Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 36 (1961-1962)

Artikel: Affine Zusammenhänge auf Mannigfaltigkeiten mit fast-symplektischer Struktur.

Autor: Tondeur, Ph.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515626

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Affine Zusammenhänge auf Mannigfaltigkeiten mit fast-symplektischer Struktur

von PH. TONDEUR, Zürich

Auf einer Mannigfaltigkeit M gerader Dimension wird eine fast-symplektische Struktur definiert durch die Vorgabe einer nichtausgearteten Differentialform zweiter Stufe[1]). Die Existenz eines affinen Zusammenhanges, in bezug auf welchen die kovariante Ableitung der gegebenen 2-Form identisch verschwindet, ist eines der Hauptprobleme in dieser Theorie.

Es gibt mehrere Untersuchungen über diese Frage, insbesondere im Zusammenhang mit den fast-HERMITEschen Strukturen, welche in natürlicher Weise eine fast-symplektische Struktur induzieren[2]). Das Ziel dieser Arbeit ist die Lösung des Problems:

Bestimmung aller affinen Zusammenhänge auf M, so daß in bezug auf diese Zusammenhänge die kovariante Ableitung der gegebenen Differentialform verschwindet.

Wir folgen dabei einer Idee von M. OBATA[3]), welcher das entsprechende Problem für die fast-komplexen Strukturen behandelt. Die Lösung des Problems beruht im Prinzip auf der Lösung linearer Gleichungen, die durch einen Kunstgriff bequem gestaltet wird. (Vgl. dazu Nr. 3.)

In Nr. 4 wird gezeigt, daß auf jeder fast-symplektischen Mannigfaltigkeit mindestens ein natürlicher affiner Zusammenhang (kurz: A-Zusammenhang) existiert, und es wird die allgemeine Lösung des Problems angegeben.

Zwischen der Torsion eines beliebigen A-Zusammenhanges und der äußeren Ableitung des fast-symplektischen Strukturtensors A bestehen gewisse Beziehungen. Dadurch kann man unter allen möglichen A-Zusammenhängen gewisse auszeichnen (Nr. 8). Man erhält auf diese Weise das bekannte Resultat zurück, daß eine fast-symplektische Mannigfaltigkeit M genau dann symplektisch ist, wenn ein symmetrischer A-Zusammenhang auf M existiert (Nr. 8).

In Nr. 9 wird für einen einfach kontra-, zweifach kovarianten Tensor eine notwendige und hinreichende Bedingung angegeben dafür, daß er als Torsion eines A-Zusammenhanges auftreten kann. In Nr. 10 wird noch auf gewisse Zusammenhänge mit der analytischen Mechanik hingewiesen, deren Phasenmannigfaltigkeit eine natürliche symplektische Struktur trägt.

---

[1]) Für die Definitionen vgl. man LIBERMANN [7].

[2]) Z. B. LIBERMANN [7], 205; OBATA [9], 71–74; bei LIBERMANN findet man eine ausführliche Bibliographie.

[3]) OBATA [9].

Ich spreche an dieser Stelle Herrn Prof. R. NEVANLINNA für sein Interesse und seine kritischen Bemerkungen bei der Abfassung dieser Arbeit meinen herzlichsten Dank aus.

I. Definitionen und Bezeichnungen. Sei M eine $2n$-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse $C^r (r \geqq 2)$. Eine *fast-symplektische Struktur* auf M ist ein Feld A von reellen, 2-fach kovarianten, alternierenden, nichtausgearteten Tensoren (kurz: eine 2-Form vom Rang $2n$) der Klasse C^h $(1 \leqq h \leqq r)$ auf M. Eine fast-symplektische Struktur heißt *symplektisch*, wenn die 2-Form A geschlossen ist: $\delta A = 0$. Es bedeutet hier δA die äußere Ableitung von A, welche in einer Karte erklärt ist durch

$$\delta A(x)hkl = A'(x)hkl + A'(x)klh + A'(x)lhk.$$

Für die verwendeten Begriffe und Bezeichnungen vergleiche man NEVANLINNA [8] und SCHOUTEN [10]. Ein affiner Zusammenhang auf M, in bezug auf welchen die kovariante Ableitung von A verschwindet, soll kurz *A-Zusammenhang* genannt werden.

Im folgenden operieren wir immer in einer festen Karte von M, deren Punkte wir mit x bezeichnen. In dieser Karte wird A durch eine 2-Form repräsentiert, die wir ebenfalls mit A bezeichnen.

Es soll noch am Beispiel eines 2-fach kovarianten Tensors A erläutert werden, wie in dem hier benutzten Kalkül die kovariante Ableitung von Tensorfeldern eingeführt wird[4]). Sei dazu ein affiner Zusammenhang Γ gegeben. Wir betrachten einen Punkt x_0, zwei kontravariante Vektoren k, l in x_0 und eine von x_0 ausgehende differenzierbare Kurve $C: x = x(\tau), 0 \leqq \tau \leqq 1, x_0 = x(0)$. Durch Parallelverschiebung der Vektoren k, l in bezug auf Γ längs der Kurve C erhält man zwei kontravariante Vektorfelder $k(\tau)$, $l(\tau)$ längs C, welche den Gleichungen

$$\dot{k}(\tau) = -\Gamma(x(\tau))\,\dot{x}(\tau)k(\tau), \quad \dot{l}(\tau) = -\Gamma(x(\tau))\,\dot{x}(\tau)l(\tau)$$

mit den Anfangsbedingungen $k(0) = k$, $l(0) = l$ genügen.

Falls die reelle Funktion $\alpha(\tau) = A(x(\tau))\,k(\tau)l(\tau)$ im Punkte $\tau = 0$ differenzierbar ist, so heißt $\dot{\alpha}(0)$ die kovariante Ableitung von A im Punkte x_0 in Richtung $\dot{x}(0) = h$ und wird mit $\nabla A(x_0)hkl$ bezeichnet. Es ist

$$\nabla A(x_0)hkl = A'(x_0)hkl + A(x_0)\dot{k}(0)l + A(x_0)k\,\dot{l}(0)\,.$$

Beachtet man die Gleichung der Parallelverschiebung, so wird hieraus

$$\nabla A(x_0)hkl = A'(x_0)hkl - A(x_0)\,\Gamma(x_0)hkl - A(x_0)k\,\Gamma(x_0)hl\,. \tag{1.1}$$

---

[4]) GRAEUB, NEVANLINNA [3].

Wenn im Punkt x_0 die kovariante Ableitung von A in jeder Richtung existiert, so ist $\nabla A(x_0)$ ein 3-fach kovarianter Tensor mit der Eigenschaft (1.1); er heißt die kovariante Ableitung von A im Punkt x_0.

II. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für A-Zusammenhänge.

Wir gehen aus von einem beliebigen affinen Zusammenhang $\overset{\circ}{\Gamma}$ auf M. Solche gibt es immer auf einer Mannigfaltigkeit der Klasse $C^r (r \geqq 2)$. Dies folgt z.B. daraus, daß auf einer solchen Mannigfaltigkeit stets eine RIEMANNsche Metrik der Klasse C^{r-1} existiert.

Addiert man zu $\overset{\circ}{\Gamma}$ ein beliebiges Tensorfeld Q vom Typus $\binom{1}{2}$ (das heißt einfach kontra —, zweifach kovariant), so ist der entstehende Ausdruck ein affiner Zusammenhang, wie die Betrachtung des Transformationsgesetzes

$$\overset{\circ}{\overline{\Gamma}}(\overline{x})\overline{h}\overline{k} = \frac{d\overline{x}}{dx}(x)\,\overset{\circ}{\Gamma}(x)hk - \frac{d^2\overline{x}}{dx^2}\,hk$$

bei der Parametertransformation $\overline{x} = \overline{x}(x)$ zeigt. Ferner erhält man auf diese Weise jeden affinen Zusammenhang auf M, wenn Q die Menge der Tensorfelder vom Typus $\binom{1}{2}$ durchläuft.

Es bezeichne ∇ bzw. $\overset{\circ}{\nabla}$ den Operator der kovarianten Differentiation in bezug auf Γ bzw. $\overset{\circ}{\Gamma}$, wobei

$$\Gamma(x) = \overset{\circ}{\Gamma}(x) + Q(x)\,. \tag{2.1}$$

Dabei ist Q ein Tensorfeld vom Typus $\binom{1}{2}$. Wir bilden nach (1.1) die kovariante Ableitung der fast-symplektischen 2-Form A in bezug auf Γ und $\overset{\circ}{\Gamma}$:

$$\nabla A(x)hkl = A'(x)hkl - A(x)\Gamma(x)hkl - A(x)k\Gamma(x)hl$$

$$\overset{\circ}{\nabla} A(x)hkl = A'(x)hkl - A(x)\overset{\circ}{\Gamma}(x)hkl - A(x)k\overset{\circ}{\Gamma}(x)hl\,.$$

Dabei sind h, k und l beliebige kontravariante Vektoren im Punkt x. Durch Subtraktion erhält man wegen der Gleichung (2.1)

$$\nabla A(x)hkl = \overset{\circ}{\nabla} A(x)hkl - A(x)Q(x)hkl - A(x)kQ(x)hl\,.$$

Die kovariante Ableitung von A in bezug auf Γ verschwindet also genau dann, wenn

$$\overset{\circ}{\nabla} A(x)hkl = A(x)Q(x)hkl + A(x)kQ(x)hl\,.$$

Sei A^{-1} der zu A inverse Tensor. Setzt man in der letzten Gleichung $l = l^* A^{-1}(x)$, wobei l^* ein beliebiger kovarianter Vektor im Punkte x ist, so erhält man

$$\overset{\circ}{\nabla} A(x)hk(l^* A^{-1}(x)) = A(x)Q(x)hk(l^* A^{-1}(x)) + A(x)k\, Q(x)h(l^* A^{-1}(x)) . \tag{2.2}$$

Dabei ist

$$A(x)Q(x)hk(l^* A^{-1}(x)) = -A(x)(l^* A^{-1}(x))Q(x)hk = -l^* Q(x)hk.$$

Definiert man das Tensorfeld P durch

$$l^* P(x)hk = -\tfrac{1}{2} \cdot \overset{\circ}{\nabla} A(x)hk(l^* A^{-1}(x)) , \tag{2.3}$$

so schreibt sich die Gleichung (2.2) schließlich

$$l^* P(x)hk = \tfrac{1}{2}[l^* Q(x)hk - A(x)k\, Q(x)h(l^* A^{-1}(x))] . \tag{2.4}$$

Die Gültigkeit von (2.4) für beliebige Argumente h, k, l^* (h, k kontravariant, l^* kovariant) ist also notwendig und hinreichend für die «kovariante Konstanz» von A bezüglich des affinen Zusammenhanges Γ.

III. Die Operatoren Φ und Ψ. Es sei T^1_2 der Raum der Tensorfelder vom Typus $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. In diesem Raum werden die linearen Selbstabbildungen Φ, Ψ definiert durch

$$\begin{aligned} l^*(\Phi R)hk &= \tfrac{1}{2}\,[l^* Rhk - AkRh(l^* A^{-1})] \\ l^*(\Psi R)hk &= \tfrac{1}{2}[l^* Rhk + AkRh(l^* A^{-1})] \end{aligned} \tag{3.1}$$

für ein $R \in T^1_2$.[5])

Offenbar ist $\Phi + \Psi =$ Identität. Man prüft nach, daß Φ und Ψ Projektionen sind

$$\Phi\Phi = \Phi, \quad \Psi\Psi = \Psi.$$

Also muß auch $\Phi\Psi = \Psi\Phi = 0$ gelten, und Φ ist die Projektion längs des Bildraumes von Ψ auf $\Phi(T^1_2)$, Ψ die Projektion längs des Bildraumes von Φ auf $\Psi(T^1_2)$.

IV. Existenz von A-Zusammenhängen. Allgemeinster A-Zusammenhang. Mit Hilfe der in Nr. 3 erklärten Abbildung Φ können wir jetzt die Gleichung (2.4) schreiben

$$P = \Phi Q. \tag{4.1}$$

---

[5]) Die Einführung dieser Abbildungen vereinfacht den Beweis des Satzes 1 in Nr. 4. Die Idee stammt von Obata [9], S. 52.

Die notwendige und hinreichende Lösbarkeitsbedingung für diese Gleichung lautet offenbar

$$\Psi P = 0.$$

Wir behaupten, daß diese Beziehung stets erfüllt ist (bei beliebigem $\overset{\circ}{\Gamma}$).
Beweis. Nach den Definitionen (2.3) und (3.1) ist

$$l^*(\Psi P)hk = -\tfrac{1}{4}\cdot[\overset{\circ}{\nabla}Ahk(l^*A^{-1}) + \overset{\circ}{\nabla}Ah(l^*A^{-1})(Ak)A^{-1}]$$

$$= -\tfrac{1}{4}\cdot[\overset{\circ}{\nabla}Ahk(l^*A^{-1}) + \overset{\circ}{\nabla}Ah(l^*A^{-1})k].$$

Die rechte Seite aber verschwindet identisch, weil $\overset{\circ}{\nabla}A$ alternierend ist bezüglich des zweiten und dritten Argumentes.

Die allgemeine Lösung der linearen Gleichung (4.1) ist

$$Q = P + \Psi R,$$

wo R ein beliebiges Tensorfeld vom Typus $\binom{1}{2}$ bedeutet. Wir haben damit den

Satz 1. a) *In einer Mannigfaltigkeit mit fast-symplektischer Struktur A gibt es stets mindestens einen A-Zusammenhang.*

b) *Sei $\overset{\circ}{\Gamma}$ ein beliebiger affiner Zusammenhang auf der Mannigfaltigkeit M mit fast-symplektischer Struktur A. Ein affiner Zusammenhang Γ auf M ist genau dann ein A-Zusammenhang, wenn die Gleichung*

$$l^*\Gamma hk = l^*\overset{\circ}{\Gamma}hk - \tfrac{1}{2}\cdot\overset{\circ}{\nabla}Ahk(l^*A^{-1}) + \tfrac{1}{2}[l^*Rhk + AkRh(l^*A^{-1})] \tag{4.2}$$

identisch in h, k, l^* gilt für ein gewisses Tensorfeld R vom Typus $\binom{1}{2}$[6]).

Insbesondere folgt hieraus: Ist $\overset{\circ}{\Gamma}$ ein A-Zusammenhang auf einer fast-symplektischen Mannigfaltigkeit, so ist $\Gamma = \overset{\circ}{\Gamma} + Q$ mit $Q \in T^1_2$ genau dann ein A-Zusammenhang, wenn

$$\Phi Q = 0.$$

Dann gilt auch $Q = \Psi R$ für ein $R \in T^1_2$.

V. Ein Kriterium für A-Zusammenhänge. Es sei im folgenden wieder $\overset{\circ}{\Gamma}$ ein beliebiger affiner Zusammenhang und Q ein beliebiges Tensorfeld vom Typus $\binom{1}{2}$. Bezeichnet $\overline{\nabla}$ bzw. $\overset{\circ}{\nabla}$ den Operator der kovarianten Differentiation

[6]) Man vergleiche OBATA [9], S. 54 für einen analogen Satz im Fall einer Mannigfaltigkeit mit fast-komplexer Struktur.

in bezug auf den affinen Zusammenhang $\overline{\Gamma} = \overset{\circ}{\Gamma} + Q$ bzw. $\overset{\circ}{\Gamma}$, so ist nach Nr. 2

$$\overline{\nabla} A hk(l^* A^{-1}) = \overset{\circ}{\nabla} A hk(l^* A^{-1}) - AQhk(l^* A^{-1}) - AkQh(l^* A^{-1})$$
$$= \overset{\circ}{\nabla} A hk(l^* A^{-1}) + l^* Qhk - AkQh(l^* A^{-1}) .$$

Hieraus folgt zunächst

$$l^* \overline{\Gamma} hk - \tfrac{1}{2} \cdot \overline{\nabla} A hk(l^* A^{-1}) \tag{5.1}$$
$$= l^* \overset{\circ}{\Gamma} hk - \tfrac{1}{2} \cdot \overset{\circ}{\nabla} A hk(l^* A^{-1}) + \tfrac{1}{2} [l^* Qhk + AkQh(l^* A^{-1})] .$$

Nach dem Satz 1 ist nun bei beliebigem $\overset{\circ}{\Gamma}$ der Ausdruck

$$l^*(\alpha \overset{\circ}{\Gamma}) hk \equiv l^* \overset{\circ}{\Gamma} hk - \tfrac{1}{2} \cdot \overset{\circ}{\nabla} A hk(l^* A^{-1})$$

ein A-Zusammenhang.

Benutzt man noch den in (3.1) erklärten Operator Ψ, so schreibt sich (5.1) in der Form

$$\alpha \overline{\Gamma} = \alpha \overset{\circ}{\Gamma} + \Psi Q . \tag{5.2}$$

Wir haben folgenden

Satz: *In einer Mannigfaltigkeit mit fast-symplektischer Struktur A ist ein affiner Zusammenhang Γ dann und nur dann ein A-Zusammenhang, wenn ein affiner Zusammenhang $\overset{\circ}{\Gamma}$ mit $\Gamma = \alpha \overset{\circ}{\Gamma}$ existiert.*

Wir haben bereits gesehen, daß die Bedingung hinreicht. Ist umgekehrt Γ ein A-Zusammenhang, so ist $\alpha \Gamma = \Gamma$ und die Bedingung des Satzes also mit $\overset{\circ}{\Gamma} = \Gamma$ erfüllt.

VI. Die Torsion eines beliebiges A-Zusammenhanges. Sei Γ ein beliebiger A-Zusammenhang und S der zugehörige Torsionstensor, das heißt

$$l^* Shk = l^* \Gamma hk - l^* \Gamma kh \equiv 2 . \underset{hk}{\Lambda}\, l^* \Gamma hk .$$

Nach dem **Satz 1** können wir, von einem beliebigen affinen Zusammenhang $\overset{\circ}{\Gamma}$ ausgehend, Γ darstellen als

$$l^* \Gamma hk = l^* \overset{\circ}{\Gamma} hk - \tfrac{1}{2} \cdot \overset{\circ}{\nabla} A hk(l^* A^{-1}) + l^*(\Psi R) hk ,$$

wo R ein Tensorfeld vom Typus $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bedeutet.

Für späteren Gebrauch drücken wir S aus durch $\overset{\circ}{\nabla} A$, R und den Torsionstensor $\overset{\circ}{S}$ von $\overset{\circ}{\Gamma}$. Nach der letzten Gleichung ist

$$l^* Shk = l^* \overset{\circ}{S} hk - \underset{hk}{\Lambda}\, \overset{\circ}{\nabla} A hk(l^* A^{-1}) + 2 \cdot \underset{hk}{\Lambda}\, l^*(\Psi R) hk . \tag{6,1}$$

VII. Beziehungen zwischen der Torsion eines A-Zusammenhanges und der äußeren Ableitung δA des fast-symplektischen Strukturtensors A. Sei Γ ein beliebiger A-Zusammenhang auf M und S der zugehörige Torsionstensor. Aus dem Verschwinden der kovarianten Ableitung des fast-symplektischen Strukturtensors A folgt nach Gleichung (1.1)

$$A'hkl - A\Gamma hkl - Ak\Gamma hl = 0\,.$$

Permutiert man die Argumente h, k, l zyklisch und addiert die entstehenden drei Gleichungen, so erhält man unter Beachtung des alternierenden Charakters von A

$$\delta Ahkl - AShkl - ASklh - ASlhk = 0.$$

Wir schreiben dafür

$$\delta Ahkl = \sum_{zykl.} AShkl. \tag{7.1}$$

Dies gilt also für die Torsion eines jeden A-Zusammenhanges.

Für späteren Gebrauch bilden wir mit dem zu A inversen Tensor A^{-1} noch

$$\delta Ahk(l^*A^{-1}) = \sum_{zykl.} AShk(l^*A^{-1})$$

$$= -A(l^*A^{-1})Shk + ASk(l^*A^{-1})h + AS(l^*A^{-1})hk$$

$$= -\,l^*Shk - AhSk(l^*A^{-1}) + AkSh(l^*A^{-1})\,.$$

Benutzt man wieder den in (3.1) definierten Operator Ψ, so findet man nach kurzer Rechnung

$$\delta Ahk(l^*A^{-1}) = -\,3\cdot l^*Shk + 4\cdot \underset{hk}{\Lambda}\, l^*(\Psi S)hk\,. \tag{7.2}$$

Satz 2: *In einer Mannigfaltigkeit mit fast-symplektischer Struktur A gelten für einen beliebigen A-Zusammenhang Γ und seine Torsion S die Beziehungen*

$$\delta Ahkl = \sum_{zykl.} AShkl \tag{7.1}$$

$$\delta Ahkl = -\,3\cdot l^*Shk + 4\cdot \underset{hk}{\Lambda} l^*(\Psi S)hk\,. \tag{7.2}$$

VIII. Besondere A-Zusammenhänge. Es sei zunächst $\overset{\circ}{\Gamma}$ ein beliebiger affiner Zusammenhang und $\overset{\circ}{S}$ die zugehörige Torsion. Nach Satz 1 ist der Ausdruck $\overline{\Gamma}$ in

$$l^*\overline{\Gamma}hk \equiv l^*\overset{\circ}{\Gamma}hk - \tfrac{1}{2}\cdot \overset{\circ}{\nabla} Ahk(l^*A^{-1}) + \lambda\cdot l^*(\Psi\overset{\circ}{S})hk \tag{8.1}$$

für jedes reelle λ ein A-Zusammenhang (denn Ψ ist homogen 1. Grades). Die

Torsion $\bar{S}$ von $\bar{\Gamma}$ ist

$$l^*\bar{S}hk = l^*\mathring{S}hk - \underset{hk}{\Lambda}\mathring{\nabla}Ahk(l^*A^{-1}) + 2\lambda \cdot \underset{hk}{\Lambda}l^*(\Psi\mathring{S})hk\,. \tag{8.2}$$

Es sei nun $\mathring{\Gamma}$ insbesondere ein A-Zusammenhang. Wir wollen λ auf eine besondere Weise festlegen. Beachtet man 7.2, so wird aus der Gleichung 8.2 nach Ersetzung von $l^*\mathring{S}hk$

$$l^*\bar{S}hk = -\tfrac{1}{3}\cdot\delta Ahk(l^*A^{-1}) + \tfrac{4}{3}\cdot\underset{hk}{\Lambda}l^*(\Psi\mathring{S})hk$$
$$+ 2\lambda\cdot\underset{hk}{\Lambda}l^*(\Psi\mathring{S})hk\,.$$

Für $\lambda = -\frac{2}{3}$ heben sich auf der rechten Seite die zwei letzten Glieder auf, und man hat den

Satz 3: *Sei $\mathring{\Gamma}$ ein A-Zusammenhang in einer Mannigfaltigkeit mit fast-symplektischer Struktur A und $\mathring{S}$ die zugehörige Torsion. Dann ist*

$$\bar{\Gamma} = \mathring{\Gamma} - \tfrac{2}{3}\cdot(\Psi\mathring{S})$$

ein A-Zusammenhang, dessen Torsion $\bar{S}$ der Bedingung genügt

$$l^*\bar{S}hk = -\tfrac{1}{3}\cdot\delta Ahk(l^*A^{-1})\,.$$

Folgerung: Insbesondere existiert demnach auf jeder Mannigfaltigkeit mit fast-symplektischer Struktur A ein A-Zusammenhang mit einer Torsion S, welche der Gleichung genügt

$$l^*Shk = -\tfrac{1}{3}\cdot\delta Ahk(l^*A^{-1})\,.$$

Satz 4: *Eine fast-symplektische Struktur A auf einer Mannigfaltigkeit M ist genau dann symplektisch, wenn ein* **symmetrischer** *A-Zusammenhang auf M existiert*[7]).

Die Bedingung ist nach dem Obigen notwendig. Die Gleichung 7.1 zeigt, daß sie auch hinreicht.

IX. Ein Kriterium dafür, wann ein vorgegebenes Tensorfeld vom Typus $\binom{1}{2}$ als Torsion eines A-Zusammenhanges auftreten kann. Satz 5: *Sei S ein Tensorfeld vom Typus $\binom{1}{2}$, alternierend bezüglich der kontravarianten Argumente, auf einer Mannigfaltigkeit mit fast-symplektischer Struktur A. S tritt genau dann als Torsion eines A-Zusammenhanges auf, wenn die äußere Ableitung δA des fast-symplektischen Strukturtensors A mit S verknüpft ist gemäß der Beziehung*

$$\delta A hk(l^* A^{-1}) = \sum_{zykl.} A S hk(l^* A^{-1}) .$$

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß die Beziehung jedenfalls notwendig ist auf Grund von Satz 2. Sei nun umgekehrt S ein Tensor, der den angegebenen Bedingungen genügt. Wir gehen aus von einem A-Zusammenhang $\mathring{\Gamma}$, dessen Torsion $\mathring{S}$ die Gleichung befriedigt

$$3 \cdot l^* \mathring{S} hk = - \delta A hk(l^* A^{-1}) .$$

Die Existenz eines solchen A-Zusammenhanges folgt nach Satz 3. Nach Satz 1 ist ferner

$$\overline{\Gamma} = \mathring{\Gamma} + \lambda \cdot \Psi S$$

ein A-Zusammenhang bei beliebiger reeller Zahl λ. Wir bestimmen die Torsion $\overline{S}$ von $\overline{\Gamma}$. Es ist

$$\begin{aligned} l^* \overline{S} hk = l^* \mathring{S} hk &= 2\lambda \underset{hk}{\Lambda} l^*(\Psi S) hk \\ &= -\tfrac{1}{3} \cdot \delta A hk(l^* A^{-1}) + 2\lambda \cdot \underset{hk}{\Lambda} l^*(\Psi S) hk . \end{aligned}$$

Durch dieselbe Umformung, welche von (7.1) zu (7.2) führt, findet man hieraus

$$l^* \overline{S} hk = l^* S hk - \tfrac{4}{3} \cdot \underset{hk}{\Lambda} l^*(\Psi S) hk + 2\lambda \cdot \underset{hh}{\Lambda} l^*(\Psi S) hk .$$

Wählt man $\lambda = \frac{2}{3}$, so folgt die Behauptung.

X. Bemerkung zur analytischen Mechanik. Schließlich wollen wir auf die Bedeutung der hier behandelten Frage für die analytische Mechanik kurz hinweisen. Wie schon von verschiedenen Autoren bemerkt worden ist, läßt sich die *Phasenmannigfaltigkeit* der Mechanik in natürlicher Weise als symplektische Mannigfaltigkeit auffassen. Schon bei CARATHÉODORY [2] findet man Bemerkungen dieser Art. LEE [6] und BREUER [1] betonen deutlich diese Auffassung.

Auf der Phasenmannigfaltigkeit ist in natürlicher Weise ein fast-symplektischer Strukturtensor A mit verschwindender äußerer Ableitung δA erklärt, das heißt eine symplektische Struktur[8]). Die *Poissonklammer* zweier reeller Funktionen f, g auf der Phasenmannigfaltigkeit wird mit Hilfe des zu A inversen Tensors A^{-1} definiert gemäß

---

[7]) LIBERMANN [7], 205.

[8]) Man vergleiche hiezu BREUER [1], 35–38 oder KELLER, TONDEUR [4].

$$(f, g)(x) = g'(x) f'(x) A^{-1}(x) .$$

Wir setzen dabei wie schon früher kovariante Vektorargumente links vom Tensor-Symbol. Die Gültigkeit der JACOBIschen Identität

$$(f,(g,h)) + (g,(h,f)) + (h,(f,g)) = 0$$

für je drei beliebige reelle Funktionen f, g, h auf M ist der Ausdruck für das Verschwinden der äußeren Ableitung des Strukturtensors A.

Nun ist das Verschwinden der äußeren Ableitung von A die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von Karten, in bezug auf welche die den Strukturtensor A repräsentierende Form konstant (ortsunabhängig) gewählt werden kann[9]). Lokal kann man also die Phasenmannigfaltigkeit stets als ein Gebiet in einem Vektorraum gerader Dimension auffassen, in welchem eine alternierende, nichtausgeartete Bilinearform ausgezeichnet ist. (Es ist deshalb gerechtfertigt, von einer lokal-symplektischen (BREUER [1]) statt einer symplektischen Mannigfaltigkeit zu sprechen, wie man ja auch in der Riemannschen Geometrie beim Verschwinden des Krümmungstensors von einer lokal-euklidischen Struktur spricht.)

Bei dieser Deutung ist eine *kanonische Transformation* ein lokaler Automorphismus der symplektischen Mannigfaltigkeit. Genauer: Eine differenzierbare Abbildung φ eines Gebietes $U \subset M$ in die Mannigfaltigkeit M, $\varphi: U \to \varphi(U)$, ist eine kanonische Transformation, falls

$$(\varphi^* A)(x) = A(x)$$

für alle Punkte $x \in U$ gilt. Dabei ist $\varphi^* A$ das inverse Bild des Tensorfeldes A unter der Abbildung φ, definiert durch

$$(\varphi^* A)(x) hk = A(\varphi(x))\, \varphi'(x) h\, \varphi'(x) k$$

für beliebige Tangentialvektoren h, k im Punkt x. Unter Zugrundelegung dieser Auffassung wird in [4] die Theorie der kanonischen Transformationen dargestellt.

---

[9]) Beweise hiefür findet man bei CARATHÉODORY [2], 143 und LEE [5], 434.

LITERATUR

[1] BREUER M.: Jacobische Differentialgeometrie und Systeme partieller Differentialgleichungen 1. Ordnung. Bonner Math. Schriften, Nr. 7, Bonn 1958.

[2] CARATHÉODORY C.: Variationsrechnung. Teubner, Berlin und Leipzig 1935.

[3] GRAEUB W. und NEVANLINNA R.: Zur Grundlegung der affinen Differentialgeometrie. Ann. Acad. Sci. Fenn. A I 224, 1956.

[4] KELLER H. H. und TONDEUR PH.: Zur Theorie der kanonischen Transformationen. Erscheint in den Rend. Circ. Mat. Palermo.

[5] LEE H. C.: A kind of even-dimensional differential geometry and its application to exterior calculus. Amer. J. Math. *65*, 433–438 (1943).

[6] LEE H. C.: On even-dimensional skew-metric spaces and their groups of transformations. Amer. J. Math. *67*, 321–328 (1945).

[7] LIBERMANN P.: Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimales régulières. Bull. Soc. Math. France *83*, 195–224 (1955).

[8] NEVANLINNA F. und R.: Absolute Analysis. Grundlehren Math. Wiss. 102, 1959. Springer: Berlin/Göttingen/Heidelberg.

[9] OBATA M.: Affine connections on manifolds with almost complex, quaternion or hermitian structure. Japan. J. Math. *26*, 43–77 (1956).

[10] SCHOUTEN J. A.: Ricci-Calculus. Grundlehren Math. Wiss. 10, 2. Aufl. 1954; Springer: Berlin/Göttingen/Heidelberg.

Eingegangen den 14. Juli 1961

Es ist dem Verfasser eine angenehme Pflicht, der Fritz-Hoffmann-La-Roche-Stiftung zur Förderung wissenschaftlicher Arbeitsgemeinschaften in der Schweiz für die Erleichterung der Arbeit durch Gewährung materieller Unterstützung zu danken.