oberen ‚Arm' darstellt, wobei jedoch die Horizontalquerschnitte $y = \text{konst}$ die Länge $l(y) = cy$ mit $c > 0$ haben und somit nicht beschränkt sind, folgt, daß im Satz 3 die Forderung der Beschränktheit der Querschnittslänge nicht in beliebiger Weise gelockert werden darf.

(Eingegangen den 13. November 1961)