Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 36 (1961-1962)

Artikel: Über die Integrierbarkeit von Systemen partieller, nichtlinearer Differentialgleichungen erster Ordnung.

Autor: Bächli, Guido

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515627

Über die Integrierbarkeit von Systemen partieller, nicht-linearer Differentialgleichungen erster Ordnung

von Guido Bächli

In den letzten Jahren wies Herr Professor Nevanlinna in Vorlesungen und Publikationen auf die Vorzüge der absoluten Infinitesimalrechnung hin und behandelte unter anderen auch Fragen aus der Theorie der Differentialgleichungen in dieser absoluten Betrachtungsweise. So wurden in [3], [4] die Normalsysteme untersucht und in [3], [5], [6] die linearen Systeme partieller Differentialgleichungen erster Ordnung, die als allgemeine lineare Differentialgleichungen $dy = A(x)\, y\, dx$ auftreten.

F. und R. Nevanlinna führten in [3] den Existenzbeweis für das Integral der linearen Differentialgleichung nach zwei verschiedenen Methoden durch. Die zweite Methode, angeregt durch eine Beweisidee von Goursat und eine verallgemeinerte Definition des Operators $R(x)$ benützend, fordert weniger Voraussetzungen, als früher bei der Behandlung dieser Frage benötigt wurden.

Anschließend wird dort die Frage aufgeworfen, ob auch die Integrabilität der allgemeinen Differentialgleichung $dy = f(x, y)\, dx$ nach der Goursatschen Methode und mit einer erweiterten Definition der Form $R(x, y)\, h\, k$ untersucht werden könne. Die vorliegende Arbeit bringt nun die Lösung dieses Problems unter den entsprechend schwachen Voraussetzungen wie im linearen Fall, die auch hier geringer sind als die früher benötigten. Zudem sind x und y als Elemente zweier Banach-Räume angenommen.

Integriert man die allgemeine Differentialgleichung längs eines orientierten Polygonzuges l, so bezeichnet $y = T_l(y_0)$ den Endwert des Integrals, der außer von l auch vom Anfangswert y_0 abhängt. Im speziellen Fall der linearen Differentialgleichung, in dem die T_l lineare, auf y_0 wirkende Operatoren sind, erwies es sich als nützlich, die wesentlichen Teile des Existenzbeweises mit Hilfe dieser Operatoren durchzuführen. Mit derselben linearen Operatorenmenge läßt sich dann auch, wie in [1] gezeigt wird, die Theorie der Parallelverschiebung auf einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in einfacher Art darstellen.

In der vorliegenden Arbeit treten die $T_l(y)$ noch selbständiger auf. Zunächst wird, ganz unabhängig von der Differentialgleichung, eine Operatorenmenge $\{T_l(y)\}$ definiert. Das Hauptproblem, das sich für diese $T_l(y)$ stellt, ist die Angabe hinreichender Bedingungen dafür, daß sie nicht vom Verlauf der

Wege l, sondern nur von ihren Anfangs- und Endpunkten abhängen. Wegen der Nichtlinearität der $T_l(y)$ fällt diese Untersuchung komplizierter aus als im linearen Fall.

Erst im zweiten Paragraphen folgt die Behandlung der Differentialgleichung $dy = f(x, y)\, dx$, in der die allgemein hergeleiteten Ergebnisse des ersten Paragraphen wesentlich verwendet werden.

§ I Die Operatoren T_l und U_l

1. Definitionen von T_l und U_l. R_x^m und R_y^n bezeichnen zwei lineare Räume von reeller Struktur, die mit einer BANACH-Metrik versehen sind. $m \leqq \infty$ und $n \leqq \infty$ sind die Dimensionen und x und y die Vektoren dieser beiden Räume.

Wir beschränken uns im folgenden auf die zwei abgeschlossenen Gebiete $G_x \subset R_x^m$ und $G_y \subset R_y^n$ und beschäftigen uns mit einer Menge von Abbildungen $\{T_l\}$ von G_y in sich. Die $T_l(y)$ sind also Vektoren in G_y und hängen von $y \in G_y$ und dem in G_x liegenden orientierten Polygonzug l ab (später meist als «Weg l» bezeichnet).

Für diese Menge $\{T_l(y)\}$ fordern wir die folgenden sechs Postulate.

1°. Sind l_1 und l_2 zwei aneinanderhängende Wege, etwa $l_1 = x_1 x_2$ (das soll bedeuten: l_1 beginnt in x_1 und endet in x_2), $l_2 = x_2 x_3$, und ihr Produktweg $l = l_2 l_1 = x_1 x_2 x_3$, gehören ferner $T_{l_1}(y)$ und $T_{l_2}(T_{l_1}(y)) \equiv T_{l_2} T_{l_1}(y)$ zur betrachteten Menge, dann gehört auch $T_l(y)$ dazu, und es ist $T_{l_2} T_{l_1}(y) = T_l(y)$.

Existiert umgekehrt eine Abbildung $T_l(y)$ für den Weg $l = x_1 x_3$, und hat man den Weg l durch einen beliebigen Punkt $x_2 \in l$ in zwei aneinanderhängende Wegstücke $l_1 = x_1 x_2$, $l_2 = x_2 x_3$ unterteilt, dann läßt sich $T_l(y)$ folgendermaßen mit zwei Abbildungen aus der Menge $\{T_l(y)\}$ ausdrücken:

$$T_l(y) = T_{l_2} T_{l_1}(y) .$$

2°. Wenn $T_l(y)$ ein Element der Menge $\{T_l(y)\}$ ist, dann ist auch $T_{l^{-1}}(y)$ ein solches, wobei l^{-1} den reziproken, umorientierten Weg zu l bezeichnet, und es besteht die Beziehung $T_{l^{-1}} T_l(y) = y$, oder $T_{l^{-1}} T_l = I$. Unter I verstehen wir die identische Transformation des Raumes R_y^n.

Diesen beiden gruppentheoretischen Eigenschaften folgen zwei metrische Forderungen, zu deren Formulierung wir den Operator $U_l = T_l - I$ einführen.

3°. Es gibt ein y_0 in G_y und eine positive Zahl N so, daß für alle $T_l(y_0)$, deren Wege l von endlicher Länge sind, die Ungleichung

$$| U_l(y_0) | = | T_l(y_0) - y_0 | \leqq N \cdot | l |$$

gilt.

4°. Falls für denselben Weg l (mit $|l| \leqq \sigma < \infty$) die beiden Abbildungen $U_l(y_1)$ und $U_l(y_2)$ existieren, so besteht die erweiterte LIPSCHITZ-Bedingung

$$| U_l(y_1) - U_l(y_2) | \leqq | y_1 - y_2 | \cdot | l | \cdot C .$$

Die Konstante C hängt von σ ab. Wir wollen annehmen, σ sei so groß gewählt, daß alle in dieser Arbeit vorkommenden endlichen Weglängen $|l|$ unter dieser Schranke liegen.

Zum Schluß folgen noch zwei Postulate, die über die Existenz der $T_l(y)$ genauere Angaben machen:

5°. Zu jedem (x, y) aus $G_x \times G_y$ gibt es mindestens eine positive Zahl $\varrho(x, y)$, so daß für alle in x beginnenden, durch ϱ beschränkten Polygonzüge l: $|l| \leqq \varrho(x, y)$ die Abbildungen $T_l(y)$ existieren.

Daraus folgert man sofort, daß es für einen Punkt (x, y) unendlich viele $\varrho(x, y)$ gibt, denn mindestens alle Zahlen, die kleiner als dieses eine $\varrho(x, y)$ sind, bilden ϱ-Zahlen.

Wir definieren $\alpha(x, y) = \sup \varrho(x, y)$ und fordern für diese Zahl:

6°. Für alle $(x_i, y_i) \in (G_x \times G_y)$ $(i = 1, 2)$ gilt

$$| \alpha(x_1, y_1) - \alpha(x_2, y_2) | \leqq \max \{ |x_1 - x_2|, |y_1 - y_2| \} .$$

Mit Hilfe des Postulates 4° läßt sich beweisen, daß die in 3° geforderte Ungleichung nicht nur für einen Punkt y_0 aus G_y, sondern für alle $y \in G_y$ besteht: Für ein beliebiges $y \in G_y$ ist

$$U_l(y) = U_l(y_0) + (U_l(y) - U_l(y_0)) ,$$
$$| U_l(y) | \leqq | U_l(y_0) | + | U_l(y) - U_l(y_0) |$$

und mit 3° und 4°:

$$| U_l(y) | \leqq N \cdot | l | + | y - y_0 | \cdot | l | \cdot C = | l | \cdot \{ N + | y - y_0 | \cdot C \} .$$

Ist η die Länge der größtmöglichen Strecke in G_y, ergibt die Einführung der Konstanten $M = N + \eta C$ die Verallgemeinerung von 3°:

$$| U_l(y) | \leqq M \cdot | l | . \tag{1.1}$$

2. Ein Satz über $U_\gamma = 0$. Wir wenden uns nun einem Satz zu, der eine hinreichende Bedingung dafür angibt, daß U_l (und damit auch T_l) nur vom Anfangs- und Endpunkt des Weges l, nicht aber vom übrigen Verlauf des Weges abhängt.

Zum Beweis dieses Satzes wählt man als Weg speziell den orientierten Rand γ eines Dreiecks s in G_x. Die orientierte Fläche Δ des Dreiecks $s(x_0, x_1, x_2)$ bestimmt man mit einer reellen, nicht ausgearteten alternierenden Grundform

D der von s aufgespannten Ebene E. Setzt man $h = x_1 - x_0$, $k = x_2 - x_0$, so ist $\Delta = D\,h\,k$. Die Fläche ist somit ganz unabhängig von der BANACH-Metrik.

Satz 1. *Für jeden Punkt $\bar{x} \in G_x$ und für jede Ebene E durch $\bar{x}$ sei bei regulärer Konvergenz*[1]) *des den Punkt $\bar{x}$ enthaltenden Dreiecks s in der Ebene E gegen $\bar{x}$*

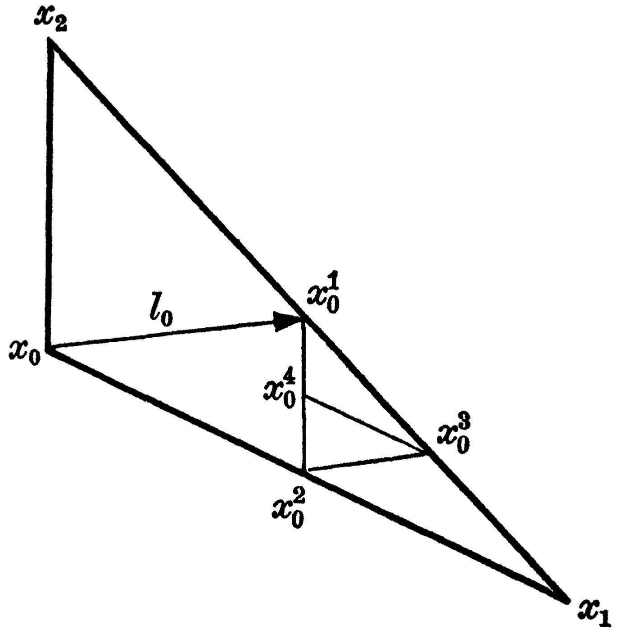
$$\lim_{s \to \bar{x}} \frac{U_\gamma}{\Delta} = 0, \tag{2.1}$$

wobei γ den orientierten Rand und Δ die Fläche des Dreiecks bezeichnen.

Unter diesen Voraussetzungen ist $U_\gamma(y_0) = 0$ für jedes y_0 aus G_y und für jedes Dreieck $s_0 = s_0(x_0, x_1, x_2)$ in G_x mit dem Rand $\gamma_0 = \partial s_0 = x_0\, x_1\, x_2\, x_0$, dessen größte Seitenlänge β beschränkt ist durch

$$\beta \leqq \frac{\alpha(x_0, y_0)}{3 + \mu}, \tag{2.2}$$

wo $\mu = max(1, 4M)$ bedeutet.



Beweis. Wir bezeichnen die Mitte der Dreiecksseite $x_1 x_2$ mit x_0^1. Dann unterteilt die Seitenhalbierende $l_0 = x_0 x_0^1$ das gegebene Dreieck s_0 in zwei Teildreiecke s_1 und s_1', deren Flächen gleich sind. Wir benennen diese Flächen Δ_1, und es gilt $\Delta = 2 \cdot \Delta_1$.

Die Ränder der beiden Teildreiecke werden durch $\gamma_1 = \partial s_1 = x_0^1 x_0\, x_1\, x_0^1$ und $\gamma_1' = \partial s_1' = x_0^1 x_2\, x_0\, x_0^1$ im gleichen Drehsinn orientiert und ihre Randlängen mit δ_1 und δ_1' bezeichnet.

Zur Vereinfachung benützen wir für U_{γ_1} die Schreibweise U_1, ebenso sind $U_{\gamma_1'} = U_1'$, $T_{\gamma_1} = T_1$, $T_{\gamma_1'} = T_1'$ und später entsprechend $U_{\gamma_i} = U_i$ usw.

Wir untersuchen die Beziehung

$$T_{\gamma_0}(y_0) = T_{l_0^{-1}}\, T_1'\, T_1\, T_{l_0}(y_0), \tag{2.3}$$

deren Existenz zuerst noch gezeigt werden muß.

---

[1]) Von einer regulären Konvergenz eines Dreiecks s spricht man dann, wenn der Ausdruck $|\partial s|^2 / \Delta$ unterhalb einer festen Grenze bleibt, wobei $|\partial s|$ die Länge des Dreiecksrandes bezeichnet. Geometrisch bedeutet dies, daß keiner der Dreieckswinkel beliebig stark verkleinert werden darf.

Die Weglänge $|l_0|$, die ja kleiner ist als β, ist nach der Voraussetzung (2.2.) kleiner als $\alpha(x_0, y_0)$. Daher existiert $T_{l_0}(y_0)$ und somit auch $T_{l_0^{-1}} T_{l_0}(y_0) = y_0$. Die daran anschließende Abbildung $T_{\bar{l}}(y_0)$ für $\bar{l} = x_0 x_1 x_2 x_0 x_0^1$ (diese Punkte bezeichnen die Anfangs-, Eck- und Endpunkte des Polygonzuges $\bar{l}$) besteht wegen $|\bar{l}| < 4\beta$ und, wie wieder aus (2.2) folgt, $4\beta \leqq \alpha(x_0, y_0)$. Die letzte Etappe längs l_0^{-1} läßt sich wiederum nach dem Postulat 2° durchführen.

Wir schreiben (2.3) in der Form

$$T_{\gamma_0}(y_0) = (I + U_{l_0^{-1}})(I + U_1')(I + U_1)(y_0 + U_{l_0}(y_0))$$

oder

$$T_{\gamma_0}(y_0) = (I + U_{l_0^{-1}})(I + U_1')(y_1 + U_1(y_1))$$

wo $y_1 = y_0 + U_{l_0}(y_0)$ gesetzt ist. Bezeichnet man

$$y_1' = y_1 + U_1(y_1), \quad y_1'' = y_1' + U_1'(y_1'),$$

so wird daraus

$$\begin{aligned} T_{\gamma_0}(y_0) &= (I + U_{l_0^{-1}})(y_1 + U_1(y_1) + U_1'(y_1')) \\ &= y_0 + U_{l_0}(y_0) + U_1(y_1) + U_1'(y_1') + U_{l_0^{-1}}(y_1'') \end{aligned}$$

oder

$$U_{\gamma_0}(y_0) = U_{l_0}(y_0) + U_1(y_1) + U_1'(y_1') + U_{l_0^{-1}}(y_1''). \tag{2.4}$$

Zur Abschätzung dieser Beziehung wollen wir nun schrittweise die y-Argumente vereinheitlichen. Dies geschieht mit Hilfe des Postulates 4°, das hier in der Form $U_l(\bar{y}) = U_l(y) + |\bar{y} - y| \cdot |l| \cdot \langle C \rangle$ verwendet wird, wobei $\langle C \rangle$ einen Vektor bezeichnet, dessen Absolutwert nicht größer ist als C. So erhält man aus den einzelnen Gliedern der rechten Seite von (2.4):

$$\begin{aligned} U_1'(y_1') &= U_1'(y_1) + |U_1(y_1)|\, \delta_1' \langle C \rangle, \\ U_{l_0^{-1}}(y_1'') &= U_{l_0^{-1}}(y_1') + |U_1'(y_1')| \cdot |l_0| \cdot \langle C \rangle \\ &= U_{l_0^{-1}}(y_1) + \{|U_1(y_1)| + |U_1'(y_1)|\} \cdot |l_0| \langle C \rangle + |U_1(y_1)| \cdot |l_0| \cdot \delta_1' \cdot C \langle C \rangle \end{aligned}$$

und zusammengefaßt, wenn man als Restglieder alle diejenigen bezeichnet, die den Vektor $\langle C \rangle$ enthalten:

$$U_{\gamma_0}(y_0) = U_{l_0}(y_0) + U_1(y_1) + U_1'(y_1) + U_{l_0^{-1}}(y_1) + \text{Restglieder.}$$

Hier fallen wegen

$$0 = T_{l_0^{-1}} T_{l_0}(y_0) - y_0 = (U_{l_0^{-1}} + I)(U_{l_0}(y_0) + y_0) - y_0 = U_{l_0^{-1}}(y_1) + U_{l_0}(y_0)$$

zwei Glieder weg, und so bleiben noch

$$U_{\gamma_0}(y_0) = U_1(y_1) + U_1'(y_1) + \text{Restglieder}.$$

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, $|U_1(y_1)|$ sei die größere der beiden Normen $|U_1(y_1)|$, $|U_1'(y_1)|$ und ebenso

$$\delta_1 = \max(\delta_1', \delta_1).$$

Dann ist

$$|U_{\gamma_0}(y_0)| \leqq 2\,|U_1(y_1)| + 3\,|U_1(y_1)|\,\delta_1 C + |U_1(y_1)|\,\delta_1^2 C^2$$

$$\leqq 2\,|U_1(y_1)| \cdot \left\{1 + \frac{3\delta_1 C}{2} + \frac{\left(\frac{3\delta_1 C}{2}\right)^2}{2!}\right\}.$$

Somit gilt

$$|U_{\gamma_0}(y_0)| \leqq 2\,|U_1(y_1)| \cdot e^{3\delta_1 C/2}$$

oder, weil $\varDelta = 2 \cdot \varDelta_1$ ist,

$$\frac{|U_{\gamma_0}(y_0)|}{\varDelta} \leqq \frac{|U_1(y_1)|}{\varDelta_1} \cdot e^{D\delta_1},$$

wo $\frac{3C}{2} = D$ gesetzt ist.

Im nächsten Schritt teilt man das Dreieck s_1 durch die Seitenhalbierende $l_1 = x_0^1 x_0^2$ in zwei Teildreiecke s_2 und s_2' mit den Flächen $\varDelta_2 = \varDelta_1/2$ und schätzt dann $U_1(y_1)$ genau gleich ab wie vorhin $U_{\gamma_0}(y_0)$. Der Nachweis, daß die dabei auftretenden Operatoren T existieren, folgt in Abschnitt 3. Als Ergebnis erhält man

$$\frac{|U_1(y_1)|}{\varDelta_1} \leqq \frac{|U_2(y_2)|}{\varDelta_2} e^{D\delta_2},$$

worin $y_2 = T_{l_1}(y_1) = T_{l_1 l_0}(y_0)$ bedeutet.

Dieses Verfahren läßt sich unbeschränkt wiederholen an der Folge der ineinandergeschachtelten Dreiecke $s_0 \supset s_1 \supset s_2 \supset \cdots \supset s_n \cdots$. Man gelangt so mit

$$y_n = T_{l_{n-1}}(y_{n-1}) = T_{l_{n-1} l_{n-2} \cdots l_1 l_0}(y_0)$$

zur Ungleichung

$$\frac{|U_{\gamma_0}(y_0)|}{\varDelta} \leqq \frac{|U_n(y_n)|}{\varDelta_n} e^{(\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n) D}.$$

Zur Abschätzung des Exponenten untersuchen wir die Folge $\delta_0 = |\gamma_0|$, δ_1, δ_2, $\delta_3, \ldots$ Da beim Dreieck s_1 mindestens eine Seite, bei s_2 mindestens zwei

Seiten und bei s_3 alle drei Seiten nicht größer als die Hälfte der größten Seite von s_0 sind, gilt

$$3\beta \geqq \delta_0 > \delta_1 > \delta_2 \text{ und}$$

$$\frac{3\beta}{2} \geqq \delta_3 > \delta_4 > \delta_5 , \quad \frac{3\beta}{2^2} \geqq \delta_6 > \delta_7 > \delta_8 , \text{ --- --- --- } .$$

Folglich ist

$$\sum_1^n \delta_i \leqq \sum_1^\infty \delta_i \leqq 3\cdot\sum_{i=0}^\infty \delta_{3i} \leqq 3\sum_{i=0}^\infty \frac{3\beta}{2^i} = 18\beta$$

und

$$\frac{|U_{\gamma_0}(y_0)|}{\Delta} \leqq \frac{|U_n(y_n)|}{\Delta} e^{18\beta D} .$$

Da für unbegrenzt wachsendes n die größte Seite von s_n gegen Null strebt, existiert ein wohlbestimmter Grenzpunkt $\bar{x} \in s_n$, gegen welchen die Dreiecksfolge $s_0 \supset s_1 \supset s_2 \supset \ldots$ regulär konvergiert. Der Grenzwert der rechten Seite der obenstehenden Ungleichung ist nach der Voraussetzung (2.1) Null, und daher ist

$$\frac{|U_{\gamma_0}(y_0)|}{\Delta} = 0 \text{ und } \quad U_{\gamma_0}(y_0) = 0$$

bewiesen.

3. Um die Existenz derjenigen Operatoren T nachweisen zu können, die in den Beweisen an den ineinandergeschachtelten Dreiecken s_n vorkommen, muß zuerst das Verhalten der Größen $|\, l_n \,|$ und $|\, y_0 - y_n \,|$ bei wachsendem n untersucht werden.

Errichtet man im Dreieck s_n von x_0^n aus die Seitenhalbierende l_n und daran anschließend die Seitenhalbierende l_{n+1}, so erkennt man, daß l_{n+1} halb so lang ist wie die zu l_{n+1} parallele Seite von s_n. Mit der bei der Abschätzung der δ_n gemachten Bemerkung über die Halbierung der Dreiecksseiten folgert man

$$|\, l_0 \,| \leqq \beta, \ \max(|l_1|, |l_2|, |l_3|) \leqq \frac{\beta}{2} , \ \max(|l_4|, |l_5|, |l_6|) \leqq \frac{\beta}{4} ,$$

$$\max \quad (|l_7|, |l_8|, |l_9|) \leqq \frac{\beta}{8} , \text{ usw.}$$

Weiter ist

$$\sum_0^{n-1} |\, l_i \,| \leqq \sum_0^\infty |\, l_i \,| \leqq \beta + 3\sum_{i=1}^\infty \frac{\beta}{2^i} = 4\beta .$$

Die Addition der n Gleichungen

$$y_1 - y_0 = T_{l_0}(y_0) - y_0 = U_{l_0}(y_0)$$
$$y_2 - y_1 = T_{l_1}(y_1) - y_1 = U_{l_1}(y_1)$$
$$- \quad - \quad - \quad - \quad - \quad -$$
$$y_n - y_{n-1} = U_{l_{n-1}}(y_{n-1})$$

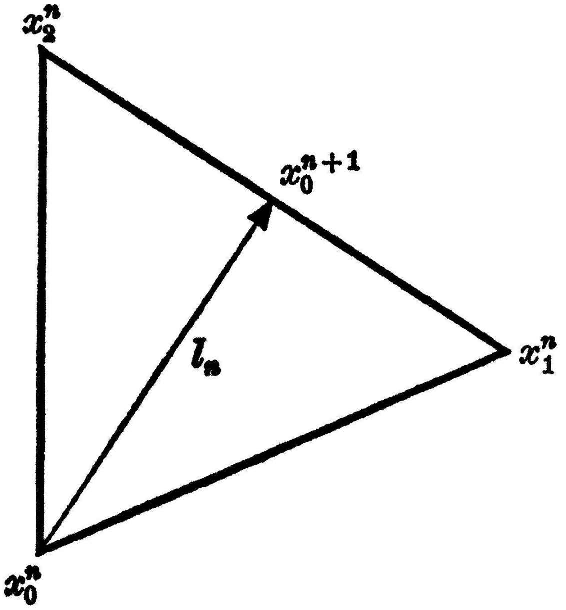
ergibt

$$| y_n - y_0 | \leqq \sum_0^{n-1} | U_{l_i}(y_i) |$$

und mit (1.1)

$$| y_n - y_0 | \leqq \sum_0^{n-1} M \cdot | l_i | \leqq 4 \, M \beta \, .$$

Wir wenden uns nun denjenigen Operatoren zu, die zur Abschätzung von $U_n(y_n)$ für $n \geqq 1$ gebraucht werden. Von x_0^n aus wird längs der Seitenhalbierenden l_n die Abbildung $T_{l_n}(y_n)$ gebildet, dann kehrt man längs l_n^{-1} zurück (diese zweite Abbildung existiert nach 2°, sobald $T_{l_n}(y_n)$ besteht). Von hier aus, nach 2° wieder mit y_n beginnend, gleitet man längs des gesamten Randes von s_n und anschließend längs l_n nach x_0^{n+1}:



$$T_{\bar{l}_n}(y_n) \qquad (\bar{l}_n = x_0^n x_1^n x_2^n x_0^n x_0^{n+1}) \, .$$

Der letzte Teil besteht im Zurückkehren längs $\bar{l}_n^{-1}$.

Zu beweisen ist also die Existenz von $T_{l_n}(y_n)$ und $T_{\bar{l}_n}(y_n)$.

Da die beiden Wege l_n, $\bar{l}_n$ in x_0^n beginnen, und da beide Male y_n abgebildet wird, ist hier $\alpha(x_0^n, y_n)$ entscheidend für den Existenzbeweis.

Nach 6° ist $\alpha(x_0^n, y_n) \geqq \alpha(x_0, y_0) - \max \{ |x_0^n - x_0| , | y_n - y_0 |\}$. Das erste Glied der rechten Seite ist nach der Voraussetzung (2.2) nicht kleiner als $(3 + \mu)\beta$. Das letzte Glied kann man wegen $|x_0^n - x_0| \leqq \beta$, $| y_n - y_0 | \leqq 4 \, M \beta$ durch $\beta \cdot \mu = \beta \cdot [\max \, (1, 4 \, M)]$ ersetzen. Daher ist $\alpha(x_0^n, y_n) \geqq (3 + \mu)\beta - \mu \beta$ und schließlich $\alpha(x_0^n, y_n) \geqq 3 \beta$.

Da keiner der beiden betrachteten Wege l_n und $\bar{l}_n$ für $n \geqq 1$ länger als 3β ist, existieren $T_{l_n}(y_n)$ und $T_{\bar{l}_n}(y_n)$ sicher.

§ II Die allgemeine Differentialgleichung erster Ordnung

4. Die Differentialgleichung. R_x^m und R_y^n sind wiederum zwei lineare Räume über reellem Multiplikatorenbereich mit den Dimensionen $m \leqq \infty$ und $n \leqq \infty$, die eine vollständige Banach-Metrik besitzen. Der lineare Operator $f(x, y)$, der für ein gewisses abgeschlossenes Gebiet $G_x \times G_y$ des Produktraumes $R_x^m \times R_y^n$ definiert sei, bilde die Vektoren des Raumes R_x^m in den Raum R_y^n ab.

Wir beschäftigen uns nun mit der Differentialgleichung

$$dy = f(x, y)\, dx, \tag{4.1}$$

in der $y = y(x)$ die zu bestimmende Vektorfunktion ist und untersuchen, unter welchen Bedingungen die Differentialgleichung vollständig integrierbar ist. (Man nennt die Differentialgleichung in $G_x \times G_y$ vollständig integrierbar, wenn für jeden Punkt (x_0, y_0) aus diesem Gebiet eine Lösung $y = y(x)$ der Differentialgleichung in einer Umgebung von x_0 existiert, die den Anfangswert $y(x_0) = y_0$ annimmt.)

Falls R_x^m und R_y^n endlichdimensionale Räume der Dimensionen m und n sind, ergibt sich nach Einführung von zwei Basissystemen und den Koordinaten ξ^k, η^i ein zu (4.1) äquivalentes System

$$\frac{\partial \eta^i}{\partial \xi^k} = f_k^i(\xi^1, \ldots \xi^m, \eta^1, \ldots, \eta^n) \qquad \begin{array}{l} i = 1, \ldots, n, \\ k = 1, \ldots, m, \end{array}$$

also ein System von $n \cdot m$ partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung mit den n unbekannten Funktionen

$$\eta^i = \eta^i(\xi^1, \ldots, \xi^m).$$

5. Voraussetzungen und Integration der Normalsysteme. Für die Differentialgleichung $dy = f(x, y)\, dx$ sollen die folgenden Voraussetzungen gelten:

A. *Die Operatorfunktion* $f(x, y)$ *ist stetig für* $x \in G_x, y \in G_y$ *und so beschränkt, daß* $| f(x, y) | \leqq 1$.

B. *Die* Lipschitz-*Bedingung*

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \leqq | y_1 - y_2 | \cdot K$$

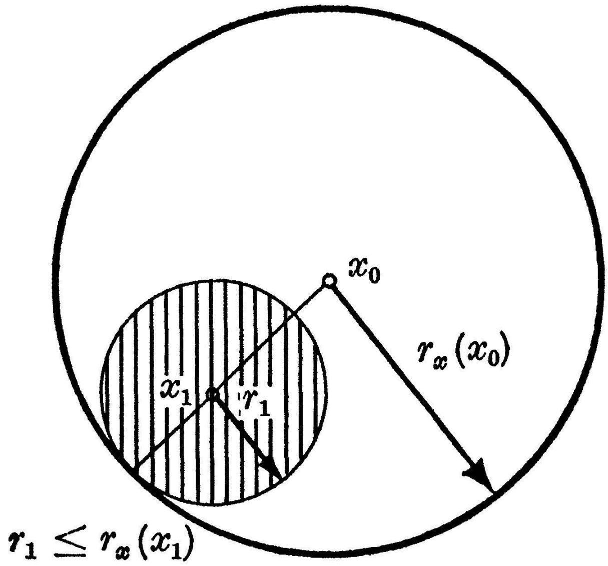
($K =$ *const.*) *ist erfüllt für* $y_i \in G_y$ $(i = 1, 2)$ *und* $x \in G_x$.

Die Wahl der Beschränktheitskonstante 1 bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit. Wäre nämlich $f(x, y)$ durch M beschränkt, $| f(x, y) | \leqq M$, könnte man in R_y^n eine neue Metrik einführen, durch Division aller nach der ursprünglichen Metrik gemessenen Längen durch M und erhielte so $|f(x, y)| \leqq 1$. Die Voraussetzung B bliebe bei der Einführung dieser neuen Metrik bestehen ohne Änderung der Konstanten K.

Diese Voraussetzungen sind hinreichend dafür, daß unsere Differentialgleichung längs einer Strecke $t = x_0 + \tau(x_1 - x_0)$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$ als Normalsystem $dy = f(t, y(t))\, dt$ mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ integrierbar ist, falls x_1 die Ungleichung $|x_1 - x_0| \leqq \alpha(x_0, y_0)$ erfüllt und x_0, y_0 innere Punkte von G_x, G_y sind[2]). Die positive reelle Zahl $\alpha(x_0, y_0)$ bestimmt man, wie in der Theorie der Normalsysteme gezeigt wird, auf folgende Weise: In G_y legt man eine möglichst große Kugel um den Anfangswert y_0, $|y - y_0| \leqq r_y(y_0)$ $(y \in G_y)$. Ebenso wählt man um x_0 eine maximale Kugel in G_x, $|x - x_0| \leqq r_x(x_0)$ und definiert

$$\alpha(x_0, y_0) = \min\{r_x(x_0), r_y(y_0)\}. \tag{5.1}$$

Für den Lösungsvektor $y(x)$ gilt dann $|y(x) - y_0| \leqq r_y(y_0)$.



Wir beschäftigen uns nun mit der Frage, wie sich die Zahl α bei einer Änderung der Anfangswerte verhält und wählen dazu ein neues Paar x_1, y_1 mit der vorläufigen Einschränkung

$$\begin{aligned} |x_1 - x_0| &\leqq r_x(x_0) \\ |y_1 - y_0| &\leqq r_y(y_0). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Der Figur entnimmt man

$$r_x(x_1) \geqq r_x(x_0) - |x_0 - x_1|$$

und ebenso

$$r_y(y_1) \geqq r_y(y_0) - |y_0 - y_1|.$$

Daraus folgt nach der Definition (5.1) von $\alpha(x_1, y_1)$

$$\begin{aligned} \alpha(x_1, y_1) &\geqq \min\{r_x(x_0) - |x_0 - x_1|, r_y(y_0) - |y_0 - y_1|\} \\ &\geqq \min\{\alpha(x_0, y_0) - |x_0 - x_1|, \alpha(x_0, y_0) - |y_0 - y_1|\}, \end{aligned}$$

daher ist

$$\alpha(x_1, y_1) \geqq \alpha(x_0, y_0) - \max\{|x_0 - x_1|, |y_0 - y_1|\}. \tag{5.3}$$

---

[2]) Die Methoden, die in [3] bei der Behandlung der Normalsysteme angewandt wurden, lassen sich unverändert auf den Fall übertragen, wo R_y ein vollständiger BANACH-Raum ist. Unter dieser allgemeinen Voraussetzung wird die Normalgleichung in [2], Seiten 13/14, untersucht.

Diese Ungleichung ist auch richtig, wenn die Bedingungen (5.2) nicht erfüllt sind, weil in diesem Fall die rechte Seite von (5.3) einen negativen, die linke nach Definition einen positiven Wert darstellt. Wir lassen daher die Einschränkung (5.2) fallen.

Neben

$$\alpha(x_0, y_0) - \alpha(x_1, y_1) \leqq \max\{|x_0 - x_1|, |y_0 - y_1|\}$$

muß nach denselben Überlegungen auch

$$\alpha(x_1, y_1) - \alpha(x_0, y_0) \leqq \max\{|x_0 - x_1|, |y_0 - y_1|\}$$

gelten, woraus

$$|\alpha(x_0, y_0) - \alpha(x_1, y_1)| \leqq \max\{|x_0 - x_1|, |y_0 - y_1|\} \tag{5.4}$$

folgt.

Unsere Differentialgleichung kann längs jedem von x_0 ausgehenden Polygonzuge l als Normalsystem mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ integriert werden, wenn $|l| \leqq \alpha(x_0, y_0)$. Um dies zu zeigen, zerlegt man l in seine Teilstrecken $l = l_k \ldots l_2 l_1 l_0$ und führt den Beweis mit vollständiger Induktion:

Zunächst ist die Integration längs $l_0 = x_0 x_1$ möglich, da ja

$$|l_0| < |l| \leqq \alpha(x_0, y_0) \text{ ist.}$$

Wir nehmen nun an, die Integration sei längs $l_{i-1} \ldots l_1 l_0$ $(1 \leqq i \leqq k)$ durchführbar und behaupten, daß sie es auch längs der anschließenden Strecke l_i sei. l_i beginne in x_i, und es sei $y(x_i) = y_i$. Man setzt die Beziehungen

$$|x_i - x_0| \leqq \sum_{j=0}^{i-1} |l_j|, \quad |y_i - y_0| = \left|\int_{l_{i-1}\ldots l_1 l_0} f(x, y)\, dx\right| \leqq \sum_0^{i-1} |l_j|$$

in

$$\alpha(x_i, y_i) \geqq \alpha(x_0, y_0) - \max\{|x_i - x_0|, |y_i - y_0|\}$$

ein:

$$\alpha(x_i, y_i) \geqq \alpha(x_0, y_0) - \sum_0^{i-1} |l_j|. \tag{5.5}$$

Die Integration längs l_i ist möglich, wenn $|l_i| \leqq \alpha(x_i, y_i)$, also nach (5.5) sicher dann, wenn

$$\alpha(x_0, y_0) - \sum_0^{i-1} |l_j| \geqq |l_i| \quad \text{oder} \quad \alpha(x_0, y_0) \geqq \sum_0^{i} |l_j|.$$

Diese letzte Ungleichung jedoch ist wegen $\alpha(x_0, y_0) \geqq |l|$ erfüllt.

6. Eindeutigkeit der Lösung. Falls die Differentialgleichung (4.1) überhaupt eine Lösung $y(x)$ mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ besitzt, so ist sie eindeutig. Verbindet man nämlich einen beliebigen Punkt x_1 aus G_x mit x_0 durch die Strecke $t = x_1 + \tau(x_0 - x_1)$ $(0 \leqq \tau \leqq 1)$, so geht die Differentialgleichung auf dieser Strecke in eine Normalgleichung $dy = f(t, y)\,dt$ über, deren Lösung unter den voranstehenden Voraussetzungen bekanntlich eindeutig ist. Es gibt daher nur einen Vektor $y(x_1)$, von dem aus man nach Integration längs der erwähnten Strecke in x_0 den vorgeschriebenen Anfangsvektor y_0 erreicht.

7. Die Operatoren T_l und U_l. Nun soll der Zusammenhang zwischen der vorgelegten Differentialgleichung und den im ersten Paragraphen betrachteten Operatoren T_l und U_l hergestellt werden.

l sei ein von x_0 nach x_1 führender, orientierter Polygonzug im Gebiet G_x. Längs l geht die Differentialgleichung in eine Normalgleichung über. Integriert man diese, so stelle $y_0 = y(x_0)$ den Anfangswert und $y_1 = y(x_1)$ den Endwert dar. Der Endwert y_1 wird, als Funktion des Anfangswertes y_0, als $T_l(y_0)$ definiert:

$$y_1 = y_0 + \int_l dy(x) = y_0 + \int_l f(x, y)\,dx = T_l(y_0)\,.$$

Weiter bezeichnet

$$U_l(y_0) = T_l(y_0) - y_0 = \int_l dy$$

den Zuwachs der Lösung $y(x)$ längs des Weges l.

Die soeben festgelegten Operatoren U_l und T_l erfüllen die im ersten Abschnitt aufgestellten Postulate 1° bis 6°. 1° und 2° folgen aus der Eindeutigkeit der Lösung $y(x)$ des Normalsystems.

3° ist erfüllt wegen der Beschränktheit des Operators $f(x, y)$:

$$|\,U_l(y)\,| = |\int_l f(x, y)\,dx\,| \leqq \int_l |\,dx\,| = |\,l\,|\,,$$

womit gleich die allgemeinere Form (1.1) mit $M = 1$ hergeleitet ist.

Um die Gültigkeit von 4° zu zeigen, betrachten wir die Ungleichung

$$|\,U_l(y_1) - U_l(\overline{y_1})\,| \leqq \int_l |\,f(x, T_{l_x}(y_1)) - f(x, T_{l_x}(\overline{y_1}))\,|\;|\,dx\,|\,,$$

in der l_x dasjenige Teilstück des Weges l bezeichnet, das vom Anfang von l bis zum beliebigen Punkt x auf l führt. Mit der LIPSCHITZ-Bedingung wird daraus

$$|\,U_l(y_1) - U_l(\overline{y_1})\,| \leqq \int_l K\,|\,T_{l_x}(y_1) - T_{l_x}(\overline{y_1})\,|\;|\,dx\,|\,.$$

Beim nächsten Schritt brauchen wir eine Ungleichung aus der Theorie der Normalsysteme, die eine Aussage macht über die Abhängigkeit der Lösung eines Normalsystems von der Wahl des Anfangswertes, nämlich[3])

$$| T_l(y) - T_l(\overline{y}) | \leqq | y - \overline{y} | \, e^{N \cdot |l|} \, , \quad (N = \text{const.}).$$

Mit ihr erhalten wir

$$| U_l(y_1) - U_l(\overline{y_1}) | \leqq \int_l K \, | y_1 - \overline{y_1} | \, e^{N |l_x|} \, | dx | \, .$$

Hier führt man die Konstante $C = K e^{N\sigma}$ ein, wobei σ die in Abschnitt 1 beim Postulat 4° erwähnte Zahl bezeichnet:

$$| U_l(y_1) - U_l(\overline{y_1}) | \leqq | y_1 - \overline{y_1} | \; | l | \, C \, ,$$

womit die Gültigkeit von 4° erwiesen ist.

Wie in Abschnitt 5 gezeigt wurde, sind auch die Postulate 5° und 6° erfüllt, wobei das durch (5.1) definierte α genau dem α aus dem ersten Paragraphen und (5.4) dem Postulat 6° entsprechen.

8. Die Integrabilitätsbedingung $U_\gamma = 0$. Nach diesen vorbereitenden Abschnitten wenden wir uns der Frage der Lösbarkeit unserer Differentialgleichung zu und beweisen zuerst den

Satz 2. *Wenn der Operator $f(x, y)$ die Voraussetzungen* A *und* B *des Abschnitts* 5 *erfüllt und ein beliebiger innerer Punkt* (x_0, y_0) *aus* $G_x \times G_y$ *als Anfangswert fixiert ist, so ist die für jeden Dreiecksweg* $\gamma = x_0 x_1 x_2 x_0$ *mit* $| x_i - x_0 | \leqq \alpha(x_0, y_0)$ $(i = 1, 2)$ *geltende Bestimmung*

$$U_\gamma(y_0) = 0 \tag{8.1}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß die Differentialgleichung (4.1) *in der Kugel* $| x - x_0 | \leqq \alpha(x_0, y_0)$ *eine Lösung* $y(x)$ *besitzt mit* $y(x_0) = y_0$ *und* $| y(x) - y_0 | \leqq r_y(y_0)$.

Wir nehmen nun an, die Differentialgleichung $dy = f(x, y) dx$ sei vollständig integrierbar und beweisen die *Notwendigkeit* der Bedingung. Integriert man, mit dem Anfangswert $y(x_0) = y_0$ beginnend, längs $\gamma = x_0 x_1 x_2 x_0$, ist wegen der Eindeutigkeit der Lösung $T_\gamma(y_0) = y_0$ und daher $0 = T_\gamma(y_0) - y_0 = U_\gamma(y_0)$.

Die Bedingung $U_\gamma(y_0) = 0$ ist aber auch *hinreichend*: Für jedes x aus der Kugel $K_x : | x - x_0 | \leqq \alpha(x_0, y_0)$ läßt sich eindeutig ein $\overline{y}(x)$ bestimmen,

---

[3]) Vergleiche [2], S. 15.

indem man längs der Strecke $x_0 x$ die Differentialgleichung – in diesem Fall ein Normalsystem $dy = f(t, y(t))\, dt$ $(t = x_0 + \tau(x - x_0),\ 0 \leqq \tau \leqq 1)$ – integriert. Man erhält $\overline{y}(x) = T_{x_0 x}(y_0)$, und dies muß die Lösung der Differentialgleichung sein, falls eine solche überhaupt existiert.

Es ist daher noch zu beweisen, daß die Differentialgleichung $dy = f(x, y)\, dx$ durch $\overline{y}(x)$ wirklich befriedigt wird. Wir wählen dazu zwei beliebige Punkte x und $x + h$ aus K_x und berechnen den Ausdruck $\Delta\overline{y} = \overline{y}(x + h) - \overline{y}(x)$. Aus der Definition von $\overline{y}(x)$ folgt sofort $\overline{y}(x + h) = T_{xx_0(x+h)}(\overline{y}(x))$ und somit $\Delta\overline{y} = T_{xx_0(x+h)}(\overline{y}(x)) - \overline{y}(x) = U_{xx_0(x+h)}(\overline{y}(x))$.

Nach der Integrabilitätsbedingung ist aber $U_{xx_0(x+h)}(\overline{y}(x)) = U_{x(x+h)}(\overline{y}(x))$, woraus sich die Beziehungen

$$\Delta\overline{y} = U_{x(x+h)}(\overline{y}(x)) = \int_{x(x+h)} f(t, \overline{y}(t))\, dt$$

und, wegen der Stetigkeit von $f(t, \overline{y}(t))$ für $t = x$,

$$\Delta\overline{y} = f(x, \overline{y}(x))\, h + |\, h\, |\, (h; x)$$

mit $|\,(h; x)\,| \to 0$ für $|\, h\, | \to 0$ ergeben, w.z.b.w.

9. Eine weitere Integrabilitätsbedingung. Satz 1 erlaubt uns, die soeben aufgestellte Integrabilitätsbedingung durch eine andere zu ersetzen, die sich nur auf das lokale Verhalten des Operators $f(x, y)$ bezieht:

Satz 3. *Falls der Operator $f(x, y)$ die Voraussetzungen* A *und* B *des Abschnitts* 5 *erfüllt, so ist es für die vollständige Integrabilität der Differentialgleichung $dy = f(x, y)\, dx$ notwendig und hinreichend, daß für jedes $\overline{x} \in G_x$ und für jede feste Ebene E durch $\overline{x}$ bei regulärer Konvergenz des Dreiecks s (mit der Fläche Δ und dem Rand $\gamma = \partial s$) in E gegen $\overline{x} \in s$ der Grenzwert von $\dfrac{U_\gamma}{\Delta}$ Null beträgt,*

$$\lim_{s \to \overline{x}} \frac{U_\gamma}{\Delta} = 0 . \tag{9.1}$$

Sind x_0 und $y(x_0) = y_0$ die innerhalb G_x und G_y beliebig gewählten Anfangswerte, so existiert für jedes x aus

$$|\, x - x_0\, | \leqq \frac{\alpha(x_0, y_0)}{14} \tag{9.2}$$

eine Lösung $y = y(x)$ mit $|\, y(x) - y_0\, | \leqq r_y(y_0)$.

Die Bedingung (9.1) ist sicher notwendig, wie man sofort aus der notwendigen Bedingung (8.1) schließt.

Umgekehrt wissen wir nach Satz 1 auch, daß (9.1) hinreichend ist, da ja daraus die hinreichende Bedingung (8.1) folgt.

(9.2) ergibt sich folgendermaßen: Aus Satz 1 und der Beziehung $M = 1$ folgt, daß die längste Dreiecksseite β von $s(x_0, x_1, x_2)$ der Ungleichung $\beta \leqq \alpha(x_0, y_0) / 7$ genügen muß. Dies ist sicher für jedes Dreieck in der Kugel mit dem Durchmesser $\alpha(x_0, y_0) / 7$ erfüllt.

10. Der Operator R. Der Operator $f(x, y)$ erfülle zusätzlich zu den Voraussetzungen A und B noch die *weitere Voraussetzung*

C. *$f(x, y)$ ist differenzierbar für $x = x_o, y = y_o$.*

Wir werden nun eine neue Darstellung von $U_\gamma(y)$ herleiten und betrachten dazu das x_0 enthaltende Dreieck $s = s(x_1, x_2, x_3)$ mit der größten Seitenlänge β, dem Rand $\partial s = \gamma = x_1 x_2 x_3 x_1$ und $h = x_2 - x_1$, $k = x_3 - x_1$.

Nach Definition ist

$$U_\gamma(y_0) = \int_\gamma f(x, y)\, dx .$$

Hier setzt man

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + \varphi(x)\,(\varphi(x))$$

mit $[\varphi(x)]^2 = |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2$ und $|(\varphi(x))| \to 0$ für $\varphi \to 0$ ein:

$$U_\gamma(y_0) = \int_\gamma f(x_0, y_0) dx + \int_\gamma f_x(x_0, y_0)(x - x_0)\, dx + \int_\gamma f_y(x_0, y_0)(y - y_0)\, dx + \int_\gamma \varphi(\varphi)\, dx . \tag{10.1}$$

Das erste Integral der rechten Seite ist gleich Null, die übrigen werden nun einzeln weiter umgeformt und die Resultate in (10.3) zusammengetragen.

Nach der Differentialformel von STOKES ist das zweite Integral

$$\int_\gamma f_x(x_0, y_0)(x - x_0)\, dx = \tfrac{1}{2}\{f_x(x_0, y_0)\, hk - f_x(x_0, y_0)\, kh\} = \wedge\, f_x(x_0, y_0)\, hk .$$

Im dritten Integral von (10.1) formt man zuerst den Ausdruck $(y(x) - y_0)$ um. In

$$y(x) - y_0 = \int_{l(x)} f(t, y(t))\, dt$$

wird längs $l(x)$, des positiv orientierten Teilweges $x_1 x$ von γ, integriert. Unter Berücksichtigung der Differenzierbarkeit von $f(x, y)$ im Punkt (x_0, y_0) wird daraus

$$|y(x) - y_0| \leqq |\int\limits_{l(x)} f(x_0, y_0)\, dt| + \int\limits_{l(x)} |f_x(x_0, y_0)|\, |t - x_0|\, |dt|$$
$$+ \int\limits_{l(x)} |f_y(x_0, y_0)|\, |y(t) - y_0|\, |dt| + \int\limits_{l(x)} \varphi(t)\, |(\varphi(t))|\, |dt|\,.$$

Beachtet man, daß $|f(x, y)| \leqq 1$ ist, und ersetzt man im zweitletzten Summanden den Ausdruck $|y(t) - y_0|$ nochmals durch ein Integral, dessen Integrationsweg von x_1 längs γ bis zu t verläuft, nämlich durch

$$|y(t) - y_0| = |\int\limits_{l(t)} f(u, y(u))\, du| \leqq \int\limits_{l(t)} |du| \leqq 3\beta\,,$$

so erhält man

$$|y(x) - y_0| \leqq |f(x_0, y_0)(x - x_0)| + |f_x(x_0, y_0)| \cdot 3\beta^2$$
$$+ |f_y(x_0, y_0)| \cdot 9\beta^2 + \int\limits_{l(x)} \varphi(t)\, |(\varphi(t))|\, |dt|\,. \qquad (10.2)$$

Das letzte Glied dieser Ungleichung ist wegen

$$[\varphi(t)]^2 = |t - x_0|^2 + |y(t) - y_0|^2 \leqq \beta^2 + 9\beta^2, \quad \varphi(t) \leqq \beta \cdot \sqrt{10}$$

von der Form $\beta^2(\beta)$, und man folgert daher aus (10.2), daß

$$y(x) - y_0 = f(x_0, y_0)(x - x_0) + \beta(\beta)\,.$$

Dieses Ergebnis setzt man in das dritte Integral von (10.1) ein:

$$\int\limits_{\gamma} f_y(x_0, y_0)(y - y_0)\, dx = \int\limits_{\gamma} f_y(x_0, y_0) f(x_0, y_0)(x - x_0)\, dx + \int\limits_{\gamma} f_y(x_0, y_0)\beta(\beta)\, dx\,,$$

und erhält daraus nach der STOKESschen Differentialformel[4])

$$\int\limits_{\gamma} f_y(x_0, y_0)(y - y_0)\, dx = \wedge\, \{f_y(x_0, y_0) f(x_0, y_0)\, hk\} + \beta^2(\beta)\,.$$

Das letzte Integral von (10.1) endlich ist von der Form $\beta^2(\beta)$.

Alle soeben hergeleiteten Teilergebnisse führen, in (10.1) eingesetzt, zur Beziehung

$$U_\gamma(y_0) = R(x_0, y_0)\, hk + \beta^2(\beta)\,, \qquad (10.3)$$

wobei

$$R(x_0, y_0)hk = \wedge\, \{f_x(x_0, y_0)hk + f_y(x_0, y_0) f(x_0, y_0)\, hk\} \qquad (10.4)$$

gesetzt ist.

Die Untersuchungen in diesem Abschnitt haben also folgendes Ergebnis erbracht:

Satz 4. *Der Operator $f(x, y)$ sei für das Gebiet $G_x \times G_y$ stetig, erfülle die* LIPSCHITZ-*Bedingung* B *und sei für $(x_0, y_0) \in G_x \times G_y$ differenzierbar.*

---

[4]) Vergleiche [3], S. 122.

Wird dann ein den Punkt x_0 enthaltendes und ganz in G_x liegendes Dreieck mit den Ecken x_1, $x_2 = x_1 + h$, $x_3 = x_1 + k$ aufgespannt, dessen größte Seitenlänge β ist, so besteht die Beziehung

$$U_\gamma(y_0) = R(x_0, y_0)\, hk + \beta^2(\beta)$$

mit

$$R(x_0, y_0)\, hk = \wedge\, \{f_x(x_0, y_0)\, hk + f_y(x_0, y_0)\, f(x_0, y_0)\, hk\}\,.$$

Dabei bezeichnet (β) einen Vektor des Raumes R_y^n, dessen Norm für $\beta \to 0$ gegen Null konvergiert, γ ist der Dreiecksrand, dessen Umlaufssinn durch die Eckpunktfolge $x_1 x_2 x_3 x_1$ bestimmt ist, und y_0 ist der Anfangswert, den die Vektorfunktion $y(x)$ für $x = x_0$ annimmt.

Es sei hier noch bemerkt, daß das identische Verschwinden des in (10.4) definierten Operators R die übliche Integrationsbedingung ist, wobei der Operator $f(x, y)$ für jedes (x, y) aus $G_x \times G_y$ als *stetig* differenzierbar vorausgesetzt wird. Man erhält R, indem man in $y''\, hk - y''\, kh$ die Ableitung der rechten Seite der Differentialgleichung $dy = f(x, y)\, dx$ oder $y'\, dx = f(x, y) dx$ einsetzt.

11. Verallgemeinerte Definition von $R(x_0, y_0)$. Die Formel (10.3) läßt sich umgekehrt zu einer verallgemeinerten Definition des bilinearen Operators $R(x_0, y_0)$ verwenden:

Definition: *Wenn in einer Umgebung von (x_0, y_0) ein bilinearer Operator $A(x, y)$ existiert, so daß in dieser Umgebung für jedes den Punkt x_0 enthaltende Dreieck $s = s(x_1, x_2, x_3)$ $(x_2 = x_1 + h,\ x_3 = x_1 + k)$ mit der größten Seitenlänge β und dem orientierten Dreiecksrand $\partial s = \gamma = x_1 x_2 x_3 x_1$ die Beziehung*

$$U_\gamma(y_0) = A(x_0, y_0)\, hk + \beta^2(\beta)$$

mit $|(\beta)| \to 0$ für $\beta \to 0$ besteht, dann definieren wir:

$$A(x_0, y_0) \equiv R(x_0, y_0)\,.$$

Diese Definition verlangt weniger Voraussetzungen als die übliche Definition (10.4). Während dort die Differenzierbarkeit des Operators $f(x, y)$ notwendig ist, wird hier nur die Möglichkeit der Integration der Differentialgleichung $dy = f(x, y)\, dx$ längs Dreiecksrändern verlangt, wozu die Stetigkeit des Operators $f(x, y)$ und die Lipschitz-Bedingung hinreichend sind, weil die Differentialgleichung zu einer Normalgleichung spezialisiert wird.

Sobald $f(x, y)$ für (x_0, y_0) auch differenzierbar ist, ist das nach Satz 4 dafür hinreichend, daß der Operator $R(x_0, y_0)$ existiert. Er nimmt dann die in (10.4) aufgestellte explizite Form an und stimmt mit dem nach der allgemeinen Definition bestimmten $R(x_0, y_0)$ überein, da dieses, wie wir gleich beweisen werden, eindeutig ist.

Falls ein Operator $R(x_0, y_0)$ allgemeiner Art existiert, ist er eindeutig. Denn angenommen, es gäbe zwei verschiedene Operatoren, die der verallgemeinerten Definition entsprechen, etwa R und $\overline{R}$, dann wäre

$$(R(x_0, y_0) - \overline{R}(x_0, y_0))\, hk = \beta^2(\beta)\,.$$

Nach Ersetzung der Vektoren h, k durch $\lambda h, \overline{\lambda} k$ mit variablen $\lambda, \overline{\lambda}$ $(0 < \lambda \leqq 1$, $0 < \overline{\lambda} \leqq 1)$ und fixierten h, k erhielte man

$$(R(x_0, y_0) - \overline{R}(x_0, y_0))\, hk = (\lambda, \overline{\lambda})\,,$$

wobei $|(\lambda, \overline{\lambda})|$ gegen Null strebt, wenn auch die Summe $\lambda + \overline{\lambda}$ gegen Null konvergiert, und somit

$$(R(x_0, y_0) - \overline{R}(x_0, y_0))\, hk = 0$$

für jedes Paar h, k, was der Annahme widersprechen würde.

Ferner ist der eben definierte Operator $R(x_0, y_0)$ auch alternierend: Aus der Definition des Integrals folgt, daß

$$U_\gamma(y_0) = \int_\gamma f(x, y)\, dx$$

bei Umorientierung des Dreiecksweges sein Vorzeichen ändert. Bildet man die Summe der beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} U_\gamma(y_0) &= R(x_0, y_0)\, hk + \beta^2(\beta)\,, \\ U_{\gamma^{-1}}(y_0) &= R(x_0, y_0)\, kh + \beta^2(\beta)\,, \end{aligned}$$

so erhält man

$$0 = R(x_0, y_0)\, hk + R(x_0, y_0)\, kh + \beta^2(\beta)\,.$$

Hier ersetzt man h und k wiederum durch $\lambda h, \overline{\lambda} k$ mit festen h, k und variablen $\lambda, \overline{\lambda}$ $(0 < \lambda \leqq 1,\ 0 < \overline{\lambda} \leqq 1)$, dividiert dann durch $\lambda \cdot \overline{\lambda}$ und läßt die Summe $\lambda + \overline{\lambda}$ gegen Null konvergieren. Dem so entstehenden Ergebnis

$$0 = R(x_0, y_0)\, hk + R(x_0, y_0)\, kh$$

entnimmt man sofort, daß R alternierend ist.

Wenn weiter D die reelle alternierende Grundform der von h und k aufgespannten Ebene bezeichnet, ist die Darstellung

$$R(x_0, y_0)\, hk = \varrho(x_0, y_0)\, Dhk$$

möglich, wobei die Dichte ϱ bei festem E nicht von h und k abhängt. Mit Hilfe der Definition von R schließt man, daß ϱ bestimmt ist durch

$$\varrho(x_0, y_0; f(x, y); E) = \lim_{s \to x_0} \frac{U_\gamma(y_0)}{Dhk}$$

bei regulärer Konvergenz des Dreiecks s in der Ebene E. Damit läßt sich die Integrationsbedingung (9.1) auch so formulieren:

$$\varrho(x_0, y_0) = 0 \text{ für jedes } E .$$

12. **Zusammenfassend** ergibt sich der folgende Existenzsatz für die Lösung der allgemeinen Differentialgleichung erster Ordnung:

Satz. *Der lineare Operator $f(x, y)$ sei für ein abgeschlossenes Gebiet $G_x \times G_y$ des Produktraumes $R_x^m \times R_y^n$ definiert, stetig und erfülle für alle (x, y_i) $(i = 1, 2)$ aus diesem Gebiet die* Lipschitz-*Bedingung*

$$| f(x, y_1) - f(x, y_2) | \leqq K | y_1 - y_2 | .$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Integrierbarkeit der Differentialgleichung

$$dy = f(x, y)\, dx$$

ist folgende:

Der Operator $R(x,y)$ allgemeiner Art existiere für alle $(x, y) \in G_x \times G_y$ und verschwinde hier identisch, das heißt

$$R(x, y)\, hk = 0$$

für beliebige Vektoren h und k des Raumes R_x^m.

Ist diese Bedingung erfüllt und der beliebige innere Punkt (x_0, y_0) aus $G_x \times G_y$ festgelegt, gibt es in der Kugel

$$| x - x_0 | \leqq \frac{\alpha(x_0, y_0)}{14}$$

eindeutig eine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung, die für x_0 den Wert y_0 annimmt und in der Kugel

$$| y(x) - y_0 | \leqq r_y(y_0)$$

liegt, wobei α und r_y nach der in Abschnitt 5 beschriebenen Art bestimmt werden.

Ist der Operator $f(x, y)$ zusätzlich noch differenzierbar, ist das identische Verschwinden des Ausdrucks

$$R(x, y)\, h\, k = \wedge\ \{f_x(x, y)\, h\, k + f_y(x, y)\, f(x, y)\, h\, k\}$$

die notwendige und hinreichende Bedingung für die vollständige Integrabilität der vorgelegten Differentialgleichung.

LITERATUR

[1] GRAEUB W. und NEVANLINNA R.: Zur Grundlegung der affinen Differentialgeometrie. Ann. Acad. Sci. Fenn. A I 224 (1956).

[2] KELLER H. H.: Über die Differentialgleichung erster Ordnung in normierten linearen Räumen. Rend. Circ. Mat. Palermo Serie II Tomo VIII (1959).

[3] NEVANLINNA F. und R.: Absolute Analysis. Springer Verlag Berlin/Göttingen/Heidelberg (1959).

[4] NEVANLINNA R.: Zur Theorie der Normalsysteme von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Hommage à S. Stoilow pour son 70e anniversaire. Rev. Math. Pures et Appl. 2, 423–428 (1957).

[5] NEVANLINNA R.: Sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre. C. R. Acad. Sci. Paris 247 (1958), 1953–1954.

[6] NEVANLINNA R.: Application d'un principe de E. Goursat dans la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre. C. R. Acad. Sci. Paris 247 (1958), 2087–2090.

(Eingegangen den 14. Juli 1961)