Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 36 (1961-1962)

Artikel: Über die Ordnung von BURNSIDE-Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden.

Autor: Holenweg, W.

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-515618

Über die Ordnung von Burnside-Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden

von W. Holenweg, Luzern

Einleitung

Eine Gruppe mit dem Exponenten p und einer endlichen Anzahl von Erzeugenden heißt Burnside-Gruppe. Burnside hat vermutet, daß jede Burnside-Gruppe endlich ist [1]. Novikov widerlegte jedoch diese Vermutung für die Exponenten $n \geq 72$ [4]. Heute stellt sich das Problem, die Burnside-Gruppen bis zum Exponenten 72 zu untersuchen und für $n \geq 72$ Strukturaussagen über endliche Untergruppen zu finden.

Nach Ph. Hall läßt sich das Burnside-Problem folgendermaßen umformen: «Jede Burnside-Gruppe ist nilpotent.»

Es sei F freie Gruppe mit q Erzeugenden. F^p stellt den von den p-ten Potenzen erzeugten Normalteiler in F dar. Ferner sei

$$F = H_1 \supset H_2 \supset \ldots \supset H_w \supset H_{w+1} \supset \ldots$$

die absteigende Zentralreihe von F.

Wir gehen von der freien Gruppe der Klasse w aus: $G_{w+1} = 1$. Die Faktorgruppe G_h/G_{h+1} ist frei abelsch und hat nach Witt d_h^q Erzeugende [2]. Ist L freie Gruppe mit dem Exponenten p und der Klasse $k (k \leq w)$, so ist L_h homomorphes Bild von $G_h \cdot L_h / L_{h+1}$ ist elementare abelsche Gruppe und besitzt $d_{h,p}^q$ Erzeugende. Wir setzen mit Ph. Hall: $d_{h,p}^q = d_h^q - \delta_h^q$ und bezeichnen δ_h^q als Dimensionsdefekt. Läßt sich eine Methode entwickeln, die gestattet sämtliche Dimensionsdefekte zu bestimmen, so kann die Struktur der Burnside-Gruppen oder deren endliche Untergruppen angegeben werden.

In der vorliegenden Arbeit wird das Ergebnis von [7] auf eine beliebige endliche Zahl q von Erzeugenden erweitert. Dieses lautet dadurch: *Für q freie Erzeugende, das Gewicht $c = p + n$ und $n \leq p - 2$ wird die Defektgruppe genau durch die verschiedenen Relationen e_i erzeugt, welche nur Kommutatoren vom Gewicht p in den Komponenten K_i enthalten.*

Damit lassen sich sämtliche Dimensionsdefekte δ_{p+h}^q für $n < p - 1$ berechnen.

Die Defektgruppe

(Alle Beweise befinden sich in [6] und [7].)

Wir rechnen in diesem Abschnitt mod H_{2p-1}. Dadurch kann H_p als abelsche Gruppe behandelt werden, und H_2 ist nilpotent von der Klasse $c < p$.

Wir setzen: $D = H_{2p-1} H_2^p$, dann gilt:

$$D/H_{2p-1} = \{K_{q+1}^{xq+1} \ldots K_r^{xr}\} \text{ (für } x_{q+1} \text{ ist } xq+1 \text{ gesetzt)}$$
$$\text{mit } x_{q+1}, \ldots, x_r \equiv 0 \bmod p,$$

wobei $K_{q+1}, \ldots, K_r$ die aufsteigende Reihe der Basiskommutatoren vom Gewicht $w = 2$ bis zum Gewicht $w = 2p-2$ bedeutet.

Zur Ermittlung der Dimensionsdefekte vom Gewicht w mit $p \leq w \leq 2p-2$ kann daher stets mod D gerechnet werden.

Jedes Element aus F/D hat die Gestalt [3]:

$$K_1^{x1} \ldots K_q^{xq} K_{q+1}^{xq+1} \ldots K_r^{xr} \text{ mit } -\infty < x_1, \ldots, x_q < +\infty, 0 \leq x_{q+1}, \ldots, x_r < p.$$

Bildet man hiervon die p-te Potenz, so ergibt sich:

$$K_1^{px1} \ldots K_q^{pxq} \prod_i P_i^{ai(p)} \equiv K_1^{px1} \ldots K_q^{pxq} h(x_1, \ldots, x_r),$$

wobei die P_i Kommutatoren in den Erzeugenden K_i $(i = 1, \ldots, r)$ sind und vom Gewicht $w < p$ in diesen Komponenten. Die P_i vom Gewicht

$$2 \leq w \leq p$$

in den Komponenten K_i liegen in D.

Wir bezeichnen die Gruppe $\{h(x_1, \ldots, x_r), D\}$ mit D' und nennen D'/D Defektgruppe. Über die Defektgruppe gilt nun der folgende wichtige Satz:

1. Satz. *Zur Bestimmung der Dimensionsdefekte im Bereiche* $0 \leq w \leq 2p-2$ *hat man nur die Defektgruppe zu betrachten.* δ_w^q *ist gleich der Anzahl aller*

$$\begin{array}{c} h(1, x_2, \ldots\ldots, x_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h(0, \ldots, 0, 1, x_{q+1}, \ldots, x_r) \end{array}$$

mit $0 \leq x_2, \ldots, x_r < p$ *in* $H_w D/D$, *die* $\bmod H_{w+1} D$ *voneinander unabhängig sind.*

Die in (1) auftretenden h ergeben sich aus den Potenzen:

$$\begin{array}{ll} (K_1 K_2^{x2} \ldots K_r^{xr})^p, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & 0 \leq x_2, \ldots, x_r < p; w(K_r) \leq p-1 \\ (K_q, K_{q+1}^{xq+1}, \ldots, K_r^{xr})^p. & \end{array}$$

Wir denken uns diese Potenzen formal in den Unbestimmten $x_1, \ldots, x_r$ berechnet. Da D'/D elementare abelsche Gruppe ist, lassen sich die auftretenden

Exponenten mod p reduzieren. Ordnen wir anschließend nach den verschiedenen Monomen m_i in den x_i, so wird das generelle h:

$$h(1, x_2, \ldots, x_r) \equiv e_1^{m1} \ldots e_s^{ms}.$$

Es gilt der grundlegende Satz:

2. Satz. *Die Defektgruppe wird von den Elementen e_i erzeugt.*

Die e_i sind dabei Produkte von solchen Kommutatoren in den $K_j (j = 1, .., r)$, welche alle dieselben reduzierten Exponenten besitzen.

Untersucht man die möglichen Exponenten, so folgt:

3. Satz. *Für $p \leq c \leq 2p - 2$ wird D'/D durch solche e_i erzeugt, welche nur Kommutatoren vom Gewicht p in den Komponenten K_j enthalten.*

Bekanntlich gilt für $c < p$: $\delta_c^q = 0$.

Unabhängige Erzeugende der Defektgruppe

Um über die Unabhängigkeit der e_i weitere Aussagen machen zu können, teilen wir die Basiskommutatoren nach zwei verschiedenen Gesichtspunkten ein.

a) Einteilung nach dem Gewicht eines Kommutators. In diesem Fall spricht man vom Typus eines Kommutators.

Definition. F sei freie Gruppe mit den freien Erzeugenden $K_1, .., K_q$. Ein Kommutator heißt vom Typus $(w_1, \ldots, w_q)$, wenn er in der Komponente K_i das Gewicht w_i besitzt $(i = 1, \ldots, q)$.

Sind L und K Kommutatoren aus F mit den Typen $(v_1, \ldots, v_q)$ beziehungsweise $(w_1, .., w_q)$, so sagen wir, L und K seien vom selben Typus, falls $w_i = v_i (i = 1, .., q)$.

b) Einteilung des Kommutators nach den Erzeugenden. Hier spricht man von der Art eines Kommutators.

Wir definieren induktiv, was man unter der Stufe eines Kommutators versteht. Die freien Erzeugenden $K_1, \ldots, K_q$ heißen von 0-ter Stufe. Ein Kommutator $[K_{mi}, K_{mj}]$ heißt von s-ter Stufe, falls die Stufe von K_{mi} gleich s_{mi}, diejenige von K_{mj} gleich s_{mj} und $s = \max(s_{mi}, s_{mj} + 1)$. Nun betrachten wir die geordnete Reihe der Basiskommutatoren. Basiskommutatoren in dieser Reihe werden identifiziert, falls sie gleiches Gewicht, gleiche Stufe und für jeden erzeugenden Basiskommutator $K_m = [K_{m1}, K_{m2}]$ mit

$$w(K_m) > 2$$

in K_{m1} gleiches Gewicht besitzen. Tritt dabei ein Kommutator an i-ter Stelle auf, so heißt er Kommutator i-ter Ordnung. Diese Ordnung ist automatisch vorhanden.

Definition. Ein Kommutator heißt von der Art $(t_1, \ldots, t_s)$, wenn er t_i Erzeugende i-ter Ordnung enthält.

Sind K und L Kommutatoren der Art $(t_1, \ldots, t_s)$ beziehungsweise $(r_1, \ldots, r_n)$, so sagen wir, K und L seien von derselben Art, falls $n = s$ und $t_i = r_i (i = 1, \ldots, s)$.

Diese Einteilung der Kommutatoren gestattet die Formulierung folgender Sätze [7]:

4. Satz. *Alle e_i mit Kommutatoren verschiedener Typen sind unabhängig.*

5. Satz. *Wird die Defektgruppe nur durch solche e_i erzeugt, die Kommutatoren ein und derselben Art besitzen, so sind alle e_i unabhängig.*

Setzen wir $c = p + n$, so ist für $n = 0{,}1$ die Voraussetzung von (5) erfüllt; also lassen sich die Dimensionsdefekte δ_p^q, δ_{p+1}^q bestimmen. Diese wurden erstmals in [5] mit Hilfe des Lieschen Ringes berechnet.

Sind gewisse e_i des Typus $(w_1, \ldots, w_q)$ abhängig, so bedeutet das:

Zwischen den Relationen e_i des Typus $(w_1, \ldots, w_q)$ besteht eine Abhängigkeitskongruenz der Form:

$$C_1^{\alpha 1} \ldots C_s^{\alpha s} \equiv C_{s+1} \, (e_{mi} = C_i) .$$

Diese Kongruenz soll gekürzt sein; das heißt, bei Weglassen einer Relation C_j tritt Unabhängigkeit auf.

Wir verwenden im folgenden Abbildungen innerhalb den Gruppen H_w. Sind homomorphe Abbildungen für H_w gesucht, so genügt es, homomorphe Abbildungen innerhalb der freien Gruppe F zu bestimmen [7].

Jedes Element aus F/H_{c+1} hat die Gestalt:

$$f \equiv K_{1,1}^{x1,1} \ldots . K_{1,q}^{x1,q} \ldots K_{c,1}^{xc,1} \ldots K_{c,dc}^{xc,dc} \, (-\infty < x_{i,j} < +\infty) ,$$

wobei $K_{i,j}$ der Basiskommutator vom Gewicht i ist und an der Stelle j der Basiskommutatoren des Gewichtes i vorkommt. Wir nennen $K_{i,j}$ Erzeugende von F/H_{c+1}, $K_{1,i}$ $(i = 1, \ldots, q)$ freie Erzeugende von F. Jedes Element von F/H_{c+1}, das durch die geordnete aufsteigende Reihe von Basiskommutatoren gegeben ist, heiße f-Element. Wird auf zwei aufeinandergereihte f-Elemente der Hallsche Durchziehprozeß ausgeübt, so erhält man wiederum ein f-Element. Diesen Vorgang nennen wir Produkt zweier f-Elemente. Werden bei der Produktbildung keine Kommutatoren umbenennt, was in allen unsern Untersuchungen der Fall ist, so treten im Produkt nur die Erzeugenden der ursprünglichen f-Elemente und Basiskommutatoren in diesen Erzeugenden auf. Das assoziative Gesetz von F überträgt sich automatisch auf Produkte von f-Elementen. $\{f\}$ sei die Gruppe erzeugt durch bestimmte f-Elemente; dann ist $\{f\} \subseteq F$. Jede homomorphe Abbildung für f-Elemente bedeutet einen Homomorphismus von $\{f\}$ in sich.

Die Abbildung σ: In allen f-Elementen, die zur Bildung von $\{f\}$ berücksichtigt werden, trete die Erzeugende $K_{r,s}$ nicht auf $(r > 1)$. σ bilde die benachbarte Erzeugende gleichen Gewichts $K_{r,s+1}$ (oder $K_{r,s-1}$) auf $K_{r,s}$ ab. Dann ist σ isomorphe Abbildung für f-Elemente ohne $K_{r,s}$ in solche ohne $K_{r,s+1}$ (siehe [7]). Das Erzeugendensystem von $\{f\}$ ohne $K_{r,s}$ sei M, dasjenige von $\{f'\}$ ohne $K_{r,s+1}$ sei M'. Durch σ wird $M \cong M'$ und damit $\{f\} \cong \{f'\}$. σ ändert das Gewicht der Erzeugenden nicht. Wird σ auf H_{c+1} angewandt, so fallen sämtliche Kommutatoren der Form $[K_{r,s+1}, K_{r,s}, \ldots]$ weg. Damit ist σ $(H_{c+1}) \subset H_{c+1}$ und auch nach angewandter Abbildung σ kann mod H_{c+1} gerechnet werden.

Nun untersuchen wir die Unabhängigkeit der Relationen von Basiskommutatoren mit q freien Erzeugenden.

F_q sei freie Gruppe mit den q freien Erzeugenden: $K_1, K_2, \ldots, K_q$. Wir betrachten die folgende Reihe von Abbildungen:

$$\iota_i : K_i \to K_{2i-1}\ (i = q, \ldots, 1) \quad \text{und setzen} \quad \iota = (\iota_1, \ldots, \iota_q).$$

ι_q bettet F_q in F_{2q-1} isomorph ein. Jede Abbildung $\iota_i (i = q-1, \ldots, 1)$ bildet die eingebettete Untergruppe in eine dazu isomorphe Untergruppe von F_{2q-1} ab. Wendet man also die isomorphe Reihenabbildung ι auf F an, so erhält man eine zu F_q isomorphe Untergruppe von F_{2q-1}, die nur freie Erzeugende mit ungeraden Indizes enthält. Über solche Erzeugende gilt die Aussage:

6. Hilfssatz. *In der aufsteigenden Reihe der Basiskommutatoren können benachbarte Glieder nicht nur durch freie Erzeugende mit ungeraden Indizes gebildet werden.*

Beweis: Wir führen den Beweis induktiv. Für die freien Erzeugenden

$$K_i (i = 1, \ldots, q)$$

ist der Satz trivial. Wir können also annehmen, für Basiskommutatoren des Gewichtes $< w$ sei unsere Annahme richtig. Es sei $K_{w,i} = [K_{d,r}, K_{c,s}]$ ein Basiskommutator des Gewichtes w und $K_{w,i+1} = [K_{a,k}, K_{b,j}]$ der zu ihm benachbarte. Dann gilt nach der Definition der Basiskommutatoren: a) es sind $K_{c,s}$ und $K_{b,j}$ benachbart oder b) $K_{d,s}$ und $K_{a,k}$ sind benachbart (falls

$K_{s,s} = K_{b,j}$). Die Bedingungen erfüllen nach Induktionsvoraussetzung unsere Behauptung; also ist diese auch für benachbarte Kommutatoren des Gewichtes w erfüllt.

Bilden wir mittels ι F_q auf eine Untergruppe F'_{2q-1} von F_{2q-1} ab, so bedeutet die Abbildung σ eine isomorphe Abbildung von F'_{2q-1} innerhalb F_{2q-1}.

Um die Unabhängigkeit von Kommutatoren mit q freien Erzeugenden zu zeigen, beweisen wir vorerst den folgenden Hilfssatz:

7. Hilfssatz. *Die Relationen von Kommutatoren mit q freien Erzeugenden und von einer Art sind für $c = p + n$ und $n \leq p - 2$ unabhängig.*

Beweis (indirekt): Es bestehe die folgende Abhängigkeitskongruenz:

$$C_1^{\alpha 1} \dots C_s^{\alpha s} \equiv C_{s+1}. \tag{I}$$

Wir unterscheiden zwei Fälle:

α) In (I) treten nur Erzeugende 1. Stufe auf; d. h. die f-Elemente, welche zu (I) Anlaß geben, enthalten nur Basiskommutatoren 1. Stufe. In den verschiedenen Relationen C_i sind verschiedene Basiskommutatoren enthalten, denn sonst stellt (I) eine Identität dar. Da aber nach Voraussetzung sämtliche Kommutatoren der Relationen C_i von gleicher Art sind, muß der Unterschied in gewissen Erzeugenden gleichen Gewichts (> 1) liegen. Basiskommutatoren 1. Stufe und gleichen Gewichts sind jedoch nur dann verschieden, wenn sie verschiedenen Typus besitzen. Wir können also annehmen, daß die Erzeugende $K_{r,s}$ $(r > 1)$ in den Kommutatoren der verschiedenen Relationen nicht gleich oft vorkommt. Damit jedoch die Art erhalten bleibt, treten an ihrer Stelle als Ergänzung Erzeugende $K_{r,n}$ eines andern Typus auf.

Wir wenden ι auf F_q an. Dabei geht die Kongruenz (I) in eine solche von F_{2q-1} über. In der neuen Kongruenz, wir nennen sie (I'), sind die freien Erzeugenden K_i mit $i = 2n (n = 1, \dots, q-1)$ nicht enthalten. Die Elemente f' sollen zur Kongruenz (I') Anlaß geben.

Der Zusammenhang von $K_{r,s}$ und $K_{r,n}$ bleibt auch für $K'_{r,s}$ und $K'_{r,n}$ erhalten. Sind $K'_{r,s}$ und $K'_{r,m}$ benachbarte Basiskommutatoren, so kann nach (6) zwischen $K_{r,s}$ und $K_{r,m}$ ein Basiskommutator eingeschoben werden. Wende ich auf $\{f'\} \subset F_{2q-1}$ die Abbildung σ an $(\sigma : K'_{r,s} \to K'_{r,s+1})$, so bleibt die Kongruenz als solche bestehen. Hingegen enthält nun $K'_{r,s+1}$ als benachbarter Basiskommutator wenigstens eine freie Erzeugende K_i mit $i = 2n (n = 1, \dots, q-1)$; d. h. die Typen von $K'_{r,s}$ und $K'_{r,s+1}$ sind verschieden. Da die Erzeugende $K'_{r,s}$ in den Kommutatoren der verschiedenen Relationen C_i verschieden oft vorkommt, treten in der umgeformten

Kongruenz Relationen mit Kommutatoren verschiedener Typen auf, was (4) widerspricht.

β) In (I) treten auch Erzeugende 2. Stufe auf. Unterscheiden sich die Erzeugenden 2. Stufe nicht, so kann α) wiederholt werden. Die Erzeugenden 2. Stufe sollen verschieden sein; d. h. falls $K_{r,s}$ Erzeugende 2. Stufe ist, kann ich annehmen, daß $K_{r,s}$ in den Kommutatoren verschiedener Relationen verschieden oft vorkommt. Werden also, wie unter α), die Abbildungen ι und σ ausgeführt, so läßt sich derselbe Schluß wiederholen. In analoger Weise läßt sich der Beweis auf Erzeugende beliebiger Stufe ausdehnen. Damit ergibt sich nun:

8. Satz. *Die Relationen der Kommutatoren mit q freien Erzeugenden sind für $c = p + n$ und $n \leq p - 2$ unabhängig.*

Beweis (indirekt): Es bestehe folgende Abhängigkeitskongruenz:

$$C_1^{\alpha 1} \dots C_s^{\alpha s} \equiv C_{s+1} \tag{I}$$

In (I) treten wenigstens zwei Arten von Kommutatoren auf, sonst ergibt sich aus (7) ein Widerspruch. Es gibt daher mindestens eine Erzeugende $K_{r,s} (r > 1)$, die nicht in allen Kommutatoren der Relationen von (I) gleich oft vorkommt. Mit Hilfe der Abbildungen ι und $\sigma: K'_{r,s} \to K'_{r,s+1}$ kann daher der Beweis analog zu (7) geführt werden.

Verbindet man die Sätze (3) und (8), so erhält man das folgende Hauptergebnis:

9. Hauptsatz. *Für q freie Erzeugende, das Gewicht $c = p + n$ und $n \leq p-2$ wird die Defektgruppe genau durch die verschiedenen Relationen e_i erzeugt, welche nur Kommutatoren vom Gewicht p in den Komponenten K_i enthalten.*

Mit Hilfe von (9) lassen sich sämtliche Dimensionsdefekte δ^q_{p+n} für $n \leq p-2$ berechnen.

Beispiele:

$$\delta^q_p = \binom{p+q-1}{q} - q \qquad [5]$$

$$\delta^q_{p+1} = d^q_2 \binom{p+q-2}{p-1} \text{ für } p > 2 \qquad [5]$$

$$\delta^q_{p+2} = d^q_3 \binom{p+q-2}{p-1} + \binom{d^q_2+1}{2}\binom{p+q-3}{p-2} \text{ für } p > 3$$

$$\delta^q_{p+3} = d^q_4 \binom{p+q-2}{p-1} + d^q_2 \cdot d^q_3 \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{d^q_2+2}{3}\binom{p+q-4}{p-3} \text{ für } p > 4$$

$$\delta_{p+4}^q = d_5^q \binom{p+q-2}{p-1} + d_2^q \cdot d_4^q \binom{p+q-3}{p-2} + \binom{d_3^q+1}{2} \binom{p+q-3}{p-2} +$$
$$+ d_3^q \binom{d_2^q+1}{2} \binom{p+q-4}{p-3} + \binom{d_2^q+3}{4} \binom{p+q-5}{p-4} \quad \text{für } p > 5 .$$

LITERATUR

[1] W. BURNSIDE, *On an unsettled question in the theory of discontinuous groups.* Quart. J. Math. 33 (1902), 230–238.

[2] E. WITT, *Treue Darstellung* LIE*scher Ringe.* J. reine angew. Math. 177 (1937), 152–160.

[3] M. HALL, *A basis for free* LIE*rings and higher commutators in free groups.* Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950).

[4] P. NOVIKOV, *On periodic groups.* Dokl. Akad. Nauk. SSSR 127 (1959), 749–752.

[5] R. C. LYNDON, *On* BURNSIDE *Problems.* Trans. Amer. Math. Soc. 77, (1954), 202–215.
On BURNSIDE *Problems II.* Trans. Amer. Math. Soc. 78 (1955), 329–332.

[6] H. MEIER-WUNDERLI, *Über die Struktur der* BURNSIDE-*Gruppen mit zwei Erzeugenden und vom Primzahlexponenten* $p > 3$. Comment. Math. Helv. 30 (1956), 144–174.

[7] W. HOLENWEG, *Die Dimensionsdefekte der* BURNSIDE-*Gruppen mit zwei Erzeugenden.* Comment. Math. Helv. 35 (1961).

(Eingegangen den 27. Februar 1961)