Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 36 (1961-1962)

Artikel: Groupes de transformations d'une sphère de cohomologie.
Autor: Poncet, Jean
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515622

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Groupes de transformations d'une sphère de cohomologie[1])

JEAN PONCET, Princeton, N. J. (USA)

1. Introduction

On désignera dans la suite par (G, X) un groupe G de transformations de l'espace X. G sera un groupe de LIE compact, connexe.

Si $x \subset X$, G_x est le sous-groupe de G qui laisse x invariant. Dans cette note, l'orbite $G(x)$ est dite

du type H, ou G/H, si G_x est dans la classe des sous-groupes conjugués à $H \subset G$,

régulière si les orbites voisines sont du même type que $G(x)$, singulière sinon.

S'il n'existe qu'un seul type H d'orbites régulières, on appellera l'espace homogène G/H l'orbite principale.

Dans la suite la cohomologie d'un espace sera toujours celle d'ALEXANDER-SPANIER à supports compacts, à valeurs entières.

M sera une n-variété cohomologique (une $n - cm_Z$ de [1], notée ici cm) qui ait la cohomologie d'une sphère. M est alors compacte.

Si l'on impose aux orbites de (G, M) certaines conditions (assez restrictives en somme) l'espace M et l'action de G sur M peuvent être décrits assez exactement. On a ainsi

Théorème 1.1. Soient M une $n - cm$ qui ait la cohomologie d'une sphère et (G, M) un groupe de transformations qui possède des orbites de dimension $n - 1$. Alors celles-ci sont régulières, d'un même type G/H, il y a deux orbites singulières et les énoncés a — d sont équivalents:

a) les orbites de dimension $n - 1$ ont la cohomologie d'un produit de deux sphères;

b) les orbites singulières sont des sphères de cohomologie;

c) M est la jonction des deux orbites singulières;

d) la somme des dimensions des orbites singulières est $n - 1$.

En outre, si l'orbite principale G/H est un produit de deux sphères $S^k \times S^l$, ou si les orbites singulières sont S^k et S^l, M est S^{k+l+1} et G opère linéairement.

Remarque. Les énoncés a — d sont aussi équivalents à celui-ci: G/H est le produit des deux orbites singulières (voir la démonstration). Comme G. E. BRE-

---

[1]) Travail écrit alors que l'auteur était boursier du Fonds National Suisse.

DON a montré [4] qu'un espace homogène (de groupe de LIE compact) qui a la cohomologie entière d'une S^r est une S^r ou $SO(3)/I$ (I = groupe de l'icosaèdre), on a ainsi une précision de plus sur les orbites possibles sous l'une des conditions a — d.

On a un cas plus simple de (G, M) si $H^*(G/H) = H^*(S^{n-1})$. Les orbites singulières sont des points fixes et réciproquement. G opère linéairement si G/H est S^{n-1} [6].

Comme application, nous considérons un (G, E_n) sur un espace euclidien E_n qui ait des orbites de dimension $n-2$. En utilisant les résultats de [5] et un théorème de G. E. BREDON [1, chap. XV] nous montrons qu'il existe un point fixe p et que $E_n - p$ est le produit de E_1 par une $(n-1) - cmM$ à laquelle ont peut appliquer 1.1. D'où résulte

Théorème 1.2. Si (G, E_n) a des orbites de dimension $n-2$ qui sont des S^{n-2} ou des $S^k \times S^l$, $k + l = n - 1$, G est linéaire.

Je remercie ici MM. D. MONTGOMERY et G. E. BREDON de m'avoir fait quelques suggestions.

2. Sections de M

Soit M comme dans 1. La proposition 2.1 est une conséquence facile de la propriété de séparation d'une $n - cm$ par un sous-espace dont la dimension cohomologique ($\dim_Z$ de [1, chap. I], notée ici dim.) est $n-1$, et des propriétés du sous-espace $M_{n-1\,s}$ réunion des orbites de dimension $n-1$ dont le groupe d'isotropie a un nombre minimum s de composantes [1, chap. IX].

Proposition 2.1. Les orbites de dimension $n-1$ sont régulières, d'un même type. Il y a deux orbites singulières de dimension $< n-1$. M/G est un intervalle fermé.

Soit d'abord M une $n - cm$ connexe dont nous ne supposons pas nécessairement que $H^*(M) = H^*(S^n)$.

$N = M_{n-1,s} \subset M$ est un ouvert dense, connexe [1, chap. IX], fibré en orbites de même type. Donc $N' = N/G$ est une $1 - cm$ [1, chap. I, th. 4.10]. N' est localement compacte, localement connexe et séparée localement par chaque point. On en déduit que c'est une 1-variété.

Supposons $H^*(M) = H^*(S^n)$. N' ne peut pas être S^1, car on aurait $M = N$ fibré en orbites G/H, de base S^1, ce qui est impossible par la suite de cohomologie associée à une orbite G/H

$$0 \to H^{n-1}(G/H) \to H^n(M - G/H) \to H^n(M) \to 0$$

$M - G/H$ étant $E_1 \times G/H$.

Ainsi N' est E_1 et il y a une ou deux orbites singulières. S'il y en a une seule, elle sépare M localement, est donc de dimension $n-1$, ce qui est encore impossible par une même suite de cohomologie associée à cette orbite. Donc il y en a deux et $M' = M/G$ est un intervalle fermé. Comme elles ne peuvent pas séparer M localement, elles sont de dimension $< n-1$. Ceci achève de démontrer 2.1.

Démontrons maintenant 1.1.

M/G étant un intervalle fermé, il existe une section $\sigma : M/G \to M$ telle que $G_x = H$ soit constant sur son intérieur. Cela résulte de l'existence de la tranche («slice» de [1]) en chaque point de M.

K et L désigneront les sous-groupes de stabilité aux extrémités a et b de σ, $c \subset \sigma$ un point intermédiaire.

Soient P, Q tels que $P \cup Q = M$, $P \cap Q = G(c)$, $G(a) \subset P$, $G(b) \subset Q$.

On a la suite de MAYER-VIETORIS

$$\to H^i(M) \to H^i(P) + H^i(Q) \xrightarrow{\varphi} H^i(G(c)) \to H^{i+1}(M) \ldots$$

où $\varphi(u, v) = h_1^*(u) - h_2^*(v)$, h_1, h_2 étant les inclusions de $G(c)$ dans P et Q.

Supposant $n > 2$, φ est ainsi un isomorphisme bijectif pour $0 < i < n-1$. En composant h_1 et h_2 avec les rétractions de P et Q le long des sections $g(\delta)$, $g \subset G$, sur $G(a)$ et $G(b)$ respectivement, on obtient un isomorphisme bijectif $\psi : H^i(G(a)) + H^i(G(b)) \to H^i(G(c))$ pour $0 < i < n-1$, $\psi(u, v) = p_1^*(u) - p_2^*(v)$, où p_1 et p_2 sont des projections de fibration $G/H \to G/K$ resp. G/L, de fibre K/H resp. L/H. L'isomorphisme ψ et la règle de KÜNNETH montrent alors que a) et b) sont équivalents et entraînent d).

Soient k, l les dimensions de $G(a)$, $G(b)$ respectivement. Soit $S = K(\delta - b)$. C'est une tranche par a. Comme fibre d'une fibration d'un voisinage ouvert invariant de $G(a)$, c'est une $(n-k)-cm$. Comme $S - a$ est $K/H \times E_1$, la suite de cohomologie associée à a montre que $H^*(K/H) = H^*(S^{n-k-1})$.

Les fibrations p_1 et p_2 sont donc à fibres sphériques.

Montrons que d) entraîne b), c) de 1.1.

Dans l'hypothèse d), $\dim K(c) = \dim K/H = n - k - 1 = l = \dim G/L$. Le noyau de $i^* : H^l(G(c)) \to H^l(K(c))$, i étant l'inclusion $K(c) \subset G(c)$, est $p_1^*(H^l(G(a)))$ [3, exposé IX], qui s'identifie à $H^l(G(a))$ par ψ, d'où un isomorphisme $i^* \cdot p_2^* : H^l(G(b)) \to H^l(K(c))$.

De la commutativité de

$$\begin{array}{ccc} H^l(G(b)) & \to & H^l(G(c)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^l(K(b)) & \to & H^l(K(c)) \end{array}$$

où les homomorphismes horizontaux sont induits par p_2, les verticaux par des inclusions, suit alors $\dim K(b) = l$, donc $K(b) = G(b)$ et l'application $K(c) \to G(b)$ induite par p_2 est un revêtement (de fibre $K \cap L/H$). Mais celui-ci est trivial du fait de la bijection $H^l(G(b)) \to H^l(K(c)$. On a un même résultat pour l'application $L(c) \to G(a)$ induite par p_1, d'où b).

Par un point de $G(c)$ ne passe qu'une section $g(\sigma)$. De cela et de ce que l'homéomorphisme $K(c) \to G(b)$ est une projection suivant les sections $g(\sigma)$ par a, on déduit qu'il n'y a qu'une telle section par a et un point de $G(b)$. On a ainsi c) et $G(c) = G(a) \times G(b)$, Comme c) implique évidemment d), les quatre points de 1.1 sont équivalents.

Si maintenant l'orbite principale G/H est $S^k \times S^l$, G/K et G/L sont S^k resp. S^l. Cela résulte de [2] ou [4], par le fait que $G/H = G/K \times G/L$. La réciproque est évidente et M est S^{k+l+1} comme jonction de S^k et S^l.

Cela étant, G opère linéairement sur M.

En effet, l'action de G sur M ne dépend que de l'action de G sur les orbites singulières S^k et S^l. G opère transitivement sur celles-ci comme des groupes orthogonaux $G_1 \subset SO(k+1)$, $G_2 \subset SO(l+1)$ [6]. Il s'ensuit que les actions possibles de G sur la jonction M de S^k et S^l peuvent être réalisées par les représentations sommes de deux groupes orthogonaux tels que G_1 et G_2 opérant sur une sphère de E_{k+l+2} centrée à l'origine. Ceci achève de démontrer 1.1.

Dans le cas plus simple de (G, M) où $H^*(G/H) = H^*(S^{n-1})$, par l'isomorphisme ψ les orbites singulières sont des points fixes et réciproquement. L'action de G sur M ne dépend que de l'action de G sur l'orbite principale G/H et est linéaire si $G/H = S^{n-1}$.

3. Une application

Soit (G, E_n) un groupe de transformations de l'espace euclidien E_n qui ait des orbites de dimension $n-2$. Nous allons résumer ses propriétés d'après [5].

D'abord les orbites de dimension $n-2$ sont régulières, d'un même type G/H. Soient X leur réunion, $B = E_n - X$ la réunion des orbites singulières. Celles-ci sont de dimension $< n-2$. $X/G = X'$ est un plan, $E_n/G = E_n'$ un demi-plan fermé par la droite $B/G = B'$.

Pour un G opérant différentiablement, une forme un peu plus faible que le lemme 3.1 est contenue dans [5]. Ici 3.1 est démontré comme conséquence d'un théorème de G. E. Bredon.

3.1. Lemme. Soit a un point de B. Posons $B = B_1 \cup G(a) \cup B_2$, B_1 et B_2 étant les deux parties de B séparées par $G(a)$.

Supposons $\dim G(x) = \dim G(a)$ sur B_1 au voisinage de $G(a)$. Alors $G(a)$ est régulière relativement à B.

Faisons opérer la composante de l'identité G_a^* de G_a sur une tranche («slice» de [1]) S par a. Soit $F(G_a^*, S)$ l'ensemble des points fixes de S par G_a^*. C'est l'ensemble des x de $B \cap S$ tels que $G_*^a \subset G_x$, c'est-à-dire $\dim G_x = \dim G_a$ puisque $G_x \subset G_a$ sur S. On peut supposer que $B \cap S = G_a(s)$ où s est un arc, section locale de B en a. Il s'ensuit que les composantes connexes de $F(G_a^*, S)$ sont des points isolés ou des réunions finies d'arcs. Sous l'hypothèse de 3.1, $\dim {}_Z F(G_a^*, S) = 1$ (dans la suite, nous écrivons dim pour $\dim_Z$ de [1]).

Les orbites singulières de (G_a^*, S) sont toutes les orbites de $B \cap S$. Posons $U = S - B \cap S$. $U/G_a = (U/G_a^*)/(G_a/G_a^*)$ s'identifie à un ouvert de $(E_n - B)/G$. On a donc

$$2 = \dim U - \dim G_a/H = \dim S - \dim G_a^*/G_a^* \cap H = \dim F(G_a^*, S) + 1 .$$

La dernière identité montre que les hypothèses de [1, chap. XV, 1.4] sont vérifiées pour (G_a^*, S). Les orbites singulières $\subset B \cap S$ de G_a^* sont alors des points fixes au voisinage de a, d'où il suit encore (lemme 2.3, loc, cit.) que $B \cap S$ se réduit à un seul arc au voisinage de a. Par la définition de la tranche $G_x = G_a$ près de a.

Ce lemme et un raisonnement de dualité de [5] que nous ne répétons pas ici (voir les démonstrations des lemmes 10 et 11 de [5]) permettent de montrer que B contient un point fixe p séparant deux types d'orbites. Nous désignons encore leur réunion par B_1 et B_2.

Ces propriétés de (G, E_n) entraînent maintenant que $E_n - p$ est le produit de E_1 par une $(n-1) - cm$ qui est une sphère de cohomologie, sur laquelle G opère.

Car soit D une section de E_n telle que G_x soit constant sur l'intérieur de D et sur $r_1 = B_1 \cap D$, $r_2 = B_2 \cap D$. Une telle section existe par la construction donnée dans la démonstration du lemme 10 de [5].

On peut décomposer $D - p$ en arcs r, deux d'entre eux étant r_1, r_2, et en arcs s qui rencontrent chaque r en un point. Les transformés $g(r)$ sont deux à deux sans point commun.

Soient s_1, s_2 deux arcs s, K le sous-espace compact compris entre $G(s_1)$ et $G(s_2)$, $K_1 = K \cap r_1$. Un point $x \subset K$ détermine univoquement r, s tels que $x = g(r) \cap G(s)$ pour un $g \subset G$. Si l'on définit $h(x) = G(s_1) \cap g(r)$ et $k(x) = G(s) \cap K_1$, l'application $x \to (h(x), k(x))$ de K sur $K_1 \times G(s_1)$ est biunivoque et continue, d'où $E_n - p = r_1 \times G(s_1)$. Les $G(s)$ sont

homéomorphes à $G(s_1)$ par $h(x)$ et des $(n-1)-cm$ qui ont la cohomologie de S^{n-1}.

Ainsi 1.1 est applicable à $G(s)$. Si G/H est une sphère ou un produit de deux sphères, $G(s)$ est une sphère et la décomposition de E_n en rayons $r \cup p$ fait voir que G opère linéairement. Ceci démontre 1.2.

Institute for Advanced Study, Princeton

BIBLIOGRAPHIE

[1] A. Borel, *Seminar on Transformation Groups.* Annals of Mathematics Studies 46, Princeton (1960).
[2] A. Borel, *Les bouts des espaces homogènes de groupes de* Lie. Ann. Math. 58 (1953).
[3] A. Borel, *Cohomologie des espaces localement compacts, d'après* J. Leray. Notes, Zurich, 2e éd. (1957).
[4] G. E. Bredon, *On Homogeneous Cohomology Spheres.* A paraître.
[5] D. Montgomery, H. Samelson, C. T. Yang, *Groups on E^n with $(n-2)$-dimensional orbits.*
[6] J. Poncet, *Groupes de* Lie *compacts de transformations de l'espace* Euclidien *et les sphères comme espaces homogènes.* Comment. Math. Helv., 33 (1959).

(Reçu le 8 mai 1961)