

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 36 (1961-1962)

**Artikel:** Plongements différentiables de variétés dans variétés.  
**Autor:** Haefliger, André  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-515617>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Plongements différentiables de variétés dans variétés<sup>1)</sup>

par ANDRÉ HAEFLIGER Princeton, N.J. (USA) Institute for Advanced Study

## Introduction

Le but de ce travail est de démontrer une partie des résultats annoncés dans [2].

Les variétés et les applications de variétés dans variétés considérées ici seront toujours indéfiniment différentiables, sauf mention explicite du contraire. Un *difféomorphisme* est un homéomorphisme différentiable dont l'inverse est aussi différentiable. Un *plongement* d'une variété compacte  $V$  dans une variété  $M$  est une application biunivoque de  $V$  dans  $M$  dont le rang est partout égal à la dimension de  $V$ .

Deux plongements  $f_0$  et  $f_1$  de  $V$  dans  $M$  sont *isotopes* (ou *difféotopes*) s'il existe une application  $F: V \times I \rightarrow M$ , où  $I$  est l'intervalle  $[0, 1]$ , telle que, pour tout  $t \in I$  fixé, l'application  $x \rightarrow F(x, t)$  est un plongement de  $V$  dans  $M$ , égal à  $f_0$  pour  $t = 0$  et à  $f_1$  pour  $t = 1$ . L'application  $F$  est appelée une *isotopie* (ou *difféotopie*) reliant  $f_0$  à  $f_1$ .

Cette définition est équivalente à la suivante ( $V$  étant toujours supposé compact): il existe une application  $H: M \times I \rightarrow M$  telle que, pour tout  $t \in I$  fixé, l'application  $x \rightarrow H(x, t)$  est un difféomorphisme de  $M$  sur  $M$ , égal à l'identité pour  $t = 0$  et tel que  $f_1(x) = H(f_0(x), 1)$ .

L'équivalence de ces deux définitions a été remarquée par THOM dans [6].

**Théorème d'existence.** Soit  $V$  une variété compacte connexe sans bord de dimension  $n$  et soit  $M$  une variété de dimension  $m$ . Soit  $f$  une application continue de  $V$  dans  $M$  telle que  $\pi_i(f) = 0$  pour  $i \leq k + 1$  (i.e. l'homomorphisme  $\pi_i(V) \rightarrow \pi_i(M)$  induit par  $f$  est un isomorphisme pour  $i \leq k$  et est surjectif pour  $i = k + 1$ ). Alors

a)  $f$  est homotope à un plongement si  $m \geq 2n - k$  et  $n > 2k + 2$  (ou, ce qui revient au même,  $m \geq 2n - k$  et  $2m \geq 3(n + 1)$ ),

b) deux plongements de  $V$  dans  $M$  homotopes à  $f$  sont isotopes si  $m > 2n - k$  et  $n \geq 2k + 2$  (ou  $m > 2n - k$  et  $2m > 3(n + 1)$ ).

En particulier, si  $V$  est  $k$ -connexe et  $M$   $(k + 1)$ -connexe, le théorème s'applique pour toute application  $f$ . Le fait que les hypothèses de connectivité sur  $V$  et  $M$  peuvent être remplacées par les hypothèses sur  $\pi_i(f)$  (voir 0.4) m'a été suggéré par J. MILNOR.

---

<sup>1)</sup> This work was partially supported by NSF Grant G-10.700.

Ce théorème est une généralisation des résultats classiques de WHITNEY (cf. [8], [12]) et d'un théorème de WU [15].

Dans l'énoncé suivant, deux plongements topologiques  $f_0$  et  $f_1$  de  $V$  dans  $M$  sont dits isotopes, s'il existe une application continue  $F: V \times I \rightarrow M$  telle que, pour chaque  $t$  fixé,  $x \rightarrow F(x, t)$  est un plongement topologique, égal à  $f_0$  pour  $t = 0$  et à  $f_1$  pour  $t = 1$ .

**Théorème d'approximation.** *Soient  $V$  une variété compacte de dimension  $n$  et  $M$  une variété de dimension  $m$ .*

a) *Tout plongement topologique de  $V$  dans  $M$  peut être approché arbitrairement près par un plongement différentiable si  $2m \geq 3(n + 1)$ .*

b) *Deux plongements différentiables de  $V$  dans  $M$  qui sont isotopes en tant que plongements topologiques, sont aussi difféotopes, si  $2m > 3(n + 1)$ , l'isotopie différentiable pouvant approcher l'isotopie topologique.*

Ce théorème est démontré ici seulement si  $V$  n'a pas de bord, bien qu'il soit encore valable sans cette hypothèse. En revanche, le théorème d'existence n'est pas vrai en général si  $V$  a un bord non vide (par exemple les hypothèses de connectivité sur  $V$  pourraient être remplacées par des hypothèses de connectivité de  $V$  modulo sa frontière).

Nous n'utilisons aucun résultat récent, mais exclusivement les techniques développées par WHITNEY (et mises sous forme générale par THOM) dans l'étude des singularités des applications différentiables.

La première partie (§ 1 à § 3) est consacrée à l'étude des applications génériques de  $V$  dans  $M$ , où  $2m > 3n$ ; la seconde (§ 4 à § 6) contient la démonstration des théorèmes annoncés.

Dans le § 1, nous rappelons quelques théorèmes généraux qui sont à la base de l'étude des singularités des applications différentiables. Au § 2, nous définissons avec précision la notion d'application générique de  $V$  dans  $M$  ( $2m > 3n$ ) et nous montrons l'existence de telles applications. Enfin le § 3, qui est une extension simple de résultats classiques de WHITNEY, étudie plus précisément le comportement d'une application générique le long de la sous-variété des points singuliers. Les seuls faits nécessaires pour comprendre la suite sont 2.5, 2.7 et 3.2 à 3.4.

La démonstration du théorème d'existence a) occupe le § 4. La méthode est en gros la suivante. On remplace l'application donnée de  $V$  dans  $M$  par une application homotope  $f$  générique, c'est-à-dire une application dont l'aspect géométrique est le plus simple possible. Les points doubles de  $f$  forment une sous-variété  $\Delta$  dans  $M$  dont le bord est l'image par  $f$  des points où le rang de  $f$  est inférieur à  $n$ . On déforme alors pas à pas l'application  $f$  pour éliminer progressivement les points doubles le long de  $\Delta$ . Pour décrire

chaque déformation, nous construisons un *modèle* explicite d'une déformation d'une application de  $R^n$  dans  $R^m$  et nous identifions ce modèle avec la situation donnée en utilisant les hypothèses de connectivité et les inégalités sur les dimensions.

La démonstration du théorème d'existence pour les isotopies suit le même schéma, et nous indiquons au § 5 quelles sont les précisions nouvelles à apporter. Enfin le § 6 contient la démonstration des théorèmes d'approximation.

La méthode utilisée dans ce travail est très directe et géométrique. Elle a donc le désavantage d'être difficile à rédiger; mais nous espérons cependant qu'elle permet de rendre clair à l'intuition spatiale les propriétés démontrées, pour autant que le lecteur ait la patience d'étudier très attentivement les modèles de déformations (4.4 et 4.10) et de faire des croquis pour les petites dimensions.

Plusieurs autres résultats, concernant notamment les variétés à bord et les premières obstructions, pourraient être obtenus par des méthodes semblables. Nous préférons revenir sur ces questions dans une publication ultérieure (qui donnera en particulier la démonstration du théorème 3 de [2] et sa généralisation au cas où  $R^m$  est remplacé par une variété  $M$ ) en utilisant des résultats plus récents tels que la classification des immersions d'après SMALE-HIRSCH et la théorie des obstructions de SHAPIRO-WU.

### Terminologie et notations

**0.1.** Rappelons encore une fois que toutes les variétés considérées ici seront supposées implicitement indéfiniment différentiables et paracompactes, et que par application d'une variété dans une autre, nous entendons toujours une application indéfiniment différentiable. Par exemple une *fonction numérique* sur une variété  $V$  est une application indéfiniment différentiable de  $V$  dans la droite numérique  $R$ . Une *sous-variété*  $W$  de  $V$  signifie aussi une sous-variété indéfiniment différentiable, c'est-à-dire un sous-espace de  $V$  défini localement par les zéros communs d'un nombre fini de fonctions indépendantes; la *codimension* de  $W$  dans  $V$  est égale à la différence de la dimension de  $V$  et de la dimension de  $W$ .

Si  $f$  est une application de  $X$  dans  $Y$ , la restriction de  $f$  à un sous-ensemble  $Z$  de  $X$  est notée  $f|Z$ . De même si  $E$  est un fibré de base  $B$  et de projection  $p$ , et si  $A$  est un sous-espace de  $B$ , la restriction  $p^{-1}(A)$  de  $E$  à  $A$  est notée  $E|A$ . La fibre de  $E$  au-dessus d'un point  $x$  de  $B$  est désignée par  $E_x$ .

**0.2.** Le fibré des vecteurs tangents à une variété  $V$  est noté  $T(V)$ ;  $V_x$  est l'espace tangent à  $V$  en un point  $x \in V$ . Toute application  $f$  d'une

variété  $V$  dans une variété  $M$  induit une représentation  $df: T(V) \rightarrow T(M)$  appelée la *différentielle de  $f$* ; elle applique un vecteur de  $V_x$  sur un vecteur de  $V_{f(x)}$ . En particulier, si  $f$  est une fonction numérique sur  $V$  et  $v$  un vecteur de  $V_x$ ,  $df(v)$  est un vecteur de  $R$  déterminé par son origine  $f(x)$  et par sa longueur notée  $\langle df, v \rangle$ .

Un point *singulier* (ou critique) d'une application  $f$  de  $V$  dans  $M$  est un point  $x \in V$  où le *rang de  $f$*  (c'est-à-dire le rang de l'application linéaire  $df|_{V_x}$ ) est inférieur au minimum de la dimension de  $V$  et de celle de  $M$ . Un point *double* de  $f$  est un point  $y$  de  $M$  tel que  $f^{-1}(y)$  se compose de deux points distincts.

Dans l'espace numérique  $R^n$  de coordonnées  $x_1, \dots, x_n$ , on désigne par  $\partial/\partial x_i$  le champ de vecteurs qui associe à tout point le vecteur dont toutes les composantes sont nulles, sauf la  $i$ ème égale à 1.

**0.3.** De la théorie des jets infinitésimaux de C. EHRESMANN [1], nous n'utiliserons que les définitions les plus élémentaires, et seulement pour démontrer l'existence des applications génériques (2.5). Rappelons que deux applications  $f$  et  $f'$  de  $V$  dans  $M$  définies au voisinage d'un point  $x$  de  $V$  ont le même jet d'ordre  $r$  en  $x$  si, exprimées dans les mêmes coordonnées locales, les dérivées partielles d'ordre  $\leq r$  de  $f$  en  $x$  sont égales aux dérivées partielles correspondantes de  $f'$  en  $x$ . Le point  $x$  est la *source* du jet d'ordre  $r$  de  $f$  en  $x$  et  $y = f(x)$  est son *but*.

L'ensemble des jets d'ordre  $r$  de  $V$  dans  $M$  forme une variété (différentiable) notée  $J^r(V, M)$ . La projection associant à chaque jet sa source définit sur  $J^r(V, M)$  une structure fibrée de base  $V$ . Toute application  $f$  de  $V$  dans  $M$  définit une section  $f^r$  de ce fibré, celle qui associe à tout  $x \in V$  le jet d'ordre  $r$  de  $f$  en  $x$ . Par exemple, si  $r = 0$ ,  $J^0(V, M) = V \times M$  et  $f^0: x \rightarrow (x, f(x))$  sera souvent identifié à  $f$ . Si  $r = 1$ ,  $J^1(V, M)$  est l'espace fibré sur  $V$  dont la fibre au-dessus de  $x$  est l'espace des applications linéaires de  $V_x$  dans une fibre arbitraire de  $M$ . La donnée de la différentielle  $df$  de  $f$  en un point est équivalente à celle du jet d'ordre 1 de  $f$  en ce point.

Un *jet singulier* est le jet d'une application en un point singulier.

**0.4. Définition du groupe  $\pi_i(f)$ .** Rappelons que si  $f$  est une application continue d'un espace  $X$  dans un espace  $Y$ , le «mapping cylinder» de  $f$  est l'espace  $Y_f$  obtenu en identifiant dans l'espace somme  $(X \times I) \cup Y$  les points  $(x, 1) \in X \times I$  et  $f(x) \in Y$ . L'espace  $X$  s'identifie au sous-espace  $X \times \{0\}$  de  $Y_f$ . La projection appliquant un point  $(x, t) \in X \times I$  sur  $f(x)$  et un point  $y \in Y$  sur  $y$  définit une projection  $j$  de  $Y_f$  sur  $Y$  qui est une

homotopie équivalence. L'injection  $i$  de  $X$  dans  $Y$ , a le même type d'homotopie que  $f$ .

Par définition,  $\pi_i(f) = \pi_i(Y_f, X)$ ; ce groupe ne dépend que du type d'homotopie de  $f$ . La suite exacte d'homotopie de  $Y_f$  relative à  $X$  donne la suite exacte:  $\rightarrow \pi_i(X) \xrightarrow{f^*} \pi_i(Y) \rightarrow \pi_i(f) \rightarrow \pi_{i-1}(X) \xrightarrow{f^*} \pi_{i-1}(Y)$ . La condition  $\pi_i(f) = 0$  est donc équivalente à  $f^*: \pi_i(X) \rightarrow \pi_i(Y)$  est surjectif et  $f^*: \pi_{i-1}(X) \rightarrow \pi_{i-1}(Y)$  est injectif.

## 1. Théorèmes d'extension et de transversalité

Nous rappelons dans ce paragraphe quelques théorèmes généraux sur les applications différentiables qui sont fondamentaux en «topologie différentielle».

*Théorèmes d'extension.* Dans les 4 numéros qui suivent,  $E$  désigne un fibré différentiable localement trivial: l'espace total  $E$ , la fibre  $F$ , la base  $B$  sont des variétés différentiables paracompactes, la projection  $p: E \rightarrow B$  est différentiable et de rang égal à la dimension de  $B$ . Enfin  $A$  est un sous-espace fermé de  $B$ .

**1.1. Proposition.** *Toute section  $f$  de  $E$  définie sur  $A$  est la restriction à  $A$  d'une section différentiable de  $E$  définie sur un voisinage de  $A$  si et seulement si c'est vrai localement, c'est-à-dire si, pour tout  $x \in A$ , il existe une section différentiable  $f_x$  définie sur un voisinage ouvert  $U_x$  de  $x$  telle que  $f_x = f$  sur  $U_x \cap A$ .*

Une telle section  $f$  de  $E$  définie sur  $A$  sera dite *différentiable sur  $A$* .

**1.2. Démonstration.** Soit  $\{U_n\}$  un recouvrement dénombrable d'un voisinage de  $A$  par des ouverts relativement compacts  $U_n$  tel qu'il existe, pour chaque  $n$ , une section  $f_n$  de  $E$  définie sur  $U_n$  avec  $f = f_n$  sur  $A \cap U_n$ . Ce recouvrement sera choisi assez fin de sorte que, pour tout  $n$ , il existe un isomorphisme  $z \rightarrow (p(z), q_n(z))$  de  $p^{-1}(U_n)$  sur  $U_n \times F$  et que  $q_n f_n(U_n \cap A)$  soit contenu dans le domaine  $O_n \subset F$  d'un système de coordonnées  $\gamma_n: O_n \rightarrow R^q$  ( $q = \dim F$ ). Soit  $\{A_n\}$  un recouvrement de  $A$  par des compacts  $A_n \subset U_n$ .

Supposons qu'une section  $\varphi^{n-1}$  soit déjà construite sur un ouvert  $U^{n-1}$  contenant un voisinage compact  $W^{n-1}$  de  $A^{n-1} = \bigcup_{i < n} A_i$  et telle que  $\varphi^{n-1} = f$  sur  $A^{n-1}$ . Soit  $\alpha$  une fonction numérique positive sur  $B$ , égale à 1 sur  $W^{n-1}$  et à zéro en dehors de  $U^{n-1}$ . En termes des coordonnées fibrées au-dessus de  $U_n$ , considérons la section  $\varphi_n$  de  $E$  définie au-dessus d'un voisinage assez petit  $W_n$  de  $A_n$  par

$$\varphi_n(x) = (x, \gamma_n^{-1}[\alpha(x) \cdot \gamma_n q_n \varphi^{n-1}(x) + (1 - \alpha(x)) \cdot \gamma_n q_n f_n(x)]);$$

dans cette expression, le point désigne la multiplication par un scalaire d'un point de  $R^q$  considéré comme un vecteur; le premier terme de la somme est égal à zéro si  $x \notin U^{n-1}$ . Cette section locale est égale à  $f$  sur  $A_n$  et à  $\varphi^{n-1}$  sur  $W_n \cap W^{n-1}$ . Posons donc  $\varphi^n$  égale à  $\varphi^{n-1}$  sur  $W^{n-1}$  et à  $\varphi_n$  sur  $W_n$ , et  $W^n = W_n \cap W^{n-1}$ . En répétant cette construction successivement pour chaque entier  $n$ , on obtient l'extension désirée.

**1.3.** Plus généralement, soit  $E^r$  le fibré sur  $B$  des jets d'ordre  $r$  ( $r \geq 0$ ) des sections locales de  $E$ . Par définition, deux sections  $f_1$  et  $f_2$  de  $E$  définies au-dessus de voisinages de  $A$  ont le même jet d'ordre  $r$  le long de  $A$  si les sections  $f_1^r$  et  $f_2^r$  de  $E^r$ , associant à chaque point d'un voisinage de  $A$  le jet d'ordre  $r$  de  $f_1$  et  $f_2$  en ce point, coïncident sur  $A$ . Ceci veut dire par exemple que, si  $r = 0$ , alors  $f_1 = f_2$  sur  $A$ , que si  $r = 1$ , alors  $df_1 = df_2$  sur  $A$ , ...

La démonstration précédente montre aussi plus généralement la

**Proposition.** *Une section  $f^r$  de  $E^r$  au-dessus de  $A$  est le jet d'ordre  $r$  le long de  $A$  d'une section  $f$  de  $E$  définie dans un voisinage de  $A$  si et seulement si, pour chaque point  $x$  de  $A$ , il existe une section  $f_x$  de  $E$  définie dans un voisinage  $U_x$  de  $x$  telle que  $f_x^r = f^r$  le long de  $U_x \cap A$ .*

**1.4. Théorème.** *Si  $g$  est une section continue de  $E$  dont la restriction à  $A$  est différentiable (cf. 1.1), il existe une section différentiable  $f$  de  $E$ , égale à  $g$  sur  $A$ , et arbitrairement proche de  $g$ .*

Pour la démonstration, cf. [4], 6.7 (compte tenu de 1.1).

**Théorèmes de transversalité.** Dans le reste de ce paragraphe,  $J^r(V, M)$  désigne la variété des jets d'ordre  $r$  des applications locales d'une variété  $V$  dans une variété  $M$  (cf. 0.3).

**1.5.** Soit  $L(V, M, r)$  l'ensemble des applications de  $V$  dans  $M$  muni de la topologie suivante. Munissons  $J^r(V, M)$  d'une métrique riemannienne complète, la distance de deux points  $z, z'$  étant notée  $d(z, z')$ . Une base de la structure uniforme qui définit la topologie de  $L(V, M, r)$  est formée des ensembles de couples  $(f, g)$  tels que  $d(f^r(x), g^r(x)) < \varepsilon(x)$  pour tout  $x \in V$ , où  $\varepsilon(x)$  est une fonction  $> 0$  continue de  $x$ . Cette définition est indépendante de la métrique choisie.  $L(V, M, r)$  muni de cette topologie est un espace de BAIRE. On dira que  $g$  est une  $r$ -approximation arbitraire de  $f$  si  $g$  est arbitrairement proche de  $f$  dans  $L(V, M, r)$ .

Une application  $f$  de  $V$  dans une variété  $M$  est *transverse à une sous-variété  $N$  de  $M$*  en un point  $x \in V$  si, ou bien  $f(x) \notin N$ , ou bien  $y = f(x) \in N$  et  $df(V_x) + N_y = M_y$ . Nous dirons simplement que  $f$  est transverse à  $N$

si  $f$  est transverse à  $N$  en tout point de  $V$ ; alors  $f^{-1}(N)$  est une sous-variété de  $V$  dont la codimension est égale à celle de  $N$ . Selon cette définition, si  $\text{codim } N > \dim V$ , dire que  $f$  est transverse à  $N$  c'est dire que  $f(V)$  ne rencontre pas  $N$ .

**1.6. Théorème de transversalité (THOM).** *Soit  $N$  une sous-variété fermée de  $J^r(V, M)$  et soit  $f$  une application de  $V$  dans  $M$ . On peut toujours trouver une  $s$ -approximation arbitraire ( $s$  entier  $\geq 0$ )  $g$  de  $f$  telle que  $g^r$  soit transverse à  $N$ . De plus, si  $f^r$  est déjà transverse à  $N$  en tout point d'un fermé  $F$  dans  $V$ , on peut supposer  $g = f$  au voisinage de  $F$ .*

D'après la définition de la transversalité et la topologie de  $L(V, M, s)$ , il est évident que les applications transverses à  $N$  forment un ouvert de  $L(V, M, s)$  pour  $s > r$ . Le théorème de transversalité affirme que cet ouvert est partout dense. Pour la démonstration, qui s'appuie essentiellement sur le théorème de SARD, voir [5] et [7].

**1.7. Exemples.** 1. Si  $A$  est une sous-variété de  $M$ , toute application  $f: V \rightarrow M$  peut être approchée par une application transverse à  $A$ . Cela résulte de 1.6 en prenant  $r = 0$  et  $N = V \times A \subset V \times M$ .

2.  $M$  est la droite numérique  $R$ ,  $r = 1$  et  $N$  est la sous-variété formée des jets d'ordre 1 des fonctions  $f$  sur  $V$  en un point où  $df = 0$ . Une fonction  $f: V \rightarrow R$  telle que  $f^1$  soit transverse à  $N$  n'est autre qu'une fonction numérique non dégénérée, c'est-à-dire qu'en un point où  $df = 0$ , la matrice des dérivées partielles secondes est non singulière. D'après le théorème ci-dessus, les fonctions non dégénérées sur  $V$  sont partout denses (théorème de MORSE [3]).

**1.8. Remarque.** Le théorème de transversalité est encore vrai si  $N$  n'est pas fermée et si  $f^r$  ne rencontre pas la frontière de  $N$ .

Dans les applications,  $N$  est souvent une variété avec singularités, représentée comme une collection de sous-variétés (cf. [14]). Si  $N$  est représentée comme l'union d'une sous-variété sans singularité  $N_0$  (en général non fermée) et d'une variété fermée  $N_1$ , avec singularités, de codimension  $> n = \dim V$  et qui contient la frontière de  $N_0$ , alors 1.6 appliqué aux différents membres de la décomposition de  $N_1$  montre que l'on peut d'abord approcher  $f$  par une application  $g$  telle que  $g^r$  ne rencontre pas  $N_1$ . Comme l'ensemble de telles applications est un ouvert dans  $L(V, M, s)$ ,  $s > r$ , 1.6 donne une application  $g$  telle que  $g^r$  ne rencontre pas  $N_1$  et soit transverse à  $N_0$ .

**1.9. Extension du théorème de transversalité.** *Soient  $V_i, M_i, i = 1, 2$ , des variétés. Soit  $N$  une sous-variété fermée de  $J^r(V_1, M_1) \times J^r(V_2, M_2)$ . Pour*

tout couple d'applications  $f_i: V_i \rightarrow M_i$ , il existe des  $s$ -approximations arbitraires  $g_i$  de  $f_i$  telles que  $(g_1^r, g_2^r)$  soit transverse à  $N$ . De plus si  $F_i$  sont des fermés de  $V_i$  tels que  $(f_1^r, f_2^r)$  soit transverse à  $N$  sur  $(F_1 \times V_2) \cup (V_1 \times F_2)$ , on peut supposer  $f_i = g_i$  sur  $F_i$ .

On a un énoncé tout à fait analogue pour un nombre fini de facteurs. La démonstration se déduit immédiatement de celle de 1.6 donnée dans [5] ou [7].

Remarquons encore que, si  $V_1$  et  $V_2$  sont compactes, alors l'ensemble des couples  $(f_1, f_2)$  tels que  $(f_1^r, f_2^r)$  soit transverse à  $N$  est un ouvert de  $L(V_1, M_1, s) \times L(V_2, M_2, s)$  pour  $s > r$ .

**1.10. Théorème de transversalité « au but ».** Soit  $N$  une sous-variété fermée de  $J^r(V, M) \times J^r(V, M)$ . Pour toute application  $f: V \rightarrow M$ , on peut trouver une  $s$ -approximation arbitraire  $g$  telle que  $(g^r, g^r)$  soit transverse à  $N$  en tout point du complémentaire  $C$  d'un voisinage ouvert donné de la diagonale de  $V \times V$ . De plus si  $F$  est un fermé tel que  $(f^r, f^r)$  soit transverse à  $N$  sur  $[(F \times V) \cup (V \times F)] \cap C$ , on peut supposer  $g = f$  sur  $F$ .

On a un énoncé analogue pour un nombre fini  $p$  de facteurs,  $C$  étant alors le complémentaire d'un voisinage du sous-espace du produit  $V^p$  formé des suites de  $p$  points de  $V$  non tous distincts. Un tel énoncé contient comme cas particulier tous les précédents (par exemple 1.6 correspondrait au cas  $p = 1$ ).

La démonstration découle directement de 1.9. En effet, soit  $\{U_1^\alpha \times U_2^\alpha\}_{\alpha \in I}$  un recouvrement dénombrable de  $C$ , tel que, pour tout  $\alpha \in I$ ,  $U_1^\alpha \cap U_2^\alpha = \emptyset$  et  $U_i^\alpha$  soit un compact de  $V$ . L'ensemble des couples  $(f_1, f_2): U_1^\alpha \times U_2^\alpha \rightarrow M \times M$  tels que  $(f_1^r, f_2^r)$  soit transverse à  $N$  est un ouvert partout dense de  $L(U_1^\alpha, M, s) \times L(U_2^\alpha, M, s)$ ,  $s > r$ , d'après 1.9. Or l'application faisant correspondre à  $f: V \rightarrow M$  le couple  $(f|U_1^\alpha, f|U_2^\alpha)$  est une application ouverte et surjective (cf. 1.4) de  $L(V, M, s)$  sur  $L(U_1^\alpha, M, s) \times L(U_2^\alpha, M, s)$ . Le théorème résulte alors de ce que  $L(V, M, s)$  est un espace de BAIRE.

Remarquons encore que si  $V$  est compact, l'ensemble des  $f$  tels que  $(f^r, f^r)$  soit transverse à  $N$  sur  $C$  est un ouvert partout dense de  $L(V, M, s)$  pour  $s > r$ .

**1.11. Exemple.** Prenons  $M = R$  et supposons que  $f$  soit une fonction numérique non dégénérée (cf. 1.7) sur  $V$ . Comme les points singuliers de  $f$  sont isolés, il existe un voisinage  $U$  de la diagonale de  $V \times V$  tel que si  $(x, x') \in U$  et  $x \neq x'$ , alors  $x$  et  $x'$  ne sont pas tous les deux singuliers. Appliquons 1.10 en prenant pour  $N$  la sous-variété de  $J^1(V, R) \times J^1(V, R)$  formée des couples de jets singuliers ayant le même but, et pour  $C$  le complémentaire de  $U$ . Comme  $\text{codim } N = n + 1$  nous obtenons ainsi une fonc-

tion numérique non dégénérée dont les valeurs critiques sont distinctes. Une telle fonction sera dite *générique*.

## 2. Définition et existence des applications et homotopies génériques

Dans tout ce paragraphe,  $V$  est une variété de dimension  $n$  et  $M$  une variété de dimension  $m \geq n$ .

### Description des points singuliers de type $(S^1)$

**2.1.** Considérons une application  $f$  de  $V$  dans  $M$  et soit  $x$  un point de  $V$  où le rang de  $f$  est exactement  $n - 1$ . Introduisons au voisinage de  $x$  et  $y = f(x)$  des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_m)$  telles que le noyau  $L_x$  de  $df$  au point  $x$  soit engendré par le vecteur de composantes  $(1, 0, \dots, 0)$ . Autrement dit, le vecteur  $\partial f / \partial x_1 = (\partial y_1 / \partial x_1, \dots, \partial y_m / \partial x_1)$ , où les dérivées partielles sont prises au point  $x$ , est le vecteur nul de  $M_y$ . Il en résulte que les dérivées  $(\partial^2 y_1 / \partial x_1 \partial x_i, \dots, \partial^2 y_m / \partial x_1 \partial x_i)$ , prises en  $x$ , sont les composantes d'un vecteur  $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_i$  de  $M_y$ .

Le point  $x$  de  $V$  est un point singulier de type  $(S^1)$  de  $f$  (cf. [5], [11], [14]) si

1. le rang de  $f$  en  $x$  est égal à  $n - 1$ ,
2. dans les coordonnées locales précédentes, les  $2n - 1$  vecteurs

$$\partial f / \partial x_i, \quad 1 < i \leq n \quad \text{et} \quad \partial^2 f / \partial x_1 \partial x_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

engendrent l'espace tangent à  $M$  en  $y$ ,

3. les  $n$  vecteurs  $\partial^2 f / \partial x_1^2, \partial f / \partial x_2, \dots, \partial f / \partial x_n$  au point  $y$  sont indépendants (toutes les dérivées partielles sont prises au point  $x$ ).

**2.2.** Les conditions 2) et 3) sont indépendantes des systèmes de coordonnées locales choisis. En effet, soit  $\xi_i$  le vecteur de  $V_x$  de composantes  $\delta_{ij}$  (symbole de KRONECKER). On vérifie immédiatement (cf. [11], p. 162) que l'application bilinéaire de  $L_x \times V_x$  dans  $M_y$  appliquant  $(\xi_1, \xi_i)$  sur le vecteur  $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_i$  définit par passage aux quotients une application linéaire

$$\partial_x^2 f: L_x \otimes V_x \rightarrow M_y / df(V_x)$$

indépendante des systèmes de coordonnées.

Les conditions 2) et 3) équivalent resp. à

$$2)' \quad \partial_x^2 f \text{ est de rang } m - n + 1,$$

$$3)' \quad \partial_x^2 f \text{ ne s'annule pas sur } L_x \otimes L_x.$$

**2.3.** Voici l'interprétation géométrique de ces conditions. La condition 2) signifie que les  $m - n + 1$  conditions qui expriment que le rang de  $f$  est inférieur à  $n$  sont indépendantes au point  $x$ . Donc au voisinage de  $x$ , le sous-ensemble  $S$  de  $V$  formé des points où le rang de  $f$  est  $n - 1$  est une sous-variété de dimension  $2n - m - 1$ . Le noyau de  $\partial_x^2 f$  est  $L_x \otimes S_x$ , où  $S_x$  est l'espace tangent à  $S$  en  $x$ .

La condition 3) exprime que  $L_x$  n'est pas contenu dans  $S_x$ . Donc la restriction de  $f$  à  $S$  est de rang  $2n - m - 1$  au voisinage de  $x$ .

**2.4.** De plus en un point double  $y = f(x') = f(x'')$ , où  $x'$  et  $x''$  sont des points distincts proches de  $x$ , alors les images par  $df$  de  $V_{x'}$ , et  $V_{x''}$ , engendrent  $M_y$ . Ainsi les points doubles de la restriction de  $f$  à un petit voisinage  $U$  de  $x$  forment une sous-variété  $\Delta$  de  $M$  de dimension  $2n - m$  dont le bord dans  $f(U)$  est  $f(S \cap U)$ . Le sous-ensemble  $D = f^{-1}(\Delta)$  au voisinage de  $x$  est une sous-variété de  $V$  de dimension  $2n - m$  sans bord qui contient  $S$  et qui est tangente au champ des noyaux de  $df$  le long de  $S$ .

On peut vérifier ces propriétés en choisissant des coordonnées locales telles que  $f$  s'exprime sous la forme

$$y_1 = x_1^2, y_i = x_i \text{ pour } 1 < i \leq n, y_{n+j-1} = x_1 x_j \text{ pour } 1 < j \leq m - n + 1$$

à des termes de degré  $> 2$  près. Nous n'insistons pas sur les démonstrations car WHITNEY a démontré (cf. [11]) que  $f$  pouvait s'exprimer effectivement sous cette forme (et non plus seulement jusqu'à l'ordre 2), fait que nous utiliserons plus tard (cf. § 3). Ceci admis, les propriétés 2.4 se vérifient immédiatement. La sous-variété  $S$  est définie par  $x_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq m - n + 1$ , la sous-variété  $\Delta$  par  $y_1 \geq 0, y_i = 0$  et  $y_{n+i-1} = 0$  pour  $1 < i \leq m - n + 1$ . Enfin  $D$  est défini par  $x_i = 0, 1 < i \leq m - n + 1$ .

**2.5. Théorème.** Supposons  $2m > 3n$  et  $V$  compacte. Les applications  $f: V \rightarrow M$  telles que

- 1) les points singuliers de  $f$  sont tous de type  $(S^1)$ ,
- 2) si  $f(x') = f(x'')$  et  $x' \neq x''$ , alors  $x'$  n'est pas un point singulier,
- 3) en un point double  $y = f(x') = f(x'')$ , où  $x' \neq x''$ , les images par  $df$  des plans tangents à  $V$  en  $x'$  et  $x''$  engendrent le plan tangent à  $M$  en  $y$ ,
- 4)  $f$  n'a pas de point triple,

forment un ouvert partout dense de  $L(V, M, 2)$ .

Une telle application sera dite *générique*.

De plus toute application  $g: V \rightarrow M$  dont la restriction à un voisinage d'un fermé  $F$  de  $V$  est générique peut être approchée par une application générique  $f$  égale à  $g$  sur  $F$ .

Lorsque  $m \geq 2n + 1$ , une application générique est un plongement ([8]). Si  $m = 2n$ , une application générique est une immersion avec des points doubles isolés où les deux nappes de  $f(V)$  se coupent en position générale (cf. [12]).

En général, lorsque  $2m > 3n$ , les points singuliers d'une application générique  $f$  forment d'après 1) une sous-variété  $S$  dans  $V$  de dimension  $2n - m - 1$  (cf. 2.3). Vu 3) et 4), les paires de points de  $V$  appliqués par  $f$  sur un même point de  $M$  forment une sous-variété  $D$  dans  $V$  de dimension  $2n - m$  et qui contient  $S$  comme sous-variété (cf. 2.4). Enfin les points doubles de  $f$  forment en vertu de 2) une sous-variété  $\Delta = f(D)$  dans  $M$  de dimension  $2n - m$  et dont le bord est la sous-variété des valeurs critiques  $S' = f(S)$  (cf. 2.4).

**2.6. Démonstration.** Elle consiste à appliquer successivement les théorèmes de transversalité. Commençons par 1). Dire que les points singuliers de  $S$  sont tous de type  $(S^1)$ , c'est dire que

a)  $f^1$  ne rencontre pas la sous-variété (avec singularités) de  $J^1(V, M)$  de codimension  $2(m - n + 2)$  formée des jets d'applications en un point où leur rang est  $< n - 1$  (condition 1) de 2.1),

b)  $f^1$  est transverse sur la sous-variété de  $J^1(V, M)$  formée des jets singuliers (condition 2) de 2.1),

c)  $f^2$  ne rencontre pas la sous-variété de  $J^2(V, M)$ , de codimension  $2(m - n + 1)$ , formée des jets d'applications  $g$  en un point  $x$  où le rang de  $g$  est  $< n$  et où le noyau de  $dg$  est contenu dans l'espace tangent aux points singuliers (condition 3) de 2.1).

Donc si  $n > 2(m - n + 2)$  et  $n > 2(m - n + 1)$ , c'est-à-dire si  $2m > 3n - 2$ , le théorème de transversalité 1.6 implique que les applications  $f$  vérifiant a), b) et c), c'est-à-dire 1), forment un ouvert partout dense de  $L(V, M, 2)$ .

Soit  $N$  la sous-variété de  $J^1(V, M) \times J^1(V, M)$  des couples formés de deux jets d'ordre 1 ayant le même but, l'un d'eux étant singulier. La codimension de  $N$  est  $m + (m - n + 1) = 2m - n + 1$ . Si  $f$  vérifie 1), la restriction de  $(f^1, f^1)$  à un voisinage de la diagonale dans  $V \times V$  privé de la diagonale, ne rencontre pas  $N$ , d'après 2.4. Ceci étant vrai pour toute application  $g$  assez proche de  $f$  dans  $L(V, M, 2)$ , 1.10 montre que l'on peut approcher  $f$  par une application  $g$  telle que  $(g^1, g^1)$  soit transverse à  $N$  sur  $V \times V$  privé de la diagonale. Donc si  $2n < 2m - n + 1$ , i. e.  $2m > 3n - 1$ , les applications  $f$  vérifiant 1) et 2) forment un ouvert partout dense de  $L(V, M, 2)$ .

Soit  $N'$  la sous-variété de  $(V \times M)^2$  image réciproque de la diagonale de  $M \times M$  par la projection naturelle de  $(V \times M)^2$  sur  $M^2$ . La condition 3) signifie que  $(f^1, f^1)$  est transverse à  $N'$  sur  $V \times V - V$ ; elle est vérifiée au voisinage de la diagonale par toute application  $f$  vérifiant 1) (cf. 2.4). D'après 1.10, les applications vérifiant 1) et 3) forment un ouvert partout dense de  $L(V, M, 2)$ , si  $2m > 3n - 2$ .

Enfin soit  $N''$  la sous-variété de  $(V \times M)^3$  image réciproque de la diagonale de  $M^3$  par la projection naturelle. Dire que  $f$  n'a pas de point triple, c'est dire que  $(f, f, f)$  ne rencontre pas  $N''$  en dehors du sous-espace  $R$  de  $V \times V \times V$  formé des suites de 3 points non tous distincts. Ce sera le cas au voisinage de  $R$  pour toute application vérifiant 1) et 2). Donc si  $2m > 3n$ , d'après 1.10, les applications vérifiant 1), 2) et 4) forment un ouvert partout dense de  $L(V, M, 2)$ .

On obtient le théorème en combinant toutes ces conditions.

## 2.7. Homotopies génériques

**Théorème.** Soient  $f_0$  et  $f_1$  des applications génériques (2.5) de  $V$  dans  $M$ , où  $2m > 3n + 1$ , et soit  $g: V \times I \rightarrow M$  une homotopie reliant  $f_0$  à  $f_1$ . Il est toujours possible d'approcher  $g$  par une homotopie  $f$  reliant  $f_0$  à  $f_1$  et telle que

1. l'application  $h: V \times I \rightarrow M \times I$  définie par  $h(x, t) = (f(x, t), t)$  est générique (2.5),

2) la restriction de la projection naturelle  $t': M \times I \rightarrow I$  à la variété  $\Delta$  des points doubles de  $h$  est une fonction numérique non dégénérée (1.7) et ses points singuliers ne sont pas sur l'image  $S'$  par  $h$  des points singuliers de  $h$ .

Un telle homotopie sera dite *générique*.

En fait on pourrait exiger plus d'une homotopie générique, par exemple que  $t'$  restreint à  $S'$  est une fonction numérique générique (cf. 1.11); mais nous n'aurons pas à utiliser cette propriété dans la suite.

**2.8.** Pour démontrer 2.7, on se place dans le sous-espace de  $L(V \times I, M, 3)$  formé des applications  $f$  telles que  $f(x, 0) = f_0(x)$  et  $f(x, 1) = f_1(x)$ . La démonstration de 1) est tout à fait analogue à celle de 2.5, l'inégalité  $2m > 3n + 1$  étant équivalente à  $2(m + 1) > 3(n + 1)$ . Par exemple la condition qu'en un point double de  $h$  les plans tangents à l'image sont en position générale (condition 3) de 2.5) signifie que  $f$  est transverse à la sous-variété de  $(V \times I \times M)^2$  formée des points  $(x, t, y, x', y', t)$ , où  $x, x' \in V$ ,  $t, t' \in I$  et  $y, y' \in M$ , tels que  $t = t'$  et  $y = y'$ . On remarquera aussi que

si  $f_0: V \rightarrow M$  est générique, alors sa suspension  $(x, t) \rightarrow (f_0(x), t)$  est aussi générique; on pourra donc supposer que, au voisinage des extrémités de l'intervalle  $I$ , l'homotopie  $f$  est indépendante de  $t$ .

Pour que  $t' | \Delta$  soit non singulière au voisinage de  $S'$ , il faut et il suffit que  $f^3$  évite dans  $J^3(V \times I, M)$  une sous-variété de codimension  $n + 1$ , ce qui est toujours possible. Enfin les points singuliers de  $t'$  seront non dégénérés si  $(f^1, f^1)$  est transverse à une sous-variété de  $J^1(V \times I, M) \times J^1(V \times I, M)$  sur  $(V \times I) \times (V \times I)$  privé de sa diagonale. Par application des théorèmes de transversalité, on obtient donc l'homotopie générique désirée.

**2.9. Cas particulier.** Soit  $V$  une variété de dimension  $n$  munie d'une fonction numérique  $t$  dont les points singuliers forment une sous-variété  $W$  de dimension inférieure à  $n$ . Soit  $M$  une variété de dimension  $m > 2n$ , et soit  $t'$  la projection naturelle de  $M \times R$  sur  $R$ . Il existe alors un plongement  $f$  de  $V$  dans  $M \times R$  tel que  $t = t'f$ . Si de plus  $g$  est un plongement donné d'un voisinage d'un fermé  $F$  de  $V$  dans  $M \times R$  tel que  $t = t'g$ , on peut supposer que  $f = g$  sur  $F$ .

En effet, pour qu'une application  $f = (h, t)$  de  $V$  dans  $M \times R$  (où  $h: V \rightarrow M$ ) soit partout de rang  $n$ , il faut et il suffit que le jet d'ordre 1 de  $h$  évite une sous-variété (avec singularités) dans  $J^1(V, M)$  de codimension  $m - n + 2 > n$ . Ensuite pour que  $f = (h, t)$  soit biunivoque, il faut et il suffit que le graphe de  $(h, h): V \times V \rightarrow M \times M$  évite une sous-variété  $N$  dans  $V \times V \times M \times M$  de codimension  $m + 1 > 2n$ ;  $N$  est formé des points  $(x, x', y, y')$  tels que  $y = y'$  et  $t(x) = t(x')$ ;  $N$  est représenté comme une collection de sous-variétés  $N = N_0 \cup N_1 \cup N_2$ , où  $N_0$  contient les points qui vérifient de plus:  $x, x' \in W$ ,  $N_1$  ceux qui vérifient:  $x$  ou  $x' \in W$ , et  $N_2: x, x' \notin W$ ; on a  $\text{codim } N_0 = m + 2 \text{ codim } W$  et  $\text{codim } N_1 = m + \text{codim } W + 1$ .

L'affirmation précédente se démontre donc par applications de 1.6 et de 1.10.

### 3. Forme canonique des singularités de type $(S^1)$

**3.1.** WHITNEY [11] a démontré qu'au voisinage de tout point singulier  $x$  de type  $(S^1)$  d'une application de  $R^n$  dans  $R^m$ ,  $m \geq n$ , il était possible de trouver des coordonnées locales  $(x_1, \dots, x_{m-n+1}, u_1, \dots, u_{2n-m-1})$  au voisinage de  $x$  et  $(X_1, \dots, X_{2m-2n+1}, U_1, \dots, U_{2n-m-1})$  au voisinage de  $f(x)$  de sorte que  $f$  s'exprime sous la forme

$$f_0 \begin{cases} X_1 = x_1^2 & X_i = x_i \quad 1 < i \leq m - n + 1, \\ X_{m-n+i} = x_1 x_i & U_j = u_j, \quad 1 \leq j \leq 2n - m - 1. \end{cases}$$

(La démonstration de [11] qui traite le cas  $m = 2n - 1$  s'étend immédiatement à ce cas plus général, cf. 3.8.)

Le but de ce paragraphe est de prouver la proposition suivante qui est une forme globale du résultat précédent de WHITNEY. Le complément sera utilisé dans l'étude des isotopies.

**3.2. Proposition.** Soient  $V_i, M_i$  des variétés,  $i = 1, 2$ ,  $\dim M_i = m$ ,  $\dim V_i = n$  et  $m \geq n$ . Soient  $f_i: V_i \rightarrow M_i$  des applications dont les points singuliers  $S_i \subset V_i$  sont tous de type  $(S^1)$  et telles que  $f_i|_{S_i}$  soit biunivoque.

On suppose qu'il existe un difféomorphisme  $h$  de  $S_1$  sur  $S_2$  qui se prolonge suivant un isomorphisme  $\dot{h}$  de  $T(V_1)|_{S_1}$  sur  $T(V_2)|_{S_2}$  de sorte que les champs de noyaux  $L_i$  de  $df_i$  le long de  $S_i$  se correspondent par  $\dot{h}$ .

Il existe alors des difféomorphismes  $H$  (resp.  $H'$ ) d'un voisinage de  $S_1$  (resp.  $S'_1 = f_1(S_1)$ ) sur un voisinage de  $S_2$  (resp.  $S'_2 = f_2(S_2)$ ) tels que

- 1)  $f_2 H = H' f_1$
- 2)  $dH = \dot{h}$  le long de  $S_1$ .

**3.3.** Soit  $\Delta_i \subset M_i$  la variété des points doubles de  $f_i$ . Si l'on se donne de plus un difféomorphisme  $h'$  de  $\Delta_1$  sur  $\Delta_2$  au voisinage de  $S'_1$  compatible avec  $\dot{h}|_{L_1}$ , on peut supposer que  $H' = h'$  sur  $\Delta_1$ .

**3.4. Complément.** De plus soient  $t$  et  $t'$  des fonctions numériques définies au voisinage de  $S_i$  et  $S'_i$  respectivement. Supposons que  $t_i = t'_i f_i$ ,  $t'_i|_{\Delta_i}$  non singulière,  $dt_1 = dt_2 h$  et  $t'_1 = t'_2 h'$  sur  $\Delta_1$ . On peut alors choisir  $H$  et  $H'$  vérifiant de plus

- 3)  $t_1 = t_2 H$  et  $t'_1 = t'_2 H'$ .

**3.5. Remarque.** La donnée  $h'$  de  $H'$  sur  $\Delta_1$  et la condition 1) de 3.2 déterminent  $H$  localement sur  $D_1 = f_1^{-1}(\Delta_1)$  à deux possibilités près; or  $L_1$  est tangent à  $D_1$  le long de  $S_1$ . La condition de 3.3 que  $h'$  est compatible avec  $\dot{h}|_{L_1}$  signifie que localement  $\dot{h} = dH$  sur  $L_1$  au signe près.

**3.6.** Avant de passer à la démonstration, nous énonçons un lemme qui explicite la structure tangente le long de la sous-variété  $S$  des points singuliers de type  $(S^1)$  d'une application  $f: V \rightarrow M$ ;  $L$  est le champ des noyaux de  $df$  le long de  $S$ ,  $\Delta$  est la variété des points doubles de  $f$  et  $S' = f(S)$ .

**Lemme.** Il existe un homomorphisme naturel  $\partial_S^2 f$  de  $L \otimes T(V)|_S$  sur le fibré quotient  $T(M)|_{S'}/df(T(V)|_S)$ ; il applique le fibré linéaire trivial  $L \otimes L$  sur le fibré normal à  $S'$  dans  $\Delta$ ; son noyau est  $L \otimes T(S)$ .

$\partial_S^2 f$  est défini en chaque point  $x$  de  $S$  par  $\partial_x^2 f$  (cf. 2.2) et le lemme découle de 2.2 à 2.4.

**3.7.** Nous reformulons ci-dessous le théorème de WHITNEY (3.1) sous une forme utile pour la démonstration de 3.2. L'application  $f_0$  est celle qui est donnée dans 3.1. Ses points singuliers sont ceux du plan  $S$  défini par  $x = 0$  (où  $x = (x_1, \dots, x_{m-n+1})$ );  $S' = f_0(S)$ .

**Lemme local.** Soit  $f$  une application de  $R^n(x, u)$  dans  $R^m(X, U)$  définie au voisinage de  $S$  et telle que

- 1)  $df$  et  $df_0$  sont égaux le long de  $S$ ,
- 2)  $\partial_S^2 f = \partial_S^2 f_0$  (cf. 2.2 et 3.6).

Soient  $W$  et  $W'$  des ouverts de  $S$  tels que l'adhérence  $\overline{W}$  de  $W$  soit contenue dans  $W'$  et soit  $K$  un fermé de  $S$  au voisinage duquel  $f = f_0$ .

Il existe alors des difféomorphismes  $H$  et  $H'$  de voisinages de  $S$  et  $S'$  resp. tels que

- a)  $fH = H'f_0$  au voisinage de  $\overline{W}$ ,
- b)  $dH$  est l'identité de long de  $S$ ,
- c)  $H$  et  $H'$  sont l'identité dans un voisinage de  $K$  et du complémentaire de  $W'$  dans  $S$ , et de leurs images par  $f_0$  resp.,
- d) le long de  $S$ ,  $d(H'f_0) = d(fH)$  et  $\partial_S^2(H'f_0) = \partial_S^2(fH)$ . Si de plus la variété  $\Delta$  des points doubles de  $f$  coïncide avec celle de  $f_0$ , alors
- e)  $H' =$  identité sur  $\Delta$ .

**3.8. Démonstration de 3.7.** Supposons  $f$  donnée par les équations  $X_i = X_i(x, u)$ ,  $U_j = U_j(x, u)$ . Posons  $u'_j = U_j(x, u)$ ; les fonctions  $(x, u')$  forment au voisinage de  $S$  un système de coordonnées car  $\partial u'_j / \partial u_k = \delta_{jk}$  le long de  $S$  d'après 1), et  $f$  prend la forme  $X_i = X'_i(x, u')$ ,  $U_j = u'_j$ . On développe ensuite les fonctions  $X'_i$  en séries de TAYLOR jusqu'au troisième ordre par rapport aux variables  $x$  ([9]) et l'on effectue chacune des transformations de coordonnées indiquées par WHITNEY dans [11], § 5, ceci le long de  $S$ , les variables  $u$  intervenant comme des paramètres. Chacun des difféomorphismes définis par ces transformations de coordonnées respectent les propriétés b), d), e) et se réduisent à l'identité au voisinage de  $K$  et  $f_0(K)$ . On obtient donc finalement des difféomorphismes  $H$  et  $H'$  vérifiant a), b), d) et e) le long de  $S$ .

Pour obtenir l'identité en dehors de  $W'$  et  $f_0(W')$ , construisons une fonction  $\alpha$  sur  $R^n$  ne dépendant que des variables  $u$ , égale à 1 sur  $W$  et à 0 sur le complémentaire de  $W'$  dans  $S$ ; soit  $\alpha'$  la même fonction exprimée à

l'aide des variables  $U$ . Soient  $J$  et  $J'$  les difféomorphismes identités de  $R^n$  et  $R^m$ . Alors les applications

$$\alpha H + (1 - \alpha)J \quad \text{et} \quad \alpha' H' + (1 - \alpha')J',$$

où la multiplication par  $\alpha$  ou  $\alpha'$  signifie que chaque coordonnée est multipliée par  $\alpha$  ou  $\alpha'$ , restreintes à des voisinages assez petits de  $S$  et  $S'$  resp., sont des difféomorphismes qui vérifient toutes les propriétés désirées.

**3.9. Démonstration de 3.2.** D'après 3.6, il existe un isomorphisme  $\Phi$  bien déterminé de  $T(M_1) | S'_1 / df_1(T(V_1) | S_1)$  sur  $T(M_2) | S'_2 / df_2(T(V_2) | S_2)$  tel que, pour tout  $\nu \in L_1$  et tout  $\xi \in T(V_1)$  au-dessus du même point  $x$  de  $S_1$  on a  $\partial_{S'_2}^2 f_2(\dot{h}\nu \otimes \dot{h}\xi) = \partial_{S'_1}^2 f_1(\nu \otimes \xi)$ . Soit donc  $\dot{h}'$  un isomorphisme de  $T(M_1) | S'_1$  sur  $T(M_2) | S'_2$  tel que  $\dot{h}' df_1 = df_2 \dot{h}$  et qui donne  $\Phi$  par passage aux quotients; on peut supposer aussi que  $\dot{h}'$  applique l'espace tangent à  $\Delta_1$  sur l'espace tangent à  $\Delta_2$ . A l'aide de métriques riemanniennes ou en appliquant 1.3, il est possible de construire des difféomorphismes  $H_0$  et  $H'_0$  de voisinages tubulaires de  $S_1$  et  $S'_1$  resp., sur des voisinages tubulaires de  $S_2$  et  $S'_2$  resp. tels que  $dH_0 = \dot{h}$  et  $dH'_0 = \dot{h}'$ . On pourra aussi supposer que  $H'_0$  est une extension de l'application  $h'$  donnée sur  $\Delta_1$  (cf. 3.3).

Soient  $\{W'_n\}$  et  $\{W_n\}$  deux recouvrements dénombrables de  $S_1$  par des boules contenues dans des systèmes de coordonnées locales, et  $\overline{W'_n} \subset W'_n$ . Construisons par induction sur  $n$ , des difféomorphismes  $H_n$  et  $H'_n$  de voisinages de  $S_1$  et  $S'_1$  sur voisinages de  $S_2$  et  $S'_2$  de sorte que  $f_2 H_n = h'_n f_1$  au voisinage du fermé  $K_n = \cup_{i \leq n} \overline{W'_i}$  et que, le long de  $S_1$ ,  $dH_n = \dot{h}$ ,  $d(f_2 H_n) = d(H'_n f_1)$  et  $\partial_{S'_1}^2 (f_2 H_n) = \partial_{S'_1}^2 (H'_n f_1)$ . Par construction,  $H_0$  et  $H'_0$  vérifient ces conditions. Supposons donc  $H_n$  et  $H'_n$  déjà construits. D'après 3.7, il est possible d'introduire des coordonnées locales au voisinage de  $W'_{n+1}$  et  $f_1(W'_{n+1})$  de sorte que  $f_1$  s'exprime sous la forme  $f_0$ . Les hypothèses de 3.7 sont vérifiées pour  $f_0 = f_1$ ,  $f = H'_n{}^{-1} f_2 H_n$  et  $K = K_n$ ,  $W_{n+1}$  et  $W'_{n+1}$  jouant le rôle de  $W$  et  $W'$ ; on peut donc construire  $\overline{H}$  et  $\overline{H}'$  vérifiant les conditions de 3.7; on définit alors  $H_{n+1} = H_n \overline{H}$  et  $H'_{n+1} = H'_n \overline{H}'$  au voisinage de  $W'_{n+1}$  et  $f_1(W'_{n+1})$  et  $H_{n+1} = H_n$ ,  $H'_{n+1} = H'_n$  ailleurs. On remarquera que rien n'est changé au voisinage de  $K_n$  et  $f_1(K_n)$ . On obtient donc à la limite les difféomorphismes cherchés  $H$  et  $H'$ .

### Démonstration du complément

**3.10.** Nous choisirons une autre forme normale locale  $g_0$  équivalente à  $f_0$ . Soient  $(x_1, \dots, x_{m-n}, u_1, \dots, u_{2n-m})$  les coordonnées de  $R^n$  et

$(X_1, \dots, X_{2m-2n}, U_1, \dots, U_{2n-m})$  les coordonnées de  $R^m$ . Soit

$$g_0 \begin{cases} X_1 = u_1 - x_1^2 & X_i = x_i \\ X_{m-n+1} = u_1 x_1 - x_1^3 & X_{m-n+i} = x_1 x_i \end{cases} \quad 1 < i \leq m-n, U_j = u_j, 1 \leq j \leq 2n-m.$$

Les points singuliers de  $g_0$  sont les points du plan  $S: x_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq m-n, u_1 = 0$ . Les points doubles forment le demi-plan  $\Delta: X_j = 0$  pour  $1 \leq j \leq 2m-2n, U_1 \geq 0$ , et  $D = g_0^{-1}(\Delta)$  est défini par  $u_1 = x_1^2, x_i = 0, i > 1$ .

**3.11. Lemme local.** Soient  $t$  et  $t'$  des fonctions différentiables non singulières définies au voisinage de  $S$  dans  $R^n$  et de  $S' = g_0(S)$  dans  $R^m$  telles que  $t = t'g_0$ . On suppose que

- 1)  $t'$  restreinte à  $\Delta$  est non singulière,
- 2)  $\partial t' / \partial X_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq m-n$  sur  $S'$  (ou ce qui revient au même  $\partial t / \partial x_i = 0$  pour  $i > 1, \partial t / \partial u_1 = \partial t' / \partial U_1$  sur  $S$ ).

Soit  $t'_0$  la fonction sur  $R^m$  égale à  $t'$  sur  $\Delta$  et ne dépendant que des variables  $U_j$ . Soient  $W$  et  $W'$  des ouverts de  $S$  tels que  $\overline{W} \subset W'$  et  $K$  un fermé de  $S$  au voisinage duquel  $t' = t'_0$ .

Il existe alors des difféomorphismes  $H$  et  $H'$  de voisinages de  $S$  et  $S'$  resp. sur voisinages de  $S$  et  $S'$  resp. tels que

- a)  $g_0 H = H' g_0$
- b)  $t'_0 = t' H'$  au voisinage de  $g_0(K \cap \overline{W})$
- c)  $dH$  est l'identité le long de  $S$
- d)  $H$  et  $H'$  sont l'identité au voisinage de  $K$  et du complémentaire de  $W'$  dans  $S$  et de leurs images par  $g_0$  resp.

**3.12. Démonstration de 3.11.** Pour assurer la validité de d), remplaçons d'abord  $t'$  par une fonction  $t''$  égale à  $t'$  au voisinage de  $g_0(\overline{W})$  et à  $t'_0$  au voisinage de  $g_0(K)$  et du complémentaire  $C'$  de  $g_0(W')$  dans  $S'$ , et vérifiant 1) et 2). Il suffit pour cela de construire une fonction  $\alpha$  dans  $R^m$  égale à 1 au voisinage de  $g_0(W)$  et à 0 au voisinage de  $C'$  et de poser  $t'' = \alpha t' + (1 - \alpha)t'_0$ . Pour simplifier  $t''$  sera noté  $t'$ .

Dans ce qui suit,  $X$  désigne les coordonnées  $(X_1, \dots, X_{2m-2n})$ ,  $U$  les coordonnées  $(U_1, \dots, U_{2n-m})$ , etc.

Pour tout point  $P = (X, U)$  de  $R^m$  assez proche de  $S'$ , soient  $U'_j = \Phi_j(X, U)$  les coordonnées  $U$  du point d'intersection avec  $\Delta$  de la géodésique issue de  $P$ , contenue dans la variété de niveau  $N_P$  de  $t'$  contenant  $P$ , et normale à la sous-variété  $N_P \cap \Delta$  ( $N_P$  est muni de la métrique induite par une métrique riemannienne sur  $R^m$ ). Ceci a un sens en vertu de 1) au voisinage de  $\Delta$ .

Par construction, on a donc  $\Phi_j(O, U) = U_j$ , d'où  $\partial U_j / \partial U_k = \delta_{jk}$  le long de  $\Delta$  et  $\partial U_j^1 / \partial X_i = 0$  pour  $1 \leq i \leq m - n$  le long de  $S'$  en vertu de 2). Enfin  $t'$ , exprimée à l'aide des nouvelles variables  $U'$ , est égale à  $t'_0$ . On remarquera que l'on a aussi  $U'_j = U_j$  au voisinage de  $g_0(K)$ .

Dans  $R^n$ , posons  $u'_j = \Phi_j g_0 = \varphi_j(x, u)$ . Le long de  $S$  on a  $\partial u'_j / \partial u_k = \delta_{jk}$  et  $\partial u'_i / \partial x_k = 0$ . Ainsi les transformations

$$G \begin{cases} x'_i = x_i \\ u'_j = \varphi_j(x, u) \end{cases} \quad G'_1 \begin{cases} X'_1 = \Phi_1(X, U) - U_1 + X_1 \\ X'_i = X_i \quad i > 1 \\ U'_j = \Phi_j(X, U) \end{cases}$$

sont au voisinage de  $S$  et  $S'$  des difféomorphismes et leurs inverses  $H = G^{-1}$  et  $H' = G'_1{}^{-1}$  vérifient b), c) et d).

Soient  $u_j = \psi_j(x', u')$  les solutions des équations  $u'_j = \varphi_j(x, u)$  au voisinage de  $S$ . Nous devons modifier  $H'_1$  de sorte que a) soit vérifié. On a

$$H'_1{}^{-1} g_0 H \begin{cases} X_1 = u_1 - x_1^2 \\ X_{m-n+1} = \psi_1(x, u) x_1 - x_1^3, \end{cases} \quad \begin{cases} X_i = x_i \\ X_{m-n+i} = x_1 x_i \end{cases} \quad 1 < i \quad U = u$$

Comme  $\Phi_j(X, U) = U_j$  pour  $X = 0$ , alors  $\psi_1(x_1, x_i, u) = u_1$ ,  $i > 1$ , sur  $D : u_1 - x_1^2 = 0$ ,  $x_i = 0$ ,  $i > 1$ . On peut donc écrire au voisinage de  $S$  d'après [9]:

$$\psi_1(x_1, x_i, u) = u_1 + (u_1 - x_1^2) a(x_1, x_i, u) + \sum_{j>1} x_j a_j(x_1, x_i, u).$$

Le long de  $S$ ,  $a = 0$  car  $\partial \psi_1 / \partial u_1 = 1$ .

On peut également poser d'après [10]

$$\begin{aligned} & 1/2[\psi_1(x_1, x_i, u) + \psi_1(-x_1, x_i, u)] = \\ & = u_1 + (u_1 - x_1^2) A(x_1^2, x_i, u) + \sum_{j>1} x_j A_j(x_1^2, x_i, u) \end{aligned}$$

et

$$1/2[\psi_1(x_1, x_i, u) - \psi_1(-x_1, x_i, u)] = x_1 B(x_1^2, x_i, u).$$

Définissons alors au voisinage de  $S'$

$$G'_2 \begin{cases} X'_j = X_j \quad j \neq m - n + 1 & U' = U \\ X'_{m-n+1} = \frac{X_{m-n+1} - (U_1 - X_1) B(U_1 - X_1, X_i, U) - \sum_{j>1} A_j(U_1 - X_1, X_i, U) X_{m-n+i}}{1 + A(U_1 - X_1, X_i, U)} \end{cases}$$

On a  $\partial X'_{m-n+1} / \partial X_{m-n+1} = 1$  sur  $S'$ , de sorte que  $G'_2$  est un difféomorphisme dans un voisinage de  $S'$ . De plus  $G'_2 G'_1 g_0 G^{-1} = g_0$ . Les difféomorphismes  $H' = (G'_2 G'_1)^{-1}$  et  $H = G^{-1}$ , définis dans des voisinages de  $S'$  et  $S$ , vérifient les propriétés a), b), c) et d).

**3.12.** Pour démontrer 3.4, on part des difféomorphismes  $H$  et  $H'$  vérifiant les conditions 1) et 2) de 3.2 et 3.3, et on les modifie pas à pas en utilisant le lemme local 3.11 comme dans 3.9.

**3.13.** Pour terminer ce paragraphe, nous énonçons un lemme de nature élémentaire et dont la démonstration est laissée au lecteur.

**Lemme.** Soient  $A$  et  $B$  deux sous-variétés d'une variété  $V$  se coupant transversalement (c'est-à-dire qu'en tout point  $x$  de la sous-variété  $C = A \cap B$   $A_x + B_x = V_x$ ). Etant donnés des plongements  $\varphi$  et  $\psi$  de  $A$  et  $B$  resp. dans une variété  $M$  tels que  $\varphi = \psi$  sur  $C$  et que  $d\varphi(A_x) + d\psi(B_x) = d\psi(C_x)$  pour tout  $x \in C$ , il est possible de prolonger  $\varphi$  et  $\psi$  suivant un plongement d'un voisinage de  $C$  dans  $M$ .

On le démontre d'abord localement et on applique 1.1.

#### 4. Existence de plongements

Le but de ce paragraphe est de prouver le théorème suivant (théorème d'existence a) de l'introduction).

**4.1. Théorème.** Soit  $V$  une variété compacte de dimension  $n$ , sans bord, et soit  $M$  une variété de dimension  $m$ . On suppose  $2m \geq 3(n + 1)$ .

Toute application  $g$  de  $V$  dans  $M$  telle que  $\pi_i(g) = 0$  pour  $i \leq 2n - m + 1$  (cf. 0.4) est homotope à un plongement  $h$ .

De plus, si  $V$  a un bord  $\partial V$  et si  $g$  est déjà un plongement au voisinage de  $\partial V$  tel que  $g(\partial V) \cap g(V - \partial V) = \emptyset$ , on peut supposer alors  $h = g$  au voisinage de  $\partial V$ .

**4.2. Démonstration.** D'après 2.5,  $g$  est proche, donc homotope à une application générique  $f$  de  $V$  dans  $M$ . La variété des points singuliers de  $f$  sera notée  $S$ ;  $\Delta$  désignera la sous-variété dans  $M$  des points doubles de  $f$ ; son bord est  $S' = f(S)$  (cf. 2.5); enfin  $D = f^{-1}(\Delta)$ .

Soit  $\varphi$  une fonction numérique générique sur  $\Delta$  (cf. 1.11). On suppose de plus que  $S'$  est une variété de niveau de  $\varphi$  et que  $\varphi$  est minimum sur  $S'$  (si  $S'$  est non vide).

Soit  $\varphi_0 = \varphi(S')$  et soit  $\varphi_1 > \varphi_0$  tel que  $\varphi$  n'ait pas de valeurs critiques sur l'intervalle  $[\varphi_0, \varphi_1]$ .

**Proposition 1.** Il existe une déformation  $f_\tau$  de  $f = f_0$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , telle que  $f_1$  soit une application générique dont les points doubles sont les points  $d$  de  $\Delta$  où  $\varphi(d) \geq \varphi_1$ .

Soit  $c$  un point singulier de  $\varphi$  d'indice  $p$ . Au voisinage de  $c$  dans  $\Delta$ , nous pouvons introduire des coordonnées locales  $U_1, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q$ , où  $p + q = 2n - m = \dim \Delta$ , de sorte que  $\varphi = \varphi(c) - U^2 + V^2$ , où  $U^2 = \sum U_i^2$  et  $V^2 = \sum V_j^2$ , dans une boule  $B_0$  de rayon  $2\theta_0$  centrée en  $c$  (cf. [3]). Posons  $R^2 = U^2 + V^2$ , et soit  $\theta(R^2)$  la fonction égale à  $\theta_0^2 \gamma(R^2/\theta_0^2)$  dans  $B_0$  et à 0 en dehors, où  $\gamma$  est la fonction définie en 4.3. Considérons alors la fonction  $\varphi_- = \varphi + \theta$  et la fonction  $\varphi_+ = \varphi - \theta$ ; ces fonctions sont égales à  $\varphi$  en dehors de  $B_0$ .

**Proposition 2.** *Soit  $c$  un point critique de  $\varphi$  d'indice  $p$ . Supposons que l'on ait déformé  $f$  en une application générique  $f_0$  dont les points doubles sont les points  $d$  de  $\Delta$  où  $\varphi_-(d) \geq c$ . Si  $\pi_{p+1}(f) = 0$ , il existe une déformation  $f_\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , qui déforme  $f_0$  en une application générique  $f_1$  dont les points doubles sont les points  $d$  de  $\Delta$  où  $\varphi_+(d) \geq c$ .*

Le théorème 4.1 se déduit comme suit des propositions 1 et 2. Soit  $c$  le point critique de  $\varphi$  de valeur minimale. Construisons comme précédemment une boule  $B_0$  centrée en  $c$  de sorte que  $\varphi(B_0)$  ne contienne pas d'autre valeur critique que  $\varphi(c)$ .

La fonction  $\varphi_-$  n'a pas de point singulier dans  $\varphi^{-1}[-\infty, c]$ ; c'est clair en dehors de  $B_0$  où  $\varphi = \varphi_-$ ; dans  $B_0$ , un point de coordonnées  $(U, V)$  est singulier si et seulement si  $\partial\varphi_-/\partial U_i = -2U_i(1 - \theta') = 0$  et  $\partial\varphi/\partial V_j = 2V_j(1 + \theta') = 0$ , où  $\theta'$  est la dérivée de  $\theta$ . Comme on suppose que  $-U^2 + V^2 + \theta(R^2) \leq 0$ , on doit avoir  $U \neq 0$  et les deux équations précédentes ne peuvent être vérifiées que si  $V = 0$  et  $(1 - \theta') = 0$ , ce qui est impossible car  $\theta' \leq 0$ . D'après la proposition 1, on peut donc déformer  $f$  en une application générique  $f_-$  dont les points doubles  $d$  sont définis par  $\varphi_-(d) \geq c$ . La proposition 2 donne une application générique  $f_+$  dont les points doubles  $d$  sont définis par  $\varphi_+(d) \geq c$ . Enfin une nouvelle application de la proposition 1 donne une application générique  $f_1$  dont les points singuliers sont les points  $d$  de  $\Delta$  où  $\varphi(d) \geq \varphi_1$ , où  $\varphi_1 = \sup \varphi(B_0)$ .

En répétant cette opération un nombre de fois égal à celui des points critiques de  $\varphi$ , on obtient finalement une application générique sans point double, donc un plongement (cf. aussi 4.13).

Dans la démonstration des propositions 1 et 2, nous utiliserons des modèles de déformations qui généralisent le suivant.

**4.3. Exemple typique de l'élimination d'un point double d'une courbe dans le plan.** Soit  $\gamma$  une fonction paire de la variable réelle  $x$ , égale à 1 pour  $|x| \leq 1$ , à 0 pour  $|x| \geq 2$  et croissante pour  $x < 0$ .

Soit  $c$  l'application de la droite  $R$  de coordonnée  $x$  dans le plan  $R^2$  des coordonnées  $(X, Y)$  définie par les équations

$$X = x(1 - 2Y) \quad Y = A\gamma(x)/(1 + x^2)$$

où  $A$  est une constante,  $0 \leq A \leq 1$  (il est entendu que dans la première équation,  $Y$  doit être remplacé par sa valeur donnée dans la seconde équation).

Nous allons vérifier que

a) la courbe  $c$  a un seul point double  $\Delta = (0, 1/2)$ , à tangentes distinctes, si  $A > 1/2$ ,

$D = c^{-1}(\Delta)$  est formé des deux points  $x = \sqrt{2A - 1}$  et  $x' = -\sqrt{2A - 1}$ ,

b) si  $A = 1/2$ , et dans ce cas seulement, la courbe  $c$  a un point singulier  $S = (0)$ ;  $S' = c(S) = (0, 1/2)$  est un point de rebroussement.

Soit  $c_\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , la déformation définie par les équations

$$X = x(1 - 2Y) \quad Y = A\gamma(x)(1 - \tau)/(1 + x^2).$$

Durant la déformation, chaque point  $x$  se déplace sur la droite  $X = x(1 - 2Y)$  passant par  $c(x)$  et  $(0, 1/2)$ . De plus  $c_\tau$  est constante pour  $|x| \geq 2$ . D'après ce qui précède, le point double sera éliminé dès que  $\tau < \frac{1 - 2A}{2}$ .

Pour vérifier a), supposons que les points distincts  $x$  et  $x'$  ont la même image par  $c$ . Alors  $X = x(1 - 2Y) = x'(1 - 2Y)$  et  $Y = A\gamma(x)/(1 + x^2) = A\gamma(x')/(1 + x'^2)$ . Comme  $x \neq x'$ , on a  $X = 0$  et  $Y = A\gamma(x)/(1 + x^2) = 1/2$ . Or  $\gamma(x) \leq 1$ , donc  $\gamma(x) = (1 + x^2)/2A \leq 1$ , ce qui entraîne  $x^2 \leq 2A - 1 \leq 1$ ; mais alors  $\gamma(x) = 1$ . Donc  $x$  et  $x'$  doivent vérifier l'équation  $x^2 = 2A - 1$  qui n'a de solutions réelles distinctes que si  $A > 1/2$ . Enfin comme  $dX = -2x dY$ , les pentes des tangentes au point double sont distinctes.

Un point singulier  $x$  doit vérifier les équations  $\partial X/\partial x = (1 - 2Y) - 2x\partial Y/\partial x = 0$  et  $\partial Y/\partial x = \frac{A\gamma'(1 + x^2) - 2Ax}{(1 + x^2)^2} = 0$ . Donc  $Y = 1/2$ ,

et comme  $\gamma'$  et  $x$  ont des signes opposés,  $\partial Y/\partial x$  ne peut être nul que si  $x = 0$ . Comme  $Y = 1/2$ , on doit avoir  $A = 1/2$ .

Nous nous concentrons d'abord sur la démonstration de la proposition 2.

#### 4.4. Modèle pour la proposition 2.

Soient  $(x_1, \dots, x_{m-n}, u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_q)$  les coordonnées de  $R^n$ , où  $p + q = 2n - m$ , et  $(X_1, \dots, X_{m-n}, Y_1, \dots, Y_{m-n}, U_1, \dots, U_p, V_1, \dots, V_q)$  celles de  $R^m$ .

Posons  $u^2 = \sum u_j^2$ ,  $v^2 = \sum v_k^2$ ,  $r^2 = u^2 + v^2$ ,  $R^2 = U^2 + V^2$ , et  $\varrho^2 = \sum_{1 < i \leq m-n} x_i^2$ . Soit  $\gamma$  la fonction définie en 4.3 et  $\theta(r^2) = \theta_0^2 \gamma(r^2/\theta_0^2)$ ,  $\theta_0 \leq 1$ . Soit  $\alpha$  une fonction paire de  $\varrho$  comprise entre 0 et 1, égale à 1 pour  $\varrho = 0$  et à 0 pour  $\varrho > \varepsilon$ , nombre positif.

Définissons une famille d'applications  $g_\tau$  de  $R^n$  dans  $R^m$  dépendant différentiablement du paramètre  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq 1$ , par la formule

$$g_\tau \begin{cases} X_1 = x_1(1 - 2Y_1) & X_i = x_i \\ Y_1 = A(u^2, v^2, \varrho^2, \tau) \gamma(x_1)/(1 + x_1^2), & Y_i = x_1 x_i \end{cases} \quad 1 < i \leq m-n, U_j = u_j, V_k = v_k$$

$$\text{où } A = 1/2 \frac{1 + \theta(r^2)(1 - 2\alpha\tau) + 2v^2}{1 + u^2 + v^2}.$$

Les fonctions  $\alpha$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$  sont introduites afin que la déformation  $g_\tau$  se réduise à l'identité en dehors d'un compact. Le lecteur pourra les supposer constantes dans une première lecture.

Nous allons vérifier que

1) la variété  $S_\tau \subset R^n$  des points singuliers de  $g_\tau$  est définie par

$$x_i = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m-n, \quad u^2 - v^2 = \theta(1 - 2\tau)$$

2) la variété  $\Delta_\tau \subset R^m$  des points doubles de  $g_\tau$  est définie par

$$X_i = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq m-n, \quad Y_1 = 1/2,$$

$$Y_i = 0 \quad \text{pour } 1 < i \leq m-n, \quad -U^2 + V^2 \geq -\theta(R^2)(1 - 2\tau)$$

3) la variété  $D_\tau = g_\tau^{-1}(\Delta_\tau)$  est définie par

$$x_i = 0, \quad 1 < i \leq m-n \quad \text{et} \quad x_1^2 = \frac{-u^2 + v^2 + \theta(r^2)(1 - 2\tau)}{1 + u^2 + v^2}$$

4) la variété  $S'_\tau = g_\tau(S_\tau) = \partial\Delta_\tau$  est définie par

$$X_i = 0, \quad Y_1 = 1/2, \quad Y_j = 0, \quad j > 1, \quad +U^2 - V^2 = \theta(R^2)(1 - 2\tau).$$

On remarquera que dans chaque plan parallèle au plan des coordonnées  $X_1$  et  $Y_1$  (et pour lequel  $Y_i = X_i = 0$ ,  $i > 1$ ), on a une courbe du même type que celle décrite en 4.3, car  $0 \leq A \leq 1$ .

Les points singuliers de  $g_\tau$  sont ceux qui vérifient les équations  $\partial X_i / \partial x_1 = \partial Y_i / \partial x_1 = \partial U_j / \partial x_1 = \partial V_k / \partial x_1 = 0$ , équivalentes à  $x_i = 0$  pour  $i > 1$  et  $\partial X_1 / \partial x_1 = \partial Y_1 / \partial x_1 = 0$ . D'après 4.3, on a  $x_i = 0$  pour  $1 < i \leq m-n$  et  $A = 1/2$ , d'où 1).

Si les points distincts  $(x, u, v)$  et  $(x', u', v')$  de  $R^n$  ont la même image par  $g_\tau$ , alors  $x_i = x'_i$  pour  $i > 1$ ,  $u_j = u'_j$ ,  $v_k = v'_k$ , donc  $x_1 \neq x'_1$ , et

$x_1 x_i = x'_1 x_i$  pour  $i > 1$ , donc  $x_i = x'_i = 0$ . D'après 4.3,  $D_\tau$  est défini par  $x_i = 0$  pour  $i > 1$  et  $x_1^2 = 2A - 1$ , d'où 3), et  $\Delta_\tau$  est défini par  $X_i = 0, Y_1 = 1/2, Y_j = 0$  pour  $j > 1$  et  $A \geq 1/2$ , d'où 2).

Montrons encore que  $g_\tau$  est générique pour  $\tau \neq 1/2$ . Il est clair que  $g_\tau$  est toujours de rang  $\geq n - 1$ , et qu'en un point singulier la condition 3) de 2.1 est vérifiée, puisqu'elle l'est pour la courbe  $c$  de 4.3. On voit aisément que la condition 2) de 2.1 est satisfaite si et seulement si  $\partial Y_1 / \partial u_j = \partial Y_1 / \partial v_k = 0$ , ce qui équivaut aux équations  $u_j[\theta'(1 - 2\tau) - 1] = 0$  et  $v_k[\theta'(1 - 2\tau) + 1] = 0$ . On a une solution pour  $u = v = 0$ , mais  $S_\tau$  ne contient l'origine que pour  $\tau = 1/2$ . On pourrait avoir une solution si  $\theta'(1 - 2\tau) - 1 = 0$  et  $v = 0$ , mais ce n'est pas possible, car alors  $r^2 = u^2 = \theta(1 - 2\tau) \leq \theta_0^2$  et  $\theta' = 0$  pour  $r^2 \leq \theta_0^2$ ; de même, on ne peut avoir  $\theta'(1 - 2\tau) + 1 = 0$  et  $u = 0$ . Donc les points singuliers de  $g_\tau$  sont tous de type  $(S^1)$  pour  $\tau \neq 1/2$ . Les autres conditions de 2.5 se vérifient aisément. Pour  $\tau = 1/2$ , l'origine n'est pas un point singulier générique pour une application, mais seulement pour une homotopie.

L'effet de la déformation  $g_\tau$ , lorsque  $\tau$  croit de 0 à 1, est d'éliminer dans le plan  $X_i = 0, Y_1 = 1/2, Y_j = 0, j > 1$ , les points doubles de  $g_0$  contenus dans  $|U^2 - V^2| < \theta(R^2)$ .

Soit  $K_\varepsilon$  le compact de  $R^n$  défini par

$$|x_1| \leq 2, \quad \varrho^2 \leq \varepsilon^2 \quad \text{et} \quad r \leq 2\theta_0,$$

et soit  $K'_\varepsilon$  le compact de  $R^m$  défini par

$$|X_1| \leq 2, \quad \Sigma_{i>1} X_i^2 \leq \varepsilon^2, \quad 0 \leq Y_1 \leq 1, \quad \Sigma_{i>1} Y_i^2 \leq 4\varepsilon^2, \quad R \leq 2\theta_0.$$

Nous désignerons par  $K$  l'intersection de  $K_\varepsilon$  avec le plan  $x_i = 0, i > 1$ , et par  $K'$  l'intersection de  $K'_\varepsilon$  avec le plan  $X_i = 0, Y_i = 0, i > 1$ .

La déformation  $g_\tau$  est constante en dehors de  $K_\varepsilon$  et  $g_\tau^{-1}(K'_\varepsilon) = K_\varepsilon$ . Au cours de la déformation, l'image par  $g_\tau$  de tout point  $(x, u, v)$  se déplace dans le 2-plan  $X_i = x_i$  et  $Y_i = x_1 x_i$  pour  $i > 1, U_j = u_j, V_k = v_k$ , sur la droite  $X_1 = x_1(1 - 2Y_1)$ .

On vérifie facilement que  $\Delta_0 \cap K'$  peut se rétracter par déformation sur un point.

D'autre part, soit  $\Sigma$  la  $p$ -sphère intersection de  $D_0$  avec le plan  $v = 0, x_i = 0, i > 1$ . Elle borde dans ce plan une  $(p + 1)$ -boule  $B$  [définie par les équations  $u^2 \leq \theta_0^2, x_1^2 \leq (-u^2 + \theta(u^2)/(1 + u^2))$ ]. L'image de  $B$  par  $g_0$  est homéomorphe à une  $(p + 1)$ -sphère qui borde dans le plan  $X_i = 0, Y_i = 0, i > 1, V = 0$ , un sous-espace  $B'$  homéomorphe à une  $(p + 2)$ -boule.

Il est aisé de vérifier que  $K$  peut se rétracter sur  $(D_0 \cap K) \cup B$  et que  $K'$  peut se rétracter sur  $g_0(K) \cup B'$ .

### Démonstration de la proposition 2.

4.5. Nous désignerons encore par  $S$  et  $\Delta$  les variétés des points singuliers et des points doubles resp. de  $f_0$ . On posera  $D = f_0^{-1}(\Delta)$  et  $S' = f_0(S)$ .

Il suffira de construire, pour  $\varepsilon$  assez petit, des difféomorphismes  $H$  de  $K_\varepsilon$  dans  $V$  et  $H'$  de  $K'_\varepsilon$  dans  $M$  de sorte que

- 1)  $f_0 H = H' g_0$  sur  $K_\varepsilon$ .
- 2) sur  $\Delta$  et  $\Delta_0$  les coordonnées locales  $U, V$  se correspondent par  $H'$
- 3)  $H'^{-1} f_0 V = g_0 R^n \cap K'_\varepsilon$ .

Ceci fait, la déformation  $f_\tau$  sera définie comme l'identité en dehors de  $H(K_\varepsilon)$  et par  $f_\tau = H' g_\tau H^{-1}$  sur  $H(K_\varepsilon)$ .

Les trois numéros suivants sont consacrés à la construction de  $H$  et  $H'$ .

Le champ de vecteurs  $\partial/\partial x_i$  de  $R^n$  sera désigné par  $e_i$ , les champs de vecteurs  $\partial/\partial X_i$  et  $\partial/\partial Y_i$  par  $e'_i$  et  $e''_i$  respectivement.

4.6. Nous construisons d'abord des plongements  $H: K \rightarrow V$  et  $H': K' \rightarrow M$  vérifiant 1), 2) et 3)

a) *sur  $\Delta_0$  et  $D_0$ .* Le choix des coordonnées locales  $U, V$  au voisinage de  $c$  (cf. 4.2) définit un difféomorphisme  $H'_1$  de la boule  $K' \cap (X_1 = Y_1 - 1/2 = 0)$  sur  $B_0$ .

La restriction de  $f_0$  à  $D - S$  est un revêtement à deux feuillets de  $\Delta - S'$ ; ce revêtement est trivial au-dessus de  $B_0 \cap (\Delta - S')$ , puisque cet espace est contractile (cf. 4.4). Il existe donc deux possibilités de définir une application  $H_1$  de  $D_0 \cap K$  dans  $D$  telle que  $f_0 H_1 = H'_1 g_0$ . Choisissons l'une d'entre elles;  $H_1$  est nécessairement un difféomorphisme (cf. 3).

b) *au voisinage de  $S_0$  et  $S'_0$ .* Soit  $D_0^+$  le sous-espace de  $D_0$  formé des points dont la  $x_1$ -coordonnée est  $\geq 0$ . Construisons le long de  $H_1(S_0 \cap K)$  un champ  $(\xi_2, \dots, \xi_{m-n}, \nu)$  de  $m - n$  vecteurs indépendants et transverses à  $D$  qui puisse s'étendre suivant un tel champ le long de  $H_1(D_0^+ \cap K)$ ; c'est possible car  $D_0^+ \cap K$  est contractile. On définit alors un isomorphisme de l'espace tangent à  $R^n$  le long de  $S_0 \cap K$  dans l'espace tangent à  $V$  le long de  $S$  qui prolonge  $dH_1|_{S_0}$  en appliquant  $e_1$  sur  $\xi_1 = dH_1(e_1)$ ,  $e_i$  sur  $\xi_i$ ,  $i > 1$ , et le champ  $\nu_0$  des vecteurs unitaires normaux à  $D_0$  dans  $K$  sur  $\nu$  aux points correspondants par  $H_1$ . D'après 3.2 et 3.3, il existe des difféomorphismes  $H_2$  et  $H'_2$  de voisinages de  $S_0 \cap K$  et  $S' \cap K'$  dans  $V$  et  $M$  resp. tels que  $f_0 H_2 = H'_2 g_0$ ,  $H_2$  et  $H'_2$  étant des extensions de  $H_1$  et  $H'_1$ , la différentielle  $dH_2$  le long de  $S_0 \cap K$  étant l'isomorphisme défini plus haut.

c) *sur*  $K$ . Prolongeons le champ  $dH_2(\nu_0)$  suivant un champ de vecteurs  $\nu$  le long de  $D \cap f_0^{-1}B_0$  et transverse à  $D$ , ce qui est possible car  $\text{codim } D = m - n > 2n - m = \dim D$ . On peut alors (cf. 1.3) étendre  $H_1$  suivant une application  $H_\tau$  d'un voisinage de  $D_0 \cap K$  dans  $V$  qui coïncide avec  $H_2|_K$  au voisinage de  $S_0 \cap K$  et qui applique  $\nu_0$  sur  $\nu$ . Puisque  $dH_3$  est biunivoque le long de  $D_0 \cap K$ ,  $H_3$  est un plongement dans  $V$  d'un voisinage assez petit de  $D_0 \cap K$  dans  $K$ .

Considérons les restrictions de  $H_1$  et  $H'_1$  à la sphère  $\Sigma = D_0 \cap (v = 0)$  et à la boule  $g_0(\Sigma)$  resp. (cf. 4.4). Comme  $\pi_p(f) = 0$ , nous montrerons en 4.9 que ces applications peuvent être étendues suivant des applications  $\overline{H}$  de  $B$  dans  $V$  et  $\overline{H}'$  de  $B'$  dans  $M$  resp. (cf. 4.4) telles que  $f_0\overline{H} = \overline{H}'g_0$  sur  $B$ .

Comme  $K$  peut se rétracter sur  $(D_0 \cap K) \cup B$ , il est possible d'étendre  $H_3$  suivant une application  $H_4$  de  $K$  dans  $V$ , la restriction de  $H_4$  à  $B$  étant homotope à  $\overline{H}$ . On peut choisir  $H_4$  générique (2.5); ce sera donc un plongement car  $2 \dim K = 4n - 2m + 2 < n = \dim V$ . On peut supposer de plus que  $H_4^{-1}(D) = D_0 \cap K$ , car on peut construire  $H_4$  transverse à la sous-variété  $D - H_1(D_0 \cap K)$  (cf. 1.8), c'est-à-dire ne la rencontrant pas puisque  $\dim K = 2n - m + 1 < m - n = \text{codim } D$ .

d) *sur*  $K'$ . L'application  $H'_3$  de  $g_0(K)$  dans  $M$  est bien définie par la condition  $f_0H_4 = H'_3g_0$ . En vertu du fait que  $g_0$  et  $f_0$  sont génériques, de 3.13 et 1.2, il est possible d'étendre la définition de  $H'_3$  sur un voisinage de  $\Delta_0 \cap K$  dans  $K'$  de sorte que  $H'_3$  soit un plongement et qu'il coïncide avec  $H'_2$  restreint à un voisinage de  $S'_0$  dans  $K'$ . Soit  $\nu'_0$  le champ des vecteurs unitaires normaux à  $g_0(K) - \Delta_0$  dans  $K'$ . Prolongeons le champ de vecteurs  $dH'_3(\nu'_0)$  suivant un champ de vecteurs  $\nu'$  le long de  $H_3(g_0K - \Delta_0)$  transverse à  $f_0V$ . Appliquant 1.3, on peut encore étendre la définition de  $H'_3$  sur un voisinage de  $g_0K$  dans  $K'$  de sorte que  $dH'_3(\nu'_0) = \nu'$ ; ainsi  $H'_3$  est un plongement dans  $M$  d'un voisinage de  $g_0K$  dans  $K'$ .

Les restrictions à  $g_0(B)$  de  $H'_3$  et  $\overline{H}'$  sont homotopes (cf. c)). Comme  $K'$  peut se rétracter sur  $g_0(K) \cup B'$ , il est possible d'étendre  $H'_3$  suivant une application  $H'_4$  de  $K'$  dans  $M$  que l'on peut supposer être un plongement, car  $2 \dim K' = 4n - 2m + 4 < m = \dim V$ . On peut supposer enfin que  $H'_4^{-1}f_0V = g_0R^n \cap K'$ , car  $H'_4(K')$ , qui est une sous-variété de dimension  $2n - m + 2$ , évite génériquement une sous-variété de codim  $m - n > 2n - m + 2$ .

Nous avons ainsi obtenu des plongements  $H = H_4$  de  $K$  dans  $V$  et  $H' = H'_4$  de  $K'$  dans  $M$  vérifiant les conditions 1), 2) et 3) de 4.5.

4.7. Notre but est maintenant de définir  $dH$  et  $dH'$  sur les vecteurs tangents à  $R^n$  et  $R^m$  d'origine  $K$  et  $K'$  de sorte que

$$4) \quad df_0 \cdot dH = dH' \cdot dg_0$$

a) Considérons le champ  $dH_2(e_i)$ ,  $1 < i \leq m - n$ , défini au voisinage de  $H(S_0 \cap K)$  (cf. 4.6, b)) et qui est formé de  $m - n - 1$  vecteurs linéairement indépendants et transverses à  $H(K)$ . Comme ce champ peut se prolonger à  $H(D_0^+ \cap K)$  avec les mêmes propriétés (4.6, b)) et que  $K$  et  $D_0^+ \cap K$  peuvent se rétracter par déformation sur un point, on peut trouver le long de  $H(K)$  un champ de  $m - n - 1$  vecteurs indépendants  $\xi_2, \dots, \xi_{m-n}$ , transverse à  $H(K)$  et qui coïncide avec le champ donné  $dH_2(e_i)$  au voisinage de  $H(S_0 \cap K)$ . Soit  $N$  le fibré engendré par les  $\xi_i$ .

Nous définissons  $dH$  par linéarité en posant  $dH(e_i) = \xi_i$ ,  $i > 1$ .

b) Construisons de même le long de  $H'(K)$  un champ transverse de  $(2m - 2n - 2)$ -plans  $N'$  qui contienne l'image de  $N$  par  $df_0$  et qui soit engendré au voisinage de  $H'(S'_0 \cap K')$  par  $dH'_2(e'_i)$  et  $dH'_2(e''_i)$ ,  $1 < i \leq m - n$ , (cf. 4.6, b)).

Remarquons que  $dg_0$  applique le vecteur  $e_i$ ,  $i > 1$ , pris en un point de  $K$  de coordonnée  $x_1$  sur le vecteur  $e'_i + x_1 e''_i$ ; le champ de vecteurs  $e''_i$  est donc transverse à  $g_0(R^n)$ .

Construisons un champ  $N_2^0$  de  $(m - n - 1)$ -plans le long de  $f_0 H(K)$  et au voisinage de  $H'(S'_0 \cap K')$ , contenu dans  $N'$ , et tel que

- 1)  $N_2^0$  soit complémentaire à  $df_0(N)$ ,
- 2) au voisinage de  $H'(S'_0 \cap K')$ ,  $N_2^0$  est engendré par  $\xi''_i = dH'_2(e''_i)$ ,  $i > 1$ ,
- 3) en un point  $H'(d)$ , où  $d \in \Delta_0$ ,  $N_2^0$  est engendré par

$$\xi''_i = \frac{df_0 \cdot dH[e_i(d_1)] - df_0 \cdot dH[e_i(d_2)]}{x_1(d_1) - x_1(d_2)}$$

où  $d_1$  et  $d_2$  sont les deux points de  $D_0$  appliqués sur  $d$  par  $g_0$ ,  $x_1(d_1)$  et  $x_1(d_2)$  étant leur  $x_1$ -coordonnée.

c) Le long de  $f_0 H(K)$ , considérons un champ  $N_1^0$  de  $(m - n - 1)$ -plans contenu dans  $N'$  et complémentaire à  $N_2^0$ . Ce champ a une trivialisation naturelle  $\bar{\xi}_i$ ,  $1 < i \leq m - n$ , à savoir la projection du champ  $df_0(\xi_i)$  parallèlement à  $N_2^0$ . On désire maintenant étendre le champ  $\bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_{m-n}$  dans  $N'$  le long de  $H'(K')$ ; comme  $g_0(K)$  a le type d'homotopie d'une  $(p + 1)$ -sphère, on rencontre une obstruction qui est mesurée par un élément de  $\pi_{p+1}(V_{2m-2n-2}^{m-n-1})$ , où  $V_{2m-2n-2}^{m-n-1}$  est la variété de STIEFEL des  $(m - n - 1)$ -repères de l'espace numérique de dimension  $2m - 2n - 2$ . Or ce groupe est trivial, car  $p + 1 \leq 2n - m + 1 < m - n - 1$ . Cette extension est donc possible et sera notée  $\bar{\xi}'_i$ ,  $i > 1$ .

d) Le champ  $N_2^0$  peut être étendu suivant un champ  $N_2$  complémentaire

dans  $N'$  au champ engendré par les  $\overline{\xi_j}$ ,  $i > 1$ . Choisissons maintenant un champ de  $(m - n - 1)$  vecteurs  $\xi_i''$ ,  $i > 1$ , qui engendre  $N_2$  et qui coïncide le long de  $H'(\Delta_0 \cap K')$  et au voisinage de  $H'(S'_0 \cap K')$  avec le champ donné en b), 2) et 3).

Nous définissons alors  $dH'(e_i'') = \xi_i''$ ,  $i > 1$ .

e) Définissons enfin  $\xi_i'$  le long de  $f_0H(K)$  en faisant correspondre à un point  $f_0H(a)$ , où  $a \in K$ , le vecteur  $df_0[\xi_i(a)] - x_1(a)\xi_i''(a)$ ; au voisinage de  $H'(S'_0 \cap K')$ , on posera aussi  $\xi_i' = H'(e_i')$ . On a  $\xi_i' = \xi_i'$  modulo  $N_2^0$ . On étend  $\xi_i'$  le long de  $H'(K')$  de sorte que cette condition reste vérifiée. On posera finalement  $dH'(e_i) = \xi_i'$ ,  $i > 1$ .

Il résulte immédiatement de la construction de  $dH$  et  $dH'$  que l'égalité 4) est satisfaite.

4.8. D'après 1.3 (ou en utilisant une métrique riemannienne), il est possible d'étendre  $H$  à  $K_\varepsilon$ , si  $\varepsilon$  est assez petit, suivant un difféomorphisme dont la différentielle  $dH$  le long de  $K$  a la valeur prescrite précédemment, et qui coïncide avec  $H_2$  au voisinage de  $(S_0 \cap K)$  (cf. 4.6, b).

Par la condition 1) de 4.5,  $H'$  est défini sur  $g_0(K_\varepsilon)$  et aussi au voisinage de  $S'_0 \cap K'$  (cf. 4.6, b). Il est aisé de vérifier que, au voisinage de tout point de  $g_0(K_\varepsilon)$ , cette définition de  $H'$  peut être étendue de sorte que  $dH'$  ait la valeur donnée dans 4.7, car  $K$  coupe transversalement  $g_0(K_\varepsilon)$ . D'après 1.3, il est donc possible, pour  $\varepsilon$  assez petit, d'étendre  $H'$  sur  $K'_\varepsilon$ , de sorte que la condition 1) de 4.5 soit vérifiée. Si  $\varepsilon$  est assez petit,  $H'$  sera un difféomorphisme et la condition 3) de 4.5 sera aussi vérifiée, puisqu'elle l'est déjà sur  $K$  et  $K'$ . La démonstration de la proposition 2 sera donc achevée, une fois démontré ce que nous avons utilisé en 4.6, c).

4.9. Considérons dans l'espace numérique  $R^{p+2}(x, y, u_1, \dots, u_p)$  la demi-boule  $B_+^{p+2}$  définie par  $x^2 + y^2 + u^2 \leq \theta_0^2$ ,  $y \geq 0$ . Son bord est formé de l'hémisphère  $S_+^{p+1}: x^2 + y^2 + u^2 = \theta_0^2$ ,  $y \geq 0$  et de la boule  $B^{p+1}: x^2 + u^2 \leq \theta_0^2$ ,  $y = 0$ . Soit enfin  $S^p$  le bord de  $B^{p+1}$ .

Nous pouvons construire un homéomorphisme  $h$  de  $S_+^{p+1}$  sur la boule  $B \subset K \subset R^n$  (cf. 4.4) appliquant un point de  $S_+^{p+1}$  de coordonnées  $(x, y, u)$  sur le point de  $B$  de coordonnées  $x_1 = x/(1 + u^2)$ , ...,  $u = u$ . Soit  $h'_0$  l'application continue de  $B^{p+1}$  dans  $B' \subset K' \subset R^m$  qui envoie un point  $(x, 0, u)$  sur le point de  $B'$  de coordonnées  $X_1 = 0$ ,  $Y_1 = 1/2$ ,  $U_j = 2u_j$  ou  $\theta_0 u_j / (x^2 + u^2)^{1/2}$  suivant que  $(x^2 + u^2)^{1/2} \leq \theta_0/2$  ou  $\geq \theta_0/2$ . Il est possible de construire une application continue  $h'$  de  $B_+^{p+2}$  sur  $B'$  dont la restriction à l'intérieur de  $B_+^{p+2}$  est un homéomorphisme et qui est égale à  $g_0 h$  sur  $S_+^{p+1}$  et à  $h'_0$  sur  $B^{p+1}$ .

Nous considérons maintenant le «mapping cylinder»  $M_f$  de  $f_0$ , l'injection  $i$  de  $V$  dans  $M_f$ , et la projection naturelle  $j$  de  $M_f$  sur  $M$  (cf. 0.4). L'application  $iH_1h$  de  $S^p$  dans  $M_f$  peut être étendue suivant une application  $\psi$  de  $B^{p+1}$  dans  $M_f$ , telle que  $j\psi = H_1'h'$  sur  $B^{p+1}$ . Comme  $\psi$  envoie  $S^p$  dans le sous-espace  $V$  de  $M_f$ , elle représente un élément de  $\pi_{p+1}(M_f, V) = \pi_{p+1}(f) = 0$ . Il est donc possible d'étendre  $\psi$  suivant une application continue  $\Psi$  de  $B^{p+1}_+$  dans  $M_f$ , envoyant  $S^{p+1}_+$  dans  $V$ .

Alors  $\Psi h^{-1}$  est une application  $\overline{H}$  de  $B$  dans  $\overline{V}$  prolongeant  $H_1$  et l'application  $\overline{H}'$  de  $B'$  dans  $M$  définie par  $j\Psi = \overline{H}'h'$  vérifie  $f_0\overline{H} = \overline{H}'g_0$  sur  $B$ .

### Démonstration de la proposition 1.

#### Construction d'un modèle.

4.10. Définissons une famille d'applications  $g_\tau^0$  dépendant du paramètre  $\tau$ , où  $0 \leq \tau \leq 1$ , de  $R^{m-n+1}(x_1, \dots, x_{m-n}, u)$  dans  $R^{2m-2n+1}(X_1, \dots, X_{m-n}, Y_1, \dots, Y_{m-n}, U)$  par les équations

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1(1 - 2Y_1) & X_i &= x_i & 1 < i \leq m - n, & U = u \\ Y_1 &= A(u, \varrho^2, \tau)\gamma(x_1)/(1 + x_1^2), & Y_i &= x_1x_i \end{aligned}$$

où  $A = \lambda[u - \alpha\tau u_0]$

$\gamma, \varrho, \alpha$  étant définis comme dans 4.4,

$u_0$  et  $\delta$  étant des nombres  $> 0$ ,  $\delta < u_0$ ,

$\lambda$  une fonction d'une variable  $u$ , égale à 0 pour  $u \leq -\delta$ , strictement croissante entre  $-\delta$  et  $+\delta$ , égale à 1/2 pour  $u = 0$  et à 1 pour  $u \geq \delta$ .

On vérifie, comme dans 4.4, que

1)  $g_\tau^0$  a un seul point singulier  $S_\tau^0: x_i = 0, u = \tau u_0$ ,

2) la courbe  $\Delta_\tau^0$  des points doubles de  $g_\tau^0$  est la demi-droite

$$X_i = 0, \quad Y_1 = 1/2, \quad Y_j = 0, \quad j > 1, \quad U \geq \tau u_0,$$

et que  $g_\tau^0$  est générique pour tout  $\tau$ .

L'effet de la déformation est ainsi de repousser les points doubles le long de la demi-droite  $\Delta_0^0$ .

Soit  $K_\varepsilon^0$  le compact de  $R^{m-n+1}$  défini par

$$|x_1| \leq 2, \quad \varrho^2 \leq \varepsilon^2, \quad -\delta \leq u \leq u_0 + \delta$$

et soit  $K'_\varepsilon$  le compact de  $R^{2m-2n+1}$  défini par

$$|X_1| \leq 2, \quad \sum_{j>1} X_j^2 \leq \varepsilon^2, \quad 0 \leq Y_1 \leq 1, \quad \sum_{j>1} Y_j^2 \leq 4\varepsilon^2, \quad -\delta \leq u \leq u_0 + \delta,$$

et soient  $K^0$  et  $K'^0$  leur intersection avec le plan  $x_j = 0, j > 1$ , et le plan  $X_j = 0, Y_j = 0, j > 1$ , respectivement.

Comme dans 4.4, la déformation est constante en dehors de  $K'_\varepsilon$  et l'on a  $g_\tau^{0-1}(K'^0) = K^0$ .

**4.11.** Plaçons-nous maintenant dans les hypothèses de la proposition 1,  $S$  et  $\Delta$  étant la variété des points singuliers et des points doubles resp. de  $f_0$ ,  $S' = f_0(S)$  et  $D = f_0^{-1}(\Delta)$ .

Construisons un champ de vecteurs  $\nu$  le long de  $S$  transverse à  $D$ , ce qui est possible car  $\text{codim } D = m - n > 2n - m - 1 = \dim S$ ; soit  $E_1$  le fibré linéaire trivial engendré par  $\nu$ . Soit  $E_{m-n-1}$  un fibré de base  $S$  engendré par un champ de  $(m - n - 1)$ -plans le long de  $S$  complémentaire à  $D$  et à  $E_1$ . Désignons enfin par  $L$  le fibré linéaire engendré par le champ des noyaux de  $df_0$  le long de  $S$ .

Le fibré  $N = L + E_{m-n-1} + E_1$  est isomorphe au fibré normal à  $S$  dans  $V$ . Nous pouvons réduire le groupe structural de  $L$  au groupe orthogonal  $O(1)$ , celui de  $E_{m-n-1}$  à  $O(m - n - 1)$  et celui de  $E_1$  à l'identité en considérant que  $\nu$  est un champ de vecteurs unitaires. Identifions la fibre type de  $N$  à  $R^{m-n+1}$ , l'espace numérique des coordonnées  $(x_1, \dots, x_{m-n}, u)$ , la fibre de  $L$  étant identifiée à l'axe des  $x_1$ , celle de  $E_{m-n-1}$  au plan des variables  $x_2, \dots, x_{m-n}$  et celle de  $E_1$  à l'axe des  $u$ .

Soit  $N'$  le fibré associé à  $N$  de fibre  $R^{2m-2n+1}(X_1, \dots, X_{m-n}, Y_1, \dots, Y_{m-n}, U)$ , un élément du groupe structural de  $N$  représenté par les équations  $x'_1 = \pm x_1, x'_i = \alpha_i^j x_j, i, j > 1, u' = u$  définissant la transformation  $X'_1 = \pm X_1, X'_i = \alpha_i^j X_j, Y'_1 = \pm \alpha_i^j X_j, Y'_1 = Y_1 = Y_1, U' = U$ .

Soit alors  $g_\tau$  l'application fibrée de  $N$  dans  $N'$ , se projetant sur l'identité de  $S$  et qui, sur chaque fibre, se réduit à l'application  $g_\tau^0$  définie en 4.10,  $u_0$  étant  $\varphi_1 - \varphi_0$ . Ceci a un sens, car  $g_\tau^0$  commute avec les opérations du groupe structural. On vérifie immédiatement que  $g_\tau$  est une application générique de  $N$  dans  $N'$ , pour tout  $\tau$ ; les variétés  $S_0$  et  $\Delta_0$  des points singuliers et des points doubles de  $g_0$  resp. sont la réunion de  $S_0^0$  et  $\Delta_0^0$  resp. dans chaque fibre. Désignons par  $U$  la fonction sur  $\Delta_0$  égale à la coordonnée  $U$  dans chaque fibre. Enfin soient  $K_\varepsilon$  et  $K'_\varepsilon$  les compacts de  $N$  et  $N'$  resp. qui coupent chaque fibre suivant  $K'_\varepsilon$  et  $K_\varepsilon$  resp.

**4.12.** Pour construire la déformation  $f_\tau$ , il suffira comme dans 4.5 de construire des difféomorphismes  $H: K_\varepsilon \rightarrow V$  et  $H': K'_\varepsilon \rightarrow M$  tels que

- 1)  $f_0 H = H' g_0$  sur  $K_\varepsilon$
- 2) sur  $\Delta$  et  $\Delta_0$  les fonctions  $\varphi$  et  $U + \varphi_0$  se correspondent par  $H'$
- 3)  $H'^{-1} f_0 V = g_0 N \cap K'_\varepsilon$ .

On définira alors  $f_\tau$  comme l'identité en dehors de  $H(K_\varepsilon)$  et par  $f_\tau = H' g_\tau H^{-1}$  sur  $H(K_\varepsilon)$ .

La construction de  $H$  et  $H'$  est tout à fait analogue à celle décrite en 4.6 à 4.8 dans le cas de la proposition 2, et nous ne la répéterons pas. Remarquons simplement que l'on n'a pas d'obstructions homotopiques comme dans 4.6, c), d) et 4.7, c), car  $D_0 \cap K$  peut se rétracter par déformation sur  $S$  et  $g_0(K)$  sur  $S'$ .

**4.13. Remarque.** Dans le cas où  $V$  a un bord  $\partial V$  et où  $g$  est une application de  $V$  dans  $M$  qui soit un plongement au voisinage de  $\partial V$  et telle que  $g(\partial V) \cap g(V - \partial V) = \emptyset$ , on construit d'abord une application générique  $f$  proche de  $g$ , vérifiant donc les mêmes propriétés que  $g$ , et égale à  $g$  au voisinage de  $\partial V$ . La sous-variété des points doubles de  $f$  ne rencontre pas  $f(\partial V)$ . On peut donc effectuer sans aucun changement les constructions précédentes en prenant garde simplement que  $H(K_\varepsilon) \cap \partial V = \emptyset$  et que  $H'(K'_\varepsilon) \cap f(\partial V) = \emptyset$ , ce qui est toujours possible, pour  $\varepsilon$  assez petit, car  $\dim K' = 2n - m + 2 < m - n + 1 = \text{codim } f(\partial V)$ .

**4.14. Remarque.** Dans la proposition 2, au lieu de supposer  $2m \geq 3(n + 1)$ , il suffit de supposer  $2p + 2 < n$  et  $p + n + 2 < m$ .

En effet, il existe un difféomorphisme de  $K_\varepsilon$  dans un voisinage arbitraire de la réunion  $P$  de  $D_0 \cap K$  et de la  $(p + 1)$ -boule  $B$  (cf. 4.4), ce difféomorphisme étant fixe sur  $B$ . De même, il existe un difféomorphisme de  $K'_\varepsilon$  dans un voisinage arbitraire de la réunion  $P'$  de  $\Delta_0 \cap K'$  et de la  $(p + 2)$ -boule  $B'$  (cf. 4.4), aussi fixe sur  $P'$ . Ainsi dans les inégalités de 4.6, c) et d),  $2n - m = \dim \Delta_0$  peut être remplacé par  $p$ .

Dans la proposition 1, il suffit de supposer  $2m > 3n + 1$  (pour assurer l'existence du champ de vecteurs  $\nu$ , cf. 4.11), car il existe des difféomorphismes de  $K_\varepsilon$  et  $K'_\varepsilon$  dans des voisinages arbitraires de  $D_0 \cap K$  et  $\Delta_0 \cap K'$  respectivement.

## 5. Existence d'isotopies

**5.1. Théorème.** Soit  $V_0$  une variété compacte sans bord de dimension  $n_0$  et  $M_0$  une variété de dimension  $m_0$ . On suppose  $2m_0 > 3(n_0 + 1)$ .

Soit  $g$  une application de  $V_0$  dans  $M_0$  telle que  $\pi_{2n_0 - m_0 + 2}(g) = 0$ . Alors

deux plongements de  $V_0$  dans  $M_0$  homotopes à  $g$  sont isotopes.

(C'est le théorème d'existence b) de l'introduction.)

5.2. Posons  $V = V_0 \times I$ ,  $M = M_0 \times I$ ,  $m = m_0 + 1$ ,  $n = n_0 + 1$ . Ainsi  $\pi_{2n-m+1}(g) = 0$  et  $2m \geq 3(n + 1)$ .

Désignons par  $t$  et  $t'$  les projections de  $V_0 \times I$  et  $M_0 \times I$  sur  $I$ .

D'après 2.7, il existe une homotopie générique reliant les deux plongements donnés de  $V_0$  dans  $M_0$ ; désignons par  $f$  l'application de  $V = V_0 \times I$  dans  $M = M_0 \times I$  associée à cette homotopie. On a  $t = t'f$ ,  $f$  est une application générique de  $V$  dans  $M$  et les points singuliers de la restriction de  $t'$  à la variété  $\Delta$  des points doubles de  $f$  ne se trouvent pas sur le bord  $S'$  de  $\Delta$ .

Nous allons maintenant reprendre la démonstration et les notations du § 4 appliqué à la situation ci-dessus. Il s'agit de déformer l'application générique  $f: V \rightarrow M$  comme au paragraphe précédent, en la laissant fixe sur  $\partial V = (V_0 \times 0) \cup (V_0 \times 1)$ , et de sorte que, pour chaque déformation  $f_\tau$ , on ait  $t = t'f_\tau$ . Nous allons donc simplement indiquer quelles sont les précisions à apporter pour que cette nouvelle condition soit vérifiée.

Dans 4.2, on supposera que les variétés de niveau  $\varphi = \varphi_0$ ,  $\varphi = \varphi_1$ ,  $\varphi_- = c$ ,  $\varphi_+ = c$  ne contiennent pas de points singuliers de la restriction de  $t'$  à  $\Delta$ . Dans les hypothèses des propositions 1 et 2, on suppose donc que  $f_0$  correspond à une homotopie générique, et on exige dans les conclusions que, pour tout  $\tau$ , on ait  $t = t'f_\tau$ .

Pour démontrer la proposition 2 avec cette condition supplémentaire, on part du même modèle qu'en 4.4 en introduisant de plus dans  $K'_e$  la fonction  $t'_0$  définie par  $t'_0(X, Y, U, V) = t'(U, V) + X_2$ , où  $t'(U, V)$  est la restriction de la fonction  $t'$  à  $\Delta$  exprimée dans les coordonnées locales  $(U, V)$  dans la boule  $B_0$ . On pose  $t_0 = t'_0g_0$ .

Les difféomorphismes  $H$  et  $H'$  de 4.5 devront alors vérifier de plus la condition

$$1)' \quad t_0 = tH \quad \text{et} \quad t'_0 = t'H'.$$

Comme la déformation  $g_\tau$  vérifie la condition  $t_0 = t'_0g_\tau$ , elle définira comme dans 4.5 une déformation  $f_\tau$  telle que  $t = t'f_\tau$ .

5.3. Nous suivons maintenant 4.6 en indiquant à chaque pas ce qu'il faut pour que 1)' soit vérifié.

Rien n'est changé dans a). Dans b), on impose de plus au champ  $(\xi_2, \dots, \xi_{m-n}, \nu)$  de vérifier  $\langle dt, \xi_2 \rangle = 1$ ,  $\langle dt, \xi_i \rangle = 0$  pour  $i > 2$ ,  $\langle dt, \nu \rangle = \langle dt_0, \nu_0 \rangle$  aux points correspondants par  $H_1$ . On peut réaliser la première condition en appliquant le lemme 5.5 qui suit. Ceci fait, comme  $dt$  restreint à la somme du fibré tangent à  $D$  et du fibré engendré par  $\xi_2$

est partout de rang 1, la construction du champ  $(\xi_3, \dots, \xi_{m-n}, \nu)$  revient à celle d'une section d'un espace fibré de base l'espace contractile  $H_1(D_0^+ \cap K)$ . On construit ensuite  $H_2$  et  $H'_2$  en appliquant 3.4.

Dans c),  $\nu$  doit vérifier  $\langle dt, \nu \rangle = \langle dt_0, \nu_0 \rangle$  aux points correspondants par  $H_1$ . Pour cela on construit d'abord  $\xi_2$  le long de  $D$  et transverse à  $D$  de sorte que  $\langle dt, \xi_2 \rangle = 1$  (cf. 5.5); la construction de  $\nu$  satisfaisant à la condition imposée et transverse à  $D$  et  $\xi_2$  est la construction d'une section d'un fibré affine de base  $D$  qui évite un sous-fibré affine de codimension  $m - n - 1 > 2n - m = \dim D$ . On pourra ensuite trouver  $H_3$  tel que  $tH_3 = t_0$  en tenant compte de 5.6. Enfin pour construire  $H_4$  tel que  $tH_4 = t_0$  restreint à  $K$ , on utilise 2.9.

Dans d), on construit les extensions successives de  $H'_3$  en tenant compte de 5.6. Le champ de vecteurs  $\nu'$  doit vérifier de plus  $\langle dt', \nu' \rangle = \langle dt'_0, \nu'_0 \rangle$  aux points correspondants par  $H'_3$ ; comme  $t'$  restreint à  $f_0V$  est une fonction non singulière, la construction de  $\nu'$  revient de nouveau à celle d'une section d'un fibré affine de base  $H'_3(g_0K)$  ne rencontrant pas un sous-fibré affine de codim  $m - n > 2n - m + 1 = \dim K$ . Enfin on construit  $H'_4$  par 2.9.

5.4. Dans 4.7,  $dH$  et  $dH'$  doivent vérifier de plus

$$4)' \quad dt_0 = dt \cdot dH \quad \text{et} \quad dt'_0 = dt' \cdot dH'.$$

Les conditions supplémentaires sont, dans a),  $\langle dt', \xi_2 \rangle = 1$  (cf. 5.5),  $\langle dt, \xi_i \rangle = 0$  pour  $i > 2$ , dans b),  $\langle dt', N_2 \rangle = 0$ , dans c),  $\langle dt', \overline{\xi_2} \rangle = 1$  et  $\langle dt', \overline{\xi_i} \rangle = 0$  pour  $i > 2$ . Ceci ne présente aucune difficulté nouvelle.

Enfin dans 4.7, on tient de nouveau compte de 5.6.

Les précisions à apporter à la démonstration de la proposition 1 sont tout à fait semblables.

5.5. Nous démontrons maintenant ce que nous venons d'utiliser.

**Lemme.** *Soit  $S$  une sous-variété d'une variété  $V$  et  $t$  une fonction numérique non singulière sur  $V$ . On suppose  $\dim S < \text{codim } S$ .*

*Etant donnée une fonction  $\alpha$  sur  $S$  qui ne s'annule pas en même temps que la différentielle  $dt$  de  $t$  restreinte à  $S$ , il existe le long de  $S$  un champ de vecteurs  $\nu$  tel que*

- 1)  $\nu$  est transverse à  $S$ ,
- 2)  $\langle dt, \nu(s) \rangle = \alpha(s)$  pour tout  $s \in S$ .

Il est tout d'abord possible de construire un champ de vecteurs  $\nu$  le long de  $S$  vérifiant 2), car ceci revient à construire une section d'un espace fibré

$E$  dont la fibre est un espace affine. Soit  $F$  le fermé de  $S$  formé des points où  $dt$  restreint à  $S$  s'annule identiquement; d'après l'hypothèse sur  $\alpha$ ,  $\nu$  est certainement transverse à  $S$  aux points de  $F$ . En dehors de  $F$ , la condition 1) signifie que  $\nu$  n'appartient pas au sous-fibré affine  $E_0$  de  $E$  formé des vecteurs  $\nu_0$  tangents à  $S$  et tels que  $\langle dt, \nu_0 \rangle = \alpha$ . La codimension de  $E_0$  dans  $E$  est égale à celle de  $S$  dans  $V$ . Donc si  $\dim S < \text{codim } S$ , il sera toujours possible d'étendre une section de  $E$  définie sur  $F$  en une section sur  $S$  ne rencontrant pas  $E_0$ .

**5.6. Remarque.** Soient  $V$  et  $M$  des variétés et  $t$  une application de  $V$  dans une variété  $R$ . Désignons par  $p$  et  $t'$  les projections naturelles de  $M \times R$  sur  $M$  et  $R$  respectivement. Soit  $f$  une application d'un voisinage d'un fermé  $F$  de  $V$  dans  $M \times R$  telle que, sur  $F$ ,  $d(t'f) = dt$ . Il existe alors une application  $f'$  d'un voisinage de  $F$  dans  $M \times R$  telle que  $t'f = t$  et que  $df = df'$  sur  $F$ . Il suffit en effet de définir  $f'$  par  $f' = (pf, t)$ .

## 6. Théorèmes d'approximation

**6.1.** Les variétés  $V$  et  $M$  sont supposées munies de métriques riemanniennes complètes; la distance de deux points  $x_1$  et  $x_2$  est notée  $d(x_1, x_2)$ .

**Théorème.** Soit  $V$  une variété compacte de dimension  $n$  et  $M$  une variété de dimension  $m$ . On suppose que  $2m \geq 3(n+1)$ .

Etant donné un plongement topologique  $g$  de  $V$  dans  $M$  et un nombre positif  $\varepsilon$  arbitraire, il existe un plongement différentiable  $f$  de  $V$  dans  $M$  tel que  $d[f(x), g(x)] < \varepsilon$  pour tout  $x \in V$ . De plus si  $g$  est un plongement différentiable au voisinage d'un fermé  $F$  de  $V$ , on peut supposer que  $f = g$  sur  $F$ .

L'idée de la démonstration est d'approcher  $g$  par une application générique  $f$  et d'éliminer pas à pas les points doubles de  $f$  comme au § 4. Si  $f$  est suffisamment proche de  $g$ , les paires de points de  $V$  appliqués par  $f$  sur un même point de  $M$  sont très proches, donc liés par une unique géodésique; il en résulte que l'on ne rencontre aucune obstruction homotopique dans l'identification avec le modèle (4.6 à 4.7).

**6.2.** Il existe un nombre  $\varrho > 0$  (resp.  $\varrho' > 0$ ) tel que deux points de  $V$  (resp.  $M$ ) dont la distance est inférieure à  $\varrho$  (resp.  $\varrho'$ ) sont joints par un segment géodésique unique de longueur égale à la distance de ces points et dépendant continuellement de ces points.

**Lemme.** Etant donné un nombre  $\eta > 0$ , il existe une application générique  $f: V \rightarrow M$  telle que

- a)  $d[f(x), g(x)] < \eta$  pour tout  $x \in V$ ,  
 b) si  $f(x) = f(y)$ , alors  $d(x, y) < \rho$  et, pour tout couple de points  $x_1, y_1$  sur le segment géodésique joignant  $x$  à  $y$ ,  $d[f(x_1), f(y_1)] < \eta$ .

**Démonstration du lemme.** Comme  $g$  est une application continue, il existe un nombre  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < \rho$ , tel que, si  $d(x, y) < \alpha$ , alors  $d[g(x), g(y)] < \eta/2$ . D'autre part, comme  $g$  est biunivoque et  $V$  compacte, il existe un nombre  $\beta > 0$  tel que si  $d[g(x), g(y)] < \beta$ , alors  $d(x, y) < \alpha$ .

Soit alors  $f$  une application générique (cf. 2.5) de  $V$  dans  $M$  telle que  $d[f(x), g(x)] < \min(\eta/4, \beta/2)$ . Si  $f(x) = f(y)$ , alors

$$d[g(x), g(y)] \leq d[g(x), f(x)] + d[g(y), f(y)] < \beta,$$

donc  $d(x, y) < \alpha < \rho$ . D'autre part, si  $d(x, y) < \alpha$ , alors

$$d[f(x), f(y)] \leq d[f(x), g(x)] + d[g(x), g(y)] + d[g(y), f(y)] < \eta/4 + \eta/2 + \eta/4 = \eta,$$

c. q. f. d.

**6.3. Démonstration du théorème.** Nous voulons montrer que si l'on part d'une application générique  $f$  vérifiant la condition b) du lemme, avec  $\eta < \rho'$ , chacune des déformations  $f_\tau$  de  $f = f_0$  qui interviennent dans les propositions 1 et 2 de 4.2 peut être effectuée de sorte que  $d[f_1(x), f_0(x)] < \eta$  et que  $f_1$  vérifie la condition b) du lemme.

Remarquons tout d'abord que dans les modèles 4.4 et 4.10, il existe une déformation de  $K_\varepsilon$  qui déplace les points sur les segments  $\sigma$  parallèles à l'axe des  $x_1$  et qui rétracte  $K_\varepsilon$  sur l'union du plan  $x_1 = 0$  et du compact  $\Omega$  composé des segments de droites joignant les paires de points de  $D_0 \cap K$  qui ont même image par  $g_0$ . De même soit  $\Omega'$  le compact de  $K'$  formé des segments de droites parallèles au plan  $P$  des variables  $X_1, Y_1$ , et qui joignent les points de  $g_0(\Omega)$  aux points de  $\Delta_0$ . Il existe une rétraction de  $K'_\varepsilon$  sur l'union du plan  $X_1 = 0, Y_1 = 1/2$  et de  $\Omega'$ , les points se déplaçant sur les segments  $\sigma'$  parallèles à  $P$  et contenant un point du plan  $X_1 = 0, Y_1 = 1/2$ .

En vertu de ce qui précède et de la condition b) sur  $f$ , il est possible d'étendre l'application  $H_1$  de  $D_0 \cap K$  dans  $V$ , donnée en 4.6, a), suivant une application continue  $H$  de  $K_\varepsilon$  dans  $V$  qui applique tout segment  $\sigma$  sur un segment géodésique de longueur  $< \rho$ . L'application de  $g_0(K_\varepsilon)$  dans  $M$  faisant correspondre à tout point  $x' = g_0(x)$  le point  $f_0 \overline{H}(x)$ , peut être étendue suivant une application  $H'$  de  $K_\varepsilon$  dans  $M$  appliquant tout segment de droite  $\sigma'$  sur un segment géodésique de longueur  $< \eta$ .

Ensuite, dans 4.5 et 4.7, on pourra construire  $H$  et  $H'$  très proches de  $\overline{H}$  et  $\overline{H}'$  de sorte que, pour deux points quelconques  $x$  et  $y$  de tout segment  $\sigma$ , on ait 1)  $d[H(x), H(y)] < \rho$ , 2)  $d[f_0 H(x), f_0 H(y)] < \eta$ , et pour deux points quelconques  $x', y'$  de tout segment  $\sigma'$ , 3)  $d[H'(x'), H'(y')] < \eta$ .

Or au cours de la déformation  $f_\tau$ , les points se déplacent sur les arcs  $H(\sigma')$ ; donc d'après 3),  $d[f_1(x), f_0(x)] < \rho$  pour tout  $x \in V$ . D'autre part les points de  $H(K_g)$  qui ont même image par  $f_1$  se trouvent sur un arc  $H(\sigma)$ ; leur distance est inférieure à  $\rho$  et d'après 2), la condition b) est vérifiée.

Enfin on peut supposer qu'il y a au plus 3 déformations  $f_\tau$  qui déplacent un point  $x$  donné de  $V$ . En effet, soient  $f_\tau^i, i = 1, \dots, N$ , les déformations successives que l'on doit effectuer pour éliminer les points doubles (4.2),  $H^i: K_g^i \rightarrow V, H^i: K_g^i \rightarrow M$  les identifications avec les modèles qui servent à les définir (4.5, 4.12). En choisissant  $\delta$  assez petit dans le modèle 4.10, on peut supposer que tout point de  $\Delta$  appartient au plus à 3 compacts  $H^i(K_g^i)$  (cf. 4.2). D'autre part, si  $H^i(K_g^i) \cap H^j(K_g^j) \cap \Delta = \emptyset$ , on pourra supposer  $H^i(K_g^i) \cap H^j(K_g^j) = \emptyset$ , car  $2 \dim K = 4n - 2m + 2 < n = \dim V$ .

En choisissant donc une application générique  $f$  vérifiant les conditions du lemme avec  $\eta < \varepsilon/4$ , on obtiendra après ces déformations successives le plongement désiré.

Si  $g$  est déjà un plongement au voisinage de  $F$ , on partira d'une application générique  $f$  telle que les segments géodésiques joignant les paires de points de  $V$  ayant même image par  $f$ , ne rencontrent pas  $F$ . On pourra donc supposer qu'aucun des compacts  $H^i(K_g^i)$  ne rencontre  $F$ ; ainsi chaque déformation  $f_\tau^i$  sera constante sur  $F$ .

Le théorème d'approximation pour les isotopies (cf. introduction) se démontre exactement de la même manière.

**6.4.** Nous énoncerons pour terminer un autre théorème dont la démonstration sera laissée au lecteur, car elle est aussi très semblable à la précédente.

**Théorème.** *Soit  $f$  un plongement d'une variété compacte  $V$  de dimension  $n$  dans une variété  $M$  de dimension  $m$ . On suppose  $2m > 3(n + 1)$ . Il existe un nombre  $\varepsilon$  dépendant de  $f$  tel que tout plongement  $f'$  de  $V$  dans  $M$  avec  $d[f(x), f'(x)] < \varepsilon$ , pour tout  $x \in V$ , est isotope à  $f$ .*

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] C. EHRESMANN, *Introduction à la théorie des structures infinitésimales et des pseudogroupes de LIE*. Colloque de topologie et géométrie différentielle de Strasbourg. C.N.R.S., 1953.
- [2] A. HAEFLIGER, *Differentiable imbeddings*. Bull. Amer. Math. Soc., to appear.
- [3] M. MORSE, *The calculus of variations in the large*. A.M.S. Colloquium publications, 18 (1934).
- [4] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*. Princeton University Press (1951).
- [5] R. THOM, *Un lemme sur les applications différentiables*. Bol. Soc. mat. mexic., 2e série, t. I (1956), 59–71.
- [6] R. THOM, *La classification des immersions d'après SMALE*. Séminaire Bourbaki, décembre 1957, Paris.

- [7] R. THOM, *Singularities of differentiable mappings*. Notes miméographiées rédigées par H. Levine, Bonn (1959).
- [8] H. WHITNEY, *Differentiable manifolds*. Ann. of Math., 37 (1936), 645–680.
- [9] H. WHITNEY, *Differentiability of the remainder term in TAYLOR's formule*. Duke Math. J., 10 (1943), 153–158.
- [10] H. WHITNEY, *Differentiable even functions*. Duke Math. J., 10 (1943), 159–160.
- [11] H. WHITNEY, *The general type of singularity of a set of  $2n-1$  smooth functions of  $n$  variables*. Duke Math. J., 10 (1943), 161–172.
- [12] H. WHITNEY, *The self-intersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space*. Ann. of Math., 45 (1944), 220–246.
- [13] H. WHITNEY, *The singularities of a smooth  $n$ -manifold in  $(2n-1)$ -space*. Ann. of Math. 45 (1944), 247–293.
- [14] H. WHITNEY, *Singularities of mappings of euclidean spaces*. Sympos. Int. de Topologia Algebraica (1958), 285–301.
- [15] W. T. WU, *On the isotopy of  $C^r$ -manifolds of dimension  $n$  in EUCLIDEAN  $(2n+1)$ -space*, Science Records, New Ser. Vol. II (1958), 271–275.

(Reçu le 25 février 1961)