Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 36 (1961-1962)

Artikel: Approximation von Funktionen durch Linearkombinationen von Eigenfunktionen STURM-LIOUVILLEscher Differentialgleichungen.

Autor: Scarpellini, Bruno

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515628

Approximation von Funktionen durch Linearkombinationen von Eigenfunktionen STURM-LIOUVILLEscher Differentialgleichungen

von BRUNO SCARPELLINI, Zürich

1. Einleitung

In dieser Arbeit werden Probleme, die aus der Approximationstheorie stammen, betrachtet. Gewisse für trigonometrische Polynome gültige Sätze sollen für den Fall von Linearkombinationen STURM-LIOUVILLEscher Eigenfunktionen verallgemeinert werden. Der Weg führt über einige vorbereitende Sätze, die an sich von einem gewissen Interesse sind. Ausgangspunkt ist die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \lambda Q(x)u(x) = 0 .$$

$Q(x)$ sei im abgeschlossenen Intervall $[0, \pi]$ definiert, positiv und zweimal stetig differenzierbar. $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$ seien die Eigenfunktionen, die der Randbedingung $u(0) = 0$, $u(\pi) = 0$, genügen (Randwertproblem a). Bekanntlich läßt sich jede in $[0, \pi]$ stetige Funktion $f(x)$, die den Randbedingungen $f(0) = 0, f(\pi) = 0$ genügt, beliebig genau durch Linearkombinationen $\sum_1^n \xi_i u_i$ approximieren. Genauer: Zu jedem ε gibt es ein n und eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$, so daß die Ungleichung

$$| f(x) - \sum_1^n \xi_i u_i(x) | \leq \varepsilon$$

besteht. Halten wir n fest, so hat die Menge der Zahlen $\sup_x | f(x) - \sum_1^n \xi_i u_i(x)|$, $x \varepsilon [0, \pi]$, eine untere Grenze, wenn die ξ_i alle reellen Zahlen durchlaufen. Diese untere Grenze bezeichnen wir mit $E_n^s(f)$. Offenbar ist $\lim_{n\to\infty} E_n^s(f) = 0$. Ziel dieser Arbeit ist es, aus der Geschwindigkeit, mit der die Zahlen $E_n^s(f)$ gegen Null streben, auf gewisse Eigenschaften der Funktion f zu schließen und umgekehrt. Der Grund, weshalb wir uns hier mit der etwas unangenehm zu behandelnden Form $y'' + \lambda Q y = 0$ der STURM-LIOUVILLEschen Differentialgleichung auseinandersetzen, wird durch den letzten Abschnitt klar werden.

Es ergibt sich, daß die Folge der Operatoren

$$\frac{d}{dx}, \quad \frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}, \quad \frac{d}{dx}\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}, \quad \left(\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}\right)^2, \ldots$$

hier dieselbe Rolle spielt, wie die Folge der Operatoren

$$\frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{dx^2}, \quad \frac{d^3}{dx^3}$$

im Falle trigonometrischer Polynome. Es wird sich zeigen, daß es eine zur Klasse der analytischen Funktionen analoge Approximationsklasse von Funktionen gibt, die zu den pseudoanalytischen Funktionen im Sinne von L. BERS in Beziehung stehen.

Natürlich werden wir dauernd Gebrauch von der Tatsache machen, daß die angegebene Differentialgleichung sich in die bekannte Normalform

$$\varphi'' + (r(x) - \lambda)\varphi = 0$$

transformieren läßt.

Während der Vorbereitung des Manuskriptes stellte es sich heraus, daß I. P. NATANSON in einem Artikel in Doklady Nauk SSSR 114, 1957, einige Sätze in dieser Richtung ohne Beweise veröffentlicht hat. Der Verfasser erhält in dieser Arbeit Sätze, die sich auf den Differentialoperator $\frac{d^2}{dx^2} - r(x)$ beziehen, und die in gewissem Sinne Analoga zu den hier in Abschnitt 6 bewiesenen Sätze darstellen, die sich auf die oben angegebene Folge von Differentialoperatoren beziehen. Soweit aus dem angegebenen Artikel ersichtlich ist, scheinen völlig andere Beweismethoden zur Anwendung gekommen zu sein.

2. Vorbereitungen

Zuerst sollen einige bekannte Dinge über STURM-LIOUVILLEsche Differentialgleichungen zusammengestellt werden, die wir später dauernd benutzen. Ohne Einschränkung darf man annehmen, daß stets

$$l = \int_0^\pi \sqrt{Q}\, ds = \pi$$

ist.

Wie in ([1]) gezeigt wird, geht die Differentialgleichung

$$u'' + \lambda Q u = 0 \tag{1}$$

durch die Transformation $\varphi = \sqrt[4]{Q} \cdot u \quad t = \int_0^x \sqrt{Q}\, ds$

in die neue

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} - r\varphi + \lambda\varphi = 0 \tag{2}$$

über, wo

$$r = (Q^{\frac{1}{4}})'' Q^{-\frac{1}{4}}$$

ist.

Die Eigenfunktionen von (1) bilden ein normiertes Orthogonalsystem bezüglich der Dichte Q, das heißt, es ist:

$$\int_0^\pi u_i u_k Q ds = \delta_{ik} ,$$

während die Eigenfunktionen φ_i von (2) den Bedingungen genügen:

$$\int_0^\pi \varphi_i \varphi_k dt = \delta_{ik} .$$

Die Eigenwerte von (1) und (2) bilden wachsende Folgen, die keinen Häufungspunkt im Endlichen besitzen. Es gelten folgende asymptotischen Formeln:

$$\lambda_n = n^2 + \mu_n$$

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt + \frac{\varepsilon_n(t)}{n}$$

$$\frac{d\varphi_n(t)}{dt} = n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt + \delta_n(t)$$

$$u_n(x) = c_n \cdot \frac{\sin\left(n \int_0^x \sqrt{Q} ds\right)}{\sqrt[4]{Q}} + \frac{\gamma_n(x)}{n}$$

$$u_n'(x) = n \cdot c_n \sqrt[4]{Q} \cos\left(n \int_0^x \sqrt{Q}\, ds\right) + \beta_n(x)$$

wobei $|\mu_n| \leq M$, $|\varepsilon_n(t)| \leq M$, $|\delta_n(t)| \leq M |\gamma_n(x)| \leq M$ und $|\beta_n(x)| \leq M$, $|c_n| \leq M$ ist. Dabei ist M eine nur von Q beziehungsweise r abhängige Konstante. Alle Beweise für das in diesem Abschnitt Erwähnte und weitere Details findet man in [1].

Schließlich sei noch eine Eigenschaft stetiger Funktionen genannt, die wir dauernd verwenden werden, ohne sie speziell zu erwähnen. Sei $f(x)$ stetig in $[a, b]$ und $\|f\| = \sup_x |f(x)|$. $\Phi(x)$ sei eine eindeutige, stetige Abbildung des Intervalls $[a, b]$ auf sich. Dann ist, wie sofort ersichtlich:

$$\limsup_x |f(x)| = \limsup_x |f(\Phi(x))|$$

das heißt

$$\| f(\Phi(x)) \| = \| f \|$$

Im vorliegenden Fall werden es die Funktionen $t = \int\limits_0^x \sqrt{Q}ds$ und deren Umkehrfunktion sein, die das Intervall $[0, \pi]$ auf sich abbilden.

In einigen wenigen Fällen, in denen Zweideutigkeit möglich wäre, soll durch die Schreibweise $\| f \|_a^b$ angedeutet werden, daß sich die Norm auf das Intervall $[a, b]$ bezieht:

$$\| f \|_a^b = \sup | f(x) | , \quad x \varepsilon [a, b] .$$

Ableitungen nach der Variablen t werden stets durch einen Punkt gekennzeichnet: $\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$.

3. Verallgemeinerung der BERNSTEINschen Ungleichung

BERNSTEIN bewies, daß die Ableitung $T'_n(x)$ eines trigonometrischen Polynoms $T_n(x) = a_0 + \sum\limits_1^n a_p \cos p\mathrm{x} + \sum\limits_1^n b_p \sin px$ der Ungleichung genügt:

$$\| T'_n(x) \|_{-\pi}^{+\pi} \leqq n \| T_n(x) \|_{-\pi}^{+\pi} . \tag{3}$$

Wenn $T_n(x)$ von der Form $a_0 + \sum\limits_1^n a_p \cos px$ oder $\sum\limits_1^n bp \sin px$ ist, so folgt sofort aus der Ungleichung (3) die folgende:

$$\| T'_n(x) \|_0^\pi \leq n \| T_n(x) \|_0^\pi . \tag{4}$$

Im Folgenden soll eine analoge Ungleichung für Linearkombinationen von Eigenfunktionen einer STURM-LIOUVILLEschen Differentialgleichung hergeleitet werden. Sei $\ddot{\varphi}(t) + (\lambda - r(t))\varphi(t) = 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\pi) = 0$ ein STURM-LIOUVILLEsches Randwertproblem. $r(t)$ sei stetig in $[0, \pi]$.

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_n, \ldots$ seien die normierten Eigenfunktionen und

$\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n \ldots$ die Eigenwerte. Es soll gezeigt werden:

Satz 1: Es existiert eine Konstante K_0, die von n unabhängig ist, so daß für jede Linearkombination $\sum\limits_1^n \alpha_p \varphi_p$ die Ungleichung besteht:

$$\| \sum_1^n \alpha_p \dot{\varphi}_p \| \leq K_0 n \| \sum_1^n \alpha_p \varphi_p \| \tag{5}$$

Beweis: Aus der im Abschnitt 2 gegebenen asymptotischen Darstellung von $\dot{\varphi}$ folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$\| \sum_1^n \alpha_p \dot{\varphi}_p \| \leq \| \Sigma \alpha_p P \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos pt \| + \| \sum_1^n \alpha_p \delta_p(t) \|$$

Auf Grund der Ungleichung (4) folgt aber

$$\| \sum_1^n \alpha_p \dot{\varphi}_p \| \leq n \| \sum_1^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_p \sin pt \| + \| \sum_1^n \alpha_p \delta_p(t) \|$$

Indem man auf den zweiten Summanden rechts die SCHWARZsche Ungleichung anwendet und $| \varepsilon_p(t) | \leq M$ beachtet, erhält man:

$$\| \sum_1^n \alpha_p \dot{\varphi}_p \| \leqq n \| \sum_1^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha_p \sin pt \| + M \cdot \sqrt{\sum_1^n \alpha_p^2} \sqrt{n}$$

Da aber die asymptotische Darstellung

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin pt + \frac{\delta_p(t)}{p} = \varphi_p(t) \quad \text{mit} \quad | \delta_p(t) | \leq M$$

das heißt:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin pt = \varphi_p(t) - \frac{\delta_p(t)}{p}$$

gilt, folgt mit Hilfe von Dreiecks- und SCHWARZscher Ungleichung:

$$\| \sum_1^n \alpha_p \dot{\varphi}_p \| \leq n \| \sum_1^n \alpha_p \varphi_p \| + n \cdot \sqrt{\sum_1^n \alpha_p^2}\, M \cdot \sqrt{\sum_1^n \frac{1}{p^2}} + \sqrt{n} \cdot \sqrt{\sum_1^n \alpha_p^2}\, M$$

Aus der Orthonormalität der Eigenfunktionen folgt aber:

$$\sqrt{\sum_1^n \alpha_p^2} = \sqrt{\int_0^\pi (\sum_1^n \alpha_p \varphi_p)^2 ds} \leqq \sqrt{\pi} \| \sum_1^n \alpha_p \varphi_p \|$$

woraus sich schließlich ergibt:

$$\| \sum_1^n \alpha_p \dot{\varphi}_p \| \leq \left\{ 1 + M \cdot \sqrt{\pi} \left(\sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{p^2}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right\} n \| \sum_1^n \alpha_p \varphi_p \| \leqq K_0 n \| \sum_1^n \alpha_p \varphi_p \|$$

Die Ungleichung (5) wurde schon von E. CARLSON bewiesen ([2]), allerdings unter der Voraussetzung der zweimal stetigen Differenzierbarkeit von $r(t)$ und mit größerem Aufwand.

Jetzt sollen analoge Ungleichungen für Linearkombinationen von Eigenfunktionen des Randwertproblems $u'' + \lambda Q u = 0, u(0) = 0, u(\pi) = 0$ hergeleitet werden.

Satz 2: *Es gibt eine Konstante K_1, so daß für jede Linearkombination $\sum_1^n \alpha_i u_i$ die Ungleichung besteht:*

$$\| \sum_1^n \alpha_i u_i' \| \leq K_1 n \| \sum_1^n \alpha_i u_i \| . \tag{6}$$

Beweis: Da ja $Q(x)$ positiv und zweimal stetig differenzierbar vorausgesetzt ist, läßt sich, wie in der Einleitung erwähnt, die Differentialgleichung $u'' + \lambda Q u = 0$ mittels der Transformation

$$q(x(t)) \cdot u(x(t)) = \varphi(t) \quad \text{mit} \quad t = \int_0^x q^2 ds \quad q^4 = Q$$

in die Form $\ddot{\varphi} + (\lambda - r(t))\varphi = 0$ transformieren. Zwischen den normierten Eigenfunktionen $u_n(x)$ und $\varphi_n(t)$ besteht dann die Beziehung:

$$u_n(x) = \frac{c_n \varphi_n(t(x))}{q(x)}$$

wo die c_n die in der asymptotischen Darstellung von $u_n(x)$ auftretenden Faktoren sind (siehe Abschnitt 2). Aus der letzten Gleichung folgt:

$$u_n' = -\frac{q'}{q} \cdot \frac{c_n \varphi_n}{q} + q \cdot c_n \cdot \dot{\varphi}_n$$

und

$$\| \sum_1^n \alpha_p u_p' \| \leqq \left\| \frac{q'}{q} \right\| \cdot \| \sum_1^n \alpha_p u_p \| + \| q \| \cdot \| \sum_1^n \alpha_p c_p \dot{\varphi}_p \|$$

Auf Grund von Satz 1 ist aber:

$$\| \sum_1^n \alpha_p c_p \dot{\varphi}_p (t(x)) \| = \| \sum_1^n \alpha_p c_p \dot{\varphi}_p(t) \| \leq K_0 \cdot n \| \sum_1^n \alpha_p c_p \varphi_p(t) \|$$

$$\leq K_0 n \| \sum_1^n \alpha_p c_p \varphi_p(t(x)) \| \leq \| q \| \cdot K_0 n \cdot \left\| \sum_1^n \alpha_p c_p \frac{\varphi_p(t(x))}{q} \right\|$$

$$\leq \| q \| \cdot K_0 \cdot n \| \sum_1^n \alpha_p u_p \|$$

Unter Benutzung dieser letzten Ungleichung erhalten wir sofort:

$$\| \sum_1^n \alpha_p u_p' \| \leqq \left(\left\| \frac{q'}{q} \right\| + \| q \|^2 K_0 \right) n \cdot \| \sum_1^{n} \alpha_p u_p \|$$

womit der Satz bewiesen ist, wenn wir den Klammerausdruck mit K_1 bezeichnen.

Auf ähnliche Art, aber umständlicher, zu beweisen ist folgender Satz:

Satz 3: *Es gibt eine von* n *unabhängige Konstante* K_2, *so daß für jede Linearkombination* $\sum_1^n \alpha_p u_p'$ *die Ungleichung gilt:*

$$|| \sum_1^n \alpha_p \lambda_p u_p || \leq K_2 \cdot n \, || \sum_1^n \alpha_p u_p' || \tag{7}$$

Der Beweis dieses Satzes soll durch einige einfache Hilfssätze vorbereitet werden, deren Beweise wir zum Teil nur skizzieren.

Hilfssatz a) Es ist

$$\int_0^\pi u_i' u_k' ds = \lambda_i \delta_{ik}$$

Beweis:

$$\int_0^\pi u_i' u_k' ds = \lambda_i \int_0^\pi Q u_i u_k ds = \lambda_i \delta_{ik} \, .$$

Hilfssatz b) Es gibt eine von n unabhängige Konstante A, so daß für alle n-tupel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_0$ die Ungleichung besteht:

$$\sum_1^n \alpha_i^2 i^2 \leq A^2 \sum_1^n \alpha_i^2 \lambda_i \, .$$

Beweis: Da alle Eigenwerte positiv sind, nach Hilfssatz a), gibt es eine von n unabhängige Konstante $a \geq 1$, so daß für alle λ_i die Ungleichung besteht: $a \lambda_i \geq 1$. Aus der asymptotischen Darstellung

$$\lambda_i = i^2 + \mu_i \qquad |\mu_i| \leq M$$

folgt dann:

$$\sum_1^n \alpha_i^2 i^2 \leq \sum_1^n \alpha_i^2 \lambda_i + M \sum_1^n \alpha_i^2 \leq (1 + aM) \sum_1^n \alpha_i^2 \lambda_i \, .$$

Indem wir $A^2 = 1 + aM$ setzen, folgt die Behauptung.

Jetzt können wir übergehen zum

Beweis von Satz 3: Aus den asymptotischen Darstellungen von $u_i(x)$ und $u_i'(x)$ folgt:

$$\| \sum_1^n \alpha_i \lambda_i u_i(x) \| = \| \sum_1^n \alpha_i \lambda_i u_i(x(t)) \| \quad \text{wo} \quad t = \int_0^x q^2\, ds \quad q = \sqrt[4]{Q}$$

$$= \left\| \sum_1^n \alpha_i (i^2 + \mu_i) \left(\frac{c_i \sin it}{q} + \frac{\gamma_i}{i} \right) \right\|$$

$$\leqq \left\| \frac{1}{q} \right\| \cdot \| \sum_1^n \alpha_i c_i i^2 \sin it \| + \left\| \frac{1}{q} \right\| \cdot \| \sum_1^n \alpha_i \mu_i c_i \sin it \|$$

$$+ \| \sum_1^n \alpha_i i \gamma_i \| + \| \sum_1^n \alpha_i \mu_i \frac{\gamma_i}{i} \| .$$

Jetzt benutzen wir die BERNSTEINsche Ungleichung 4), ferner die SCHWARZsche Ungleichung und beachten, daß die Funktionen γ_i und die Zahlen μ_i und c_i gleichmäßig beschränkt sind, das heißt $|\gamma_i| \leq M$, $|M_i| \leq M$, $|c_i| \leq M$.

Das liefert:

$$\| \sum_1^n \alpha_i \lambda_i u_i \| \leq \left\| \frac{1}{q} \right\| \cdot n \cdot \| \sum_1^n \alpha_i c_i\, i \cos it \| + \left\| \frac{1}{q} \right\| M^2 \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{i^2}} \cdot \sqrt{\sum_1^n \alpha_i^2 i^2}$$

$$+ M \cdot \sqrt{n} \sqrt{\sum_1^n \alpha_i^2 i^2} + M^2 \cdot \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{i^4}} \cdot \sqrt{\sum_1^n \alpha_i^2 i^2}$$

Mit Hilfssatz b) folgt:

$$\| \sum_1^n \alpha_i \lambda_i u_i \| \leqq \left\| \frac{1}{q} \right\| n \cdot \| \sum_1^n \alpha_i \cdot i \cdot c_i \cos it \| +$$

$$+ \sqrt{\pi} \left(\left\| \frac{1}{q} \right\| \cdot M^2 \cdot \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{i^2}} + M \sqrt{n} + M^2 \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{i^4}} \right) \cdot A \, \| \sum_1^n \alpha_i u_i' \|$$

$$\leqq \| \frac{1}{q} \| \cdot n \cdot \| \sum_1^n \alpha_i c_i i \cos it \| + n \cdot B \cdot \| \sum_1^n \alpha_i u_i' \| ,$$

wo

$$B = A \cdot \left(M^2 \left\| \frac{1}{q} \right\| \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{i^2}} + M + M^2 \cdot \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{i^4}} \right) \sqrt{\pi}$$

gesetzt wurde. Aus der letzten Ungleichung folgt weiter:

$$\| \sum_1^n \alpha_i \lambda_i u_i \| \leqq \left\| \frac{1}{q} \right\|^2 \cdot n \cdot \| \sum_1^n \alpha_i c_i q \cdot i \cos i \int_0^x q^2\, ds \,\mathrm{ds} \| + n \cdot B \, \| \sum_1^n \alpha_i u_i' \| .$$

Da:

$$u_i'(x) = i c_i q \cdot \cos i \int_0^x q^2 ds + \beta_i(x)$$

mit $|\beta_i(x)| \leq M$ gilt, folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$\|\sum_1^n \alpha_i \lambda_i u_i\| \leqq n \cdot \left\|\frac{1}{q}\right\|^2 \cdot \|\sum_1^n \alpha_a u_i'\| + n \cdot \left\|\frac{1}{q}\right\|^2 \cdot \|\sum_1^n \alpha_i \beta_i(x)\| + n \cdot B \|\sum_1^n \alpha_i u_i'\|$$

Indem wir auf den zweiten Term rechts wieder die SCHWARZsche Ungleichung anwenden, Hilfssatz b) benutzen und $|\beta_i(x)| \leq M$ berücksichtigen, erhalten wir schließlich:

$$\|\sum_1^n \alpha_i \lambda_i u_i\| \leq n \cdot \left\|\frac{1}{q}\right\|^2 \cdot \|\sum_1^n \alpha_i u_i'\| + n \cdot \left\|\frac{1}{q}\right\|^2 \sqrt{\pi}\, A \cdot M \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{i^2}} \cdot \|\sum_1^n \alpha_i u_i'\| \,.$$

$$+ n \cdot B \|\sum_1^n \alpha_i u_i'\|$$

$$\leq n \left(\left\|\frac{1}{q}\right\|^2 + \left\|\frac{1}{q}\right\|^2 \sqrt{\pi}\, A \cdot M \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{i^2}} + B \right) \|\sum_1^n \alpha_i u_i'\| \,.$$

Der Ausdruck in der Klammer stellt offenbar die gesuchte Konstante K_2 dar. Aus den beiden letzten Sätzen erhalten wir die Folgerung:

Folgerung 1: Es gibt eine von n unabhängige Konstante K, so daß für jede ganze Zahl p und jede Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$ die Ungleichungen bestehen:

$$\left\|\left(\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}\right)^p \left(\sum_1^n \xi_i u_i\right)\right\| \leq K^{2p} \cdot n^{2p} \cdot \|\sum_1^n \xi_i u_i\|$$
$$\left\|\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}\right)^p \left(\sum_1^n \xi_i u_i\right)\right\| \leq K^{2p+1}\, n^{2p+1}\, \|\sum_1^n \xi_i u_i\| \,. \tag{8}$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich unmittelbar, wenn wir $K = \max(K_1, K_2)$ setzen, die Sätze 3 und 2 benutzen und Induktion anwenden.

4. Eine Anwendung auf die Approximationstheorie

Die Sätze, die im folgenden angegeben werden, sind Verallgemeinerungen von Sätzen, die von S. BERNSTEIN für den Fall von trigonometrischen Funktionen bewiesen wurden. Die Beweise können wörtlich übertragen werden, da sie lediglich auf der Gültigkeit der BERNSTEINschen Ungleichung beruhen (siehe [3], pp. 89). Mit W bezeichnen wir im folgenden die Klasse derjenigen Funktionen, deren Stetigkeitsmodul $\omega(\delta) = \sup |f(x) - f(y)|, |x - y| \leq \delta$ einer Ungleichung $\omega(\delta) \leq A(1 + |\ln \delta|)\delta$ genügen. $E_n^*(f)$ sei, wie in der Einleitung angegeben, die untere Grenze der Zahlen $\| f - \sum_{1}^{n} \xi_i u_i \|$, wo die ξ_i alle reellen Zahlen durchlaufen.

Definition 1: Eine auf $[a, b]$ definierte stetige Funktion $f(x)$ genügt einer LIPSCHITZ-Bedingung, wenn es Konstanten $0 < \alpha \leq 1$, K gibt, so daß gilt:

$$| f(x) - f(y) | \leq K \, | x - y |^{\alpha}$$

für $x, y \varepsilon [a, b]$. Die Menge der Funktionen, die der zu α, K gehörigen Bedingung genügen, bezeichnen wir mit $\mathrm{Lip}_K \alpha$.

Satz 4: $f(x)$ sei eine in $[0, \pi]$ definierte stetige Funktion, und $f(0) = 0$, $f(\pi) = 0$. Gilt dann für jede natürliche Zahl n:

$$E_n^s(f) \leq \frac{A}{n^{\alpha}} \qquad (0 < \alpha \leq 1)$$

so lautet im Falle $\alpha < 1$ die Behauptung $f(x) \varepsilon \operatorname{Lip} \alpha$, im Falle $\alpha = 1$ aber $f(x) \varepsilon W$.

Der Beweis von Satz 4 soll hier nicht wiedergegeben werden, da er, wie schon erwähnt, vollkommen analog ist zu jenem für trigonometrische Polynome, wie er im eben zitierten Buch auf Seite 89 zu finden ist.

Satz 5: Sei $f(x)$ stetig im Intervall $[0, \pi]$ und $f(0) = f(\pi) = 0$. Ist dann

$$E_n^s(f) \leq \frac{A}{n^{2p+\alpha}} \qquad (0 < \alpha \leq 1),$$

so ist der Operator $\frac{1}{Q} \frac{d^2}{dx^2}$ $p$mal auf $f(x)$ anwendbar, und es gilt:

$$f^{[2p]}(x) = \left(\frac{1}{Q} \frac{d^2}{dx^2} \right)^p f(x) \varepsilon \operatorname{Lip} \alpha \,, \qquad f^{[2p]}(0) = f^{[2p]}(\pi) = 0$$

für $\alpha < 1$ und

$$f^{[2p]}(x) \varepsilon W \,, \quad f^{[2p]}(0) = f^{[2p]}(\pi) = 0$$

für $\alpha = 1$.

Beweis: Man geht wieder analog vor, wie im Falle trigonometrischer Polynome. Sei $L_n(x)$ eine Linearkombination der ersten n-Eigenfunktionen, die der Ungleichung genügt:

$$| f(x) - L_n(x) | \leq \frac{A}{n^{2p+\alpha}} \,.$$

Wir setzen:

$$U_0(x) = L_1(x) \qquad U_n(x) = L_{2^n}(x) - L_{2^{n-1}}(x) \,.$$

Es ist: $|U_n(x)| \leq |L_{2^n}(x) - f(x)| + |L_{2^{n-1}}(x) - f(x)|$

$$\leq \frac{A}{2^{n(2p+\alpha)}} + \frac{A}{2^{(n-1)(2p+\alpha)}} \leq \frac{B}{2^{n(2p+\alpha)}},$$

wo $B = A(1 + 2^{2p+\alpha})$ gesetzt wird. Auf Grund der Folgerung 1 ergibt sich:

$$\left|\left(\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}\right)^p U_n(x)\right| \leq K^{2p} \cdot 2^{2np} \cdot |U_n(x)| \leq K^{2p} \cdot \frac{B}{2^{n\alpha}}.$$

Das heißt aber, daß die Reihe

$$\sum_0^\infty \left(\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}\right)^p U_n(x)$$

die durch p-fache formale Anwendung des Operators $\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}$ auf die Reihe

$$\sum_0^\infty U_n(x) = f(x)$$

entsteht, konvergiert, und zwar gleichmäßig. Daraus folgt aber, daß $\left(\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}\right)^p f$ existiert und daß

$$\left(\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}\right)^p f(x) = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}\right)^p U_n(x)$$

ist. Indem wir für

$$\left(\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}\right)^p f(x), \quad \left(\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}\right)^p U_n(x),$$

die Abkürzungen $f^{[2p]}$ und $U_n{}^{[2p]}$ einführen, erhalten wir

$$|f^{[2p]}(x) - \sum_0^m U_n{}^{[2p]}(x)| \leq \sum_{m+1}^\infty \frac{B}{2^{n\alpha}} \leq \frac{C}{2^{m\alpha}}.$$

das heißt:

$$E^s_{2^m}(f^{[2p]}) \leq \frac{C}{2^{m\alpha}}$$

Für jede natürliche Zahl n bestimmt man nun ein m, so daß $2^m \leq n < 2^{n+1}$ ist. Dann ist:

$$E^s_n(f^{[2p]}) \leq E^s_{2^m}(f^{[2p]}) \leq \frac{C}{2^{m\alpha}} = \frac{2^\alpha C}{2^{(m+1)\alpha}} < \frac{2^\alpha C}{n^\alpha} = \frac{D}{n^\alpha}.$$

Das heißt: $f^{[2p]}$ erfüllt die Voraussetzungen von Satz 4, womit der Beweis beendet ist.

Schließlich läßt sich auf die gleiche Art beweisen:

Satz 6: Sei $f(x)$ stetig in $[0, \pi]$ und $f(0) = f(\pi) = 0$. Ist dann

$$E_n^s(f) \leq \frac{A}{n^{2p+1+\alpha}} \qquad 0 < \alpha \leq 1\,,$$

so existiert

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}\right)^p f(x) = \frac{d}{dx} f^{[2p]}(x)\,,$$

und es ist:

$$\frac{d}{dx} f^{[2p]}(x) \varepsilon \operatorname{Lip}\alpha\,, \quad \frac{d}{dx} f^{[2p]}(x)\Big|_0 = \frac{d}{dx} f^{[2p]}(x)\Big|_\pi = 0\,,$$

wenn $\alpha < 1$, und

$$\frac{d}{d} f^{[2p]}(x) \varepsilon W\,, \quad \frac{d}{dx} f^{[2p]}(x)\Big|_0 = \frac{d}{dx} f^{[2p]}(x)\Big|_\pi = 0\,,$$

wenn $\alpha = 1$.

Im weiteren soll gezeigt werden, daß auch die Umkehrungen der Sätze 6 und 5 gelten.

5. HAARsche Systeme

In diesem Abschnitt sollen einige bekannte Eigenschaften HAARscher Systeme zusammengestellt werden. Gegeben seien n–Funktionen $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots f_n(x)$, die in $[a, b]$ definiert und dort stetig sind.

Definition 2: Man sagt, die n-Funktionen $f_1, f_2, \ldots f_n$ bilden ein HAARsches System für das Intervall $[a, b]$, wenn jede nicht identisch verschwindende Linearkombination $\sum_1^n \alpha_i f_i$ höchstens $n - 1$ Nullstellen hat in $[a, b]$, ([4]). Sei $f_1(x), f_2(x), \ldots . f_n(x)$ ein HAARsches System für das Intervall $[a, b]$. $\sigma(t)$ sei eine Funktion, die das Intervall $[c, d]$ eindeutig und stetig auf das Intervall $[a, b]$ abbildet. Dann ist klar, daß $f_1(\sigma(t)), f_2(\sigma(t)), \ldots$ $\ldots, f_n(\sigma(t))$ ein HAARsches System für das Intervall $[c, d]$ ist. Ist ferner $g(x)$ eine in $[a, b]$ definierte, stetige Funktion und dort > 0, so ist auch $g(x)f_1(x), g(x)f_2(x), \ldots, g(x)f_n(x)$ ein HAARsches System für $[a, b]$.

Satz 7: Ist $f(x)$ stetig in $[a, b]$ und ist $f_1(x), f_2(x), \ldots f_n(x)$ ein HAARsches System für dieses Intervall, so gibt es genau eine Linearkombination von der

Form $\sum_1^n \xi_i f_i(x)$, für welche die Größe

$$d = \| f - \sum_1^n \xi_i f_i \|_a^b$$

ein Minimum ist. Diese Linearkombination ist durch folgende Eigenschaft charakterisiert: Es gibt $n+1$ Punkte $a \leq x_1 < x_2 < \dots\dots x_n < x_{n+1} \leq b$, in welchen die Funktion

$$f(x) - \sum_1^n \xi_i f_i(x)$$

den Wert d mit alternierendem Vorzeichen annimmt.

Einen Beweis dieses Satzes findet man in [4], pp. 74. Durch einige unwesentliche Modifikationen dieses Beweises ergibt sich dann ein solcher von:

Satz 8: Sei $f_1(x), f_2(x), \dots . f_n(x)$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein HAARsches System für das Intervall $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ und sei $f_i(a) = f_i(b) = 0$ für alle i. Ist dann $f(x)$ stetig in $[a, b]$ und $f(a) = f(b) = 0$, so gibt es genau eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i f_i$, für welche die Größe:

$$d = \| f - \sum_1^n \xi_i f_i \|_a^b$$

ein Minimum ist. Diese Linearkombination ist wie folgt charakterisiert: Es gibt $n+1$ Punkte $a < x_1 < \dots\dots\dots x_n < x_{n+1} < b$, in welchen die Funktion

$$f(x) - \sum_1^n \xi_i f_i(x)$$

den Wert d mit alternierendem Vorzeichen annimmt.

Der kurzen Formulierung wegen nennen wir ein Funktionensystem, auf welches Definition 1 zutrifft, ein HAARsches System erster Art, und ein Funktionensystem wie es in Satz 8 vorkommt, ein HAARsches System zweiter Art. Im folgenden brauchen wir den

Satz 9: *Seien $f_1(x), f_2(x), \dots f_n(x)$ und $g_1(x), g_2(x), \dots g_n(x)$ zwei HAARsche Systeme gleicher Art für das Intervall $[a, b]$. Ist dann $\sum_1^n \alpha_i g_i(x)$ die beste Approximation von $\sum_1^n \beta_i f_i(x)$, so ist auch umgekehrt $\sum_1^n \beta_i f_i(x)$ die beste Approximation von $\sum_1^n \alpha_i g_i(x)$.*

Beweis: Handelt es sich zum Beispiel um Systeme erster Art, so folgt aus Satz 7, daß es $n+1$ Punkte $x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$ in $[a, b]$ gibt, so daß die Differenz

$$\sum_1^n \beta_i f_i(x) - \sum_1^n \alpha_i g_i(x)$$

in diesen Punkten den Wert $d = \| \sum_1^n \beta_i f_i - \sum_1^n \alpha_i g_i \|$ mit alternierendem Vorzeichen annimmt. Aus demselben Satz folgt dann aber, daß umgekehrt auch $\sum_1^n \beta_i f_i(x)$ die beste Approximation von $\sum_1^n \alpha_i g_i(x)$ ist. Auf dieselbe Weise schließt man im Falle zweier HAARscher Systeme zweiter Art.

6. Anwendung auf Linearkombinationen STURM-LIOUVILLEscher Eigenfunktionen

In diesem Abschnitt sollen die in den Abschnitten 3 und 5 angegebenen Sätze auf spezielle HAARsche Systeme angewendet werden. Zu diesem Zweck sei zuerst ein Theorem zitiert, das von E. PRÜFER bewiesen wurde. Einen Beweis findet man in [8]. Sei $(p\varphi')' + (\lambda - q)\varrho\varphi = 0$ eine STURM-LIOUVILLEsche Differentialgleichung mit stetigen Koeffizienten p, q, ϱ in $[a, b]$ und sei $\varrho > 0, p > 0$ in $[a, b]$. Dann gilt der

Satz 10: Die ersten n-Eigenfunktionen $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots. \varphi_n(x)$, die zum Randwertproblem $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 0$ gehören, bilden ein HAARsches System zweiter Art für das Intervall $[a, b]$.

Dieser Satz besagt, daß eine Linearkombination $\sum_1^n \alpha_i \varphi_i(x)$ höchstens $n - 1$ Nullstellen im Innern von $[a, b]$ haben kann. Für das Weitere beschaffen wir eine Abschätzung für die erste Ableitung der $n$ten normierten Eigenfunktion φ_n der Differentialgleichung $\varphi_n'' + (\lambda_n - r)\varphi = 0$, die zum Randwertproblem gehört. Der Einfachheit halber setzen wir dabei voraus, daß die Eigenwerte dieses Randwertproblems alle positiv sind. Da es sich nur um Routine-Rechnungen handelt, soll die Herleitung der angekündigten Abschätzung etwas gekürzt wiedergegeben werden.

Satz 11: Für die Ableitung φ_n' der $n$ten normierten Eigenfunktion φ_n gilt die asymptotische Darstellung

$$\varphi_n'(x) = a_n \cdot n \cdot \cos nx + a_n \cdot \left(\int_0^x r(s)\, ds - \frac{x}{\pi} \int_0^\pi r(s)\, ds \right) \frac{\sin nx}{2}$$
$$+ a_n \cdot \frac{\cos nx}{2} \int_0^x r(s) \sin 2ns\, ds \tag{9}$$

$$- a_n \cdot \frac{\sin n x}{2} \int_0^x r(s) \cos 2ns\, ds$$

$$+ a_n \alpha_n x \cdot \sin n x + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Dabei ist die Folge der Zahlen a_n gleichmäßig beschränkt, das heißt, es gibt ein $a > 0$ und ein b, so daß $a \leq a_n \leq b$ ist. Ferner gilt $\sum_1^n \alpha_n^2 < \infty$.

Beweis: φ_n genügt, wie in [1] gezeigt wird, einer VOLTERRAschen Integralgleichung:

$$\varphi_n(x) = a_n \cdot \sin \varkappa_n x + \frac{1}{\varkappa_n} \int_0^x r(\tau) \varphi_n(\tau) \sin \varkappa_n (x - \tau) d\tau = 0\,,$$

wo $\sqrt{\lambda_n} = \varkappa_n$ gesetzt wurde. Die Folge der Faktoren a_n ist beschränkt, das heißt, es gibt zwei von n unabhängige Zahlen $0 < a < b$, so daß $a \leq a_n \leq b$ gilt. Für die Eigenwerte λ_n erhalten wir die Gleichungen:

$$a_n \cdot \sin \varkappa_n \pi + \frac{1}{\varkappa_n} \int_0^\pi r(\tau) \varphi_n(\tau) \sin \varkappa_n (\pi - \tau)\, d\tau = 0$$

oder etwas umgeformt:

$$\operatorname{tg} \pi \varkappa_n = \frac{\int_0^\pi r(\tau) \varphi_n(\tau) \sin \varkappa_n \tau\, d\tau}{a_n \varkappa_n + \int_0^\pi r(\tau) \varphi_n(\tau) \cos \varkappa_n \tau d\tau}\,.$$

In [1] wird gezeigt, daß $\varkappa_n$ von der Form ist:

$$\varkappa_n = n + \frac{d_n}{n}\,,$$

wo die Folge der d_n gleichmäßig beschränkt ist, $|d_n| \leq M$. Indem wir diese Form von $\varkappa_n$ berücksichtigen, erhalten wir:

$$\operatorname{tg} \frac{d_n}{n} \pi = \frac{\int_0^\pi \gamma(\tau) \varphi_n(\tau) \sin \varkappa_n \tau d\tau}{n a_n + \frac{d_n \cdot a_n}{n} + \int_0^\pi \gamma(\tau) \varphi_n(\tau) \cos \varkappa_n \tau d\tau}\,.$$

Schließlich beachten wir:

$$\varphi_n(x) = a_n \cdot \sin n x + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

und

$$ar\,ctg\,x = x - \frac{x^3}{3} + \ldots$$

Dies alles zusammen ergibt nach kleiner Rechnung:

$$\frac{d_n}{n} = \frac{1}{n\pi}\int_0^\pi r(\tau)(\sin n\tau)^2\,d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

oder etwas umgeformt:

$$\frac{d_n}{n} = \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi \gamma(\tau)\,d\tau - \frac{1}{2n\pi}\int_0^\pi r(\tau)\cos 2n\tau\,d\tau + O\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Um eine Abschätzung für φ_n' zu erhalten, differenzieren wir die angegebene Integralgleichung einmal:

$$\varphi_n'(x) = a_n\varkappa_n\cdot\cos\varkappa_n x + \int_0^x r(\tau)\varphi_n(\tau)\cos\varkappa_n(x-\tau)\,d\tau,$$

woraus sofort folgt:

$$\varphi_n'(x) = a_n\varkappa_n\cos\varkappa_n x + a_n\int_0^x r(\tau)\sin\varkappa_n\tau\cos\varkappa_n(x-\tau)\,d\tau + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Jetzt beachten wir:

$$\varkappa_n\cos\varkappa_n x = \left(n+\frac{d_n}{n}\right)\cos\left(n+\frac{d_n}{n}\right)x$$

$$= \left(n+\frac{d_n}{n}\right)\left\{\cos nx - \frac{d_n}{n}\,x\cdot\sin nx + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right\}$$

Indem wir den Ausdruck, den wir für $\frac{d_n}{n}$ gefunden hatten, oben einsetzen, erhalten wir:

$$\varkappa_n\cos\varkappa_n x = n\cdot\cos nx - \frac{x}{2\pi}\int_0^\pi r(\tau)\,d\tau\cdot\sin nx + \alpha_n x\sin nx + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dabei ist

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi r(\tau)\cos 2n\tau\,d\tau,$$

also $\sum_1^\infty \alpha_n^2 \leq 2\pi\int_0^\pi r(\tau)^2 d\tau < \infty$, nach der PARSEVALschen Ungleichung.

In der Gleichung

$$\varphi_n'(x) = a_n\varkappa_n\cos\varkappa_n x + a_n\int_0^x r(\tau)\sin\varkappa_n\tau\cos\varkappa_n(x-\tau)\,d\tau + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

können wir den ersten Term rechts durch den asymptotischen Ausdruck für $a_n \varkappa_n \cos \varkappa_n x$ ersetzen. Indem wir $\varkappa_n = n + O\left(\frac{1}{n}\right)$ beachten und unter dem Integralzeichen auch noch entwickeln, erhalten wir:

$$\varphi_n'(x) = q_n n \cos n x - \frac{a_n x}{2\pi} \int_0^\pi r(\tau)\, d\tau \cdot \sin n x + a_n \alpha_n x \sin n x$$

$$+ a_n \cos n x \int_0^x r(\tau) \sin n\tau \cos n\tau\, d\tau + a_n \sin n x \int_0^x r(\tau) \sin^2 n\tau\, d\tau$$

$$+ O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Durch eine kleine trigonometrische Umformung erhält man jetzt sofort:

$$\varphi_n'(x) = a_n \cdot n \cos n x + a_n \left(\int_0^x r(\tau)\, d\tau - \frac{x}{\pi} \int_0^\pi r(\tau)\, d\tau \right) \frac{\sin n x}{2}$$

$$+ \frac{a_n \cos n x}{2} \int_0^x r(\tau) \sin 2n\tau\, d\tau - \frac{a_n \sin n x}{2} \int_0^x r(\tau) \cos 2n\tau\, d\tau$$

$$+ a_n \alpha_n x \sin n x + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

was die gesuchte Darstellung ist.

Hier sei noch auf einige Details aufmerksam gemacht. Die zuletzt erhaltene Gleichung läßt sich auch in der Form schreiben:

$$\varphi_n'(x) = a_n n \cos n x + a_n \left(\int_0^x r(\tau)\, d\tau - \frac{x}{\pi} \int_0^\pi r(\tau)\, d\tau \right) \frac{\sin n x}{2}$$

$$+ \frac{a_n \cos n x}{2} \int_0^x r(\tau) \sin 2n\tau\, d\tau - \frac{a_n \sin n x}{2} \int_0^x r(\tau) \cos 2n\tau\, d\tau$$

$$+ a_n \alpha_n x \sin n x + \frac{\Delta_n(x)}{n},$$

wobei die Funktionen $\Delta_n(x)$ gleichmäßig beschränkt sind, $|\Delta_n(x)| \leq M$. Die Normierungsfaktoren a_n sind, wie schon erwähnt, ebenfalls beschränkt, $|a_n| \leq M$.

Setzt man

$$A_n(x) = \int_0^x r(\tau) \sin 2n\tau\, d\tau \qquad B_n(x) = \int_0^x r(\tau) \cos 2n\tau\, d\tau,$$

so gilt, auf Grund der PARSEVALschen Ungleichung:

$$\sum_1^\infty A_n(x)^2 \leq \pi \int_0^\pi r(\tau)^2 d\tau < \infty, \quad \sum_1^\infty B_n^2(x) \leq \pi \int_0^\pi r(\tau)^2 d\tau < \infty.$$

Aus demselben Grund gilt, wie schon erwähnt, auch $\sum_1^\infty \alpha_n^2 < \infty$. Ist ferner $r(x)$ eine in $[-\pi, \pi]$ stetige, gerade Funktion, so ist $\varphi_n(x)$ ungerade, $\varphi_n'(x)$ gerade. Die asymptotische Darstellung von $\varphi_n'(x)$, die durch Satz 11 gegeben ist, gilt dann, wie leicht ersichtlich, nicht nur für das Intervall $[0, \pi]$, sondern für das ganze Intervall $[-\pi, \pi]$. Obwohl wir uns hier nur für das Intervall $[0, \pi]$ interessieren und die Funktion $r(x)$ vorerst auch nur in diesem Intervall bekannt ist, wird es im folgenden nützlich sein, $r(x)$ auf $[-\pi, \pi]$ auszudehnen durch die Festsetzung $r(-x) = r(x)$. Dadurch erhält man auch eine Fortsetzung der Eigenfunktionen $\varphi_n(x)$ und deren Ableitungen $\varphi_n'(x)$ in das Intervall $[-\pi, 0]$ hinein, wobei $\varphi_n(-x) = -\varphi_n(x)$ und $\varphi_n'(-x) = \varphi_n'(x)$ gilt. Ferner ist dann, wie schon bemerkt, die Darstellung für φ_n', wie sie in Satz 11 gegeben ist, auch im Intervall $[-\pi, 0]$ gültig. Durch diese Festsetzung wird jede Eigenfunktion und deren Ableitung zu einer 2π-periodischen, geraden beziehungsweise ungeraden Funktion erweitert.

Bevor wir zum Hauptsatz (Satz 15) dieses Abschnittes gelangen, müssen wir noch zwei bekannte Sätze zitieren, deren Beweise man zum Beispiel in ([3]) findet. Der erste lautet wie folgt:

Satz 12: Zu einer stetigen, periodischen Funktion $f(x)$ mit der Periode 2π und zu einer natürlichen Zahl n gibt es genau ein Polynom

$$T_n(x) = a_0 + \sum_1^n a_i \cos i x + \sum_1^n b_i \sin i x \, ,$$

welches von $f(x)$ minimalen Abstand hat (den wir fortan mit $E_n(f)$ bezeichnen). Dieser ist wie folgt charakterisiert: Es existieren $2n + 2$ Punkte $-\pi < x_1 < \ldots\ldots\ldots\ldots < x_{2n+2} \leq \pi$, in welchen die Funktion $T_n(x) - f(x)$ den Wert $d = \| T_n(x) - f(x) \|$ mit alternierendem Vorzeichen annimmt.

Daraus ergibt sich unmittelbar eine Folgerung.

Folgerung 2: Ist $f(x)$ eine ungerade periodische Funktion, $f(-x) = -f(x)$, so ist das trigonometrische Polynom bester Approximation ein reines Sinuspolynom.

Ist $f(x)$ eine periodische gerade Funktion, $f(-x) = f(x)$, so ist das trigonometrische Polynom bester Approximation von der Form:

$$T_n(x) = a_0 + \sum_1^n a_i \cos i x \, .$$

Um den zweiten der erwähnten Sätze formulieren zu können, sei noch eine Bezeichnung eingeführt. Mit $e_n(f)$ bezeichnen wir die untere Grenze der Zahlen

$\| T_n - f \|$, wo T_n die Polynome ohne konstantes Glied durchläuft. Der zweite Satz, dessen Beweis ebenfalls in ([3]) zu finden ist, lautet dann:

Satz 13: Ist $f(x)$ eine 2π-periodische Funktion mit stetiger Ableitung $f'(x)$, so besteht zwischen $E_n(f)$ und $e_n(f')$ die Beziehung:

$$E_n(f) \leq \frac{e_n(f') \cdot 12}{n}$$

Daraus ergibt sich:

Satz 14: *Es existiert eine von n unabhängige Konstante C_0 mit der Eigenschaft:*

a) *Zu einer vorgegebenen Linearkombination $\sum_1^n \xi_i \varphi_i(x)$ findet man ein Sinuspolynom $\sum_1^n \eta_i \sin i x$, welches der Ungleichung genügt:*

$$\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i(x) - \sum_1^n \eta_i \sin i x \| \leqq \frac{C_0}{n} \| \sum_1^n \xi_i \varphi_i(x) \| .$$

b) *Zu einem vorgegebenen Sinuspolynom $\sum_1^n \eta_i \sin i x$ findet man eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i \varphi_i(x)$, welche der Ungleichheit genügt:*

$$\| \sum_1^n \eta_i \sin i x - \sum_1^n \xi_i \varphi_i(x) \| \leqq \frac{C_0}{n} \cdot \| \sum_1^n \eta_i \sin i x \| .$$

Beweis: Offenbar kann man ohne Einschränkung annehmen, daß die Funktionen $r(x)$ und $\varphi_i(x)$ auf dem ganzen Intervall $[-\pi, \pi]$ definiert sind und den Gleichungen

$$r(x) = r(-x) , \quad \varphi_i(-x) = -\varphi_i(x) , \quad \varphi_i'(x) = \varphi_i'(-x) ,$$
$$\varphi_i(0) = \varphi_i(\pi) = \varphi_i(-\pi) = 0$$

genügen. Andernfalls kann dies stets, wie oben bemerkt, durch die Fortsetzung $r(-x) = r(x)$ für $x \varepsilon [0, \pi]$, erreicht werden. Zuerst sei die Behauptung a) bewiesen. Gegeben sei also die Linearkombination $\sum_1^n \xi_i \varphi_i(x)$. Wir betrachten den Ausdruck:

$$\sum_1^n \xi_i \varphi_i'(x) - \sum_1^n \xi_i a_i i \cos i x .$$

Auf Grund der in Satz 11 gegebenen Darstellung von $\varphi_n'(x)$ hat diese Differenz die Form:

$$\sum_1^n \xi_i\varphi_i'(x) - \sum_1^n \xi_i a_i i \cos ix = \sum_1^n a_i\left(\int_0^x r(\tau)d\tau - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi r(\tau)d\tau\right)\xi_i \frac{\sin ix}{2}$$

$$+ \sum_1^n \xi_i a_i A_i(x)\frac{\cos ix}{2} + \sum_1^n \xi_i a_i B_i(x)\frac{\sin ix}{2}$$

$$+ \sum_1^n \xi_i a_i \alpha_i x \sin ix + \sum_1^n \frac{\xi_i \Delta_i(x)}{i}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung wird nun abgeschätzt. Wir beginnen mit dem ersten Term der rechten Seite:

$$\left\| \sum_1^n a_i\left(\int_0^x r(\tau)d\tau - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi r(\tau)d\tau\right)\xi_i\frac{\sin ix}{2}\right\| \leqq A_1 \left\| \sum_1^n a_i\xi_i \sin ix \right\|,$$

wo $A_1 = \left\| \frac{1}{2}\left(\int_0^x r(\tau)d\tau - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi r(\tau)d\tau\right)\right\|$ gesetzt wurde. Andererseits gilt die asymptotische Darstellung:

$$\varphi_i(x) = a_i \sin ix + \frac{e_i(x)}{i},$$

wo die e_i gleichmäßig beschränkt sind, $\| e_i(x) \| \leqq M$. Daraus folgt:

$$\left\| \sum_1^n a_i\,\xi_i \sin ix \right\| \leq \left\| \sum_1^n \xi_i \frac{e_i(x)}{i}\right\| + \left\| \sum_1^n \xi_i\varphi_i(x)\right\|,$$

$$\leq M\cdot \sqrt{\sum_1^n \xi_i^2}\cdot\sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{i^2}} + \left\| \sum_1^n \xi_i\varphi_i(x)\right\|.$$

Indem man wieder beachtet, daß aus der Orthonormalität der Eigenfunktionen

$$\sqrt{\sum_1^n \xi_i^2} \leq \sqrt{\pi}\left\| \sum_1^n \xi_i\varphi_i\right\|$$

folgt, erhalten wir schließlich

$$\left\| \sum_1^n a_i\left(\int_0^x r(\tau)d\tau - \frac{x}{\pi}\int_0^\pi r(\tau)d\tau\right)\xi_i\frac{\sin ix}{2}\right\| \leq A_2 \left\| \sum_1^n \xi_i\varphi_i\right\|,$$

wo A_2 eine von n unabhängige Konstante ist. Indem man ferner

$$\sum_1^\infty A_n^2(x) \leq \pi \| r(x) \|^2 \quad \sum_1^n B_n(x)^2 \leq \pi \| r\ (x) \|^2 \quad \sum_1^\infty \alpha_i^2 < \infty$$

berücksichtigt, auf den zweiten, dritten und vierten Term die SCHWARZsche Ungleichung anwendet, und wieder $\sqrt{\sum_1^n \xi_i^2} \leqq \sqrt{\pi}\left\| \sum_1^n \xi_i\varphi_i\right\|$ beachtet, sieht man, daß es von n unabhängige Konstanten A_3, A_4, A_5 gibt mit:

$$\left\| \sum_1^n \xi_i a_i A_i(x) \frac{\cos i x}{2} \right\| \leq A_3 \left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i \right\|$$

$$\left\| \sum_1^n \xi_i a_i B_i(x) \frac{\sin i x}{2} \right\| \leq A_4 \left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i \right\|$$

$$\left\| \sum_1^n \xi_i \alpha_i x \sin i x \right\| \qquad \leq A_5 \left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i \right\| .$$

Was den fünften Term anbelangt, so erhalten wir:

$$\left\| \sum_1^n \xi_i \frac{\Delta_i(x)}{i} \right\| \leq \sqrt{\pi} \sqrt{\sum_1^\infty \frac{1}{i^2}}\, M \cdot \left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i \right\| \leq A_6 \left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i \right\| \cdot$$

Daraus ergibt sich zusammenfassend:

$$\left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i'(x) - \sum_1^n \xi_i a_i i \cos i x \right\| \leq A \left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i \right\|$$

mit $A = \sum_1^6 A_i$.

Auf Grund von Satz 13 ergibt sich aber daraus:

$$E_n\left(\sum_1^n \xi_i \varphi_i\right) \leq \frac{12 e_n\left(\sum_1^n \xi_i \varphi_i'\right)}{n} \leq \frac{12\, A \left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i \right\|}{n}$$

$$\leq \frac{C_0' \left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i \right\|}{n},$$

wo $C_0' = 12A$ gesetzt wurde. C_0' ist von n unabhängig. Sei nun umgekehrt $\sum_1^n \xi_i \varphi_i(x)$ die beste Approximation von $\sum_1^n \eta_i \sin i x$. Da $\varphi_1(x) \ldots\ldots \varphi_n(x)$ und $\sin x, \ldots \sin n x$ zwei Haarsche Systeme zweiter Art sind für das Intervall $[0, \pi]$, läßt sich Satz 9 anwenden. Das heißt aber, daß $\sum_1^n \eta_i \sin i x$ auch die beste Approximation von $\sum_1^n \xi_i \varphi_i(x)$ ist. Dann können wir aber das eben erhaltene Resultat anwenden und erhalten:

$$\left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i(x) - \sum_1^n \eta_i \sin i x \right\| = E_n\left(\sum_1^n \xi_i \varphi_i\right) \leq \frac{C_0' \left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i \right\|}{n}$$

Indem wir jetzt noch

$$\left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i \right\| \leq \left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i - \sum_1^n \eta_i \sin ix \right\| + \left\| \sum_1^n \eta_i \sin ix \right\| \leq 2 \left\| \sum_1^n \eta_i \sin ix \right\|$$

beachten, folgt:

$$\left\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i(x) - \sum_1^n \eta_i \sin ix \right\| \leq \frac{2C_0' \left\| \sum_1^n \eta_i \sin ix \right\|}{n} .$$

Die Behauptungen a) und b) ergeben sich jetzt, wenn man $2C_0' = C_0$ setzt.[1]) Es sei jetzt $u'' + \lambda Q(x) u = 0$ eine STURM-LIOUVILLEsche Differentialgleichung und $Q(x)$ positiv und zweimal differenzierbar in $[0, \pi]$. Ferner sei die Bedingung $\pi = \int_0^x q^2 ds$ mit $q = \sqrt[4]{Q}$ erfüllt. Durch die beiden Substitutionen

$$qu = \varphi \quad t = \int_0^x q^2 ds$$

transformiert sich dann obige Differentialgleichung, wie in Abschnitt 2 erwähnt, in eine andere, die wir folgt aussieht: $\ddot{\varphi} + (\lambda - r(t))\varphi = 0$, wobei $r(t)$ eine in $[0, \pi]$ stetige Funktion ist. Die zum Randwertproblem a) gehörigen Eigenfunktionen gehen dabei in die zum selben Randwertproblem gehörigen Eigenfunktionen $\varphi_n(t)$ über.

Aus Satz 14 erhält man jetzt leicht

Satz 15: *Es gibt eine von n unabhängige Konstante C_1 mit der Eigenschaft:*

a) *Ist*

$$\sum_1^n \eta_i \frac{\sin (i \int_0^x q^2 ds)}{q}$$

die beste Approximation von $\sum_1^n \xi_i u_i(x)$, *so besteht die Ungleichung:*

$$\left\| \sum_1^n \xi_i u_i(x) - \sum_1^n \eta_i \frac{\sin (i \int_0^x q^2 ds)}{q} \right\| \leq \frac{C_1}{n} \left\| \sum_1^n \xi_i u_i(x) \right\|$$

b) *ist* $\sum_1^n \xi_i u_i(x)$ *die beste Approximation von* $\sum_1^n \eta_i \dfrac{\sin (i \int_0^x q^2 ds)}{q}$,

[1]) Die in diesem Beweis durchgeführten Abschätzungen haben ihre Quelle in einer unveröffentlichten Arbeit von H. WEYL: «Zurückführung der STURM-LIOUVILLEschen Reihen auf FOURIERsche». Dort wird das Randwertproblem $\varphi'(0) = \varphi'(\pi) = 0$ behandelt und werden Abschätzungen für $\varphi(x)$ hergeleitet. Die dort angewandten Methoden sind hier verwendet worden.

dann besteht die Ungleichung:

$$\left\| \sum_1^n \xi_i\, u_i(x) - \sum_1^n \eta_i \frac{\sin\,(i \int_0^x q^2 ds)}{q} \right\| \leq \frac{C_1}{n} \left\| \sum_1^n \eta_i \frac{\sin\,(i \int_0^x q^2 ds)}{q} \right\|$$

Beweis: Wir betrachten zuerst a). Ist $\sum_1^n \mu_i \sin it$ die beste Approximation von $\sum_n^n \xi_i\, \varphi_i(t)$, so gilt nach Satz 14 dann die Ungleichung:

$$\| \sum_1^n \xi_i\, \varphi_i(t) - \sum_1^n \mu_i \sin it \| \leq \frac{C_0}{n} \| \sum_1^n \xi_i\, \varphi_i \| \,.$$

also:

$$\| \sum_1^n \xi_i \varphi_i(t(x)) - \sum_1^n \mu_i \sin it(x) \| \leq \frac{C_0}{n} \| \sum_1^n \xi_i \varphi_i (t(x)) \|$$

und schließlich, nach einer kleinen Umformung:

$$\left\| \sum_1^n \xi_i\, u_i(x) - \sum_1^n \mu_i \frac{\sin\,(i \int_0^x q^2\, ds)}{q} \right\| \leq \left\| \frac{1}{q} \right\| \cdot \| q \| \cdot \frac{C_0}{n} \| \sum_1^n \xi_i u_i \| \,.$$

Das heißt, die beste Approximation

$$\sum_1^n \eta_i \frac{1}{q} \cdot \sin\,(i \int_0^x q^2\, ds)$$

von $\sum_1^n \xi_i u_i(x)$ genügt erst recht der in a) angegebenen Abschätzung, wenn $C_1 = 2 \| \frac{1}{q} \| \cdot \| q \| \cdot C_0$ gesetzt wird.

Beim Beweis von b) verfährt man gleich wie beim Beweis von Satz 14, b). Man hat lediglich zu beachten, daß $u_1(x), u_2(x), \ldots\ldots, u_n(x)$ und

$$\frac{1}{q} \cdot \sin \int_0^x q^2\, ds, \quad \cdots\cdots, \quad \frac{1}{q} \cdot \sin n \int_0^x q^2\, ds$$

zwei Haarsche Systeme zweiter Art für das Intervall $[0, \pi]$ bilden, so daß Satz 9 anwendbar wird. Die in b) auftretende Konstante ist wieder $C_1 = 2 \| \frac{1}{q} \| \cdot \| q \| \, C_0$.

Umständlicher ist es, etwas Analoges für Linearkombinationen $\sum_1^n \xi_i u_i'$ zu beweisen. Wir bemerken: Ist $f(x)$ in $[0, \pi]$ definiert, $f(x) \varepsilon \mathrm{Lip}_M \alpha$, so liegt die 2π-periodische Funktion $f^*(x)$, die den Bedingungen $f^*(-x) = f^*(x)$, $f^*(x) = f(x)$ für $x \varepsilon [0, \pi]$ genügt, in der Klasse $\mathrm{Lip}_{2M} \alpha$. Ferner sieht man: Die Funktionen $1, u_1', u_2', \ldots . . u_n'$ bilden ein HAARsches System für das Intervall $[0, \pi]$. Denn hätte etwa $\xi_0 + \sum_1^n \xi_i u_i'$ $n + 1$ verschiedene Nullstellen in $[0, \pi]$, so hätte die Ableitung, $-Q \cdot \sum_1^n \xi_i \lambda_i u_i$ mindestens n verschiedene Nullstellen im Innern des Intervalles $[0, \pi]$, was dem Satz 10 widerspricht. Daraus folgt aber sofort, daß auch die Funktionen

$$\frac{1}{q}, \frac{1}{q} \cdot u'(x(t)), \ldots\ldots, \frac{1}{q} u_n'(x(t)) \quad \text{mit} \quad t = \int_0^x q^2 ds$$

ein HAARsches System erster Art für $[0, \pi]$ bilden. Desgleichen ist auch das System $1, \cos t, \cos 2t, \ldots, \cos nt$ ein HAARsches System erster Art für $[0, \pi]$ und somit auch

$$q, \; q \cos x(t), \; q \cos 2x(t), \ldots, q \cos nx(t).$$

Schließlich sei nochmals die in Abschnitt 3 angegebene Relation $\int_0^\pi u_i' u_k' ds = \lambda_i \delta_{ik}$ erwähnt. Der in Aussicht gestellte Satz lautet:

Satz 16: *Es gibt eine Konstante C_2 mit der Eigenschaft:*

a) *Zu jeder Linearkombination* $L(x) = \sum_1^n \xi_i u_i'(x) + \xi_0$ *gibt es eine Linearkombination*

$$T(x) = \sum_1^n \eta_i q \cdot \cos (i \int_0^x q^2 ds) + \eta_0 q,$$

welche der Ungleichung genügt:

$$\| L(x) - T(x) \| \leq \frac{C_2}{n} \| L(x) \|.$$

b) *Zu jeder Linearkombination*

$$T(x) = \sum_1^n \eta_i q \cos (i \int_0^x q^2 ds) + \eta_0 q$$

gibt es eine andere, $L(x) = \sum_1^n \xi_i u_i'(x) + \xi_0$, *welche der Ungleichung genügt:*

$$\| T(x) - L(x) \| \leq \frac{C_2}{n} \cdot \| T(x) \|.$$

Beweis: Wir betrachten zuerst a). Wir setzen $l(t) = \frac{L(x(t))}{q(x(t))}$, wobei wieder $t = \int\limits_0^x q^2 ds$ sein soll. Eine kurze Rechnung ergibt:

$$\dot{l}(t) = -\sum_1^n \xi_i \lambda_i q\,(x(t) u_i(x(t))) - \frac{\dot{q}}{q}\,(\sum_1^n \xi_i u_i'(x(t))) - \xi_0 \frac{\dot{q}}{q}\,.$$

Nun ist der erste Term auf der rechten Seite nichts anderes als $-\sum\limits_1^n \xi_i \lambda_i \varphi_i(t)$, wo $\varphi_i(t)$ die i-te Eigenfunktion der transformierten Differentialgleichung $\ddot{\varphi} + (\lambda - r(t))\varphi = 0$ ist. Nach Satz 14 gibt es dann ein Sinuspolynom $\sum\limits_1^n \gamma_i \sin it$, welches der Ungleichung genügt:

$$\|\sum_1^n \xi_i \lambda_i \varphi_i(t) + \sum_1^n \gamma_i \sin it\| \leq \frac{C_0}{n} \cdot \|\sum_1^n \xi_i \lambda_i \varphi_i\|$$

oder, indem man die Substitution auf der rechten Seite der letzten Ungleichung wieder rückgängig macht:

$$\|\sum_1^n \xi_i \lambda_i \varphi_i(t) + \sum_1^n \gamma_i \sin it\| \leq \frac{C_0}{n} \left\|\frac{1}{q}\right\|^3 \cdot \|(\sum_1^n \xi_i u_i')'\|\,.$$

Auf den Ausdruck $(\sum\limits_1^n \xi_i u_i')'$ dürfen wir die Bernsteinsche Ungleichung aus Satz 3 anwenden. Das ergibt:

$$\|\sum_1^n \xi_i \lambda_i \varphi_i(t) + \sum_1^n \gamma_i \sin it\| \leq C_0 K \left\|\frac{1}{q}\right\|^3 \cdot \|\sum_1^n \xi_i u_i'\|\,.$$

Daraus folgt:

$$\|\dot{l}(t) - \sum_1^n \gamma_i \sin it\| \leq \left(C_0 K \left\|\frac{1}{q}\right\|^3 + \left\|\frac{\dot{q}}{q}\right\|\right) \|\sum_1^n \xi_i u_i'\| + |\xi_0| \left\|\frac{\dot{q}}{q}\right\|.$$

Ferner ist:

$$\pi\,|\xi_0| = |\int_0^\pi (\xi_0 + \sum_1^n \xi_i u_i')\,dx| \leq \pi\,\|\xi_0 + \sum_1^n \xi_i u_i'\|$$

und somit:

$$\|\sum_1^n \xi_i u_i'\| \leq |\xi_0| + \|\xi_0 + \sum_1^n \xi_i u_i'\| \leq 2\,\|\xi_0 + \sum_1^n \xi_i u_i'\|\,.$$

Dies alles zusammengenommen ergibt:

$$\|\dot{l}(t) - \sum_1^n \gamma_i \sin it\| \leq \left(2 C_0 K \left\|\frac{1}{q}\right\|^3 + 3 \left\|\frac{\dot{q}}{q}\right\|\right) \|\sum_1^n \xi_i u_i' + \xi_0\|$$

$$\leq K_3 \,||\, \sum_1^n \xi_i u_i + \xi_0 \,||\,,$$

wo der Klammerausdruck rechts mit K_3 bezeichnet wurde. Die Funktion

$$g(t) = l(t) + \sum_1^n \frac{\gamma_i}{i} \cos it$$

ist einmal stetig differenzierbar, wobei die Ableitung $\dot{g}(t)$ der Abschätzung genügt: $||\, \dot{g}(t) \,|| \leq K_3 \,||\, \sum_1^n \xi_i u_i' + \xi_0 \,||$. Also liegt $g(t)$ in der Klasse $\mathrm{Lip}_M 1$, mit $M = K_3 \,||\, \sum_1^n \xi_i u_i' + \xi_0 \,||$. Ist dann $g^*(t)$ diejenige 2π-periodische Funktion, welche den Bedingungen genügt: $g^*(-t) = g^*(t)$, $g^*(t) = g(t)$ für $t \in [0, \pi]$, so liegt $g^*(t)$ zufolge der oben gemachten Bemerkung in der Klasse $\mathrm{Lip}_{2M} 1$. In [3], pp. 79 wird gezeigt, daß zu einer 2π-periodischen Funktion $g^*(t)$ aus $\mathrm{Lip}_{2M} 1$ ein trigonometrisches Polynom $P(t)$ existiert, für welches:

$$||\, g^*(t) - P(t) \,|| \leq \frac{24M}{n}$$

gilt. Da $g^*(t)$ eine gerade Funktion ist, gibt es nach Folgerung 2 ein Polynom $\sum_1^n \alpha_i \cos it + \alpha_0$, welches ebenfalls der Ungleichung genügt:

$$||\, g^*(t) - \sum_1^n \alpha_i \cos it - \alpha_0 \,|| \leq \frac{24M}{n}$$

Daraus ergibt sich:

$$\left|\left| \, l(t) - \sum_1^n \left(\alpha_i - \frac{\gamma_i}{i}\right) \cos it - \alpha_0 \right|\right| \leq \frac{24 K_3 \,||\, \sum_1^n \xi_i u_i' + \xi_0 \,||}{n}.$$

Indem man auf der linken Seite dieser Ungleichung wieder von t zu x übergeht, erhält man:

$$||\, L(x) - \sum_1^n q(x) \left(\alpha_i - \frac{\gamma_i}{i}\right) \cos i \int_0^x q^2 ds - \alpha_0 q(x) \,|| \leq \frac{24 K_3 \,||\, L(x) \,||}{n},$$

womit a) bewiesen ist, wenn wir $C_2 = 24\, K_3 \,||\, q \,||$ setzen.

Sei nun umgekehrt $L(x) = \sum_1^n \xi_i u_i' + \xi_0$ die beste Approximation von $T(x) = \sum_1^n \eta_i q \cos (i \int_0^x q^2 ds) + \eta_0 q$. Da es sich um zwei HAARsche Systeme erster Art handelt, ist Satz 9 anwendbar, das heißt, es ist auch $T(x)$ die beste

Approximation von $L(x)$. Dann ist aber die eben bewiesene Ungleichung anwendbar, und es ist:

$$|| L(x) - T(x) || \leq \frac{12 K_3 || L(x) ||}{n} .$$

Da $|| L(x) || \leq || L(x) - T(x) || + || T(x) || \leq 2 || T(x) ||$ ist, folgt:

$$|| L(x) - T(x) || \leq \frac{24 K_3 || T(x) ||}{n} = \frac{C_2 || T(x) ||}{n} ,$$

womit auch b) bewiesen ist.

Im nächsten Abschnitt sollen nun die eben bewiesenen Sätze auf Approximationsfragen angewendet werden.

7. Einige Approximationssätze

Für das Folgende ist es zweckmäßig, die in den Sätzen 15 und 16 auftretenden Konstanten C_1 und C_2 durch die neue Konstante $C = \max(C_1, C_2)$ zu ersetzen. Sei $f(x)$ eine in $[0, \pi]$ definierte, stetige Funktion und $f(x) \varepsilon \mathrm{Lip}_M \alpha$. Ist dann $f^*(x)$ diejenige 2π-periodische Funktion, die den Bedingungen genügt: $f^*(-x) = f^*(x), f^*(x) = f(x)$ für $x \varepsilon [0, \pi]$, so ist offenbar $f^*(x) \varepsilon \mathrm{Lip}_{2M} \alpha$. Sei ferner $f(0) = f(\pi) = 0, f(x) \varepsilon \mathrm{Lip}_M \alpha$. Dann liegt auch die durch die Bedingungen $\tilde{f}(-x) = -\tilde{f}(x), \tilde{f}(x) = f(x)$ für $x \varepsilon [0, \pi]$, definierte 2π-periodische Funktion in der Klasse $\mathrm{Lip}_{2M} \alpha$. Durch eine kurze Rechnung beweist man die folgende Aussage: Ist $f(x)$ in $[0, \pi]$ definiert, $f(0) = 0, f(\pi) = 0, f(x) \varepsilon \mathrm{Lip}_M \alpha$, und machen wir die Substitution $x = x(t)$, mit $t = \int_0^x q^2 ds$, so liegt die Funktion $q(x(t)) f(x(t))$ in der Klasse $\mathrm{Lip}_{aM} \alpha$, wo a eine Konstante ist, die nur von q beziehungsweise Q abhängt.

Schließlich sei noch ein Satz angegeben, dessen Beweis man in dem schon oft zitierten Buch ([3]) findet.

Satz 17: Ist $f(x)$ 2π-periodisch und $f(x) \varepsilon \mathrm{Lip}_M \alpha, o < \alpha \leq 1$, so gilt:

$$E_n(f) \leq \frac{12 M}{n^\alpha} .$$

Besitzt $f(x)$ eine stetige Ableitung $f'(x)$ und ist $| f'(x) | \leq M_1$, so gilt:

$$E_n(f) \leq \frac{12 M_1}{n} .$$

Daraus folgt der

Satz 18: *Es gibt eine Konstante A mit der Eigenschaft: Ist $f(x)$ in $[0, \pi]$ definiert, $f(0) = f(\pi) = 0$ und $f(x) \varepsilon \mathrm{Lip}_M \alpha$, so gibt es eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$, welche der Ungleichung genügt:*

$$\| \sum_1^n \xi_i u_i - f \| \leq \frac{AM}{n^\alpha} \quad (0 < \alpha \leq 1) .$$

Beweis: Da $f(x)$ in $\mathrm{Lip}_M \alpha$ liegt, folgt, daß $g(t) = q(x(t)) f(x(t))$ in $\mathrm{Lip}_M \alpha$ liegt, wo a die oben erwähnte Konstante ist. Da $g(0) = g(\pi) = 0$ ist, gibt es eine 2π-periodische, ungerade Erweiterung $g(t)$, die in der Klasse $\mathrm{Lip}_{2aM} \alpha$ liegt. Aus den Sätzen 12 und 17 folgt dann, daß ein Sinuspolynom $\sum_1^n \alpha_i \sin it$ existiert, welches der Ungleichung genügt:

$$\| \tilde{g}(t) - \sum_1^n \alpha_i \sin it \| \leq \frac{24 aM}{n^\alpha} \quad \text{also} \quad \| g(t) - \sum_1^n \alpha_i \sin it \| \leq \frac{24 aM}{n^\alpha} .$$

Durch Rückgängigmachen der Substitution $x = x(t)$ erhält man (nach kurzer Rechnung):

$$\left\| f(x) - \sum_1^n \alpha_i \frac{\sin i \int_0^x q^2 ds}{q} \right\| \leq \left\| \frac{1}{q} \right\| \frac{24 aM}{n^\alpha} .$$

Nach Satz 15 gibt es eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$ welche der Ungleichung genügt:

$$\left\| f(x) - \sum_1^n \alpha_i \frac{\sin i \int_0^x q^2 ds}{q} \right\| \leq \frac{c}{n} \left\| \sum_1^n \alpha_i \frac{\sin (i \int_0^x q^2 ds)}{q} \right\| .$$

Daraus ergibt sich:

$$\| \sum_1^n \xi_i u_i - f \| \leq \frac{c}{n} \left\| \sum_1^n \alpha_i \frac{\sin (i \int_0^x q^2 ds)}{q} \right\| + \left\| \frac{1}{q} \right\| \frac{24 aM}{n^\alpha} .$$

Jetzt beachten wir:

$$\left\| \sum_1^n \alpha_i \frac{\sin (i \int_0^x q^2 ds)}{q} \right\| \leq \left\| \frac{1}{q} \right\| \cdot \| \sum_1^n \alpha_i \sin it \| \leq 2 \left\| \frac{1}{q} \right\| \cdot \| f \| \leq 2\pi M \left\| \frac{1}{q} \right\|,$$

wobei $\| f \| \leq \pi M$ benutzt wurde. Also:

$$\| \sum_1^n \xi_i u_i - f \| \leq \frac{M}{n^\alpha} \cdot \left\| \frac{1}{q} \right\| \cdot \left(\frac{2\pi C}{n^{1-\alpha}} + 24 a \right) \leq \frac{M}{n^\alpha} \left\| \frac{1}{q} \right\| (2\pi C + 24 a) .$$

Indem wir $A = \left\| \frac{1}{q} \right\| (2\pi C + 24a)$ setzen, folgt unsere Behauptung.

Satz 19: Ist $f(0) = f(\pi) = 0$ und besitzt $f(x)$ eine stetige Ableitung $f'(x)$, welche der Ungleichung genügt: $| f'(x) | \leq M$, so gibt es eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$, für welche

$$\| f - \sum_1^n \xi_i u_i \| \leq \frac{AM}{n}$$

gilt.

Beweis: Da $f(x)$ in der Klasse $\mathrm{Lip}_M 1$ liegt, ist Satz 18 mit $\alpha = 1$ anwendbar. Diesem zufolge gibt es eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$, welche der Ungleichung genügt:

$$\| f - \sum_1^n \xi_i u_i \| \leq \frac{AM}{n} ,$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Satz 20: *Es gibt eine Konstante* B *mit der Eigenschaft: Ist* g *in der Klasse* $\mathrm{Lip}_M \alpha, o < \alpha \leq 1$, *und ist* $\int_0^\pi g(x) dx = 0$, *so gibt es eine Linearkombination* $\sum_1^n \xi_i u_i'$, *die der Ungleichung genügt:*

$$\| \sum_1^n \xi_i u_i' - g \| \leq \frac{BM}{n^\alpha} .$$

Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$l(t) = \frac{g(x(t)) - g(0)}{q(x(t))} , \quad t = \int_0^x q^2 ds .$$

Eine kurze Rechnung zeigt, daß die Funktion der Klasse $\mathrm{Lip}_{bM} \alpha$ angehört, wo b eine Konstante ist, die nur von q beziehungsweise Q abhängt. Die 2π-periodische Funktion $\tilde{l}(t)$, die der Gleichung $\tilde{l}(-t) = \tilde{l}(t)$ genügt und auf $[0, \pi]$ mit $l(t)$ übereinstimmt, gehört dann zur Klasse $\mathrm{Lip}_{2bM} \alpha$. Nach Satz 17 gibt es dann eine Linearkombination $L(t) = \sum_1^n \eta_i \cos it + \eta_0$, welche der Ungleichung genügt:

$$\| \tilde{l}(t) - \sum_1^n \eta_i \cos it - \eta_0 \| \leq \frac{24bM}{n^\alpha} ,$$

also:

$$\| l(t) - \sum_1^n \eta_i \cos it - \eta_0 \| \leq \frac{24bM}{n^\alpha} ,$$

woraus durch Rückgängigmachen der Substitution folgt:

$$\| g(x) - g(0) - (\sum_1^n q(x)\eta_i \cos i \int_0^x q^2 ds + \eta_0 q(x) \| \leq \| q \| \frac{24bM}{n^\alpha} .$$

Nach Satz 16 gibt es eine Linearkombination $S(x) = \sum_1^n \xi_i u_i'(x) + \xi_0$, welche der Ungleichung genügt:

$$\| S(x) - qL(\int_0^x q^2 ds) \| \leq \frac{C \| L(\int_0^x q^2 ds) \| \cdot \| q \|}{n} .$$

Also ist:

$$\| S(x) - (g(x) - g(0)) \| \leqq \frac{\| q \| \cdot C \| L(\int_0^x q^2 ds) \|}{n} + \frac{24bM \| q \|}{n^\alpha} .$$

Wegen $\| g(x(t)) - g(0) \| \leqq \pi M$ ist $\| L(\int_0^x q^2 ds) \| = \| L(t) \| \leqq 2M\pi \left\| \frac{1}{q} \right\|$, woraus sich ergibt:

$$\| S(x) - (g(x) - g(0)) \| \leq \frac{2 \| q \| \cdot \left\| \frac{1}{q} \right\| \cdot \pi M C}{n} + \frac{24bM}{n^\alpha} \cdot \| q \|$$

oder:

$$\| \sum_0^n \xi_i u_i' + \xi_0' - g(x) \| \leq \frac{Md}{n^\alpha} ,$$

wo $d = 2 \| q \| \cdot \left\| \frac{1}{q} \right\| \cdot \pi C + 24b \| q \|$ und $\xi_0' = \xi_0 + g(o)$ gesetzt wurde.

Nun ist:

$$| \xi_0' | = \frac{1}{\pi} | \int_0^\pi (\sum_1^n \xi_i u_i' + \xi_0' - g) dx | \leq \frac{M}{n^\alpha} d ,$$

woraus sofort folgt:

$$\| \sum_1^n \xi_i u_i' - g(x) \| \leq \frac{2Md}{n^\alpha},$$

Die Behauptung des Satzes ergibt sich, wenn wir $2d = B$ setzen.

Folgerung: Ist $g(x)$ eine in $[0, \pi]$ definierte Funktion mit stetiger Ableitung und ist:

$$| g'(x) | \leq M \quad \int_0^\pi g(s) ds = 0 ,$$

so existiert eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i'$ mit

$$\| \sum_1^n \xi_i u_i' - g \| \leq \frac{BM}{n} .$$

Beweis: $g(x)$ genügt den Voraussetzungen des eben bewiesenen Satzes mit $\alpha = 1$. Daraus ergibt sich die Behauptung sofort.

Satz 21: Es gibt eine Konstante D mit der Eigenschaft: Ist $g(x)$ einmal stetig differenzierbar in $[0, \pi]$, $g'(x) \varepsilon \operatorname{Lip}_M \alpha$ $0 < \alpha \leq 1$, ist ferner $g(0) = g(\pi) = 0$, so gibt es eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$, die der Ungleichung genügt:

$$\| g(x) - \sum_1^n \xi_i u_i \| \leq \frac{DM}{n^{1+\alpha}} .$$

Beweis: Da $\int_0^\pi g'(s) ds = g(\pi) - g(0) = 0$ ist und $g'(x) \varepsilon \operatorname{Lip}_M \alpha$, ist Satz 20 anwendbar. Das heißt, es gibt eine Linearkombination $\sum_1^n \alpha_i u_i'$, welche der Ungleichung genügt:

$$\| \sum \alpha_i u_i' - g' \| \leq \frac{BM}{n^\alpha} .$$

Die Funktion $\sum_1^n \alpha_i u_i - g$ verschwindet an den Stellen 0 und π und besitzt eine stetige Ableitung, die der eben angegebenen Ungleichung genügt. Also ist Satz 19 anwendbar, das heißt, es gibt eine Linearkombination $\sum_1^n \beta_i u_i$, welche die Abschätzung

$$\| (\sum_1^n \alpha_i u_i - g) - \sum_1^n \beta_i u_i \| \leq \frac{A}{n} \| \sum_1^n \alpha_i u_i' - g' \| \leq \frac{ABM}{n^{1+\alpha}}$$

erfüllt. $\sum_1^n (\alpha_i - \beta_i) u_i$ ist die gesuchte Linearkombination und $D = AB$ die gesuchte Konstante.

Satz 22: Es gibt eine Konstante E mit der Eigenschaft: Ist $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar, $f(0) = f(\pi) = 0$ und

$$\left| \frac{1}{Q} \frac{d^2}{dx^2} f \right| \leq M .$$

so gibt es eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$, welche der Ungleichung genügt:

$$\| f - \sum_1^n \xi_i u_i \| \leq \frac{EM}{n^2} .$$

Beweis: Aus der Voraussetzung folgt: $| f'' | \leq \| Q \| M$. Also ist $f'(x) \varepsilon \mathrm{Lip}_{\|Q\| M} 1$. Somit ist der eben bewiesene Satz 21 für $\alpha = 1$ anwendbar, das heißt, es existiert eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$, welche der Ungleichung genügt:

$$\| f - \sum_1^n \xi_i u_i \| \leq \frac{\| Q \| MD}{n^2}$$

Indem wir $E = \| Q \| D$ setzen, folgt die Behauptung.

Satz 23: Es gibt eine Konstante F mit der Eigenschaft: Ist $f(x)$ zweimal stetig differenzierbar, $f(0) = f(\pi) = 0$, und

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2}{dx^2} f \Big|_0 = 0 , \quad \frac{1}{Q} \frac{d^2}{dx^2} f \Big|_\pi = 0 , \quad \frac{1}{Q} \frac{d^2}{dx^2} f \varepsilon \mathrm{Lip}_M \alpha , \qquad 0 < \alpha \leq 1 ,$$

so gibt es eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$, die der Ungleichung genügt:

$$\| f - \sum_1^n \xi_i u_i \| \leq \frac{FM}{n^{2+\alpha}} .$$

Beweis: Aus $\frac{1}{Q} \frac{d^2}{dx^2} f \varepsilon \mathrm{Lip}_M \alpha$ folgt nach Satz 18, daß es eine Linearkombination $\sum_1^n \alpha_i u_i$ gibt, welche der Abschätzung genügt:

$$\left\| \frac{1}{Q} \frac{d^2}{dx^2} f - \sum_1^n \alpha_i u_i \right\| \leq \frac{AM}{n^\alpha} .$$

Daraus folgt: Die Funktion $F(x) = f + \sum_1^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i} u_i$ verschwindet an den Grenzen 0 und π und besitzt eine zweite stetige Ableitung $F''(x)$, welche der Ungleichung genügt: $| F''(x) | \leq \frac{\| Q \| AM}{n^\alpha}$. Dann ist aber Satz 23 anwendbar, das heißt, es gibt eine Linearkombination $\sum_1^n \beta_i u_i$, welche der Ungleichung genügt:

$$\| F - \sum_1^n \beta_i u_i \| = \left\| f - \sum_1^n \left\{ (-1)^m \frac{\alpha_i}{\lambda_i^m} + \beta_i \right\} u_i \right\| \leq \frac{E^{m+1} M}{n^{2m+2}},$$

womit der Satz bewiesen ist.

Satz 25: *Die Funktionen* $f, \Theta f, \Theta^2 f, \ldots\ldots, \Theta^{p-1} f, \Theta^p f,$ *seien alle in* $[0, \pi]$ *definiert und stetig. In den Punkten* 0 *und* π *sei* $\Theta^i f = 0$ *für* $i = 0, 1, \ldots, p-1, p$. *Ferner sei* $\Theta^p f \varepsilon \mathrm{Lip}_M \alpha$. *Dann gibt es eine Linearkombination* $\sum_1^n \xi_i u_i$, *welche der Ungleichung genügt:*

$$\| f - \sum_1^n \xi_i u_i \| \leq \frac{E^p A M}{n^{2p+\alpha}} \qquad (0 < \alpha \leq 1),$$

Beweis: Die Funktion $\Theta^p f$ genügt den Bedingungen von Satz 18. Also gibt es eine Linearkombination $\sum_1^n \alpha_i u_i$, die der Ungleichung genügt:

$$\| \Theta^p f - \sum_1^n \alpha_i u_i \| \leq \frac{AM}{n^\alpha}.$$

Die Funktion $F = f - (-1)^p \sum_1^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i^p} u_i$ erfüllt die Bedingungen des eben bewiesenen Satzes 25. Also gibt es eine Linearkombination $\sum_1^n \beta_i u_i$ für welche die Abschätzung

$$\| F - \sum_1^n \beta_i u_i \| \leq \frac{E^p}{n^{2p}} \| \Theta^p F \|$$

gilt. Also ist:

$$\left\| f - \sum_1^n \left\{ (-1)^p \frac{\alpha_i}{\lambda_i^p} + \beta_i \right\} u_i \right\| \leq \frac{A E^p M}{n^{2p+\alpha}},$$

womit die Behauptung bewiesen ist.

Aus Satz 25 ergibt sich die

Folgerung: Ist auch noch $\frac{d}{dx} \Theta^p f$ definiert und $\left| \frac{d}{dx} \Theta^p f \right| \leqq M$, dann gibt es eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$ mit

$$\| f - \sum_1^n \xi_i u_i \| \leqq \frac{A E^p M}{n^{2p+1}}.$$

Mit der Benutzung dieser Folgerung erhält man

$$|| F - \sum_1^n \beta_i u_i || \leq \frac{E \, || Q || \, A M}{n^{2+\alpha}}$$

oder:

$$|| f + \sum_1^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i} u_i - \sum_1^n \beta_i u_i || \leq \frac{E \, || Q || \, A M}{n^{2+\alpha}}$$

Die gesuchte Linearkombination ist also $\sum_1^n \left(\beta_i - \frac{\alpha_i}{\lambda_i}\right) u_i$, die gesuchte Konstante F ist gleich $A E \, || Q ||$.

Für das Weitere soll der Differentialoperator $\frac{1}{Q} \frac{d^2}{d x^2}$ mit Θ bezeichnet werden. Dann gilt der

Satz 24: Die Funktionen $f, \Theta f, \Theta^2 f, \ldots\ldots, \Theta^{p-1} f, \Theta^p f$ seien alle in $[0, \pi]$ definiert und stetig. In den Punkten 0 und π sei $\Theta^i f = 0$ für $i = 0,1, \ldots, p-1$. Ferner sei $|| \Theta^p f || \leq M$. Dann gibt es eine Linearkombination $\sum_1^n \xi_i u_i$, welche der Ungleichung genügt:

$$|| f - \sum_1^n \xi_i u_i || \leq \frac{E^p M}{n^{2p}} .$$

Beweis: Nach Satz 23 ist die Behauptung offenbar richtig für $p = 1$. Wir nehmen an, der Satz sei schon bewiesen für $p = m$. Wir zeigen, daß er dann auch für $p = m + 1$ gilt. Die Ungleichung $|| \Theta^{m+1} f || \leq M$ läßt sich in der Form schreiben: $|| \Theta(\Theta^m f) || \leq M$. Aus Satz 23 folgt, daß es eine Linearkombination $\sum_1^n \alpha_i u_i$ gibt, die der Ungleichung genügt:

$$|| \Theta^m f - \sum_1^n \alpha_i u_i || \leq \frac{E M}{n^2} .$$

Die Funktion $F = f - (-1)^m \sum_1^n \frac{\alpha_i}{\lambda_i^m} u_i$ erfüllt die Bedingungen des Satzes für $p = m$. Nach Induktionsvoraussetzung existiert eine Linearkombination $\sum_1^n \beta_i u_i$, welche der Ungleichung genügt:

$$|| F - \sum_1^n \beta_i u_i || \leq \frac{E^m}{n^{2m}} \, || \Theta^m F || .$$

Wegen

$$|| \Theta^m F || = || \Theta^m f - \sum_1^n \alpha_i u_i || \leq \frac{E M}{n^2}$$

folgt daraus:

Satz 26: *Erfüllen* $f, \Theta f, \ldots\ldots, \Theta^p f$ *die Bedingungen von Satz* 24, *ist* $\frac{d}{dx}\Theta^p f = 0$ *in* $[0, \pi]$ *und* $\frac{d}{dx}\Theta^p f \varepsilon \mathrm{Lip}_M \alpha$, $(0 < \alpha \leq 1)$, *so existiert* $\sum_1^n \xi_i u_i$ *mit*

$$\| f - \sum_1^n \xi_i u_i \| \leqq \frac{E^p A B M}{n^{2p+1+\alpha}} .$$

Der Beweis ergibt sich auf völlig analoge Art wie derjenige von Satz 24.

8. Eine spezielle Approximationsklasse

a) Bekanntlich gilt folgender Satz: Ist $f(x)$ 2π-periodisch und $E_n(f) \leq A q^n$, wo A eine nur von f abhängige Konstante und $q < 1$ ist, so ist $f(x)$ analytisch. Umgekehrt findet man zu jeder 2π-periodischen, analytischen Funktion eine Konstante A und eine Konstante $q < 1$, so daß $E_n(f) \leq A q^n$ ist, ([3]). Dieser Aussage kann man leicht eine andere Fassung geben. Man kann sagen, daß sich eine 2π-periodische Funktion f genau dann mit der Geschwindigkeit $A q^n, q < 1$, durch trigonometrische Polynome approximieren läßt, wenn es eine Konstante B gibt, so daß

$$\left| \left(\frac{d}{dx}\right)^m f(x) \right| \leq B^m m^m$$

ist, ([3]), pp. 154). In dieser Form kann der Satz auch auf den Fall Sturm-Liouvillescher Eigenfunktionen übertragen werden. Es gilt der

Satz 27: a) *Sind die Funktionen* $f, \frac{d}{dx} f, \Theta f, \ldots\ldots, \Theta^p f, \frac{d}{dx}\Theta^p f, \ldots$ *in* $[0, \pi]$ *definiert und ist*

1) $\Theta^p f|_0 = 0, \Theta^p f|_\pi = 0$ *für alle* p

2) *und gibt es eine Konstante* B *so, daß*

$$\| \Theta^p f \| \leq B^{2p}(2p)^{2p}, \left\| \frac{d}{dx} \Theta^p f \right\| \leq B^{2p+1}(2p+1)^{2p+1}$$

für alle p *gilt, so gibt es eine Konstante* A *und ein* $q < 1$, *so daß* $E_n^s(f) \leq A q^n$ *für alle* n *gilt.*

b) *Ist umgekehrt* $E_n^s(f) \leq A q^n$ *mit* $q < 1$, *so genügt* f *den Bedingungen* 1), 2).

Beweis: Der Beweis von b) verläuft gleich wie im Falle trigonometrischer Funktionen, weshalb er hier nur skizziert werden soll. Sei $S_n(x)$ die n-te Linearkombination von $u_1, u_2, \ldots\ldots, u_n$, für welche

$$\| f - S_n \| = E_n^s(f) \leq A q^n$$

gilt. Wir bilden $f = S_1 + \sum_1^\infty (S_{n+1} - S_n)$, wo S_1 von der Form $a u_1$ ist. Wir bilden die formale Reihe:

$$\Theta^p S_1 + \sum_1^\infty \Theta^p (S_{n+1} - S_n) \ .$$

Auf Grund von Folgerung 1 finden wir:

$$| \Theta^p S_1 | + \sum_1^\infty | \Theta^p (S_{n+1} - S_n) | \leq \alpha \lambda_1^p \| u_1 \| + \sum_{n=1}^\infty K^{2p} (n+1)^{2p} \| S_{n+1} - S_n \|$$

Es ist

$$\| S_{n+1} - S_n \| \leq \| S_{n+1} - f \| + \| S_n - f \| \leq L q^{n+1}$$

mit $L = \dfrac{2A}{q}$.

Also ist:

$$| \Theta^p S_1 | + \sum_1^\infty | \Theta^p (S_{n+1} - S_n) | \leq \alpha \lambda_1^p \| u_1 \| + L \sum_{n=1}^\infty K^{2p} (n+1)^{2p} q^{(n+1)},$$

woraus die absolute Konvergenz der Reihe

$$\Theta^p S_1 + \sum_{n=1}^\infty \Theta^p (S_{n+1} - S_n)$$

folgt. Das heißt: $\Theta^p f$ existiert und wird durch die erwähnte Reihe dargestellt. Wie in [3], pp. 160 gezeigt wird, existiert zu jedem $q < 1$ eine Konstante B_1, so daß die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^\infty n^m q^n \leq B^m m^m$$

für alle m besteht. Also ist speziell in unserem Falle:

$$| \Theta^p f | \leq \alpha \| u_1 \| \lambda_1^p + L K^{2p} B_1^{2p} (2p)^{2p}$$

woraus leicht die Existenz einer Konstante B_2 folgt, welche den Ungleichungen genügt:

$$| \Theta^p f | \leq B_2^{2p} (2p)^{2p} \ .$$

Dieselben Überlegungen führen zu einer Konstanten B_3, welche den Ungleichungen

$$\left| \frac{d}{dx} \Theta^p f \right| \leq B_3^{2p+1} (2p+1)^{(2p+1)}$$

genügt. Indem man $B = \max. (B_1, B_2)$ setzt, erhält man b).

Auch der Beweis von a) verläuft parallel zu dem des trigonometrischen Falles. Durch Verwendung der Bedingung 1) und durch $2p$-fache beziehungsweise $2p + 1$-fache partielle Integration gelangt man leicht zu den Formeln:

$$a_n = \int_0^\pi f(x) u_n(x) Q(x) dx = \frac{(-1)^p}{\lambda_n^p} \int_0^\pi \Theta^p f \cdot u_n Q dx$$

$$a_n = \frac{(-1)^{p+1}}{\lambda_n^{p+1}} \int_0^\pi \left(\frac{dx}{d} \Theta^p f\right) u_n' dx .$$

Jetzt beachte man, daß auf Grund der asymptotischen Formeln für λ_n und u_n' Ungleichungen der Form

$$\frac{n^2}{\lambda_n} \leq a \qquad || u_n || \leq b \cdot n$$

mit geeigneten Konstanten a und q bestehen. Unter Verwendung der Bedingung 3) erhält man dann die Abschätzungen:

$$| a_n | \leq \pi || Q u_n || \cdot \frac{a^p B^{2p} (2p)^{2p}}{n^{2p}}$$

$$| a_n | \leq b\pi \frac{a^{p+1} B^{2p+1}}{n^{2p+1}} (2p + 1)^{2p+1} .$$

Daraus ergibt sich sofort die Existenz einer Konstanten A_0, so daß für alle p die Ungleichungen bestehen:

$$| a_n | \leq \frac{A_0^p}{n^p} \cdot p^p .$$

Diese letzte Ungleichung soll benutzt werden, um die Differenz $f(x) - \sum_1^n a_i u_i(x)$ nach oben abzuschätzen. Es ist:

$$|| f(x) - \sum_1^n a_i u_i(x) || = || \sum_{n+1}^\infty a_i u_i(x) || \leq \sum_{n+1}^\infty | a_i | M ,$$

wo $|| u_i || \leq M$ ist. Wie aber in [3], pp. 158 gezeigt wird, folgt aus der Ungleichung:

$$| a_n | \leq \frac{A_0^p}{n^p} p^p$$

die Existenz einer Konstanten A und einer Konstanten $q < 1$, so daß:

$$\sum_{n+1}^\infty | a_i | \leq A q^n$$

gilt, womit auch die Aussage a) bewiesen ist.

b) Für das Weitere sollen die mit Eigenfunktionen verknüpften Approximationsfragen verlassen werden. Es sollen unendliche Reihen untersucht werden, die in engem Zusammenhang mit den Operationen $\frac{d}{dx}, \frac{1}{Q}\frac{d^2}{dx^2}, \ldots\ldots$ stehen (sogenannten Quasiableitungen im Sinne von NEUMARK). Entsprechend kann man diese Reihen als Quasipotenzreihen bezeichnen. Wir betrachten Funktionen, welche der Bedingung 2) von Satz 27 genügen. Es gilt der

Satz 28: Genügt $f(x)$ in $[a, b]$ der Bedingung 2), so gibt es ein $d > 0$, so daß

$$f(x) = f(y) + (x-y)f'(y) + \int_y^x\int_y^{\xi_2} Q(\xi_1)d\xi_1 d\xi_2 \cdot \Theta f\,|_y + \ldots\ldots \qquad (10)$$
$$+ \int_y^x\int_y^{\xi_2} Q(\xi_1)(\xi_1 - y)d\xi_1 d\xi_2 \cdot \frac{d}{d\xi}\,\Theta f\,|_y + \ldots\ldots$$

für $|x-y| \leq d$ ist. Die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig für $|x-y| \leq d$.

Beweis: Wir gehen aus von der Identität

$$f(x) = f(y) + (x-y)f'(y) + \int_y^x\int_y^{\xi} f''(s)ds\,d\xi\,,$$

die wir in der Form

$$f(x) = f(y) + (x-y)f'(y) + \int_y^x\int_y^{\xi} Q(s)\cdot\Theta f\cdot ds\,d\xi$$

schreiben können. Indem man in dieser Gleichung $f(x)$ der Reihe nach durch $\Theta f, \Theta^2 f, \ldots\ldots$ ersetzt, erhält man eine Folge von Gleichungen der Form:

$$(n):\ \Theta^n f\,|_x = \Theta^n f\,|_y + (x-y)\frac{d}{d\xi}\,\Theta^n f\,|_y + \int_y^x\int_y^{\xi} Q(s)\cdot\Theta^{n+1} f\,|_s ds\,d\xi$$

$(n = 0, 1, \ldots)$. Ersetzen wir in der 0-ten Gleichung Θf durch die rechte Seite von Gleichung 1), im Resultat $\Theta^2 f$ durch die rechte Seite von Gleichung 2), usw., so gelangen wir nach dem n-ten Iterationsschritt zu einer Gleichung der Form:

$$f(x) = f(y) + (x-y)f'(y) + \int_y\int_y Q(\xi_1)d\xi_2 d\xi_2\cdot\Theta f\,|_y +$$
$$+ \int_y^x\int_y^{\xi_2} Q(\xi_1)(\xi_1 - y)d\xi_1 d\xi_2\cdot\frac{d}{d\xi}\,\Theta f\,|_y + \ldots\ldots$$
$$\ldots + \int_x^x\int_y^{\xi_{2n}} Q \ldots \int\int_y^{\xi_2} Q\,d\xi_1 \ldots d\xi_{2n}\cdot\Theta^n f\,|_y + \int\int_y^x Q \ldots \int\int_y^{\xi_2} Q(\xi_1 - y)d\xi_1 \ldots d\xi_{2n}\cdot\frac{d}{d\xi}\,\Theta^n f\,|_y$$
$$+ \int_y^x\int^{\xi_{2n+2}} Q \ldots\ldots \int_y\int^{\xi_2} Q\cdot\Theta^{n+1} f\,d\xi_1 \ldots\ldots d\xi_{2n}\,.$$

Aus Bedingung 2) folgt, daß der Grenzübergang $n \to \alpha$ erlaubt ist, woraus man die angekündigte Entwicklung erhält. Aus 2) folgt auch leicht die Existenz einer Zahl d, welche den Bedingungen des Satzes genügt. Wir bemerken, daß von diesem Satz auch die Umkehrung gilt.

Satz 29: $f(x)$ sei in $[a, b]$ definiert. Zu jedem Punkt y existiere ein $d(y) > 0$, so daß

$$f(x) = a_0(y) + a_1(y)(x-y) + \int_y^x \int^{\xi_2} Q(\xi_1) d\xi_1 d\xi_2 \cdot a_2(y) +$$

$$+ a_3(y) \int_y^x \int^{\xi_2} Q(\xi_1)(\xi_1 - y) d\xi_1 d\xi_2 \cdot \frac{d}{d\xi} Qf |_y + \dots .$$

gilt für $| x - y | \leqq d(y)$. Dann genügt $f(x)$ der Bedingung 2), und es ist

$$\Theta^n f |_y = a_{2n}(y) \qquad \frac{d}{d\xi} \Theta^n f |_y = a_{2n+1}(y) .$$

Der Beweis dieses Satzes erfordert nur Routineabschätzungen und soll deshalb weggelassen werden.

Die beiden Sätze 28 und 29 werden im nächsten, letzten Abschnitt Verwendung finden.

9. Ein Zusammenhang mit den pseudoanalytischen Funktionen

An dieser Stelle sei auf einen Zusammenhang hingewiesen, dessen detaillierte Erörterung hier der umständlichen Rechnungen wegen zu weit führen würde. Es handelt sich um die Beziehung, die zwischen der eben eingeführten Approximationsklasse und einer speziellen Klasse der von L. Bers ([5] pp. 67, [6]) eingeführten *pseudoanalytischen Funktionen* besteht. Um diesen Zusammenhang geeignet beschreiben zu können, wählen wir mit Vorteil die Darstellung von A. Kriszten ([7], p. 6). Man geht aus von einem System partieller Differentialgleichungen:

$$u_x = -\frac{1}{Q(y)} v_y \qquad u_y = v_x \quad .$$

Jeder Vektor $w = (u(x, y), v(x, y))$, dessen Komponenten diesen Gleichungen genügen, bezeichnet man als eine zu diesem System gehörige pseudoanalytische Funktion (Vektorfunktion). Man führt zwei Matrizen A und B ein, die wie folgt definiert sind:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -Q(y) & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

([7]). Man setzt: $dZ = Bdx + Ady$ und ordnet jeder pseudoanalytischen Funktion eine Σ-Ableitung zu,

$$(z = (x,y)) \quad \frac{d_\Sigma \omega}{d_\Sigma z} = \tfrac{1}{2}(B^{-1}\omega_x + A^{-1}\omega_y) = B^{-1}\omega_x = A^{-1}\omega_y$$

Die Σ-Ableitung ist richtungsunabhängig und führt (in unserem speziellen Fall) pseudoanalytische Funktionen wieder in solche über. Schließlich führt man eine Art formaler Potenzen ein;

$$Z^{(0)} = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad Z^{(n)}(x, y \mid x_0, y_0) = \int_{x_0,y_0}^{xy} dZ Z^{(n-1)} .$$

Diese Schreibweise ist gerechtfertigt, da in ([7]) gezeigt wird, daß die Integration vom Weg unabhängig ist. Ist $a^{(n)} = (\alpha_n, \beta_n)$ eine Folge von Vektoren, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ so kann man die formale Potenzreihe

$$\sum_0^\infty Z^{(n)}(x, y \mid x_0, y_0) a^{(n)}$$

betrachten. In ([5]) wird nun gezeigt: Konvergiert diese Reihe in einem Punkt $x, y \neq x_0, y_0,$ so konvergiert sie in einer ganzen Umgebung von x_0, y_0. Die dargestellte Vektorfunktion ist dann eine pseudoanalytische Funktion W, und es gilt:

$$a^{(n)} = \frac{d^n{}_\Sigma \omega}{(d_\Sigma z)^n} .$$

Dieser Formalismus läßt sich nun auf Funktionen anwenden, die den Bedingungen 1), 2) von Satz 2 genügen. $f(y)$ sei eine in $0 \leq y \leq \pi$ definierte Funktion, die 1) und 2) erfüllt. Man bilde die formale Reihe:

$$\sum_0^\infty Z^{(n)}(0, y \mid 0, y_0) a^{(n)} ,$$

wo

$$a^{(2n)} = (\Theta^n f \,|_{y_0}, 0) \quad a^{2n+1} = \left(\frac{d}{d\xi} \Theta^n f \,|_{y_0}, 0\right)$$

gesetzt wurde. Eine elementare Rechnung, die hier ihrer Länge wegen weggelassen werden soll, zeigt, daß das Resultat von der Form $(u, 0)$ ist, wobei

$$u(0, y) =$$

$$f_0 + (y - y_0) f \,|_{y_0} + \Theta f \,|_{y_0} \int_{y_0}^{y} \int_{y_0}^{\xi} Q(s) ds d\xi + \frac{d}{d\xi} \Theta f \,|_{y_0} \int_{y_0}^{y} \int_{y_0}^{\xi} Q(s)(s - y_0) ds d\xi$$

ist. Aus 31 folgt: $u(y, 0) = f(y)$. Wie oben erwähnt, folgt dann, daß es eine ganze Umgebung des Punktes $(0, y_0)$ gibt, in welcher die Reihe

$$\sum_0^\infty Z^{(n)}(x, y \mid 0, y_0) a^{(n)}$$

konvergiert und daß sie in dieser Umgebung eine pseudoanalytische Funktion darstellt. Daraus folgt, *daß diejenigen Funktionen f, die sich mit der Geschwindigkeit $A q^n, q < 1$ durch Linearkombinationen* STURM-LIOUVILLE*scher Eigenfunktionen approximieren lassen, als pseudoanalytische Funktionen aufgefaßt werden können, die eine Fortsetzung ins «Pseudokomplexe» gestatten*, womit man eine gewisse Analogie zum trigonometrischen Fall erzielt hat.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] HILBERT-COURANT: Methoden der mathematischen Physik, Bd. 1, Springer 1931.
[2] CARLSON E.: Extension of BERNSTEINS Theorem to STURM-LIOUVILLE Sums. Trans. Amer. Math. Soc. *26* (1924).
[3] NATANSON I. P.: Konstruktive Funktionentheorie. Akademie-Verlag, Berlin, 1955.
[4] ACHIESER N. I.: Vorlesungen über Approximationstheorie. Akademie-Verlag Berlin, 1953.
[5] BERS L. and GELBART A.: On a Class of Functions defined by partial differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. *56* (1944).
[6] BERS L.: Theory of pseudoanalytic Functions. New York University, 1953.
[7] KRISZTEN A.: Hyperkomplexe und pseudoanalytische Funktionen. Comment. Math. Helv. *26* (1952).
[8] BIEBERBACH L.: Theorie der Differentialgleichungen.

(Eingegangen, 22. August 1961)