Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 35 (1961)

Artikel: Sur les variétés à courbure positive de diamètre minimum.
Autor: Berger, Marcel
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27328

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 12.12.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Sur les variétés à courbure positive de diamètre minimum

par MARCEL BERGER, Strasbourg[1])

1. Introduction

Dans [2] et [3], il a été démontré que si une variété riemannienne compacte V, simplement connexe, de dimension paire et de courbure comprise entre 1 et $\frac{1}{4}$, avait un diamètre de valeur minimum π, alors V était nécessairement un espace riemannien symétrique compact de rang un (muni de sa structure riemannienne canonique, c'est-à-dire l'un des espaces suivants: sphère, espace projectif complexe ou quaternionien, plan projectif des octaves de CAYLEY. Dans la démonstration apparaissait en particulier le fait que *toutes* les géodésiques de V (issues d'un point quelconque et de direction quelconque) étaient fermées et de longueur 2π. Dans le présent article, on démontre que ce dernier résultat subsiste si la variété V satisfait toutes les hypothèses ci-dessus à l'exception de celle concernant la courbure qui est affaiblie en: la courbure de V est inférieure ou égale à 1 et strictement positive. Le résultat obtenu (théorème 4 ci-dessous) impose alors à la topologie de V des restrictions très fortes que l'on précisera dans un article ultérieur.

2. Notations et définitions

Dans toute la suite, V désignera une variété riemannienne, de dimension plus grande que 1 et T_p l'espace des vecteurs tangents à V en un point p de V; pour tout $p \in V$, par $\| \ \|$ (resp. $\langle \ , \ \rangle$), on désignera la norme (resp. le produit scalaire associé) qui définit la structure riemannienne de V, structure qui sera supposée indéfiniment différentiable. La courbure de V dans le sous-espace μ à deux dimensions de T_p, engendré par deux vecteurs linéairement indépendants X et Y, est, par définition, le scalaire:

$$\varrho(\mu) = \varrho(X, Y) = -\frac{\langle R(X,Y)\,X, Y\rangle}{\|X\|^2 \|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

où $R(X, Y)$ désigne l'endomorphisme de T_p défini par le tenseur de courbure de V, que l'on associe canoniquement à la structure riemannienne de V (si $\dim V = 2$, la fonction $\varrho(T_p) = \varrho(p)$ n'est autre que la courbure de GAUSS de la surface considérée au point p). *La variété riemannienne V est dite δ-pincée si l'on a: $\delta \leqslant \varrho(\mu) \leqslant 1$ quel que soit μ* (ou, plus généralement,

[1]) Le résultat de cet article a été présenté au Colloque international de Géométrie différentielle et de Topologie de Zurich de juin 1960.

si $\delta\Delta \leqslant \varrho(\mu) \leqslant \Delta$ avec $\Delta > 0$, mais on supposera dans toute suite, ce qui est banalement toujours possible, avoir normé la structure riemannienne de V en sorte que $\Delta = 1$). Toutes les géodésiques considérées dans V seront paramétrées par la longueur de leur arc à partir de leur origine. Si $\Lambda = \{\lambda(s)\}$ $(0 \leqslant s \leqslant s_0)$ est une telle géodésique, $\lambda'(s)$ désignera son vecteur tangent en $\lambda(s)$ et l'on aura $\| \lambda'(s) \| = 1$ quel que soit s. Par $d(p, q)$ on désignera la distance des deux points p, q de V dans la structure d'espace métrique de V canoniquement associée à sa structure riemannienne; la borne supérieure (éventuellement infinie) des $d(p, q)$, lorsque p et q parcourent V, est appelée le *diamètre* de V et notée $d(V)$. *Par* $|||\, p, q \,|||$ *on entendra l'ensemble des géodésiques de* V *qui ont pour extrémités* p, q *et dont la longueur est égale à* $d(p, q)$. Si p est un point de V et X un élément de T_p tel que $\| X \| = 1$, on sait qu'il existe une géodésique et une seule $\Lambda(X) = \{\lambda(s, X)\}$ $(0 \leqslant s \leqslant \varepsilon(X))$ d'origine p et telle que $\lambda'(0, X) = X$, avec $\varepsilon(X) > 0$. Il est classique que si la variété V est compacte, alors on peut prendre $\varepsilon(X) = \infty$ pour tout $X \in T_p$ tel que $\| X \| = 1$ et tout $p \in V$, autrement dit $\lambda(s, X)$ a un sens quel que soit s. Le point p étant fixé, on peut alors définir une application de T_p dans V, notée $\exp(p)$ et dite application exponentielle d'origine p, en posant pour tout $Z \in T_p$:

$$\exp(p)(Z) = \lambda\left(\| Z \|, \frac{Z}{\| Z \|}\right).$$

3. Rappel de résultats connus

Les résultats suivants seront nécessaires dans la suite:

Théorème 1 (HOPF-RINOW). *Si la variété* V *est compacte, quels que soient* $p, q \in V$, *l'ensemble* $|||\, p, q \,|||$ *n'est pas vide.*

En particulier, quel que soit p, l'exponentielle $\exp(p)$ est surjective. Le résultat suivant est un critère pour qu'une certaine restriction de $\exp(p)$ soit injective (il utilise le théorème 1):

Théorème 2 (KLINGENBERG [4], théorème 1, p. 655). *Soit* V *une variété riemannienne compacte, simplement connexe, de dimension paire et* δ*-pincée avec* $\delta > 0$. *Alors, quels que soient les deux points* p, q *de* V *tels que* $d(p, q) < \pi$, *l'ensemble* $|||\, p, q \,|||$ *a un élément et un seul. En particulier, le diamètre de* V *vérifie:* $d(V) \geqslant \pi$.

Théorème 3 ([3], lemme 3, p. 165). *Soit* V *une variété riemannienne compacte, simplement connexe, de dimension paire et* δ*-pincée avec* $\delta > 0$. *Soient* p, q *deux points de* V *tels que* $d(p, q) = \pi$ *et* Θ, Θ_1 *deux géodésiques appar-*

tenant à $|||\, p, q \,|||$ $(\theta(0) = \theta_1(0) = p,\ \theta(\pi) = \theta_1(\pi) = q)$ *telles que* $\theta'(0) \neq \pm\theta_1'(0)$. *Soit* $\Theta(\lambda, \mu)$ *la géodésique d'origine* p, *de longueur* π *et dont le vecteur tangent en* p *est* $\dfrac{\lambda\theta'(0) + \mu\theta_1'(0)}{\|\lambda\theta'(0) + \mu\theta_1'(0)\|}$. *Alors, quels que soient* $\lambda > 0$, $\mu > 0$, *on a* $\Theta(\lambda, \mu) \in |||\, p, q \,|||$. *En outre, le sous-ensemble de* V *constitué par la réunion des* $\Theta(\lambda, \mu)$ $(\lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0)$ *est une sous-variété totalement géodésique de dimension* 2 *de* V, *et de courbure constante égale à* 1.

4. Enoncé du résultat

Dans toute la suite, V sera une variété riemannienne compacte, simplement connexe, de dimension paire, δ-pincée avec $\delta > 0$, et dont le diamètre a la valeur minima dans l'inégalité du théorème 2, c'est-à-dire telle que $d(V) = \pi$. Sous ces conditions, nous allons démontrer le résultat suivant: pour deux points quelconques p, q de V, désignons par $A_{p,q}$ le sous-ensemble de T_q constitué par les vecteurs tangents en q aux éléments de $|||\, p, q \,|||$; $A_{p,q}$ est un sous-ensemble de la sphère S_q des vecteurs unitaires d'origine q.

Théorème 4. *Quels que soient* p, q *tels que* $d(p, q) = \pi$, *le sous-ensemble* $A_{p,q}$ *de* S_q *est l'intersection de* S_q *avec un sous-espace vectoriel de* T_q.

Il en résultera en particulier que, si $X \in A_{p,q}$, on a aussi $-X \in A_{p,q}$ ce qui montre que toute géodésique $\Gamma \in |||\, p, q \,|||$, dont le vecteur tangent en q est X, se prolonge en la géodésique $\Gamma \cup \Gamma'$ de longueur 2π constituée par la réunion de Γ avec la géodésique $\Gamma' \in |||\, p, q \,|||$ dont le vecteur tangent en q est $-X$. D'où, puisque p, q et $X \in A_{p,q}$ sont arbitraires et d'après le lemme 2 de [2], le fait que toutes les géodésiques de V (d'origine et de direction initiale quelconques) sont fermées et de longueur 2π. Il est d'autre part facile de voir que tous les $A_{p,q}$ ont même dimension et que, pour q fixe et p variable, ce sont les fibres d'une fibration de S_q. Enfin, pour tout $p \in V$, l'ensemble $C(p) = \{q \mid d(p, q) = \pi\}$, qui n'est autre que le lieu résiduel de p (voir par exemple: [2], p. 57, et lemme 3, p. 61) est alors une sous-variété de V de codimension égale à la dimension des $A_{p,q}$. Tout ceci implique de très fortes restrictions sur la topologie de V; nous les préciserons ultérieurement.

5. Démonstration d'icelui

Les hypothèses sont toujours celles du no 4; et p, q deux points de V, fixés une fois pour toutes, tels que $d(p, q) = \pi$. Posons $A_{p,q} = U$; d'après le no 7, p. 169 de [3], sous de telles hypothèses, il existe $X_0 \in U$ tel que aussi

$-X_0 \in U$. Appelons T'_q l'orthogonal de X_0 dans T_q et posons $U' = U \cap T'_q$. Nous devons montrer que U est l'intersection de S_q avec un sous-espace vectoriel de T_q. *Pour cela, il suffit de montrer que U' est l'intersection de S_q avec un sous-espace vectoriel de T_q.* En effet, supposons qu'il en soit ainsi; alors $Z \in U'$ entraîne $-Z \in U'$. Comme U vérifie le théorème 3, il suffit de montrer que, quel que soit $X \in U$, alors aussi $-X \in U$. Supposons d'abord que l'on ait $\langle X, X_0 \rangle \leqslant 0$; alors, si $X \in U$, on a aussi $Z \in U$ (d'après le théorème 3), où Z est défini par: $Z = \dfrac{Y}{\|Y\|}$, avec $Y = X - \langle X, X_0 \rangle X_0$. Mais, par construction: $Z \in U'$; mais $-Z \in U'$ par hypothèse. Comme X est une combinaison linéaire à coefficients positifs de Z et de X_0, c'est que $-X$ sera une combinaison linéaire à coefficients positifs de $(-Z)$ et de $(-X_0)$, donc appartiendra à U d'après le théorème 3. Dans le cas où $\langle X, X_0 \rangle \geqslant 0$, le raisonnement ci-dessus reste valable en y échangeant les rôles de X_0 et $-X_0$.

Démontrons maintenant que U' est l'intersection de S_q avec un sous-espace vectoriel de T_q, ce qui nécessite d'abord quelques lemmes.

Lemme 1. *Soit P le sous-espace vectoriel de T_q engendré par U'. Pour tout $X \in P$ tel que $\|X\| = 1$, il existe un $\varepsilon > 0$ et un $\eta > 0$ tels que: quel que soit le vecteur unitaire Y de T_q qui vérifie $\langle Y, X \rangle \geqslant 1 - \eta$, on a: $d(p, \exp(q)(tY)) < d(p, q) = \pi$ pour tout t tel que $0 < t < \varepsilon$.*

Comme l'ensemble des vecteurs unitaires Y de T_q qui sont tels que $\langle X, Y \rangle \geqslant 1 - \eta$ est un compact, il suffit, pour démontrer le lemme, de montrer que, pour tout Y dans ce compact, il existe un $\varepsilon(Y)$ tel que: $d(p, \exp(q)(tY)) < d(p, q)$ pour tout t tel que $0 < t < \varepsilon(Y)$. Il est d'abord classique que, si $\langle Z, X_0 \rangle < 0$, il existe $\varepsilon(Z)$ tel que $d(p, \exp(q)(tZ)) < d(p, q)$ pour tout t tel que $0 < t < \varepsilon(Z)$; ceci parce qu'il existe un élément de $|||p, q|||$ dont le vecteur tangent en q est X_0. Changeant X_0 en $-X_0$, on voit qu'il suffit de trouver un $\varepsilon(Y)$ ayant la propriété demandée pour tous les Y tels que $\langle Y, X \rangle \geqslant 1 - \eta$ et $\langle Y, X_0 \rangle = 0$.

Utilisons maintenant le fait que X appartient à l'espace vectoriel P engendré par U'. Appelons $\Gamma = \{\gamma(s)\}$ $(0 \leqslant s \leqslant 2\pi)$ la géodésique constituée par la réunion des deux géodésiques de $|||p, q|||$ dont les vecteurs tangents en q sont X_0 et $-X_0$ respectivement $(\gamma(\pi) = q, \gamma(0) = \gamma(2\pi) = p)$. Pour tout $Z \in T'_q$, définissons un champ $\mathfrak{Y}(Z) = \{Z(s)\}$ $(0 < s < 2\pi)$ le long de Γ par les deux conditions: 1. $\nabla_{\gamma'(s)} Z(s) = 0$ quel que soit s 2. $Z(\pi) = Z$ (autrement dit, $Y(Z)$ est le champ obtenu en transportant parallèlement Z le long de Γ). D'après le théorème 3, si $Z \in U'$, alors la courbure $\varrho(\gamma'(s), Z(s))$ est telle que: $\varrho(\gamma'(s), Z(s)) = 1$ pour tout s tel que $0 < s < 2\pi$. Mais le raisonnement fait au bas de la page 63 de [2] montre

que les champs $Y(Z)$, tels que $\varrho(\gamma'(s), Z(s)) = 1$ quel que soit s, forment un sous-espace vectoriel de T'_q; c'est donc que l'on a, puisque P est le sous-espace vectoriel engendré par U': $\varrho(\gamma'(s), X(s)) = 1$ quel que soit s et quel que soit $X \in P$.

Soit maintenant $Y \in T'_q$ quelconque et introduisons le champ $\mathfrak{X}(Y) = \{\sin(ks)\, Y(s)\}$ $(0 \leqslant s \leqslant \pi)$. La formule de la variation seconde ([1], p. 97, formule (1)) donne:

$$l''(0)(\mathfrak{X}(Y)) = \int_0^\pi (k^2 \cos^2(ks) - \varrho(\gamma'(s), Y(s)) \sin^2(ks))\, ds\,.$$

On vient de voir que $\varrho(\gamma'(s), X(s)) = 1$ pour tout s et tout $X \in P$; puisque la courbure $\varrho(\gamma'(s), Y(s))$ est continue en le vecteur $Y(s)$ et que « Y voisin de X » entraîne « $Y(s)$ voisin de $X(s)$ quel que soit s », il est clair que, pour tout $\zeta > 0$, il existe un $\eta(\zeta) > 0$ tel que, quel que soit Y tel que $\langle Y, X\rangle \geqslant 1 - \eta(\zeta)$, on ait: $\varrho(\gamma'(s), Y(s)) \geqslant 1 - \zeta$ quel que soit s tel que $0 \leqslant s \leqslant \pi$. On a alors, par une intégration directe:

$$l''(0)(\mathfrak{X}(Y)) \leqslant (\pi/2)(k^2 - (1 - \zeta)) + (1/4k)(1 - \zeta + k^2) \sin(2\pi k)\,.$$

Prenons k tel que $3/4 < k < 1$ et $\zeta = 1 - k^2$; alors, si l'on pose $\eta = \eta(\zeta = 1 - k^2)$, on a bien, pour tout Y vérifiant $\langle Y, X\rangle \geqslant 1 - \eta$: $l''(0)(\mathfrak{X}(Y)) < 0$. Il est alors banal que cela entraîne l'existence d'un $\varepsilon(Y) > 0$ tel que $d(p, \exp(q)(tY)) < d(p, q)$ pour tout t tel que $0 < t < \varepsilon(Y)$.

Lemme 2. *Quel que soit $X \in P$, il existe $Z' \in U'$ tel que $\langle X, Z'\rangle > 0$.*

Il suffit de démontrer qu'il existe $Z \in U$ tel que $\langle X, Z\rangle > 0$, car alors $Z' = \dfrac{Z - \langle X_0, Z\rangle X_0}{\|Z - \langle X_0, Z\rangle X_0\|}$ est un vecteur de U' qui répond à la question, puisque $\langle X_0, X\rangle = 0$ et $\|Z - \langle X_0, Z\rangle X_0\| \leqslant 1$ entraînent $\langle Z', X\rangle \geqslant \langle Z, X\rangle$. Pour exhiber un tel Z, utilisons d'abord le lemme 1 dans le cas particulier de X lui-même. Posons $q(t) = \exp(q)(tX)$ $(0 < t < \varepsilon)$; on a donc $d(p, q(t)) < \pi$ et l'on posera $d(p, q(t)) = d(t)$ et $e(t) = \pi - d(t)$. D'après le théorème 2, l'ensemble $|||\, p, q(t)\, |||$ n'a qu'un seul élément que l'on désignera par $\Lambda(t) = \{\lambda(u, t\}$ $(0 \leqslant u \leqslant d(t),\ 0 < t < \varepsilon)$ (avec $\lambda(0, t) = p$, $\lambda(d(t), t) = q(t)$). Appelons $q'(t)$ le vecteur tangent en $q(t)$ à la géodésique $\exp(q)(tX)$ et posons: $\alpha(t) = \langle q'(t), \lambda'_t(d(t), t)\rangle$. On a $d(q, q(t)) = t$, donc, d'après le théorème 6 de [3], p. 164: $d(p, q)^2 \leqslant d(t)^2 + t^2 + 2t\alpha(t)d(t)$. De $d(p, q) = \pi$, on déduit l'inégalité:

$$\alpha(t) \geqslant \frac{\pi e(t)}{t} - \frac{t^2 + e(t)^2}{2t d(t)}\,. \tag{1}$$

Soit $r(t)$ le point défini en prolongeant $\Lambda(t)$ jusqu'à la distance π de p

c'est-à-dire $r(t) = \lambda(\pi, t)$. Lorsque $t \to 0 : d(t) \to \pi$ et $e(t) \to 0$, donc $d(q, r(t)) \to 0$ d'après l'inégalité du triangle; il existe donc $\varepsilon' > 0$ tel que $d(q, r(t)) < \varepsilon$ quel que soit $t < \varepsilon'$. Appliquons alors le lemme 1 en prenant pour vecteur Y le vecteur tangent $Y(t)$ en q à la géodésique unique de $|||\, q, r(t) \,|||$. D'après ce lemme, si $Y(t)$ était tel que $\langle Y(t), X\rangle \geqslant 1 - \eta$, on aurait $d(p, r(t)) < \pi$; comme $d(p, r(t)) = \pi$ par construction, c'est donc que $\langle Y(t), X\rangle \leqslant 1 - \eta$. Considérons le triangle de V dont les trois sommets sont les points $q, q(t), r(t)$ et les trois côtés les éléments uniques de $|||\, q, q(t) \,|||$, $|||\, q(t), r(t) \,|||$, $|||\, q, r(t) \,|||$ respectivement. L'angle en q de ce triangle étant tel que $\langle Y(t), X\rangle \leqslant 1 - \eta$ et la métrique de V étant, lorsque $t \to 0$, euclidienne au deuxième ordre près, c'est donc que, si $s(t)$ désigne le pied de la perpendiculaire abaissée de $q(t)$ sur $|||\, q, r(t) \,|||$, l'on a: $d(q(t), r(t)) \geqslant d(q(t), s(t))$ et:

$$\frac{d(q(t), s(t))}{d(q, q(t))} = \frac{e(t)}{t} \geqslant \sin \beta(t) \; (t \to 0)$$

(où l'on a posé $\cos \beta(t) = \langle Y(t), X\rangle$). Donc on a:

$$\frac{e(t)}{t} \geqslant a \, (t \to 0) \quad \text{avec} \quad a \geqslant \sin \beta(t) \geqslant (1 - (1 - \eta)^2)^{1/2} > 0 \,. \tag{2}$$

De (1) et (2) on déduit qu'il existe $\varepsilon'' > 0$ tel que:

$$\alpha(t) \geqslant b > 0 \quad \text{quel que soit } t \text{ tel que } 0 < t < \varepsilon'' \,. \tag{3}$$

De la famille des géodésiques $\alpha(t)$, on extrait une suite convergente, dont on notera la géodésique limite par Λ ($\Lambda \in |||\, p, q \,|||$). Si Z désigne le vecteur tangent à Λ en q, comme $\alpha(t) = \langle q'(t), \lambda'_t(d(t), t)\rangle$ et que $q'(t) \to X (t \to 0)$, $\lambda'_t(d(t), t) \to Z \; (t \to 0)$, l'inégalité (3) entraîne $\langle Z, X\rangle > 0$.

Déduisons maintenant le théorème 4 du lemme 2. Dans l'espace vectoriel P engendré par U', soit CU' le cône ensemble des kX pour tous les $X \in U'$ et tous les $k \geqslant 0$; le théorème 3 affirme que CU' est *convexe* et il faut montrer que $CU' = P$. Soit donc un point $Y \in P$ tel que $Y \notin CU'$; il existe un point Z de CU' tel que la distance euclidienne dans P de Y à Z soit un minimum absolu en Z pour l'ensemble des points de CU'. Si H désigne l'hyperplan de P qui est orthogonal à $Y - Z$, il est classique que le cône convexe CU' est alors tout entier dans la région fermée de H qui ne contient pas Y (car s'il existait un $Z' \in CU'$ dans la région ouverte qui contient Y, le segment fermé d'extrémités Z et Z' aurait des points

situés strictement à l'intérieur de la sphère de centre Y qui passe par Z). On a donc $\langle Y - Z, S\rangle \leqslant 0$ quel que soit $S \in CU'$, a fortiori $\langle Y - Z, S\rangle \leqslant 0$ quel que soit $S \in U'$. Mais ceci contredit le lemme 2 appliqué au vecteur $Y - Z$ de P.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. BERGER, *Les variétés riemanniennes à courbure positive.* Bull. Soc. math. Belgique, *10* (1958), 89–104.

[2] M. BERGER, *Sur quelques variétés riemanniennes suffisamment pincées.* Bull. Soc. math. France, *88* (1960), 57–71.

[3] M. BERGER, *Les variétés riemanniennes.* (¼)-pincées, à paraître aux Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, 1960.

[4] W. KLINGENBERG, *Contributions to Riemannian geometry in the large.* Ann. of math., *69* (1959), 654–666.

(Reçu le 24 juin 1960)