**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 35 (1961)

**Artikel:** Eine konstruktiv-figürliche Begründung eines Abschnittes der zweiten Zahlklasse.

**Autor:** Wermus, H.

**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-27345

# Eine konstruktiv-figürliche Begründung eines Abschnittes der zweiten Zahlklasse

Von H. Wermus, Genf

## § 1. Einleitung

### 1. Allgemeines

Seit gewisser Zeit sind einige formale Darstellungen verschiedener Abschnitte der zweiten Zahlklasse, worunter auch solche auf konstruktivem Wege[1]), entwickelt worden[2]). In dieser Abhandlung wird eine Bezeichnung der Ordinalzahlen eines Abschnittes der zweiten Zahlklasse durch gewisse Zahlfiguren ($Z$-Ausdrücke)[3]) ausgebildet. Diese Bezeichnungsweise ist hier besonders als ein konstruktiver Aufbau und Weiterführung der üblichen Cantorschen Schreibweise angelegt und ermöglicht insbesondere auf Grund einer einfachen Definition der Addition eine ziemlich übersichtliche Entwicklung der transfiniten Arithmetik. Es wird auch jedem Ausdruck zweiter Art eine Hauptfolge zugeordnet (vgl. § 10, 3).

Dieser Aufbau erfolgt jedoch als eine independente Theorie der $Z$-Ausdrücke, wobei wir uns hier auf Zahlfiguren mit endlicher Stellenzahl (das heißt mit endlichen Indizes)[3]) beschränken. (Auf eine naheliegende Erweiterung dieses Formalismus wird am Schluß kurz hingewiesen.) Der somit aufgebaute Abschnitt der zweiten Zahlklasse ist zum Teil infolgedessen ein Abschnitt des auf anderwertigen Vergleichsprinzipien aufgestellten Systems von Ackermann-Schütte (vgl. Literaturverzeichnis)[4]). Da aber der 4-stellige Ausdruck $[0, 0, 0, 1]$ schon die erste kritische Epsilonzahl, wo die übliche Cantorsche Bezeichnungsweise aufhört, darstellt, so ergeben die $Z$-Ausdrücke immerhin eine beträchtlich weiter gehende Formalisierung dieses klassischen Systems.

---

[1]) Zum Begriff des «konstruktiven Aufbaues» siehe A. Church, Literaturverzeichnis [3].

[2]) Siehe Literaturverzeichnis am Ende.

[3]) Zur Erklärung der Grundbegriffe siehe § 2. Siehe auch Beispiele im Anhang.

[4]) Vgl. K. Schütte, Literaturverzeichnis [7]. Die Schütteschen Klammersymbole sind zweizeilig geschrieben, und es entspricht etwa für $n > 2$ dem $n$-stelligen $Z$-Ausdruck $[0, \ldots, 0, Y]$ das $\varphi$-Zahlzeichen $\varphi\begin{pmatrix} Y^* & -2+n & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, wobei $Y^*$ das $\varphi$-Zeichen für $Y$ und $\varphi$ eine geeignete Funktion sind. Ebenso entspricht dem $Z$-Ausdruck $[a, b, c]$ das $\varphi$-Zahlzeichen $\varphi\begin{pmatrix} a^* \begin{pmatrix} b^* \begin{pmatrix} c^* & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \\ 0 \quad 1 \end{pmatrix} \\ 0 \quad 1 \end{pmatrix}$ (vgl. Fußnote 23). Schütte [7] enthält in einer abweichenden (konstruktiven) Symbolik das Funktionensystem von O. Veblen [1] und das System von W. Ackermann [4] (vgl. dazu [7], Seite 15).

Im ersten Teil der Arbeit werden Strukturtransformationen der $Z$-Ausdrücke (§ 3 Amplifikation), die Vergleichsprozedur sowie die Operation $WZ$ (Vereinfachung) behandelt und deren Verträglichkeit bewiesen (§ 4). Die eingeführten Amplifikationen und Vereinfachungen der $Z$-Ausdrücke entsprechen den verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten für eine Ordnungszahl in der üblichen transfiniten Arithmetik. Anschließend an ein einfaches Vergleichsprinzip für Zahlsequenzen wird dann der Begriff «Charakteristik» eines Ausdruckes eingeführt, und es werden weitere mit diesem Begriff zusammenhängende Vergleichssätze bewiesen. Im § 8 wird, gestützt auf die vorangehenden Ergebnisse, der Wohlordnungsnachweis geführt.

Im II. Teil werden die Operationen der Addition und der Limesbildung eingeführt (vgl. insbesondere die Sätze 84 und 85) und deren übliche Eigenschaften bewiesen. Weiter werden gewisse Systeme von Normalfunktionen und deren kritische Stellen betrachtet und anschließend daran die Multiplikations- sowie Potenzformeln hergeleitet. Zum Schluß wird noch auf einige Zusammenhänge zwischen den $Z$-Ausdrücken und der Cantorschen Schreibweise und auf die Beschaffenheit der Grenzzahl des hier entwickelten Systems hingewiesen.

## 2. Zur Einführung der Operation «Amplifikation» und «Vereinfachung»

Wegen der angestrebten Wohlordnung müssen die Vergleichsbeziehungen die (naturgemäße) Bedingung – sie sei mit (1) abgekürzt – erfüllen, die darin besteht, daß ein Ausdruck niemals kleiner als irgendeines seiner Glieder[3]) $Z_k$ sein soll (vgl. Satz 36). In Anbetracht dieser Forderung ist, im Hinblick auf die Einführung eines Vergleiches der möglichst lexikographisch vorgehen soll, zweierlei zu bemerken.

Zunächst können die zu vergleichenden Ausdrücke verschiedene «Stellenzahl» $\sigma(Z)$ aufweisen, was einem direkten lexikographischen Vergleich im Wege steht. Aus $\sigma(Z) > \sigma(Y)$ folgt natürlich noch nicht $Z > Y$, wie es etwa das Beispiel zeigt:

$$Z = [2, 3, 1], \qquad Y = [1, Z]; \qquad \sigma(Z) = 3 > \sigma(Y) = 2 .$$

Nach den eben erwähnten Forderungen muß natürlich $Y \geq Z$ sein.

Es gelingt jedoch durch die Einführung der Operation «Amplifikation» (§ 3), Ausdrücke, in bezug auf den Vergleich, in Äquivalente überzuführen, die die gleiche Stellenzahl aufweisen.

Nun muß man noch zweitens bei der Einführung eines Vergleiches den Umstand beachten, der sich an Hand der folgenden Überlegung einstellt:

$$\text{Sei} \quad \sigma(A) = \sigma(B) \quad \text{und etwa:} \quad A = [0, 1, 1] \quad \text{und} \quad B = [A, 0, 1] .$$

Durch lexikographischen Vergleich etwa von «rechts nach links» ergibt sich: $B < A$. Nach obiger Forderung (1) sollte aber $A \leq B$ sein, was einen Widerspruch ergibt.

Diese Schwierigkeit läßt sich beheben, wenn man naheliegenderweise in $B$ die rechts von $A$ stehenden Glieder «0» und «1» beim Vergleich nicht berücksichtigt. Diese Vernachlässigung läßt sich auf einige Weisen präzisieren.

Wird etwa die Bedingung:

(2) aus $Z_k > [Z_1, \ldots, Z_{k-1}, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_r]$ folgt

$$[Z_1, Z_2, \ldots, Z_{k-1}, Z_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_r] = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_k],$$

genommen, so sind, wie man leicht durch Beispiele zeigen kann, (1) und (2) noch immer inkompatibel.

Wir fordern deshalb: Sei $Z = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_k, \ldots, Z_s]$.

(3) Aus $Z_k > [0, \ldots, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_s]$ soll folgen

$$[Z_1, Z_2, \ldots, Z_{k-1}, Z_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_s] = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_k].$$

Im Hinblick auf die angestrebte Interpretation der $Z$-Ausdrücke, für die etwa $U_{(2)} = [0, 1]$ der Ordnungszahl $\omega$, $U_{(3)} = [0, 0, 1]$ $\varepsilon_0$, $U_{(4)} = [0, 0, 0, 1]$ der ersten kritischen Epsilonzahl usw. entsprechen soll, ist (3) noch nicht das zweckmäßigste[5]). Wir verschärfen[6]) also (3) zu

(4) Ist $Z = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_k, \ldots, Z_s]$ und $Z_k = [Z_{k1}, Z_{k2}, \ldots, Z_{kk}, \ldots, Z_{kr}]$, so soll aus $[0, Z_{k2}, \ldots, Z_{kk}, \ldots, Z_{kr}] > [0, 0, \ldots, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_s]$ folgen: $Z = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_k]$, das heißt, die Terme $Z_l$, mit $l > k$ werden in $Z$ vernachlässigt. Die Bedingung $(H)$ im § 4 bildet eben eine naheliegende Formulierung von (4).

Inwieweit andere Abarten der Bedingung (3) bzw. (4) brauchbare Vergleichsbeziehungen ergeben, etwa

(5) Aus $\overline{Z}_k^{(k)} = [0, \ldots, 0, Z_{k(k+1)}, \ldots, Z_{kr}] > [0, \ldots, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_s]$ (bzw. «$\geq$») folgt $Z = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_k]$, soll vorläufig hier dahingestellt bleiben.

Daß (4) eine hinreichende Bedingung zur Einführung eines Vergleiches bildet, zeigen die folgenden Ausführungen.

---

[5]) Wird nämlich hier die in § 9 eingeführte Addition gedeutet, so ergäbe sich aus der Bedingung (3), daß für jedes $Z$, für das $Z > Y$ ist, $Y + Z = Z$ wäre. Dieses Gesetz ist aber nicht allgemeingültig für die transfinite Addition.

[6]) Gewisse nach (3) gleiche Ausdrücke werden nach (4) als verschieden ausfallen.

I. TEIL

# Begründung des Vergleiches für die $Z$-Ausdrücke und die Wohlordnung

## § 2. Grundbegriffe

1. Es werden hier als Grundzeichen die natürlichen Zahlen und die Null[7]) sowie Klammern «[,]» verwendet. Für den in § 10 einzuführenden Begriff des Limes wird noch dort eine Variable $n$, die Zahlen durchläuft, benützt.

2. Definition eines *Z-Ausdruckes*. Die Zahlen sind $Z$-Ausdrücke. Sind $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$ $Z$-Ausdrücke, so ist $[Z_1, Z_2, \dots, Z_m]$ auch ein $Z$-Ausdruck. $Z$-Ausdrücke werden zur Abkürzung durch $X, Y, Z$ mit eventuellen Indizes dargestellt. Die $Z_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ sind *Glieder* von $[Z_1, Z_2, \dots, Z_m]$[8]). $Z \equiv Y$ bedeutet figürliche Übereinstimmung von $Z$ und $Y$, wobei gleiche Zahlen als identisch gelten.

3. Vorläufige Gleichheitsbeziehung (triviale Vereinfachungen). Es soll stets im folgenden für $[Z, 0, \dots, 0] : Z$ und für $[Z] : Z$ gesetzt werden.

4. *Stellenzahl* bzw. Gliederzahl $\sigma(Z)$. $\sigma(n) = 1$; sei $m > 1$ und $Z_m$ das letzte $\not\equiv 0$ Glied von $Z \equiv [Z_1, Z_2, \dots, Z_m, 0, \dots, 0]$, so ist $\sigma(Z) = m$.

5. *Stellenzeiger* eines Gliedes bzw. eines Termes von $Z$. Sei $Z$ ein Ausdruck, der keine Zahl ist. Steht das Glied $Y$ an der $k$-ten Stelle in $Z$, so ist $k$ der Stellenzeiger (oder *Zeiger*) von $Y$ in $Z : Z_k \equiv Y$.

Ist jetzt $\lambda = l_1 l_2 \dots l_p$ der Stellenzeiger von $X$ in $Y$ und $\varkappa = k_1 k_2 \dots k_r$ der Stellenzeiger von $Y$ in $Z$, so ist die «*Sequenz*» $\varkappa\lambda = k_1 k_2 \dots k_r l_1 l_2 \dots l_p$ der Stellenzeiger von $X$ in $Z : Z_{\varkappa\lambda} \equiv X$.

Sei noch $Z_\varphi$, wo $\varphi$ die leere Sequenz ist, $Z$ selbst. Ist $\alpha$ nicht leer, so nennen wir $Z_\alpha \equiv X$ ein *Term* von $Z$. (Glieder sind also speziell Terme mit einstelligem Zeiger.) Sequenzen von Zahlen, die Stellenzeiger darstellen, bezeichnen wir mit kleinen griechischen Buchstaben.

Weiter sagen wir, der Term $Z_\alpha$ *enthält* den Term $Z_\beta$, falls $\beta = \alpha\gamma$ und $\gamma$ nicht leer ist.

Wird ein Ausdruck $Y$ als Term an die Stelle $\alpha$ in $Z$ gesetzt und wird $Y$ in $Z_\alpha$ umbenannt, so sollen auch die Terme $Y_\gamma$ von $Y$ in $Z_{\alpha\gamma}$ umbenannt werden. Diese Umbenennungsregel soll, wenn es darauf ankommt, im folgenden vorausgesetzt werden.

Die Stellenzeiger sollen lexikographisch von links nach rechts *geordnet* wer-

---

[7]) 0, 1, 2, 3, ... werden hier kurz als «Zahlen» bezeichnet. Die Buchstaben $h, i, j, k, l, m, n, p, q, r, s, t$ beziehen sich auf Zahlen.

[8]) Es werden gelegentlich die Glieder von $Z$ auch mit Indices versehene kleine Buchstaben $z_1, z_2$ usw. dargestellt.

den[9]). Die *Reihenfolge des Auftretens* der Terme $Z_\alpha$ in $Z$ ist dann durch die lexikographische Ordnung ihrer Zeiger gegeben. Beispiel: Ist $Z \equiv [1, [4, 3, [0, 4], 7], 5]$, so ist $Z_1 \equiv 1$, $Z_2 \equiv [4, 3, [0, 4], 7]$, $Z_{21} \equiv 4$, $Z_{22} \equiv 3$, $Z_{23} \equiv [0, 4]$, $Z_{231} \equiv 0$, $Z_{232} \equiv 4$, $Z_{24} \equiv 7$, $Z_3 \equiv 5$.

6. *Struktur* eines $Z$-Ausdruckes. Die Struktur einer Zahl ist die leere Sequenz. Ist $\sigma(Z) = m$ und die Struktur von $Z_m$ $\mu$, so sei die Struktur von $Z$ durch $m\mu$ gegeben. Man sieht leicht ein, daß die Struktur von $Z$ der in der obigen lexikographischen Ordnung größte Stellenzeiger ist, der «in $Z$ vorkommt», und für den $Z_{m\mu} \neq \sigma$ ist.

7. *Stufe* eines $Z$-Ausdruckes, $S\{Z\}$. Wir definieren $S\{n\} = 1$; sind die $n_i$ Zahlen und $n_p \neq 0$, so sei $S\{[n_1, n_2, \ldots, n_p]\} = \sigma([n_1, n_2, \ldots, n_p]) = p$; ist $m > 1$ und $Z_m \not\equiv 0$, so sei $S\{[Z_1, Z_2, \ldots, Z_m]\} = \mathrm{Max}(m, S\{Z_1\}, \ldots, S\{Z_m\})$. Es ist klar, daß man auch $S\{Z\} = \mathrm{Max}(\sigma(Z_\alpha))$, hat wo $\alpha$ alle in $Z$ vorkommenden Zeiger inklusive die leere Folge durchläuft.

8. *Klammerzahl* $N(Z)$ eines $Z$-Ausdruckes.
Es sei $N(n) = 0$; $N([Z_1, Z_2, \ldots, Z_m]) = N(Z_1) + N(Z_2) + \cdots + N(Z_m) + 1$.

9. Häufig benützte *Abkürzung* $\overline{Z}^{(t)}$. Sei $Z \equiv [Z_1, \ldots, Z_t, Z_{t+1}, \ldots, Z_m]$ und $t < m = \sigma(Z)$. Es soll bedeuten: $\overline{Z}^{(t)} \equiv [0, \ldots, 0, Z_{t+1}, \ldots, Z_m]$, wobei $\overline{Z}^{(0)} \equiv Z$ zu setzen ist. $\overline{Z}^{(t)}$ entsteht also aus $Z$, indem man in $Z$ die ersten $t$-Glieder durch Nullen ersetzt. Zu beachten, daß wir statt $(\overline{Z_k})^{(t)}$ kurz $\overline{Z}_k^{(t)}$ setzten. Es ist also $\overline{Z}_k^{(t)} \equiv [0, \ldots, 0, Z_{k(t+1)}, \ldots, Z_{kr}]$, wo $r = \sigma(Z_k)$ ist. Hingegen ist $(\overline{Z}^{(t)})_k$ das $k$-te Glied von $\overline{Z}^{(t)}$ (also Null für $k \leq t$).

Ist $Z \equiv n$ eine Zahl, so sei für jedes $t$ $\overline{n}^{(t)} \equiv 0$. Ist $t \geq \sigma(Z)$, so sei ebenfalls $\overline{Z}^{(t)} \equiv 0$.

## § 3. Amplifikation

**1. Definition.** Sei $\sigma(Z) > 2$ und $1 < k < \sigma(Z)$; dann bezeichne $A_k Z$ einen neuen Ausdruck $Z'$ der auf folgende Weise aus Gliedern des Ausdruckes $Z$ gebildet ist:

$$(A_k): \begin{cases} Z'_t \equiv Z_t \,, & \text{für} \quad 1 \leq t < k \\ Z'_{k1} \equiv Z_k \,, \quad Z'_{kp} \equiv 0 \,, & \text{für} \quad 1 < p \leq k \,, \\ Z'_{kq} \equiv Z_q \,, & \text{für} \quad k < q \leq m \,, \quad \text{und} \quad \sigma(Z'_k) = \sigma(Z) = m \\ Z'_r \equiv 0 \,, & \text{für} \quad r > k \,, \quad \text{das heißt} \quad \sigma(Z') = k \,, \end{cases}$$

oder ausführlich:

$$A_k[Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k, \ldots, Z_m] \equiv [Z_1, \ldots, Z_{k-1}, [Z_k, 0, \ldots, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_m]],$$

[9]) Da keine Verwechslungen im Text zu befürchten sind, benutzen wir für diesen Vergleich einfach das Zeichen «$<$» (statt etwa $\alpha \underset{z}{<} \beta$).

wobei rechts zwischen $Z_k$ und $Z_{k+1}$ $k-1$ Nullen als Terme stehen. Die durch die Tafel $(A_k)$ definierte Umformung des Ausdrucks $Z$ nennen wir eine *Amplifikation* von $Z$. Eine Amplifikation $A_k$ ist also dann und nur dann in $Z$ ausführbar, falls

**(Bed. 1)** $\sigma(Z) > 2$ und $1 < k < \sigma(Z)$ gilt. Diese Bedingung ist aus der Definition direkt zu entnehmen.

Ist $A_k Z \equiv Z'$, so hat man nach Definition $\overline{Z}^{(k)} \equiv \overline{Z}_k^{\prime(k)}$ (zur Abkürzung $\overline{Z}^{(k)}$, vgl. § 2, 9).

Ist $\mu$ die Struktur von $Z$ und $Z' \equiv A_k Z$, so ist die Struktur von $Z'$ durch $k\mu$ gegeben. Wir bezeichnen diese Umformung mit $a_k(\mu) = k\mu$.

Damit also $a_k(\mu)$ ausführbar sei, muß hiernach die Struktur $\mu$ von $Z$ die Form $\mu = m\varrho = \sigma(Z)\varrho$ besitzen, wo $\varrho$ eine eventuelle leere Zeigersequenz ist und dabei $k < m$ gilt. $a_k(\mu)$ bewirkt dann eine Anfügung des Zeigers $k$ links eines größeren in $\mu$.

Die zu $A_k Z \equiv Z'$ inverse Operation heiße *Reduktion* $R_k Z' \equiv Z$. Damit allgemein eine Reduktion $R_m$ in einem Ausdruck $Y$ ausführbar sei, ist nach der Tafel $(A_k)$ notwendig und hinreichend, daß:

(a) $1 < m = \sigma(Y)$,

(b) $\sigma(Y_m) > m$ und

(c) $Y_{mt} \equiv 0$ für $1 < t \leq m$ gilt.

Ist $R_m Y$ ausführbar, so muß nach (a) und (b) die Struktur von $Y$ die Form $\nu = mp\mu$ haben, mit $m < p = \sigma(Y_m)$. Dann bezeichnen wir mit $r_m(\nu) = p\mu$, die durch $R_m Y$ bewirkte Umformung der Struktur von $Y$. $r_m(\nu)$ hat also die Streichung des Zeigers $m$ links eines größeren aus $\nu$ zur Folge.

Danach ist also $R_m Y$ dann und nur dann möglich, falls

**(Bed. 2)** es ein $Z$ gibt, so daß $Y \equiv A_m Z$ und $\sigma(Z) = p > m$ gilt.

Die Ausführbarkeit einer Amplifikation $A_k$ bzw. einer Reduktion $R_m$ in einem gegebenen Ausdruck $Z$ ist dann aus der Gestalt von $Z$ feststellbar. Man hat nun den

**Satz 1.** Es gilt $S\{Z\} = S\{A_k Z\}$, wo $k < \sigma(Z) = m$ ist.

Beweis: Nach Definition von $Z'$ können wir auch $S\{Z'\} = \mathrm{Max}(k, Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k')$ setzen. Nach Definition von $Z_k'$ ist $S\{Z_k'\} = \mathrm{Max}(m, Z_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_m)$; da $k < m$ ist, folgt daraus $S\{Z'\} = \mathrm{Max}(m, Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_m) = S\{Z\}$ nach Definition der Stufe von $Z$.

Als Korollar zu diesem Satz ergibt sich leicht nach Definition einer Reduktion: $S\{R_m Y\} = S\{Y\}$, falls $R_m$ in $Y$ ausführbar ist. Setzt man nämlich $Y^* \equiv R_m Y$, so ist $A_m Y^* \equiv Y$ und nach Satz 1 $S\{Y^*\} = S\{Y\}$.

**2. Vertauschbarkeit zweier Amplifikationen** (bzw. Reduktionen). Nach der oben erwähnten Bedingung ist, für $n < \sigma(Z)$, $A_k(A_n Z)$ möglich, dann und nur dann, falls $k < n = \sigma(A_n Z)$ ist. Es soll nun $A_{pq}Z$ die Amplifikation $A_q Z_p$ des Gliedes $Z_p$ von $Z$ innerhalb von $Z$ bedeuten. Hiernach ist $(A_{pq}Z)_p \equiv A_q Z_p$. Ist speziell $\sigma(Z) = p$, so hat man:

$$A_{pq}Z \equiv [Z_1, \ldots, Z_{p-1}, A_q Z_p] .$$

Eine entsprechende Bedeutung soll auch $R_{st}Z$ besitzen. Wir bemerken, daß $A_{pq}Z$ eine Strukturveränderung von $Z$ nur dann bewirkt, falls $p = \sigma(Z)$ ist. Für $R_{st}Z$ gilt dieselbe Bemerkung, falls $s = \sigma(Z)$ ist. Ist hingegen $p < \sigma(Z)$, so handelt es sich um eine Strukturveränderung des Gliedes $Z_p$ von Z.

**Satz 2a.** Sind $A_{kt}Z$ und $A_{mp}Z$ beide ausführbar und $k \neq m$, so gilt $A_{kt}(A_{mp}Z) \equiv A_{mp}(A_{kt}Z)$.

Beweis: Da $k \neq m$ ist, so betreffen die Amplifikationen $A_{kt}Z$ und $A_{mp}Z$ zwei verschiedene Glieder innerhalb $Z$. Es ist dann die Ausführung beider Amplifikationen – nach Voraussetzung über $A_{kt}Z$ und $A_{mp}Z$ – in beliebiger Reihenfolge nacheinander möglich. Offenbar gilt dann auch die Behauptung.

**Satz 2b.** Ist $1 < k < l < \sigma(Z) = m$, so sind alle nachstehenden Amplifikationen ausführbar, und es gilt $A_k(A_l Z) \equiv A_{kl}(A_k Z)$.

Beweis: Setzen wir $A_k Z \equiv Z'$, so gilt nach Tafel $(A_k)$ $\sigma(Z'_k) = m > l$, und es ist also $A_{kl}Z'$ ausführbar. Ebenso ist $\sigma(A_l Z) = l > k$, also ist auch $A_k(A_l Z)$ ausführbar. Man kontrolliert dann mittels der Transformationstafel $(A_k)$ die behauptete Identität.

Aus $(A_{pq}Z) \equiv A_q Z_p$, Satz 2b und Tafel $(A_k)$ entnehmen wir die folgende Regel:

*Regel:* Ist $Z' \equiv A_k Z$ und $Z'' \equiv A_k(A_l Z)$, so ist $Z_i \equiv Z'_i \equiv Z''_i$ für $1 \leq i < k$ und $Z''_k \equiv A_l Z'_k \equiv A_l((A_k Z)_k) \equiv (A_k(A_l Z))_k$ mit $\sigma(Z''_k) = l$. Gestaltlich ist $Z''_k \equiv [Z_k, 0, \ldots, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_{l-1}, Z''_{kl}]$, wo $Z''_{kl} \equiv [Z_l, 0, \ldots, 0, Z_{l+1}, \ldots, Z_m]$ und $\sigma(Z''_{kl}) = m$ ist.

**Satz 2c.** Ist $k < l$, $R_k Y$ sowie $R_l(R_k Y)$ ausführbar, so ist auch $R_k(R_{kl}Y)$ ausführbar, und es gilt $R_l(R_k Y) \equiv R_k(R_{kl}Y)$.

Beweis: Setzen wir $R_l(R_k Y) \equiv Z$, so ist $Y \equiv A_k(A_l Z)$. Die Behauptung ist dann gleichbedeutend mit der im Satz 2b bewiesenen Identität.

**Satz 3.** Sei $Z \equiv [Z_1, \ldots, Z_m]$ und $R_m Z$ ausführbar, so gilt

a) für $m \leq k < \sigma(Z_m) : A_k(R_m Z) \equiv R_m(A_{mk} Z)$;

b) für $k < m : A_k(R_m Z) \equiv R_{km}(A_k Z)$.

Beweis: a) Da $R_m Z$ möglich ist, so muß nach den Bedingungen (a), (b) und (c) Seite 268 außer $\sigma(Z_m) > m$ noch $Z_{mi} \equiv 0$ für $1 < i \leq m$ gelten. Wegen $m \leq k$ werden aber diese Bedingungen auch in $A_{mk} Z$ erfüllt. Danach ist $R_m(A_{mk} Z)$ ausführbar. Setzt man nun $R_m Z \equiv Y$, so folgt die Behauptung aus der richtigen Identität $A_m(A_k Y) \equiv A_{mk}(A_m Y)$, die $A_k Y \equiv R_m(A_{mk}(A_m Y))$, also auch a) äquivalent ist.

b) Man überzeugt sich leicht, daß unter den angegebenen Voraussetzungen, die in der Behauptung stehenden Ausdrücke sinnvoll sind. Setzen wir nun $R_m Z \equiv Y$ und beachten, daß $R_{pq} X \equiv X'$ eine äquivalente Aussage für $A_{pq} X' \equiv X$ ist, so ist b) gleichbedeutend mit $A_{km}(A_k Y) \equiv A_k(A_m Y)$. Da $k < m$ ist, so folgt diese Identität aus Satz 2b.

**Beispiel:** Es ist

$$A_3(R_4[Z_1, Z_2, Z_3, [Z_{41}, 0, 0, 0, Z_{45}]]) \equiv [Z_1, Z_2, [Z_3, 0, 0, 0, Z_{41}, Z_{45}]] .$$

**3. Verschiebung.** Sei $Z_\lambda$ ein Term von $Z$, mit $\sigma(Z_\lambda) = s > 2$. Ist $1 < k < s$, so soll $A_{\lambda k} Z$ die Amplifikation $A_k Z_\lambda$ innerhalb $Z$ bedeuten. Analog für $R_{\lambda k} Z$, falls $R_k Z_\lambda$ möglich ist. Eine *Amplifikationsreihe* $\mathfrak{A}Z$ und bzw. oder eine *Reduktionsreihe* $\mathfrak{R}Z$, die auf $Z$ oder auf seine Glieder ausgeübt wird, soll eine *Verschiebung* $VZ$ von $Z$ heißen.

Wir können in naheliegender Weise vom Produkt zweier Verschiebungen, von einer zu einer gegebenen inversen Verschiebung, sowie von der identischen (leeren) Verschiebung sprechen. Da die Verschiebungen von rechts nach links assoziativ sind, so kann man statt $V''(V'Z)$ auch $V''V'Z$ schreiben.

Es sollen hier kurz einige Eigenschaften von Verschiebungen aufgeführt werden; man kann deren Richtigkeit entweder aus der Erklärung der Verschiebung oder durch eventuelle mehrmalige Benützung der vorangehenden Sätze ohne Schwierigkeiten einsehen. Sie sollen nachstehend in Form von «Feststellungen» formuliert werden.

**Feststellungen:**

**a)** Die Anzahl der von Null verschiedenen Terme in $Z$ und in $VZ$ ist dieselbe.

**b)** Die Reihenfolge des Auftretens der von Null verschiedenen Terme in $Z$ und in $VZ$ ist dieselbe, das heißt: ist $\alpha < \beta$ und wird $Z_\alpha$ durch $V$ an die Stelle $\alpha'$ in $VZ$, $Z_\beta$ an die Stelle $\beta'$ in $VZ$ versetzt, so ist noch immer $\alpha' < \beta'$.

**c)** Für die Stufe gilt nach Satz 1: $S\{VZ\} = S\{Z\}$.

**d)** Sei $A_{\alpha k}Z$ eine Amplifikation des Gliedes $Z_\alpha$ von $Z$. Ist die Struktur von $Z$ von der Form $\mu = \alpha m \beta$ mit $\alpha$ oder (und) $\beta$ eventuell leer, so ist diese Amplifikation möglich für $1 < k < m$. Diese, der $A_{\alpha k}Z$ entsprechende Transformation von $\mu$ soll durch $a_{\alpha \underset{\cdot}{k}}(\mu) = \alpha k m \beta = \mu'$ angedeutet werden[10]) («*Einschiebung*» eines Zeigers in $\mu$). Analog entspricht $r_{\alpha \underset{\cdot}{k}}(\mu') = \alpha m \beta = \mu$ der durch die Reduktion $R_{\alpha k}Z'$ erfolgten «*Streichung*» von $k$ aus $\mu'$.

Man kann nun allgemein die Einschiebung der Sequenz $\varkappa = k_1\ k_2 \ldots k_r$ «zwischen» $\alpha$ und $\beta$ in $\mu = \alpha m \beta$ eindeutig durch $a_{\alpha \underset{\cdot}{\varkappa}}(\mu) = \alpha \varkappa m \beta$ bezeichnen; analog für die Streichung: $r_{\alpha \underset{\cdot}{\kappa}}(\mu') = \mu$.

**e)** Sei $\mu = m\beta$ die Struktur von $Z$. Will man $\mu$ in $\mu' = kpm\beta$, wo $\operatorname{Max}(k, p) < m$ ist, überführen, so bilde man nach den Sätzen 2

$$\begin{array}{lll} \text{für} & k < p & A_k(A_p Z) \equiv A_{kp}(A_k Z)\,, \\ \text{für} & k \geq p & A_{kp}(A_k Z)\,. \end{array}$$

Will man nun $kp$ aus $\mu' = kpm\beta$ streichen, so bilde man

$$\begin{array}{lll} \text{für} & k < p & R_p(R_k Z) \equiv R_k(R_{kp} Z)\,, \\ \text{für} & k \geq p & R_k(R_{kp} Z)\,. \end{array}$$

Ist $Z \equiv Y_\alpha$ und die Struktur von $Y$ $\mu = \alpha m \beta$, so ist die der Einschiebung $a_{\alpha \underset{\cdot\cdot}{kp}}(\mu) = \alpha k p m \beta$ entsprechende Amplifikationsreihe durch $A_{\alpha k}(A_{\alpha p} Y)$ bzw. durch $A_{\alpha kp}(A_{\alpha k} Y)$ gegeben.

**f)** Man kann ohne Schwierigkeiten einsehen, daß man e) auf folgende Weise verallgemeinern kann:

Sei $\varkappa = k_1 k_2 \ldots k_r$, $k_i > 1$ und $\operatorname{Max} k_i = k^* < m$, $1 \leq i \leq r$ und $\mu = \alpha m \beta$, mit $\alpha$ oder (bzw. und) $\beta$ eventuell leer, die Struktur von $Z$, so hat man $a_{\alpha \underset{\cdot}{\kappa}}(\mu) = \alpha \varkappa m \beta = \mu^*$.

Sind nun $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ zwei Amplifikationsreihen, so daß $Z' \equiv \mathfrak{A}'Z$ und $Z'' = \mathfrak{A}''Z$ dieselbe Struktur $\mu^*$ haben, so ist $\mathfrak{A}'Z \equiv \mathfrak{A}''Z$, und $\mathfrak{A}''$ geht aus $\mathfrak{A}'$ durch Anwendung der Sätze 2 und 3 hervor. Eine analoge Verallgemeinerung gilt für zwei Reduktionsreihen, die $\mu^*$ in $\mu$ überführen. $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ bzw. $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{R}''$ sollen dann als *äquivalente Verschiebungen* von $Z$ heißen.

**g)** Zu jeder Verschiebung gibt es eine inverse, da offenbar jeder Strukturveränderung (Einschiebung oder Streichung) eine inverse entspricht. Enthält $V$ zwei inverse Verschiebungen, so können diese aus $V$ fortgelassen werden.

---

[10]) Falls keine Verwechslung zu befürchten ist, so lassen wir den Punkt unter $k$ weg.

**h)** Sind keine Reduktionen in $Z$ möglich, so sind in $VZ$ nur solche Reduktionen ausführbar, die zu einer Amplifikation, die in $V$ enthalten ist, invers sind. Denn es kann $V$ nur durch eine Amplifikation beginnen. Wäre nun etwa die Reduktion $R_{\alpha t}(VZ)$ ausführbar, so müßte der Term $(VZ)_{\alpha t}$ nach Bed. (2) die Form $A_t Z^*$ haben. Nach f) und nach Voraussetzung müßte dann $V$ eine zu $A_t$ äquivalente Amplifikation enthalten, etwa $A_{\beta t}$. Dann kann man nach g) $R_{\alpha t}V$ durch eine ihr äquivalente Verschiebung $V'$ von $Z$ ersetzen, die $R_{\alpha t}$ und $A_{\beta t}$ nicht enthält. Wir formulieren noch folgenden Hilfssatz als Feststellung.

**i)** Sei $\mu = \alpha m \beta$ die Struktur von $Z$ und sei $\varkappa = k_1 k_2 \dots k_r$ eine Sequenz mit $1 < k_i$ und $\operatorname{Max} k_i = k^* < m$ für $i = 1, \dots, r$. Sei noch $a_{\alpha\dot{\varkappa}}(\mu) = \alpha\varkappa m \beta$ eine Einschiebung in $\mu$.

Ist nun $\mathfrak{A}$ eine dieser Einschiebung entsprechende Amplifikationsreihe und ist $\mathfrak{A}Z \equiv Z'$, so gilt:

(1) $Z'_{\alpha\varkappa t} \equiv 0$ für alle $t$ mit $1 < t \leq k^*$;

(2) $\overline{Z}'^{(k^*)}_{\alpha\varkappa} \equiv \overline{Z}^{(k^*)}_{\alpha}$.

Wir bemerken zunächst, daß es nach f) eine $\mathfrak{A}$ gibt, so daß $Z'$ die Struktur $\alpha\varkappa m \beta$ hat. Dann beweist man (1) und (2) durch Induktion nach $r$, da für $r = 1$ ja die Behauptung nach Tafel $(A_k)$ richtig ist.

## § 4. Vergleichsverfahren und Verträglichkeitsnachweis. Normalform

### 1. Der Größenvergleich HLV

Wir führen gleichzeitig mit dem Vergleich von $Z$-Ausdrücken den Begriff «*Hauptglied von Z*» sowie die Operation «*Vereinfachung von Z*» – symbolisch $WZ$ – ein.

**I.** Zahlen werden auf übliche Weise verglichen. Sie sind auch ihre eigenen Hauptglieder und gelten als vereinfacht.

Ist für ein $Z$ $\sigma(Z) > 1$, so ist für jede Zahl $n : n < Z$. Insbesondere ist also 0 kleiner als jeder $\not\equiv$ 0-Ausdruck.

**II.** Sei $N(Z) = 1$, das heißt $Z \equiv [n_1, n_2, \dots, n_r]$, wo alle $n_i$ Zahlen sind. Ist $h$ die größte Zahl $\leq r$, für die $n_h > 0$ ist, das heißt, ist $\sigma(Z) = h$, so ist $n_h$ Hauptglied von $Z$.

Dann sei $Z' \equiv WZ \equiv [n_1, \dots, n_h]$ der zu $Z$ zugehörige vereinfachte Ausdruck (für $h = 1$ ist, nach § 2, 3, $Z' \equiv n_1$).

Seien jetzt $Y$ und $Z$ Ausdrücke, für die $N(Y) = N(Z) = 1$ gilt. Man hat dann auch $N(WY) = N(WZ) = 1$, das heißt, die Glieder von $WY$ und $WZ$ sind Zahlen.

Sei nun $\sigma(WY) = m$ und $\sigma(WZ) = n$, so sei $WY \gtreqless WZ$, je nachdem $m \gtreqless n$ ist. Ist $m = n$, so erfolgt der Vergleich zwischen $WY$ und $WZ$ lexikographisch von rechts nach links. Wir bestimmen dann weiter: Es sei $Y \gtreqless Z$ dann und nur dann, falls $WY \gtreqless WZ$ ist.

Seien jetzt Hauptglied, Vereinfachung und Vergleich schon erklärt für alle Ausdrücke $X$, $Y$, für die $\operatorname{Max}(N(X), N(Y)) \leq k$ ist, und es gelte auch hier $X \lesseqgtr Y$ dann und nur dann, falls $WY \lesseqgtr WZ$ gilt. Sei jetzt ein $Z$ mit $N(Z) = k + 1$ und seien alle Glieder $Z_i$ von $Z$ bereits vereinfacht. Dann ist $Z_h$ Hauptglied von $Z \equiv [Z_1, \ldots, Z_m]$, falls

$$\textbf{(H)}: \left\{\begin{array}{ll} (\alpha) & h \text{ die kleinste Zahl } (\leq m) \text{ ist, für die } \overline{Z}_h^{(1)} > \overline{Z}^{(h)} \text{ gilt,} \\ & \text{wobei für } h = m \;\; \overline{Z}^{(m)} \equiv 0 \text{ ist.} \\ (\beta) & \text{falls es kein solches } h \text{ gibt, so ist } h = m = \sigma(Z). \end{array}\right.$$

*Bemerkung:* Ist $\sigma(Z_m) > 1$, so ist $\overline{Z}_m^{(1)} > 0$, nach I, also $\overline{Z}_m^{(1)} > \overline{Z}^{(m)} = 0$, die Bedingung $(\alpha)$ kann danach höchstens ergebnislos sein, falls $Z_m = n$ eine Zahl ist, (da $\overline{n}^{(1)} = 0$ gilt), und es kann nur in diesem Falle $Z_h$ eine Zahl sein.

Der Vergleich in $(\alpha)$ ist bereits erklärt, da $N(\overline{Z}_i^{(1)}) < k + 1$ gilt und entweder $N(\overline{Z}^{(i)}) < k + 1$ oder für $N(\overline{Z}^{(i)}) = k + 1$ $Z_i$ eine Zahl folglich $\overline{Z}_i^{(1)} \equiv 0$ ist.

Ist $Z_h$ das Hauptglied von $Z$, so setzen wir $Z' \equiv WZ \equiv [Z_1, \ldots, Z_h]$ als den zu $Z$ zugehörigen vereinfachten Ausdruck.

Im Falle $(\beta)$, das heißt für $h = m = \sigma(Z)$, ist $Z \equiv WZ$.

Aus dem rekursiven Vergleichsverfahren ergibt sich, daß in $WZ$ bereits alle Terme vereinfacht sind.

Es bleibt noch der Vergleich zwischen zwei Ausdrücken $Y^*$ und $Z^*$, mit $\operatorname{Max}(N(Y^*), N(Z^*)) = k + 1$ zu erklären. Sei $Y \equiv WY^*$ und $Z \equiv WZ^*$. Ist $\operatorname{Max}(N(Y), N(Z)) \leq k$, so erklären wir $Y^* \gtreqless Z^*$ dann und nur dann, falls $Y \gtreqless Z$ ist. Sei nun $\operatorname{Max}(N(Y), N(Z)) = k + 1$ etwa $N(Z) = k + 1$ und $N(Y) = p \leq k + 1$. Wir führen eine Induktion nach $p$ durch. Ist $p = 0$, also $Y$ eine Zahl, dann ist nach I $Y < Z$, und der Vergleich ist ausführbar. Sei bereits der Vergleich für $p < p_0$ ausführbar und sei nun $p = p_0$, $\sigma(Y) = n$ und $\sigma(Z) = m$. Ist $n = m$, so ist der Vergleich lexikographisch möglich, da $N(Y_i) \leq k$ und $N(Z_i) \leq k$ für $1 \leq i \leq n$ ist. Nehmen wir jetzt an $n < m$. Man bilde dann $Z' \equiv A_n Z$, und der Vergleich zwischen $Y$ und $Z$ erfolgt durch lexikographischen Vergleich der entsprechenden Glieder $Y_i$ $Z_i'$ von $Y$ und $Z'$. Dieser Vergleich ist ausführbar, da für alle $i$ $1 \leq i \leq n$ gilt $N(Y_i) < p_0$, auf Grund der Induktionsvoraussetzung über $p$.

Ist nun $n > m$, so erfolgt der Vergleich zwischen $Y$ und $Z$ durch lexikographischen Vergleich der entsprechenden Glieder von $Y' \equiv A_m Y$ und von $Z$.

Hierbei gilt für die Glieder $Y'_i$ und $Z_i$, $1 \leq i \leq m$, $N(Y'_i) \leq p_0$ und $N(Z_i) < k + 1$ mit höchstens $N(Y'_m) = p_0$.

Ist $p_0 < k + 1$, so ist der Vergleich möglich nach Indikationsvoraussetzung über $k$. Ist $p_0 = k + 1$ und $N(Y'_m) = k + 1$, so ist der Vergleich ausführbar auf Grund der Induktionsvoraussetzung über $p$, da $N(Z_m) < k + 1 = p_0$ ist.

Schließlich setzen wir $Y^* \gtreqless Z^*$, je nachdem $Y \gtreqless Z$ ist. Damit ist der Vergleich auch für $\mathrm{Max}\,(N(Y), N(Z)) = k + 1$ erklärt.

Wir formulieren noch besonders die Bedingungen für die Gleichheit, wie man sie aus I und II entnehmen kann:

**III.** *Gleichheit.* Es ist $Y = Z$ dann und nur dann, falls

(G1) $WY \equiv WZ$ ist. Insbesondere ist auch $Y = Z$ für $Y \equiv Z$.

(G2) a) $\sigma(WY) = \sigma(WZ) = h$ und $Y_i = Z_i$ für $1 \leq i \leq h$;

b) $\sigma(WY) = h < \sigma(WZ) = k$ und $Z' \equiv A_h Z$:

$Y_i = Z'_i$, $1 \leq i \leq h$, ist;

bzw. für $h > k$ und $Y' \equiv A_k Y$:

$Y'_j = Z_j$ für $1 \leq j \leq k$ gilt.

Hierbei ist «$=$» zwischen Gliedern von $Y$ und $Z$ bzw. von $Y'$ und $Z'$ entweder direkt aus (G1) oder durch eine in II durchgeführte Rekursion in bezug auf die Klammerzahl zu bestimmen.

In Anbetracht der Bedingung (H) nennen wir diese Vergleichsprozedur den **«H-lexikographischen Vergleich» (HLV).**

**Folgerung aus HLV:** Für $\sigma(WY) = \sigma(WZ) = h$ und $Y < Z$ muß es ein größtes $p_0 \leq h$ geben, so daß $Y_{p_0} < Z_{p_0}$ und (falls $p_0 < h$) $Y_t = Z_t$ für $p_0 < t \leq h$.

## 2. Verträglichkeit und Eigenschaften der Vergleichsvorschriften

Offenbar liefert die in I und II beschriebene Vergleichsprozedur eine vollständige Disjunktion, so daß die Trichtomie $Y \gtreqless Z$ gilt. Wir zeigen noch, daß sie die üblichen Eigenschaften eines Größenvergleiches besitzt.

**Satz 4.** $W(WZ) \equiv WZ$. Dies gilt nach Bedeutung von «$W$».

**Satz 5.** $WZ = Z$.

Beweis: Setzen wir $WZ \equiv Y$, so ist nach Satz 4 $WZ \equiv WY$, also nach (G1) $Z = Y$.

**Satz 6.** Ist $Z_h$ Hauptglied von $Z, k < h$ und $A_k Z \equiv Z'$, so ist $Z_h$ auch Hauptglied von $Z'_k$, das heißt, es gilt $WZ'_k \equiv (A_k(WZ))_k$.

Beweis. Nach Definition des Hauptgliedes (HLV) gilt für $1 \leq t < h$ $\overline{Z}_t^{(1)} \leq \overline{Z}^{(t)}$. Speziell ist also $\overline{Z}_t^{(1)} \leq \overline{Z}^{(t)}$ für $k \leq t < h$. Nun ist aber $Z'_k \equiv$ $\equiv [Z_k, 0, \ldots, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_h, \ldots, Z_m]$. Ist $m > h$, so gilt noch nach Voraussetzung über $Z_h$ $\overline{Z}_h^{(1)} > \overline{Z}^{(h)} \equiv \overline{Z}_k'^{(h)}$. Danach ist in jedem Fall $Z_h$ Hauptglied von $Z'_k$, w. z. b. w.

**Satz 7.** Es ist $A_k(WZ) \equiv W(A_k Z)$.

Beweis: Wir können annehmen $k < h \leq \sigma(Z)$, denn sonst wäre die Behauptung sinnlos. Ist also $WZ \equiv [Z_1, \ldots, Z_k, \ldots, Z_h]$, so ist auch nach Satz 6 $Z_h$ Hauptglied von $(A_k Z)_k$. Da alle Glieder $Z_t$ von $WZ$ vereinfacht sind, so gilt hiernach das gleiche von den Gliedern von $A_k(WZ)$. Es bleibt also noch zu zeigen, daß $Z'_k \equiv A_k(WZ)_k$ Hauptglied von $A_k(WZ)$ ist, falls $Z' \equiv A_k(WZ)$ gesetzt wird. Dieser Nachweis wird erbracht, indem man zeigt, daß für alle Glieder $Z'_t$, $1 \leq t < k$, die also mit den Gliedern $Z_t$ identisch sind, die Beziehung $\overline{Z}_t'^{(1)} \leq \overline{Z}'^{(t)}$ gilt.

Dies beweisen wir durch eine Induktion nach $N(Z) = p$, die sich zugleich auf die Sätze 7 bis 9 erstreckt. Für $p = 1$ gilt der Satz 7, denn alle $Z_t$, $1 \leq t < k$, sind dann Zahlen, und es ist $\overline{Z}_t^{(1)} = 0 < \overline{Z}'^{(t)}$. Nach HLV ist also $Z'_k$ Hauptglied von $Z' \equiv A_k Z$.

Nehmen wir jetzt an, der Satz 7 gelte für alle Ausdrücke $\overline{Z}$ mit $N(\overline{Z}) \leq p_0$. Um den Gedankengang nicht zu unterbrechen, nehmen wir noch an, daß alle in der Induktion beteiligten Sätze für solche $\overline{Z}$ schon bewiesen sind. Sei nun ein $Z$ mit $N(Z) = p_0 + 1$, so geht der Beweis von Satz 7 folgendermaßen weiter:

Sind alle $Z_t$, $1 \leq t < k$, Zahlen, so ist die Behauptung offenbar richtig, da dann $\overline{Z}_t^{(1)} = 0 < \overline{Z}'^{(t)}$ ist. Sei jetzt für ein $t'$ $N(Z_{t'}) \geq 1$, so ist dann $N(\overline{Z}^{(t')}) \leq p_0$, also ist $\overline{Z}'^{(t')}$ vereinfacht. Nun hat man aber $\overline{Z}_{t'}^{(1)} \leq \overline{Z}^{(t')}$, da $WZ$ vereinfacht ist, und $\overline{Z}'^{(t')} \equiv A_k \overline{Z}^{(t')}$, folglich nach Induktionsannahme über Satz 8, $\overline{Z}'^{(t')} = \overline{Z}^{(t')}$. Nach Satz 8 bzw. 9 gilt also $\overline{Z}_{t'}^{(1)} \leq \overline{Z}'^{(t')}$. $Z_{t'}$ kann somit nicht Hauptglied von $Z'$ sein. Nach HLV ist also $Z'_k$ Hauptglied von $Z'$ und die Gültigkeit des Satzes 7 für $N(Z) = p_0 + 1$ erwiesen. Somit kann auch die Gültigkeit aller in der Induktion nach $p$ beteiligten Sätze auf jedes $p$ erstreckt werden.

Wir beweisen jetzt die Sätze 8 und 9.

**Satz 8.** Sei $Y = Z$ und $Z' \equiv A_k Z$, so ist $Y = Z'$.

Beweis: Wir bemerken zunächst, daß für ein vereinfachtes $Z$ mit $N(Z) \leq p_0$

auch $A_k Z$, gemäß der Induktionsannahme, vereinfacht ist. Da aus $WZ' = WY$ nach HLV $Z' = Y$ folgt, so können wir für das folgende $Z$ und $Y$ als vereinfacht annehmen. Sei weiter $\sigma(Y) = g$ und $\sigma(Z) = h$.

Fall (1). $\sigma(Y) = \sigma(Z) = h$. Es ist dann $Y_i = Z_i$, $1 \leq i \leq h$, also auch $Z'_j = Y'_j$, falls man $Y' \equiv A_k Y$ setzt und $1 \leq j \leq k$ nimmt. Da $k = \sigma(Z')$ ist, so hat man nach (G2) $Z' = Y$.

Fall (2). $k < h = \sigma(Z) < g = \sigma(Y)$. Sei $Y^* \equiv A_h Y$, so muß nach (G2) $Z_i = Y^*_i$ für $1 \leq i \leq h$ sein. Insbesondere gilt also $Y^*_h = Z_h$. Setzen wir nun $Y'' \equiv A_k Y^* \equiv A_k(A_h Y)$, so gilt danach $Y''_k = Z'_k$ (da $Y''_k \equiv A_h Y'_k$ die gleiche Stellenzahl $h$ wie $Z'_k$ hat und die entsprechenden Glieder von $Y''_k$ und $Z'_k$ gleich sind). Weiter folgt wegen $\sigma(Z'_k) = h$ nach HLV $Y'_k = Z'_k$. Beachten wir noch, daß $Z'_j \equiv Z_j = Y_j \equiv Y^*_j \equiv Y'_j$ für $1 \leq j < k$ ist, so ergibt sich $Y' \equiv A_k Y = Z'$. Da $k = \sigma(Z')$ ist, so gilt nach HLV $Y = Z$.

Fall (3). $g \leq k < h$. Sei $Z^* \equiv A_g Z$; aus $Y = Z$ folgt dann $Z^*_i = Y_i$, $1 \leq i \leq g$; insbesondere also $Z^*_g = Y_g$. Ist $g = k$, so schließt man direkt nach HLV $Y = Z' \equiv Z^*$. Sei also $g < k$ und $Z'' \equiv A_g(A_k Z)$. Man hat also $Z''_g \equiv A_k Z^*_g$. Um dann daraus auf $Y_g = Z''_g$ zu schließen, führen wir eine Induktion in bezug auf $N(Y)$ durch. Für $N(Y) = 1$ sind die $Y_t$, $1 \leq t \leq g$, Zahlen, und es können demnach nur die Fälle (1) oder (2) vorliegen, da für $g < h$ $\sigma(Z^*_g) \geq 2$ und $Y_g < Z^*_g$ somit $Y < Z$ folgen würde. Nehmen wir an, der Satz sei bereits bewiesen für $N(Y) \leq q < p - 1$; ist jetzt $N(Y) = q + 1$, so ist $N(Y_g) \leq q$, also folgt aus $Y_g = Z^*_g$ nach Induktionsvoraussetzung $Y_g = Z''_g$. Danach ist $Z'' = Y$ und $\sigma(Y) = g$, also nach HLV $A_k Z \equiv Z' = Y$, w.z.b.w.

**Satz 9.** Ist $Y < Z$, so ist auch $Y < A_k Z \equiv Z'$, für $k < \sigma(Z)$.

Beweis: Analog wie bei dem Beweis des vorigen Satzes können wir auch hier $Y$ und $Z$ als vereinfacht annehmen. Denn es ist dann nach Induktionsannahme $A_k Z$ vereinfacht und aus $WY < W(A_k Z)$ folgt nach HLV $Y < Z'$.

Sei $Y' \equiv A_k Y$, $\sigma(Y) = n$, $l = \sigma(Z)$ und $Y'' \equiv A_k(A_l Y)$.

Fall (1). $n = l$. Wir vergleichen $Y'$ mit $Z'$. Nach Voraussetzung gibt es ein größtes $t_0$, so daß $Y_{t_0} < Z_{t_0}$, wobei $t_0 \leq l$ ist.

Ist nun $k \leq t_0 \leq l$, so ist bereits $Y'_k < Z'_k$ nach HLV. Ist $t_0 < k$, so hat man spätestens $Y'_{t_0} \equiv Y_{t_0} < Z'_{t_0}$, also nach HLV in jedem Fall $Y' < Z'$; da $\sigma(Z') = k$ ist, so gilt weiter nach HLV $Y < Z'$.

Fall (2). $l < n$. Sei $A_l Y \equiv Y^*$. Nach Voraussetzung gibt es ein größtes $t_0 \leq l$, so daß $Y^*_{t_0} < Z_{t_0}$ ist. Für $t_0 < k$ hat man $Y^*_l = Z_l$ und $Y^*_t \equiv Y_t = Z_t$ mit $t_0 < t \leq l$. Wegen der Gleichheit der entsprechenden Glieder ist also

$Y_k'' = Z_k$. Nun ist aber $Y_k'' \equiv A_l Y_k'$ das heißt $\sigma(Y_k'') = l$, also nach (G2) $Y_k' = Z_k'$. Nach Bedeutung von $t_0$ ist also nach HLV $Y' < Z'$ und wegen $\sigma(Z') = k$ auch $Y < Z'$.

Ist $k \leq t_0 \leq l$, so ist bereits $Y_l^* < Z_l$, also nach HLV $Y_k'' < Z_k'$ und wegen $\sigma(Y_k'') = \sigma(Z_k') = l$ auch $Y_k' < Z_k'$. Danach ist $Y' < Z'$ und nach HLV, wegen $k = \sigma(Z')$, $Y < Z'$.

Fall (3). $n < l$. Sei $Z^* \equiv A_n Z$. Aus $Y < Z$ folgt, daß es ein größtes $t_0 \leq n$ gibt, so daß $Y_{t_0} < Z_{t_0}^*$ gilt; falls $t_0 < n$ ist, so gilt noch $Y_t = Z_t^*$ für $t_0 < t \leq n$. Weiter ist noch $Z_m^* \equiv Z_m$ für $m < n$. Wir unterscheiden drei Unterfälle:

(3.1). $k = n$. In diesem Fall ist die Behauptung klar, da $Z^* \equiv Z$ ist.

(3.2). $k < n$. Sei $Z'' \equiv A_k Z^* \equiv A_k(A_n Z)$; man hat dann $A_n Z_k' \equiv Z_k''$ und nach Definition dieser Amplifikationen $Z_{kn}'' \equiv Z_n^*$. Nach Definition von $t_0$ ist $Y_n \leq Z_n^*$, hiermit nach HLV $Y_k' \leq Z_k''$. Da $\sigma(Y_k') = \sigma(Z_k'') = n$ ist, folgt nach HLV, je nachdem $t_0 > k$ oder $t_0 \leq k$ ist, $Y_k' < Z_k'$ oder $Y_k' = Z_k'$. Auf jeden Fall ergibt sich aber nach HLV $Y' < Z'$, also auch $Y < Z'$.

(3.3). $n < k < l$. Sei $\overline{Z} \equiv A_n Z' \equiv A_n(A_k Z)$; man hat dann $A_k \overline{Z}_n^* \equiv \overline{Z}_n$ und $\overline{Z}_{nk} \equiv Z_k'$. Definieren wir noch den Zeiger $t_0$ wie in vorigen Fällen. Ist $t_0 < n$, so ist $Y_n = Z_n^*$; nach Satz 8 ist also $Y_n = \overline{Z}_n$. Nach Bedeutung von $t_0$ ergibt sich aber $Y < \overline{Z}$. Wegen $n = \sigma(Y)$ ist hiernach $Y < Z'$.

Ist $t_0 = n$, so hat man bereits $Y_n < Z_n^*$. Um daraus auf $Y_n < A_k Z_n^* \equiv \overline{Z}_n$ schließen zu können, verwenden wir eine Induktion nach $N(Y)$. Ist $N(Y) = 1$, also $Y_n$, eine Zahl, so ist sicher $Y_n < \overline{Z}_n$, da $\sigma(\overline{Z}_n) = k > 1$ ist. In diesem Falle ist also $Y < A_n Z' \equiv \overline{Z}$ und nach HLV $Y < Z'$.

Sei jetzt die Behauptung als bewiesen angenommen für alle $\overline{Y}$ mit $N(\overline{Y}) \leq q \leq p - 1$, und sei nun ein $Y$ mit $N(Y) = q + 1$. Dann ist $Y_n < \overline{Z}_n$ entweder nach einem der früher bewiesenen Fälle oder, falls für $Y_n$, $Z_n^*$ und $\overline{Z}_n$ der Fall (3.3) vorliegt, so folgt nach Induktionsvoraussetzung wegen $N(Y_n) \leq q$ $Y_n < \overline{Z}_n$. Demnach ist wiederum nach HLV $Y < A_n Z'$ und wegen $\sigma(Y) = n$ auch $Y < Z'$. Hiermit ist der Satz bewiesen und nach Induktionsvoraussetzung über $p$ die Gültigkeit der Sätze 7, 8, 9 voll erkannt. Zugleich ist auch bewiesen: Ist $Y = Z$ und $A_{\alpha k} Z \equiv Z^*$, so ist $Y = Z^*$; ebenso ist $Y < Z$, so ist $Y < Z^*$.

**Satz 10.** $WZ = A_k(WZ) = W(A_k Z)$.

Beweis: Es ist $k = \sigma(A_k(WZ)) < h = \sigma(WZ)$. Sei $Y \equiv WZ$, so ist $A_k Y \equiv A_k(WZ)$, also nach (G2, b) $Y \equiv WZ = A_k(WZ)$. Nach Satz 7 folgt auch $WZ = W(A_k Z)$. Nach Satz 7 und (G1) ist auch $A_k(WZ) = W(A_k Z)$.

**Satz 11.** $WZ = A_k Z$.

Beweis: Nach Satz 7 und Satz 10 gilt $A_k(WZ) = A_k Z$. Dabei ist $k = \sigma(A_k(WZ))$, folglich nach (G2) $WZ = A_k Z$.

**Satz 12.** $Z = A_k(WZ) = W(A_k Z)$.

Beweis: Aus $A_k Z = A_k(WZ)$ und $k = \sigma(A_k(WZ))$ folgt nach (G2) $Z = A_k(WZ)$. Nach Satz 7 ist auch $Z = W(A_k Z)$.

**Satz 13.** $Z = A_k Z$.

Beweis: Nach Satz 7 ist $(A_k(WZ))_i = (W(A_k Z))_i$, für $1 \leq i \leq k$, wobei $k = \sigma(A_k(WZ)) = \sigma(W(A_k Z))$ ist. Nach (G2) gilt also die Behauptung.

Aus den vorangehenden Sätzen 7 und 10 bis 13 folgt also

$$(GZ) \qquad Z = WZ = A_k Z = A_k(WZ) = W(A_k Z)\,.$$

Setzt man in den obigen Sätzen $Z' \equiv A_k Z$, so ist $Z \equiv R_k Z'$. Man kann dann die zu $(GZ)$ analogen Beziehungen

$$(RZ) \qquad Z' = WZ' = R_k Z' = R_k(WZ') \equiv W(R_k Z')$$

folgern. Offenbar ergibt sich weiter, daß man die Gültigkeit des Satzes 7 auf eine beliebige Verschiebung $V$ erweitern kann, also: $V(WZ) \equiv W(VZ)$.

**Satz 14.** Ist $A_k Z = Y$, so ist $Z = Y$.

Beweis: Fall (1). $\sigma(Y) = k$. Dann ist direkt nach HLV $Y = Z$.

Fall (2). $\sigma(Y) = n > k$. Sei $Z' \equiv A_k Z$ und $Y' \equiv A_k Y$, so muß nach HLV $Y'_i = Z'_i$ sein für $1 \leq i \leq k$. Insbesondere ist $Z'_k = Y'_k$. Sei nun $\sigma(Z') = m$; nach Definition der Amplifikation ist anderseits $\sigma(Y') = \sigma(Y) = n$.

Ist $n = m$, so hat man weiter $Z_t = Y_t$, $k \leq t \leq n$, da diese Ausdrücke als Glieder von $Z'_k$ bzw. von $Y'_k$ auftreten. Also gilt $Y_i = Z_i$ für $1 \leq i \leq n$, folglich ist nach HLV $Y = Z$.

Ist $n < m$ und $A_n Z'_k \equiv Z''_k$, so folgt aus $Z'_k = Y'_k$, daß $Z_t = Y_t$ für $k \leq t \leq n$ gilt. Also ist auch $A_n Z = Y$ und wegen $\sigma(Y) = n$ nach HLV $Z = Y$.

Ist $m > n$ und $Y'' \equiv A_m Y'$, so ist $A_m Y'_k \equiv Y''_k = Z'_k$. Man hat also $Y_t = Z_t$ für $k \leq t \leq m$, also auch für $1 \leq t \leq m$, das heißt, es ist $A_m Y = Z$. Da $\sigma(Z) = m$, so folgt daraus $Y = Z$.

Fall (3). $\sigma(Y) < k$. Dann muß $Z^* \equiv A_k Z' = Y$ sein. Daraus hat man $Z^*_i = Y_i$ für $1 \leq i \leq n$, also insbesondere $Y_n = Z^*_n$. Setzen wir $\overline{Z} \equiv A_n Z$ so ist $Z^*_n = A_k \overline{Z}_n$. Um aus dem vorangehenden auf $Y_n = \overline{Z}_n$ zu schließen, verwenden wir eine Induktion nach $N(Y)$. Für $N(Y) = 1$ kann nur einer der Fälle (1) oder (2) vorliegen. Ist schon der Satz für alle $Y^*$ mit $N(Y^*) \leq q$

bewiesen und ist $N(Y) = q + 1$, so gilt $Y_n = \overline{Z}_n$ auf Grund der Induktionsvoraussetzung, da $N(Y_n) \leq q$ ist. Da aber $\sigma(\overline{Z}) = n$ ist, so folgt nach HLV $Z = Y$, w.z.b.w.

Als **Korollar** zu Satz 14 ergibt sich:

Ist $Y = Z$ und $R_k$ eine in $Y$ ausführbare Reduktion, so ist $R_k Y = Z$. Denn setzt man $Y^* \equiv R_k Y$, so ist $Y \equiv A_k Y^* = Z$. Nach Satz 14 folgt daraus $Y^* = Z$, w.z.b.w.

Ganz analog dazu ergibt sich als **Korollar** zu Satz 8:

Ist $R_k$ eine in $Y$ ausführbare Reduktion und ist $R_k Y = Z$, so ist $Y = Z$. Setzt man nämlich $Y' \equiv R_k Y$, so ist $Y \equiv A_k Y'$, also auch nach Satz 8 $Y = Z$.

Als unmittelbare Folge dazu erhält man weiter den

**Satz 15.**

**a)** Ist $Y = Z$, so ist für jede (ausführbare) Amplifikationsreihe $\mathfrak{A}$, $Y = \mathfrak{A} Z$.

**b)** Ist $Y = \mathfrak{A} Z$, so ist $Y = Z$.

**c)** Ist $Y = Z$, so ist für jede (ausführbare) Reduktionsreihe $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R} Y = Z$.

**d)** Ist $\mathfrak{R} Y = Z$, so ist $Y = Z$.

**e)** Ist $Y = Z$ und sind $V'$ und $V''$ (ausführbare) Verschiebungen, so ist $V'Y = V''Z$.

Beweis: **a)** Ist $\mathfrak{A} Z \equiv A^{(r)}(A^{(r-1)}(\ldots(A^{(1)}Z)\ldots))$, so ist nach Satz 8 $A^{(1)}Z = Y$; nach weiteren $r - 1$-maligen Anwendungen dieses Satzes folgt $Z = Y$.

**b)** Ist $Y = A^{(r)}(A^{(r-1)}(\ldots(A^{(1)}Z)\ldots)) \equiv Z^{(r)}$ und $A^{(i)}(\ldots(A^{(1)}Z)\ldots) \equiv \equiv Z^{(i)}$, so ist $A^{(r)}Z^{(r-1)} \equiv Z^{(r)}$. Nach Satz 14 hat man also $Z^{(r-1)} = Y$. Nun ist aber $A^{(r-1)}Z^{(r-2)} \equiv Z^{(r-1)}$, also auch $Z^{(r-2)} = Y$ usw. Nach insgesamt $r$-maliger Anwendung des Satzes 14 ergibt sich auf diese Weise $Z = Y$, w.z.b.w.

Die Behauptungen **c)** und **d)** ergeben sich ganz entsprechend durch mehrmalige Anwendung der Korollare zu Satz 8 und Satz 14.

**e)** Nach Definition der Verschiebung $V$ als eine aufeinanderfolgende Ausübung von Amplifikations- und Reduktionsreihen ergibt sich diese Behauptung durch eventuelle mehrmalige Anwendung der Sätze 15a bis 15d.

**Satz 16.** Ist $Y = Z$, so gibt es eine Verschiebung $V$ derart, daß $VY \equiv Z$ wird.

Beweis: Durch Induktion nach $N(Z)$. Ist $N(Z) = 1$, so sind die $Z_i$ Zahlen, und es folgt aus $Z_i = Y_i$, daß die Glieder $Y_i$ auch Zahlen sind.

Man hat also $Z \equiv Y$, und $V$ ist die Identität. Sei jetzt die Behauptung bewiesen für alle $Z^*$, für die $N(Z^*) \leq p$ ist, und sei $N(Z) = p + 1$. Wir unterscheiden drei Fälle:

Fall (1). $\sigma(Y) = \sigma(Z) = n$. Es gilt nach Voraussetzung $Y_i = Z_i$, $1 \leq \leq i \leq n$. Da $N(Z_i) \leq p$ ist, so gibt es nach Induktionsvoraussetzung für jedes $i$ eine Verschiebung $V_i$ derart, daß $V_i Y_i \equiv Z_i$ ist. Setzen wir für $V$ etwa die Verschiebungsreihe $V_n V_{n-1} \ldots V_1$, so hat man $V Y \equiv Z$.

Fall (2). $\sigma(Y) > \sigma(Z) = n$. Dann gilt nach HLV $Y' \equiv A_n Y = Z$, wobei man $\sigma(Y') = \sigma(Z) = n$ hat. Nach Fall (1) gibt es dann eine Verschiebung $V$ derart, daß $V Y' \equiv Z$ ist. Setzen wir nun $V^* = VA_n$, so gilt $V^* Y \equiv Z$.

Fall (3). $m = \sigma(Y) < \sigma(Z) = n$. Dann muß $Z' \equiv A_m Z = Y$ gelten. Man hat dann $Z'_i = Y_i$ für $1 \leq i \leq m$ und $N(Z'_i) \leq p + 1$, wobei höchstens $N(Z'_m) = p + 1$ sein kann. Nach Induktionsvoraussetzung über $p$ existiert somit für jedes $j$, mit $1 \leq j < m$ eine Verschiebung $V_j$, so daß $V_j Y_j \equiv \equiv Z'_j \equiv Z_j$ wird. Um noch zu beweisen, daß es auch ein $V_m$ mit $V_m Y_m \equiv Z'_m$ gibt, führen wir eine Induktion nach $N(Y) = q$. Für $q = 1$ kann nur einer der Fälle (1) oder (2) vorliegen, da dann $Y_m$ eine Zahl ist; denn im Falle (3) wäre $\sigma(Z'_m) > 1$, also $Y_m < Z'_m$, und man hätte $Y < Z$ entgegen der Voraussetzung. Nehmen wir dann an, der Satz sei bewiesen für $N(Z) \leq p + 1$ und $q \leq q_0$ und sei $N(Y) = q_0 + 1$. Nun ist aber $N(Z'_m) \leq p + 1$ und $N(Y_m) \leq q_0$, also ist die Existenz der Verschiebung $V_m$ erwiesen. Sei nun jetzt $V = V_m V_{m-1} \ldots V_1$, so gilt $V Y \equiv A_m Z$. Setzen wir $V^* = R_m V$, so ergibt sich $V^* Y \equiv Z$, w. z. b. w.

**Satz 17.** Ist $X = Y$ und $Y = Z$, so ist $X = Z$.

Beweis: Nach Satz 16 gibt es eine Verschiebung $V^x$ derart, daß $V^x X \equiv Y$ ist, ebenso $V^y$, so daß $V^y Y \equiv Z$ gilt. Setzen wir nun $V$ für die Verschiebungsreihe $V^y V^x$, so gilt $V X \equiv Z$. Nach Satz 15 hat man $X = Z$, w. z. b. w.

**Satz 18.** Ist $Y < Z$, so ist $A_k Y < Z$.

Der Beweis dieses Satzes erfolgt durch eine dem Beweis des Satzes 9 analoge Diskussion. Sei nämlich $\sigma(Y) = n$, $\sigma(Z) = l$, so gibt es nach Voraussetzung ein größtes $t_0 \leq \mathrm{Min}\,(n, l)$ derart, daß $Y'_{t_0} < Z'_{t_0}$ ist, wobei $Y'$ bzw. $Z'$ eventuell eine geeignete Amplifikation von $Y$ bzw. $Z$ bedeuten. Die Behauptung ergibt sich, indem man alle sinnvollen Anordnungen der Zahlen $t_0$, $k$, $n$ und $l$ durchgeht und unter Benutzung einer Induktion nach $N(Z)$.

**Satz 19.** Ist $Y < Z$ und sind alle angegebenen Verschiebungen ausführbar, so gilt:

a) $R_n Y < Z$
b) $Y < R_\iota Z$
c) $\mathfrak{A} Y < Z$
d) $Y < \mathfrak{A} Z$
e) $V' Y < V'' Z$.

Beweis: **a)** Wäre $R_n Y \geq Z$, so wäre auch nach Satz 9 bzw. 8 $A_n(R_n Y) \equiv \equiv Y \geq Z$ entgegen der Voraussetzung; also ist a) bewiesen.

**b)** Wäre $Y \geq R_\iota Z$, so hätte man nach Satz 8 bzw. 18 $Z \equiv A_\iota(R_\iota Z) \leq Y$, was der Voraussetzung widerspricht; also gilt auch b).

**c)** Sei etwa $\mathfrak{A} Y \equiv A^{(r)}(A^{(r-1)}(\ldots(A^{(1)} Y)\ldots))$, so ist nach Satz 18 $A^{(1)} Y < Z$; daraus nach $r-1$ weiteren Anwendungen des Satzes 18 folgt die Behauptung.

Unter eventueller mehrmaliger Benützung der vorangehenden Sätze beweist man auch ganz analog die Behauptungen **d)** und **e)**.

**Satz 20** **a)** Ist $X = Y$ und $Y < Z$, so ist $X < Z$.
**b)** Ist $X = Y$ und $Y > Z$, so ist $X > Z$.

Beweis: **a)** Nach Satz 16 gibt es eine Verschiebung $V$, so daß $VX \equiv Y$. Dann folgt die Behauptung nach Satz 15e.

**b)** Wäre $X = Z$, so hätte man nach Satz 17 $Y = Z$; wäre $X < Z$, so hätte man wegen $X = Y$ nach a) $Y < Z$. Beide Annahmen führen also zum Widerspruch mit der Voraussetzung, wonach auch b) erwiesen ist.

**Satz 21.** Ist $X < Y$ und $Y < Z$, so ist $X < Z$.

Beweis: Sei $\sigma(X) = k$, $\sigma(Y) = n$ und $\sigma(Z) = p$; sei auch $m = \mathrm{Min}\,(k, n, p)$. Ist etwa $k = m$, so kann man mittels $A_m Y \equiv Y'$ und $A_m Z \equiv Z'$ bewirken, daß die drei Ausdrücke $X$, $Y'$ und $Z'$ die gleiche Stellenzahl $m$ aufweisen. Gelingt es zu zeigen, daß $X < Z'$ gilt, so folgt die Behauptung des Satzes wegen $Z = Z'$ nach Satz 20. Ein ähnlicher Schluß erfolgt, falls $m = n$ oder $m = p$ ist. Es genügt also, den Satz für drei Ausdrücke $X$, $Y$ und $Z$ mit derselben Stellenzahl zu beweisen.

Sei also $\sigma(X) = \sigma(Y) = \sigma(Z) = m$. Nehmen wir an, $t_0$ sei der größte Zeiger, für den $X_{t_0} < Y_{t_0}$ ist; ebenso $r_0$ sei der größte Zeiger, für den $Y_{r_0} < Z_{r_0}$ ist. Ist $t_0 < r_0$, so gilt $X_{r_0} = Y_{r_0}$ und zugleich $Y_{r_0} < Z_{r_0}$; nach Satz 20 hat man also $X_{r_0} < Z_{r_0}$. Nach Bedeutung von $r_0$ folgt aus HLV $X < Z$. Ist $t_0 > r_0$, so folgt nach Definition dieser Zahlen $X_{t_0} < Y_{t_0} = Z_{t_0}$, also nach Satz 20 $X_{t_0} < Z_{t_0}$ und nach HLV $X < Z$.

Sei jetzt $t_0 = r_0$. Induktion nach $N(Y) = q$. Ist $q = 1$, so ist $Y_{t_0}$ eine Zahl, folglich muß auch $X_{t_0}$ eine Zahl sein. Aus $Y_{t_0} < Z_{t_0}$ folgt dann sicher $X_{t_0} < Z_{t_0}$. Wegen der Bedeutung von $t_0$ ergibt sich aus HLV $X < Z$. Sei jetzt angenommen, der Satz sei bewiesen für alle $Y^*$, für die $N(Y^*) \leq q_0$ ist, und sei nun $N(Y) = q + 1$. Dann ist aber $N(Y_{t_0}) \leq q_0$, also kann man aus $X_{t_0} < Y_{t_0}$ und $Y_{t_0} < Z_{t_0}$ $X_{t_0} < Z_{t_0}$ folgern. Daraus folgt aber nach HLV $X < Z$, w. z. b. w.

Hiermit ist die Konsistenz des im § 4 definierten Größenvergleiches für die $Z$-Ausdrücke erwiesen.

Wir führen noch den Begriff der «Normalform» (Nf) eines $Z$-Ausdruckes ein.

### 3. Normalform (Nf)

**Definition.** $Z$ ist in Nf, falls:

(1) $Z$ vereinfacht ist.

(2) $Z$ «*vollständig reduziert*», das heißt, es ist keine Reduktion weder in $Z$ noch in irgendeinem Term von $Z$ möglich.

**Satz 22.** *Die* Nf *eines Z-Ausdruckes ist eindeutig.*

Beweis: Zahlen sind in Nf, und diese ist eindeutig. Sei jetzt die Behauptung bewiesen für alle $Y$ mit $N(Y) \leq k$ und sei $N(Z) = k + 1$, wo $Z \equiv [Z_1, Z_2, \ldots, Z_m]$, und alle $Z_i$ in Nf, die eindeutig ist, nach Induktionsvoraussetzung. Nach $(RZ)$ (vgl. Seite 278) ist es für das Ergebnis gleichgültig, wenn man zunächst $Z$ vereinfacht und dann eventuell reduziert:

$$WZ \equiv [Z_1, Z_2, \ldots, Z_h],\ h \leq m,\ Z_h \text{ Hauptglied von } Z.$$

Sei danach $Z_h \equiv [Z_{h1}, \ldots, Z_{hr}]$ in Nf. Ist $r \leq h$, so ist $R_h(WZ)$ unmöglich und $WZ$ bereits in Nf, die eindeutig ist.

Ist $r > h$ und Bed. (c), Seite 278, nicht erfüllt, das heißt, gibt es ein $t$, $1 < t \leq h$, mit $Z_{ht} > 0$, so ist $R_h(WZ)$ unmöglich und $WZ$ in Nf, die nach Induktionsvoraussetzung über $Z_i$ eindeutig ist.

Ist dagegen für alle $t$, $1 < t \leq h$, $Z_{ht} = 0$, so ist

$$R_h(WZ) \equiv Z^* \equiv [Z_1, Z_2, \ldots, Z_{h-1}, Z_h^*, Z_{h+1}^*, \ldots, Z_r^*]$$
$$\text{mit } Z_{h1} \equiv Z_h^*,\ Z_{hq} \equiv Z_q^*,\quad h < q \leq r.$$

Da nach Induktionsannahme $Z_h$ in Nf ist, so ist $R_r Z_h$ nicht ausführbar, also auch $R_r Z^*$ ist nicht ausführbar, das heißt, es ist $Z^*$ vollständig reduziert. Nach Satz 6 ist $Z_r^*$ Hauptglied von $Z^*$. $Z^*$ ist also nach $(RZ)$ auch vereinfacht und in Nf, und diese ist eindeutig, w. z. b. w.

**Satz 23.** Sind $Y$ und $Z$ Ausdrücke in Nf und $Z = Y$, so ist $Y \equiv Z$.

Beweis: Nach Voraussetzung sind $Y$ und $Z$ vereinfacht. Nach Satz 16 gibt es eine Verschiebung $V$ derart, daß $VY \equiv Z$ ist. Nun kann $V$ nur die Identische Verschiebung (also leer) sein. Denn $V$ kann nach § 3, 3h, keine Reduktionen von $Y$ enthalten, da $Y$ in Nf ist. Würden hingegen in $V$ Amplifikationen $\mathfrak{A}$ von $Y$ vorkommen, so könnte man die zu $\mathfrak{A}$ inversen Reduktionen auf $Z$ ausführen, entgegen der Voraussetzung, nach der $Z$ in Nf ist. Also muß $V$ die Identische Verschiebung sein, und es gilt $Y \equiv Z$, w. z. b. w.

Als **Korollar** zu dem Satz 16, Definiton von Nf und Feststellung h) vom § 3, 3 hat man noch: Ist $N$ die Normalform von $Z$, so gibt es eine Amplifikationsreihe $\mathfrak{A}$ derart, daß $\mathfrak{A}N \equiv Z$ ist.

**Satz 24.** Ist $Y = Z$, so ist die Nf von $Y$ identisch mit der Nf von $Z$.

Beweis: Sei $N^z$ die Nf von $Z$ und $N^y$ die Nf von $Y$. Dann gibt es zwei Amplifikationsreihen $\mathfrak{A}^y$ und $\mathfrak{A}^z$ derart, daß $\mathfrak{A}^y N^y \equiv Y$ und $\mathfrak{A}^z N^z \equiv Z$ ist.

Aus $\mathfrak{A}^y N^y = \mathfrak{A}^z N^z$ folgt nach Satz 15 $N^y = N^z$, also nach Satz 23 $N^y \equiv N^z$, w. z. b. w.

### 4. Spezielles Vergleichskriterium mittels der Stufe

Wir beweisen jetzt durch eine gleichzeitige Induktion nach $k = \mathrm{Max}(N(X), N(Y), N(Z))$ die folgenden drei Sätze:

**Satz 25.** Es gilt $S\{X\} = S\{WX\} = \mathrm{Max}\,(S\{X_h\}, h)$, wo $X_h$ Hauptglied von $X$ ist.

**Satz 26.** Ist $Z$ vereinfacht, so ist $S\{Z\} = S\{\bar{Z}^{(1)}\}$.

**Satz 27.** Ist $S\{Z\} > S\{Y\}$, so ist $Z > Y$.

Ist $k = 1$, so sind alle drei Behauptungen richtig nach Definition der Stufe eines Ausdruckes.

Bezeichnen wir jetzt die genannten Sätze durch folgende Angabe der Klammerzahlbedingung:

*Satz $25_k$* für $N(X) \leq k$

*Satz $26_k$* für $N(Z) \leq k$

*Satz $27_k$* für $\mathrm{Max}\,(N(Z), N(Y)) \leq k$,

und nehmen wir an, sie seien schon für $k \leq k_0$ bewiesen. Zum weiteren Beweis zerlegen wir den Satz $25_{k_0+1}$ in die zwei Teilbehauptungen $25'_{k_0+1}$: $S\{X\} = S\{WX\}$ und $25''_{k_0+1}: S\{X\} = \mathrm{Max}\,(S\{X_h\}, h)$.

Beweis von $25'_{k_0+1}$:

Gemäß der Induktionsannahme $25'_{k_0}$ ändert sich die Stufe von $S\{X\}$ nicht, wenn die Glieder von $X$ vereinfacht werden; wir können daher in $X \equiv [X_1, \ldots, X_n]$ die $X_i$ von vornherein als vereinfacht annehmen. Es ist dann $WX \equiv [X_1, \ldots, X_h]$ bzw. für $h = 1$ $WX \equiv X_1$. Falls $n = h$ oder $S\{X\} = S\{X_j\}$ für ein $j \leq h$, so ist die Behauptung ersichtlich.

Wir brauchen also nur die Fälle zu betrachten $S\{X\} = n > h$ oder $S\{X\} > n > h$ und zugleich $S\{X\} = S\{X_p\}$ für ein $p > h$. In beiden Fällen ist aber $S\{\overline{X}^{(h)}\} = S\{X\}$. Ferner gilt auf Grund von HLV: $\overline{X}_h^{(1)} > \overline{X}^{(h)}$. $X_h$ kann hiernach keine Zahl sein, also ist $N(\overline{X}^{(h)}) < N(X)$, desgleichen ist $N(\overline{X}_h^{(1)}) < N(X)$. Es folgt daher nach $27_{k_0}$ $S\{\overline{X}_h^{(1)}\} \geq S\{\overline{X}^{(h)}\}$ und erst recht $S\{X_h\} \geq S\{\overline{X}^{(h)}\} = S\{X\}$, somit $S\{X_h\} = S\{X\}$ und $S\{WX\} = = S\{X\}$. Diese Überlegung bleibt auch im Falle $h = 1$ gültig. $25'$ ist damit bewiesen.

Beweis von $25''_{k_0+1}$:

Auf Grund von $25'_{k_0+1}$ können wir $X$ (und damit auch $X_h$) bereits als vereinfacht annehmen; wir haben also $X \equiv [X_1, \ldots, X_h]$ bzw. für $h = 1$ $X \equiv X_1 \equiv X_h$. Es ist nun der Fall auszuschließen, daß $h < S\{X\}$ und zugleich $S\{X_h\} < S\{X\}$. Angenommen, es gebe ein größtes $i < h$, für welches $S\{X_i\} = S\{X\}$ ist. Nach der Definition des Hauptgliedes muß aber $S\{\overline{X}_i^{(1)}\} \leq S\{\overline{X}^{(i)}\}$ sein. Auf Grund unserer Annahme über $X_i$ und $h$ wäre $S\{\overline{X}^{(i)}\} \leq S\{X\}$ und somit $S\{\overline{X}_i^{(1)}\} < S\{X\}$ und anderseits nach $26_{k_0}$, da $X_i$ vereinfacht, also erst recht 1-vereinfacht ist, $S\{\overline{X}_i^{(1)}\} = S\{X_i\}$, folglich $S\{X_i\} < S\{X\}$ im Widerspruch zur Bestimmung von $X_i$. $25''_{k_0+1}$ ist damit bewiesen.

Beweis von $26_{k_0+1}$:

Auf Grund unserer Voraussetzung ist $Z_1$ nicht Hauptglied von $Z$, daher, wenn $Z_h$ das Hauptglied ist, hat man $h \geq 2$, $WZ \equiv [WZ_1, \ldots, WZ_h]$, $\overline{WZ}^{(1)} \equiv [0, WZ_2, \ldots, WZ_h] = W(\overline{Z}^{(1)})$, und nach $25'_{k_0+1}$ ist $S\{Z\} = S\{WZ\}$, $S\{\overline{Z}^{(1)}\} = S\{\overline{WZ}^{(1)}\} = S\{W(\overline{Z}^{(1)})\}$. Wir können daher von vornherein $Z$ als vereinfacht annehmen. $Z_1$ ist dann also auch vereinfacht und a fortiori 1-vereinfacht. Somit gilt, da $N(Z_1) \leq k_0$ ist, gemäß $26_{k_0}$ $S\{\overline{Z}_1^{(1)}\} = S\{Z_1\}$, (*). Ferner folgt, weil $Z_1$ nicht Hauptglied von $Z$ ist, nach HLV $\overline{Z}_1^{(1)} \leq \overline{Z}^{(1)}$, (**). Ist aber $\sigma(Z_1) > 1$, also $N(Z_1) \geq 1$, so ist $N(\overline{Z}^{(1)}) \leq k_0$; und da auch $N(\overline{Z}^{(1)}) \leq k_0$, so folgt nach (**) und $27_{k_0}$ $S\{\overline{Z}_1^{(1)}\} \leq S\{\overline{Z}^{(1)}\}$ und weiter nach (*): $S\{Z_1\} \leq S\{\overline{Z}^{(1)}\}$; hieraus ergibt sich auf Grund der Definition von $S\{Z\}: S\{Z\} = S\{\overline{Z}^{(1)}\}$. Somit ist $26_{k_0+1}$ bewiesen.

Beweis von $27_{k_0+1}$:

Wegen $25'_{k_0+1}$ können wir $Y$ und $Z$ als vereinfacht annehmen. Wir haben somit unter den Voraussetzungen Max $(N(Y), N(Z)) = k_0 + 1$, $S\{Z\} > S\{Y\}$ zu zeigen, daß $Z > Y$ ist. Wir wenden hierfür eine Induktion nach

$\mathrm{Min}(N(Y), N(Z)) = p$ an. Wenn $p = 0$, so muß (wegen $S\{Z\} > S\{Y\} \geq 1$), $N(Y) = 0$, also $Y$ eine Zahl sein, während $S\{Z\} > 1$, also $\sigma(Z) > 1$ ist; daher ist $Z > Y$. Angenommen, die Behauptung gelte für $p \leq p_0 \leq k_0$. Wir wollen dann den Nachweis für $p = p_0 + 1$ führen. Die Gültigkeit des Satzes einerseits für $k \leq k_0$ $(27_{k_0})$, andererseits für $k = k_0 + 1$ und $p \leq p_0$, kurz $(27_{k_0+1, p_0})$ sei bereits erwiesen. Da $Z$ und $Y$ vereinfacht sind, so kann die Vergleichung von $Z$ und $Y$, eventuell nach vorheriger Amplifikation des einen Ausdrucks, direkt lexikographisch erfolgen. Sei $\sigma(Z) = m$, $\sigma(Y) = n$, dann haben wir nach $25''_{k_0+1}$ $S\{Z\} = \mathrm{Max}(m, S\{Z_m\})$, $S\{Y\} = \mathrm{Max}(n, S\{Y_n\})$.

Ist $m = n$, dann ist $m \leq S\{Y\} < S\{Z\}$, also $S\{Z\} = S\{Z_m\}$, $S\{Y_m\} \leq S\{Y\} < S\{Z\}$, also $S\{Z_m\} > S\{Y_m\}$; dabei ist $N(Z_m) \leq k_0$, $N(Y_m) \leq k_0$ also nach $27_{k_0}$ $Z_m > Y_m$ und somit nach HLV $Z > Y$.

Ist $m > n$, dann wird $A_n Z = Z'$ mit $Y$ lexikographisch verglichen. Das letzte Glied $Z'_n$ von $Z'$ hat nach $25''_{k_0+1}$ die Stufe $S\{Z\}$, $Y_n$ hat höchstens die Stufe $S\{Y\}$. Die Klammerzahlen von $Z'_n$ und $Y_n$ sind entweder höchstens $k_0 + 1$ und $p_0$ oder höchstens $p_0 + 1$, $k_0$, wobei $p_0 + 1 \leq k_0$, außer für $p_0 = k_0$. Somit können wir auf $Z'_n$ und $Y_n$ $27_{k_0}$ oder $27_{k_0+1, p_0}$ anwenden. Da $S\{Z'_n\} = S\{Z\} > S\{Y\} \geq S\{Y_n\}$, so folgt nun $Z'_n > Y_n$, daraus nach HLV $A_n Z > Y$ und damit $Z > Y$.

Ist $m < n$, dann hat man $Z$ mit $A_m Y$ zu vergleichen. Das letzte Glied $Y'_m$ von $Y' = A_m Y$ hat nach $25''_{k_0+1}$ die Stufe $S\{Y\}$; diese ist $\geq n$ und $< S\{Z\}$. Somit ist $S\{Z_m\} > m$ und daher nach $25''_{k_0+1}$, $S\{Z_m\} = S\{Z\}$. Demnach ist $S\{Z_m\} > \{Y'_m\}$. Die Betrachtung der Klammerzahlen von $Z_m$ und $Y'_m$ zeigt wie oben, daß wir auf diese Ausdrücke entweder $27_{k_0}$ oder $27_{k_0+1, p_0}$ anwenden können. Somit folgt $Z_m > Y'_m$, also nach HLV $Z > A_m Y$, also $Z > Y$. Damit ist auch $27_{k_0+1}$ bewiesen.

## § 5. Monotoniesätze

**Satz 28.** Sind $\overline{X}^{(1)} < \overline{Y}^{(1)}$ und $x_1$ und $y_1$ nicht Hauptglieder von $X$ bzw. von $Y$, so gilt $X < Y$.

Beweis: Aus $\overline{x}_1^{(1)} \leq \overline{X}^{(1)} < \overline{Y}^{(1)}$ folgt, daß es ein größtes $t_0$ mit $1 < t_0 \leq \mathrm{Min}(\sigma(X), \sigma(Y))$ gibt, so daß

$$x'_{t_0} < y'_{t_0}, \tag{$\alpha$}$$

wobei $x'_{t_0}$ bzw. $y'_{t_0}$ Glieder einer geeigneten eventuellen Amplifikation von $X$ bzw. von $Y$ bedeuten.

Da weder $x_1$ noch $y_1$ Hauptglieder von $X$ bzw. von $Y$ sind, so folgt aus ($\alpha$), wegen $t_0 > 1$, nach HLV: $X < Y$, w. z. b. w.

**Definition.** $Z$ soll *1-vereinfacht* heißen, falls $Z_1$ nicht Hauptglied von $Z$ ist und weiter, falls $\varepsilon_r = 11\ldots 1$ eine Sequenz von $r$ Einsen bedeutet, $Z_{\varepsilon_r 1}$ nicht Hauptglied von $Z_{\varepsilon_r}$ (also $\overline{Z}^{(1)}_{\varepsilon_r 1} \leq \overline{Z}^{(1)}_{\varepsilon_r}$) ist für alle $r$, für die ein Term $Z_{\varepsilon_r 1}$ in $Z$ existiert.

**Satz 29.** Ist $X = [X_1, \ldots, X_n]$, $n > 1$, $X_1 \neq 0$ und $X_n \neq 0$, dann ist $\overline{X}^{(1)} < X$.

Beweis: Die Behauptung ist nur dann nicht trivial, wenn $X_1$ Hauptglied von $X$ ist. Nehmen wir in diesem Fall an, $X_1$ sei 1-vereinfacht, da wir sonst $X_1$ durch $X_{11}$ ersetzen können. Es ist dann $\overline{X}_1^{(1)} > \overline{X}^{(1)}$ und daraus nach Satz 28 $X_1 > \overline{X}^{(1)}$. Da $X = [X_1] = X_1$ ist, so ergibt sich danach die Behauptung.

**Satz 30.** Ist $X$ 1-vereinfacht, so ist $X > X_1$.

Beweis: Für $N(X) = 1$ ist die Behauptung wahr. Sie sei schon bewiesen für alle Ausdrücke $Y$, mit $N(Y) \leq p$. Sei $N(X) = p + 1$. Es gilt also $X_{11} < X_1$. Da $X_1$ nicht Hauptglied von $X$ ist, hat man auch $\overline{X}_1^{(1)} \leq \overline{X}^{(1)}$. Diese Ungleichungen ergeben aber zusammen – mit nochmaliger Benützung des Umstandes, daß $X$ und $X_1$ nicht ihre ersten Glieder als Hauptglieder haben – nach HLV: $X > X_1$.

**Satz 31.** Ist $X = [X_1, \ldots, X_s]$, $X_s > 0$ und 1-vereinfacht und $Y = [X_1, \ldots, X_s, \ldots, X_t]$, $1 \leq s < t$, $X_t$ Hauptglied von $Y$, so ist $X < Y$.

Beweis: Durch Induktion nach $N(X)$. Für $s = 1$ ist der Satz gleichbedeutend mit dem vorigen. Sei also $s > 1$. Für $N(X) = 1$ hat man $S\{X\} = = s < t \leq S\{Y\}$, folglich gilt nach Satz 27 $X < Y$. Sei jetzt $N(X) = n + 1$ und die Behauptung erwiesen für alle $X'$ mit $N(X') \leq n$. Dann wird $X$ mit $A_s Y = Y'$ verglichen. Nun ist $Y'_s = [X_s, 0, \ldots, 0, X_{s+1}, \ldots, X_t]$. Da $X_t$ Hauptglied von $Y$ ist, so ist es nach Satz 6 auch Hauptglied von $Y'_s$, also ist dieser Ausdruck 1-vereinfacht, folglich gilt nach vorigem Satz $Y'_s > X_s$, also nach HLV: $Y > X$.

**Folgerung.** Die vorangehenden Sätze erlauben eine Verschärfung des Satzes 28 in dem Sinne, daß nur über $X$ vorausgesetzt zu werden braucht, daß es nicht $X_1$ als Hauptglied hat. Denn es folgt ja nach diesem Satz aus $\overline{X}^{(1)} < \overline{Y}^{(1)} : X < \overline{Y}^{(1)}$; da andererseits $\overline{Y}^{(1)} \leq Y$ ist, so folgt nach Satz 20 bzw. 21 $X < Y$.

**Satz 32.** Ist
$$Z = [Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_h],$$
$$Z^* = [Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k^*, Z_{k+1}, \ldots, Z_h], \quad Z_k < Z_k^*$$
und $k \leq \sigma(W[Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_h])$, so ist $Z < Z^*$.

Beweis: Vorbemerkung. Für die Vergleichung von $Z$ und $Z^*$ haben wir die Glieder $Z_k$ und $Z_k^*$ gemäß HLV durch $WZ_k$ und $WZ_k^*$ zu ersetzen. Dabei ist dann $WZ_k < WZ_k^*$; wir können daher von vornherein $Z_k$ und $Z_k^*$ als vereinfacht annehmen. Nun sind vier Fälle zu unterscheiden:

(1) $Z_k$ ist nicht Hauptglied von $Z$ und $Z_k^*$ nicht Hauptglied von $Z^*$. Nach Definition des Hauptgliedes ist dann $\sigma(WZ) = \sigma(WZ^*) > k$ und die Behauptung ist dann wahr nach HLV.

(2) $Z_k$ und $Z_k^*$ sind Hauptglieder von $Z$ bzw. von $Z^*$. Die Behauptung ist dann wahr nach HLV, da $Z = [Z_1, \ldots, Z_k]$ und $Z^* = [Z_1, \ldots, Z_{k-1}, Z_k^*]$ ist.

(3) $Z_k$ ist Hauptglied von $Z$, das heißt, es gilt $\overline{Z}_k^{(1)} > \overline{Z}^{(k)}$. $Z_k^*$ ist nicht Hauptglied von $Z^*$, das heißt es gilt $\overline{Z_k^{*(1)}} \leq \overline{Z}^{(k)}$. Dieser Fall ist unmöglich, weil aus $Z_k < Z_k^*$ folgt, nach Satz 28, da $Z_k$ vereinfacht ist, $\overline{Z}_k^{(1)} < \overline{Z}_k^{*(1)}$, was im Widerspruch zu den Voraussetzungen des Falles (3) steht.

(4) $Z_k$ ist nicht Hauptglied von $Z$, das heißt, es gilt $\overline{Z}_k^{(1)} \leq \overline{Z}^{(k)}$. $Z_k^*$ ist Hauptglied von $Z^*$, das heißt, es gilt $\overline{Z_k^{*(1)}} > \overline{Z^{*(k)}} \equiv \overline{Z}^{(k)}$.

Bemerkung: Wenn $Z_k$ nicht Hauptglied von $Z$ ist, so muß nach Voraussetzung über $k$ etwa $Z_h$, $k < h$, Hauptglied von $Z$ sein.

Um nun $Z$ mit $Z^*$ zu vergleichen, bilde man: $Z' \equiv A_k Z$. Dabei wird $Z_k' = [Z_k, 0, \ldots, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_h]$. Nun ist in diesem Falle (4) $Z_k^* \geq \overline{Z_k^{*(1)}} > \overline{Z}^{(k)} = \overline{Z_k'^{(1)}}$, $Z_{k1}' \equiv Z_k$ ist nicht Hauptglied von $Z_k'$, folglich gilt nach Satz 28 $Z_k^* > Z_k'$, also nach HLV $Z^* > Z' = Z$, w.z.b.w.

**Satz 33.** Sei $Z = [0, \ldots, 0, Z_k]$, und $Z_k = [0, \ldots, 0, Z_{kr}, \ldots, Z_{ks}]$, das heißt, für $k > 1$, $1 \leq t < k$ sei $Z_t = 0$ und für $1 \leq t' < r \leq \sigma(Z_k)$ sei $Z_{kt'} = 0$, außerdem sei $k < r$, so gilt $Z = Z_k$.

Beweis: Für $k = 1$ ist der Satz trivial, da man $Z = [Z_1] = Z_1$ hat. Sei also $k > 1$. Es ist aber $A_k Z_k \equiv Z$, also $Z_k = Z$, w.z.b.w.

Nach diesem Satz kann es also vorkommen, daß ein Ausdruck gleich einem seiner Glieder wird. Wir zeigen etwas weiter, daß, falls $Z_k$ in Normalform ist, die angegebenen Bedingungen für den obigen Satz auch notwendig sind.

**Satz 34.** Ist $Z \equiv [Z_1, \ldots, Z_k]$, $Z_k > 0$, so ist jedenfalls $Z \geq Z_k$; wenn $Z_t > 0$ für ein $t < k$, so ist $Z > Z_k$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $Z_1, \ldots, Z_k$ als vereinfacht annehmen. Ferner können wir annehmen, daß $k > 1$ ist, da für $k = 1$ nichts zu beweisen ist. Hiernach ist $Z \geq [0, 1]$. Ist dabei $Z_k$ eine Zahl, so ist die Behauptung wiederum selbstverständlich. Wir können also $\sigma(Z_k) = r > 1$ und somit $N(Z) \geq 2$ annehmen.

Wir wenden Induktion nach $N(Z)$ an.

Ist $Z_k$ nicht Hauptglied von $Z$, so sei $Z_i$, $i < k$, das Hauptglied; dann ist $\overline{Z}_i^{(1)} > Z^{(i)}$, also, da $Z_i$ vereinfacht (und somit 1-vereinfacht) ist, $Z_i > \overline{Z}^{(i)}$ (Satz 28). Außerdem ist $N(\overline{Z}^{(i)}) < N(Z)$. Also nach Induktionsannahme $\overline{Z}^{(i)} \geq Z_k$, $Z_i > Z_k$. Nun haben wir $Z = [Z_1, \ldots, Z_i]$. Für $i > 1$ ist $Z \geq Z_i$ gemäß Induktionsannahme, also $Z > Z_k$; im Falle $i = 1$ ist $Z = Z_i$, also wiederum $Z > Z_k$.

Wir können somit nun annehmen, daß $Z_k$ Hauptglied von $Z$ ist, $Z_k \equiv [Z_{k1}, \ldots, Z_{kr}]$, $Z_k$ vereinfacht, $r > 1$.

Fall (1): $r > k$. Wir vergleichen $Z$ mit $Z_k' \equiv A_k Z_k$; dabei ist das letzte Glied von $Z_k' : Z_{kk}' = [Z_{kk}, 0, \ldots, 0, Z_{k(k+1)}, \ldots, Z_{kr}]$ mit $k-1$ Nullen zwischen $Z_{kk}$ und $Z_{k(k+1)}$.

Ist für ein $p$, $1 < p \leq k$, $Z_{kp} > 0$, so ist $Z_k > Z_{kk}'$ nach HLV, da für solche $p$ $Z_{kkp}' = 0$ und $\overline{Z}_{kk}'^{(k)} \equiv \overline{Z}_k^{(k)}$ ist. Aus $Z_k' > Z_{kk}'$, folgt aber nach lexikographischem Vergleich $Z > Z_k$.

Ist dagegen für alle $p$, $1 \leq p \leq k$, $Z_{kp} = 0$, so ist speziell $Z_{kk} = 0$, $Z_{kk1}' = 0$, daher $Z_{kk}' = Z_k' = Z_k$. Ist nun für alle $t$, wo $1 \leq t \leq k$, $Z_t = 0$, so ist $Z \equiv [0, \ldots, 0, Z_k], Z_k' \equiv [0, \ldots, 0\ Z_{kk}']$, $Z_k = Z_{kk}'$, also $Z = Z_k' = Z_k$. Ist andererseits für ein $t$ $(1 \leq t < k)$ $Z_t > 0$, so ist für jedes solche $t$: $Z_t > Z_{kt}'$, also nach HLV $Z > Z_k'$ also $Z > Z_k$.

Fall (2): $r = k$. Nach Induktionsannahme ist wegen $N(Z_k) < N(Z)$ $Z_k \geq Z_{kk}$. Für $Z_k > Z_{kk}$ folgt $Z > Z_k$. Andernfalls, für $Z_k = Z_{kk}$, muß nach Induktionsvoraussetzung $Z_k = [0, \ldots, 0, Z_{kk}]$ sein. Ist dann auch $Z \equiv [0, \ldots, 0, Z_k]$, so ist $Z = Z_k$; sonst ist $Z > Z_k$.

Fall (3): $r < k$. Jetzt wird $Z_k$ mit $Z' \equiv A_r Z$ verglichen. Dabei ist das letzte Glied von $Z'$ von der Form $Z_r' \equiv [Z_r, 0, \ldots, 0, Z_{r+1}, \ldots, Z_k]$ ($r-1$ Nullen zwischen $Z_r$ und $Z_{r+1}$). Man hat auch wie sonst
$Z_k \equiv [Z_{k1}, \ldots, Z_{k(r-1)}, Z_{kr}]$.

Nach Induktionsannahme ist entweder

(3.1) $Z_k > Z_{kr}$. Dann ist $Z_r' > [Z_r, 0, \ldots, 0, Z_{r+1}, \ldots, Z_{k-1}, Z_{kr}]$. Dieser Ausdruck möge $Z_r^*$ heißen (zu beachten: letztes Glied in $Z_r^*$ ist $Z_{kr}$, nicht $Z_k$). Es ist $N(Z_r^*) < N(Z)$, daher $Z_r^* \geq Z_{kr}$, $Z_r' > Z_{kr}$ und daraus $Z' > Z_k$, somit $Z > Z_k$. Oder

(3.2) es ist $Z_k = Z_{kr}$, dann nach Induktionsannahme $Z_k \equiv [0, \ldots, 0, Z_{kr}]$. Dann ist $Z_r' \geq Z_r^*$, $Z_r^* \geq Z_{kr}$ (nach Induktionsannahme) also $Z_r' \geq Z_{kr} = Z_k$, wobei Gleichheit nur dann gilt, wenn die $Z_r, \ldots, Z_{k-1}$ alle Null sind. Demnach ist $Z' \geq Z_k$ w.z.b.w.

**Satz 35.** Ist $Z \equiv [0, \ldots, 0, Z_k]$ in Normalform und $k > 1$, dann ist $Z > Z_k$.

Beweis: Wir können annehmen, daß $Z_k$ keine Zahl ist, da sonst die Behauptung trivial ist. Sei also $\sigma(Z_k) = r > 1$. Wir führen eine Induktion nach $N(Z)$ durch und unterscheiden wiederum drei Fälle:

(1) $r > k$. Dann wird $Z$ mit $Z'_k \equiv A_k Z_k$ verglichen. Dabei ist das letzte Glied von $Z'_k$:

$$\begin{aligned} Z'_{kk} &\equiv [Z_{kk}, 0, \ldots, 0, Z_{k(k+1)}, \ldots, Z_{kr}], \quad \text{während} \\ Z_k &\equiv [Z_{k1}, \ldots, Z_{kr}] \quad \text{ist.} \end{aligned}$$

Nun ist $Z$, also auch $Z_k$, in Normalform, das heißt, es muß ein $Z_{kt} > 0$ für ein $t$, $1 < t \leq k$, geben, da man sonst eine Reduktion $R_k Z_k$ ausführen könnte. Deshalb wird nach HLV $Z_k > Z'_{kk}$, also auch $Z > Z_k$.

(2) $r = k$. $Z$ und $Z_k$ sind in Normalform und $N(Z) > N(Z_k)$, also nach Induktionsannahme $Z_k > Z_{kk}$ und somit $Z > Z_k$.

(3) $r < k$. Jetzt wird $Z_k$ mit $Z' \equiv A_r Z \equiv [0, \ldots, 0, Z]$ mit $Z'_r = Z$. Nach Induktionsannahme ist $Z_k > Z_{kr}$ und außerdem nach Satz 33 $Z \geq Z_k$ also $Z > Z_{kr}$, daher nach HLV $Z' > Z_k$ und somit $Z > Z_k$.

**Satz 36.** Es gilt $Z \equiv [Z_1, \ldots, Z_k, \ldots, Z_s] \geq Z_k$, für $1 \leq k \leq s$.

Beweis: Zunächst können wir hier $Z_1, \ldots, Z_s$ als vereinfacht annehmen. Sei $Z_h$, $h \leq s$, Hauptglied von $Z$.

(1) $k > h$. Sei $N(Z) = 2$; es muß dann $Z_k$ eine Zahl sein, da sonst $Z_h$ nicht Hauptglied sein könnte. Die Behauptung ist dann wahr auf Grund von HLV I. Sei jetzt der Satz als richtig angenommen für $N(Y) \leq p$ und sei $N(Z) = p + 1$. Es ist also $\overline{Z}_h^{(1)} > \overline{Z}^{(h)}$, das heißt, es muß $N(Z_h) > 1$, folglich $N(\overline{Z}^{(h)}) \leq p$ sein. Nach Voraussetzung über $p$ hat man dann

$$Z \geq Z_h \geq \overline{Z}_h^{(1)} > \overline{Z}^{(h)} \geq Z_k\,.$$

(2) $k \leq h$. Dann ist nach Satz 31 und nach Satz 34

$$Z = [Z_1, \ldots, Z_k, \ldots, Z_h] \geq [Z_1, \ldots, Z_k] \geq Z_k{}^{11)}, \text{ w.z.b.w.}$$

**Satz 37.** Notwendig und hinreichend für $Z \equiv [Z_1, \ldots, Z_k, \ldots, Z_s] = Z_k$ mit $Z_k$ in Normalform und $k > 1$ ist:

(1) $Z_k$ Hauptglied von $Z$,
(2) $\sigma(Z_k) > k$,
(3) alle $Z_t = 0$, für $1 \leq t < k$.
(4) alle $Z_{kp} = 0$, für $1 \leq p \leq k$.

Beweis: Hinreichend; da $Z_k$ Hauptglied ist, so hat man nach (3) $Z = [Z_1, \ldots, Z_k]$. Wegen (2) und (4) gilt nach Satz 33 $Z = Z_k$.

---

11) Mit «$=$» höchstens für $k = h$.

Notwendig; wäre $Z_k$ nicht Hauptglied von $Z$, so wäre nach Beweis von Satz 34 $Z > Z_k$. Nach Satz 34 ist auch (3) notwendig. Also hat man $Z = [0, \ldots, 0, Z_k] \equiv Z'$. Wäre in $Z$ keine Reduktion möglich, so wäre, da $Z_k$ in Normalform ist, auch $[0, \ldots, 0, Z_k]$ in Normalform. Man hätte danach nach Satz 35 $Z > Z_k$. Damit also in $Z'$ eine Reduktion möglich wird, muß nach § 3 auch (2) und (4) erfüllt sein, w.z.b.w.

## § 6. Hauptzeiger und gleiche Einschachtelungsform

**Definition des Hauptzeigers** $\zeta$ von $Z$, symbolisch $\zeta = Hpt(Z)$. Der Hauptzeiger einer Zahl $n$ ist die leere Folge. Sei $Z \equiv [Z_1, \ldots, Z_h, \ldots, Z_m]$ und $Z_h$ Hauptglied von $Z$. Ist $\eta = Hpt(Z_h)$, so ist $\zeta = Hpt(Z) = h\eta = \sigma(WZ)\eta$. Man hat also nach Definition $Hpt(Z) = Hpt(WZ)$.

**Bemerkungen. (1)** Ist $Z$ vereinfacht, so ist $Hpt(Z)$ der überhaupt größte Zeiger, der in $Z$ vorkommt, also ist $\zeta = Hpt(Z)$ die Struktur von $Z$, vgl. § 2, 6. Es können dann die Ausführungen, die sich auf die Struktur eines Ausdruckes beziehen (vgl. § 3), auf den Hauptzeiger eines vereinfachten Ausdruckes übertragen werden.

**(2)** Da $[Z] = Z$ gesetzt wird, so kommt im Hauptzeiger eines vereinfachten Ausdruckes keine «1» vor.

**Definition.** Sei $\varkappa = k_1 k_2 \ldots k_r$ eine Sequenz von Zahlen (ein Zeiger) und $k^* = \operatorname{Max} k_i$ für $1 \leq i \leq r$; ist ferner $h \geq 1$ die Häufigkeit des Auftretens von $k^*$ in $\varkappa$, so soll $sh(\varkappa) = (k^*, h)$ sein.

**Beispiel.** Ist $\varkappa = 3\,423\,433$, so ist $sh(\varkappa) = (4{,}2)$.

**Definition von** $SH\{Z\}$ («Stufenhöhe» von $Z$).
Ist $Z = n$ eine Zahl, so sei $SH\{n\} = (1, n)$. Ist $\sigma(Z) > 1$ und $\zeta$ der Hauptzeiger von $Z$, so sei

$$SH\{Z\} = sh(\zeta).$$

**Vergleich von** $sh(\varkappa)$ **bzw. von** $SH\{Z\}$.
$(s', h') > (s'', h'')$ bedeutet entweder $s' > s''$ oder $s' = s''$ und $h' > h''$.

**Satz 38.** Sei $Hpt(Z) = \zeta = k_1 \ldots k_r$, $r > 0$, $k^* = \operatorname{Max} k_i$, $i = 1, \ldots, r$. So ist $S\{Z\} = k^*$.

Beweis: Nach Satz 25 ist $S\{WY\} = S\{Y\}$, also kann man $Z$ als vereinfacht annehmen.

Sei $N(Z) = 1$, also $Z = [n_1, \ldots, n_p]$, $n_i$ Zahlen, so ist, nach Definition von $S\{Z\}$, $S\{Z\} = p$; ebenso ist, nach Definition von $Hpt(Z)$: $Hpt(Z) = p$.

Sei jetzt die Behauptung bewiesen für $N(Z') \leq q$ und sei $N(Z) = q + 1$. Sei also $Z = [z_1, \ldots, z_h]$, $Hpt(z_h) = \varkappa = k_2 k_3 \ldots k_r$ und $\zeta = Hpt(Z) = h\varkappa$; mit $h = k_1$, ist $\zeta = k_1, k_2 \ldots k_r$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt $S\{Z_h\} = \max k_i = k'^*$, $i = 2, \ldots, r$.

Nach Satz 25 gilt aber

$$S\{Z\} = \max (h = k_1, S\{Z_h\}) = \max (k_1, k'^*) = k^* \quad \text{w.z.b.w.}$$

Als Folgen zu obigem Satz ergeben sich unmittelbar:

**Satz 39.** Ist $S\{Z\} = s$, so ist $SH\{Z\} = (s, h)$, mit einem gewissen $h \geq 1$.

Beweis: Sei $Hpt(Z) = k_1 \ldots k_r = \varkappa$, so ist $S\{Z\} = \max k_i = s$, für $i = 1, \ldots, r$.

Sei jetzt $h \geq 1$ die Häufigkeit des Auftretens von $s$ in der «Sequenz» $\varkappa$, so ist:

$$sh(\varkappa) = SH\{Z\} = (s, h), \quad \text{w.z.b.w.}$$

**Satz 40.** Es ist $SH\{Z\} = SH\{WZ\} = SH\{A_k Z\}$.

Beweis: Sei $Hpt(Z) = \varkappa$, so ist nach Definition von $\varkappa$: $\varkappa = Hpt(WZ)$, also auch $SH\{Z\} = SH\{WZ\} = sh(\varkappa)$. Um nun $SH\{Z\} = SH\{A_k Z\}$ zu beweisen, können wir hiernach und nach Satz 7 $Z$ als vereinfacht voraussetzen. Es ist $Hpt(A_k Z) = k\varkappa$. Gilt $\varkappa = k_1 k_2 \ldots k_r$ und $s = \operatorname{Max} k_i$, $1 \leq i \leq r$, so muß $k < \sigma(Z) \leq S\{Z\} = s$ sein. Dann hat man aber $\operatorname{Max}(k, k_1, k_2, \ldots, k_r) = s$. Also ist die Häufigkeit des Auftretens von $s$ in der Sequenz $\varkappa$ dieselbe wie in $k\varkappa$, also gilt $SH\{Z\} = SH\{A_k Z\}$, w.z.b.w.

Anschließend an diesen Satz merken wir noch einige Korollare, deren Richtigkeit aus dem Vorangehenden leicht einzusehen ist:

**Korollar (a)** Es ist $SH\{Z\} = SH\{VZ\}$ für jede Verschiebung $V$.

**(b)** Ist $Y = Z$, so folgt $SH\{Y\} = SH\{Z\}$.

**(c)** Entsprechend (a) gilt $sh(Hpt(Z)) = sh(Hpt(VZ))$. Insbesondere ist also $sh(\zeta) = sh(a(\zeta))$, für jede Einschiebung $a$.

**Definition der** $GE$. Zwei Ausdrücke $Y$ und $Z$ haben die *gleiche Einschachtelungsfigur* ($GE$), falls die Hauptzeiger $\eta = Hpt(Y)$ und $\zeta = Hpt(Z)$ folgende Bedingung erfüllen: $\zeta = \gamma s \tau$, $\eta = \gamma s \varrho$ und $sh(\zeta) = sh(\eta) = (s, h) = sh(\gamma s)$. Dies besagt also noch: $sh(\tau) < (s, 1)$ und $sh(\varrho) < (s, 1)$ und daß, abgesehen von den Termen $Z_{\gamma s}$ und $Y_{\gamma s}$, die Ausdrücke $WZ$ und $WY$ die gleiche Struktur haben. Ist die obige Bedingung für zwei Zeiger $\zeta$ und $\eta$ erfüllt, so sagen wir auch: $\zeta$ und $\eta$ «*sind in (oder haben)* $GE$».

**Satz 41.** Notwendig und hinreichend, damit zwei Zeiger $\eta$ und $\zeta$ durch Einschiebungen in $GE$ gebracht werden können, ist: $\boldsymbol{sh}(\eta) = \boldsymbol{sh}(\zeta)$.

Beweis: Notwendig. Nach Korollar (c) wäre für $\boldsymbol{sh}(\eta) \neq \boldsymbol{sh}(\zeta)$ auch $\boldsymbol{sh}(a(\eta)) \neq \boldsymbol{sh}(a'(\zeta))$ für jedes Paar von Einschiebungen $a$ und $a'$ entgegen der in der Definition von $GE$ verlangten Eigenschaft.

Hinreichend: Sei $\boldsymbol{sh}(\zeta) = \boldsymbol{sh}(\eta) = (s, \boldsymbol{h})$ und $\eta = \lambda s \varrho$, wobei $\boldsymbol{sh}(\lambda s) = (s, \boldsymbol{h})$, also $\boldsymbol{sh}(\varrho) < (s, 1)$ $\zeta = \varkappa s \tau$, wobei $\boldsymbol{sh}(\varkappa s) = (s, \boldsymbol{h})$, also $\boldsymbol{sh}(\tau) < (s, 1)$. Dabei sei etwa $\varkappa = k_1 \ldots k_r$ und $\lambda = l_1 \ldots l_q$. Es ist $k_i \leq s$, für $1 \leq i \leq r$, $l_j \leq s$, für $1 \leq j \leq q$. Setzen wir noch $k_{r+1} = l_{q+1} = s$. Man gehe nun $\varkappa s$ und $\lambda s$ durch und suche das kleinste $i_0$ auf, für das $k_{i_0} \neq l_{i_0}$ ist. Gibt es kein solches $i_0$, dann ist auch $r = q$, und $\eta$ und $\zeta$ sind bereits in $GE$.

Sei also $1 \leq i_0 < \operatorname{Min}(r+1, q+1)$ die kleinste Zahl, für die $k_{i_0} \neq l_{i_0}$ ist. Für $i_0 > 1$ ist dann mit $\gamma^{(1)} = k_1 \ldots k_{i_0 - 1}$ $\zeta = \gamma^{(1)} k_{i_0} \ldots k_r k_{r+1} \tau$ und $\eta = \gamma^{(1)} l_{i_0} \ldots l_q l_{q+1} \varrho$; für $i_0 = 1$ ist $\gamma^{(1)}$ leer.

Ist $k_{i_0} < l_{i_0}$, so bewirkt man die Einschiebung

$$a_{\gamma^{(1)} k_{i_0}}(\eta) = \eta^{(1)} = \gamma^{(1)} k_{i_0} l_{i_0} \ldots l_q s \varrho .$$

Ist $k_{i_0} > l_{i_0}$, so bewirkt man

$$a_{\gamma^{(1)} l_{i_0}}(\zeta) = \zeta^{(1)} = \gamma^{(1)} l_{i_0} k_{i_0} \ldots k_r k_{r+1} \tau .$$

Setzt man im ersten Fall $\gamma^{(2)} = \gamma^{(1)} k_{i_0}$, so kommt $\zeta = \gamma^{(2)} k_{i_0+1} \ldots k_r k_{r+1} \tau$ und $\eta^{(1)} = \gamma^{(2)} l_{i_0} \ldots l_q l_{q+1} \varrho$; setzt man im zweiten Fall $\gamma^{(2)} = \gamma^{(1)} l_{i_0}$, so hat man $\zeta^{(1)} = \gamma^{(2)} k_{i_0} k_{i_0+1} \ldots k_r k_{r+1} \tau$ und $\eta = \gamma^{(2)} l_{i_0+1} \ldots l_q l_{q+1} \varrho$.

In jedem Fall ist die «Länge» des gemeinsamen Anfangsteiles $\gamma^{(2)}$ um eins größer als diejenige von $\gamma^{(1)}$. Man verfahre dann so weiter mit $k_{i_0+1}$ und $l_{i_0}$ bzw. mit $k_{i_0}$ und $l_{i_0+1}$. Da $k_{r+1} = l_{q+1} = s$ ist, so wird nach höchstens $r + q - h$ Schritten der gemeinsame Zeiger $\gamma k_{r+1} = \gamma s$ hergestellt und somit die $GE$ erreicht.

Sind dann $\zeta^* = \gamma s \tau$ und $\eta^* = \gamma s \varrho$, $a'$ bzw. $a''$ die im obigen Verfahren ausgeübten Einschiebungen in $\zeta$ bzw. $\eta$, so gilt $\zeta^* = a'(\zeta)$, $\eta^* = a''(\eta)$.

**Folge.** Auf Grund der Bedeutung der Einschiebungen $a'$ und $a''$ und der Definition von $SH\{Z\}$, kann man den obigen Satz noch auf folgende Weise aussprechen:

Die notwendige und hinreichende Bedingung, damit zwei Ausdrücke $Y$ und $Z$ in $GE$ gebracht werden können, ist $SH\{Z\} = SH\{Y\}$. Dabei kann man effektiv zwei Amplifikationsreihen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ angeben, so daß, falls diese Bedingung erfüllt ist, $\mathfrak{A}'' Y$ und $\mathfrak{A}' Z$ $GE$ haben. $\mathfrak{A}'$ bzw. $\mathfrak{A}''$ ist nämlich die der Einschiebung $a'$ bzw. $a''$ entsprechende Amplifikationsreihe.

**Beispiel.** Sei $\zeta = Hpt(Z) = 4\,352\,523$, also $s = 5$, $\varkappa = 4352$, $\tau = 23$ und $\eta = Hpt(Y) = 255$, also $s = 5$, $\lambda = 2$, $\varrho$ leer.

Man hat $sh(\zeta) = sh(\eta) = (5{,}2)$, also gibt es eine $GE$ für $Z$ und $Y$. Nach Satz 41 ist der Bildungsgang der $GE$ der folgende (zwecks besserer Übersicht markieren wir den bei jedem angegebenen Schritt eingeschobenen Zeiger durch einen Punkt):

$$\zeta^{(1)} = a_2(\zeta) = \dot{2}4\,352\,523\,; \qquad \eta^{(1)} = a_{2\underset{\cdot}{4}}(\eta) = 2\dot{4}55\,;$$

$$\eta^{(2)} = a_{24\underset{\cdot}{3}}(\eta^{(1)}) = 24\,\dot{3}55\,; \qquad \eta^{(3)} = a_{2435\underset{\cdot}{2}}(\eta^{(2)}) = 243\,5\dot{2}5\,.$$

Nun ist die $GE$ erreicht, und wir haben $\gamma s = 243\,525$, $\zeta^* = \zeta^{(1)} = \gamma s 23$, $\eta^* = \eta^{(3)} = \gamma s$.

Die zur Herstellung der $GE$ nötigen Amplifikationsreihen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ sind danach die folgenden:

$$\mathfrak{A}' Z \equiv A_2 Z \quad \text{und} \quad \mathfrak{A}'' Y \equiv A_{24352}(A_{243}(A_{24} Y))\,.$$

Wir formulieren noch kurz folgende **Bemerkungen** zur $GE$:

**(1)** Sei $\gamma s$ die nach Verfahren des Satzes 41 gebildete $GE$ von $Z$ und $Y$. Dann ist $a(\gamma s) = \gamma' s$ für jede Einschiebung $a$ auch eine $GE$ von $Z$ und $Y$. Wird aber in $\gamma s$ ein Zeiger gestrichen, so ist die übrigbleibende Sequenz offenbar keine $GE$ von $Z$ und $Y$; $\gamma s$ ist also die «kürzeste» Sequenz für die $GE$ von $Z$ und $Y$.

**(2)** Das beschriebene Verfahren zur Bildung der $GE$ kann leicht auf eine beliebige Anzahl von Ausdrücken $Z^{(1)}, \ldots, Z^{(m)}$ verallgemeinert werden, vorausgesetzt, daß $SH\{Z^{(j)}\} = (s, h)$ für alle $j$, mit $1 \leq j \leq m$, ist.

Sei nämlich $Hpt(Z^{(j)}) = \zeta^{(j)} = k_1^{(j)} k_2^{(j)} \ldots k_{r_j}^{(j)} s \tau^{(j)}$, mit $sh(\tau^{(j)}) < (s, 1)$ für alle $j$, und $i_0$ die größte Zahl $\geq 0$, für die alle $k_p^{(j)} = k_p$, mit $0 \leq p \leq i_0$, sind und $k_1 k_2 \ldots k_{i_0} = \gamma^{(1)}$ (für $i_0 = 0$ ist $\gamma^{(1)}$ leer). Dann suche man für $1 \leq j \leq m$ Min $(k_{i_0+1}^{(j)}) = k$ auf und wende die Einschiebung

$$a_{\gamma^{(1)}k}(\zeta^{(j')}) = \zeta'^{(j')}$$

auf alle Zeiger $j'$ an mit Ausnahme derjenigen $j_t$, für die $k_{i_0+1}^{(j_t)} = k$ ist. Es ist dann $\gamma^{(2)} = \gamma^{(1)} k$ der «gemeinsame Anfangsteil» für alle Zeiger $\zeta'^{(j)}$ (falls man noch die $\zeta^{(j_t)} = \zeta'^{(j_t)}$ setzt) um einen Zeiger «länger». Man verfahre so weiter mit den $\zeta'^{(j)}$, bis alle vorhandenen Zeiger die Form $\gamma s \tau^{(j)}$ erhalten.

Man kann dann ohne Schwierigkeiten zeigen, daß der so erreichte gemeinsame Zeiger $\gamma s$ derselbe ist, falls man zunächst einen gemeinsamen Zeiger für beliebige Untermengen der $\zeta^{(j)}$ herstellt und dann unter denen den endgültigen gemeinsamen Zeiger bildet.

(3) Sei $Hpt(Z) = \zeta = \varkappa s \tau$ und $Hpt(Y) = \eta = \lambda s \varrho$, $sh(\varkappa s) = sh(\lambda s)$, $\tau$ und $\varrho$ beliebig. Dann kann man zwei Amplifikationsreihen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}''$ derart angeben, daß $\mathfrak{A}' Z \equiv Z'$, $\mathfrak{A}'' Y \equiv Y'$ und $Hpt(Z') = \gamma s \tau$ und $Hpt(Y') = \gamma s \varrho$ ist. Man kann nämlich nach Bildungsvorschrift der $GE$ vom Satz 41 durch Einschiebungen erreichen, daß $\zeta^{(0)} = \varkappa s$ und $\eta^{(0)} = \lambda s$ in $GE$ überführt werden. Ist speziell $\tau < s$ und $\varrho < s$, so ist sogar $\gamma s$ die $GE$ von $Z$ und $Y$.

**Satz 42.** Sei $Hpt(Z) = \gamma s \tau$, $Hpt(Y) = \gamma s \varrho$ und $\gamma = k_1 \ldots k_r$, $\tau$ und $\varrho$ beliebig und $Z_{\gamma s} > Y_{\gamma s}$, so ist $Z > Y$.

Beweis: Aus $Z_{\gamma s} > Y_{\gamma s}$ folgt nach HLV $Z_\gamma > Y_\gamma$; ebenso ist danach für jedes $i$, $1 \leq i < r$, $Z_{k_1 \ldots k_i} > Y_{k_1 \ldots k_i}$. Aus $Z_{k_1} > Y_{k_1}$ folgt aber $Z > Y$, w.z.b.w.

**Satz 43.** Sei $Hpt(Z) = \varkappa s \tau$ und $Hpt(Y) = \lambda s \varrho$ und

$$(1) \quad sh(\varkappa s) = sh(\lambda s) = (s, h),$$

$$(2) \quad Z_{\varkappa s} > Y_{\lambda s},$$

so ist $Z > Y$.

Beweis: Nach (1) und Bemerkung (3) zu Satz 41 gibt es Amplifikationsreihen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$, so daß $\mathfrak{A} Z \equiv Z'$, $\mathfrak{A}' Y \equiv Y'$, $Hpt(Z') = \gamma s \tau$, $Hpt(Y') = \gamma s \varrho$. Da $Z_{\varkappa s} = Z'_{\gamma s}$, $Y_{\lambda s} = Y'_{\gamma s}$ bleibt, so folgt wegen (2) nach der Beweismethode von Satz 42: $Z = Z' > Y' = Y$, w.z.b.w.[12]).

**Satz 44.** Ist $SH\{Z\} > SH\{Y\}$, so ist $Z > Y$.

Beweis: Sei $SH\{Z\} = (s, h)$ und $SH\{Y\} = (s', h')$. Ist $s > s'$, so folgt die Behauptung nach Satz 27. Sei also $s = s'$ und $h > h'$, dann hat der $Hpt(Z)$ und der $Hpt(Y)$ die Form:

$$Hpt(Z) = \zeta = \varkappa_1 s \varkappa_2 s \ldots \varkappa_{h'} s \ldots \varkappa_h s \tau, \quad sh(\tau) < (s, 1), \; sh(\varkappa_i) < (s, 1),$$
$$Hpt(Y) = \eta = \lambda_1 s \lambda_2 s \ldots \lambda_{h'} s \varrho, \quad sh(\varrho) < (s, 1), \; sh(\lambda_j) < (s, 1),$$

wobei $i = 1, 2, \ldots, h$, $j = 1, 2, \ldots, h'$.

Setzen wir $\varkappa_1 s \ldots \varkappa_{h'} s = \varkappa s$ und $\lambda_1 s \ldots \lambda_{h'} s = \lambda s$, so ist $sh(\varkappa s) = sh(s, h') = sh(\lambda s)$, also die Bedingung (1) des Satzes 43 erfüllt. Nun ist aber $S\{Z_{\varkappa s}\} = s > S\{Y_{\lambda s}\}$, da $sh(\varrho) < (s, 1)$, also ist $Z_{\varkappa s} > Y_{\lambda s}$ folglich ist nach Satz 43 $Z > Y$, w.z.b.w.

## § 7. Vergleichssätze mittels des Begriffes Charakteristik

### *1. Definition der Charakteristik und die Ordnung «$\succ$»*

Wir führen eine neue Ordnungsbeziehung «$\succ$» für Zeiger ein. Ist $\varkappa = k_1 k_2 \ldots k_r$ eine Zahlensequenz (ein Zeiger), so sei die *Charakteristik* von

[12]) Danach ist zum Beispiel $Z = [1, [0, 1, 3, 2]] > Y = [2, 4, [1, 2, 5, 1]]$. Denn es ist $Hpt(Z) = 24$, $Hpt(Y) = 34$, $\varkappa = 2$, $\lambda = 3$, $s = 4$, $h = 1$ und $Z_{24} = 2 > Y_{34} = 1$.

$\varkappa$ $ch(\varkappa) = \widehat{\varkappa} = k_{i_1}k_{i_2}\ldots k_{i_p}$, $p \leq r$, wo die $i_j$ die umfassendste Untermenge von $1, 2, \ldots, r$ bilden, für die $i_{j+1} > i_j$ und $k_{i_q} \geq k_{i_{q+1}}$ gilt.

$\widehat{\varkappa}$ entsteht also aus $\varkappa$, indem man in $\varkappa$ alle Zeiger, die links eines größeren stehen, streicht. $\widehat{\varkappa}$ ist also eine schwach monoton fallende Sequenz der $k_{i_j}$.

*Beispiel:* Ist $\varkappa = 24\,534\,242\,322$, so ist $\widehat{\varkappa} = 544\,322$.

Die **Vergleichsbestimmungen für** « $\succ$ » sind dann:

**ch1)** $\varkappa \succ \lambda$, falls $ch(\varkappa) = \widehat{\varkappa} > ch(\lambda) = \widehat{\lambda}$ durch gewöhnlichen lexikographischen Vergleich der Zeiger $\widehat{\varkappa}$ und $\widehat{\lambda}$ von links nach rechts.

**ch2)** $\varkappa \approx \lambda$, falls $\widehat{\varkappa} = \widehat{\lambda}$, das heißt $ch(\varkappa) = ch(\lambda)$ ist.

« $\succ$ » hat offenbar folgende Eigenschaften:

**a)** Ist $k \gtreqless l$, so ist auch $k \succeq\!\!\!\!\preceq l$. Insbesondere ist für $k > 0$ die leere Folge immer $\prec k$.

**b)** Ist $k \gtrapprox \varkappa$, so ist $k\varkappa \succ \varkappa$.

**c)** Ist $\varkappa \succ \lambda$, so ist $\gamma\varkappa \succ \gamma\lambda$ für jede Sequenz $\gamma$.

**d)** Ist $\widehat{\zeta} = \widehat{\eta}$, so sind $\zeta$ und $\eta$ von der Form:

$$\zeta = \alpha_1 k_1 \alpha_2 k_2 \ldots \alpha_r k_r \quad \text{mit} \quad \widehat{\alpha}_i < k_i \quad \text{und} \quad k_{p+1} \leq k_p,\ 1 \leq p < r,$$

$$\eta = \beta_1 k_1 \beta_2 k_2 \ldots \beta_r k_r \quad \text{mit} \quad \widehat{\beta}_i < k_i \quad \text{für} \quad 1 \leq i \leq r.$$

**Wohlordnung der Zeigermengen durch** « $\succ$ ».

Sei $\mathfrak{M}$ eine Menge von Zeigern $\varkappa^{(\mu)}$ mit $\widehat{\varkappa}^{(\mu)} = k_1^{(\mu)} k_2^{(\mu)} \ldots k_{r_\mu}^{(\mu)}$ und $k_{i+1}^{(\mu)} \leq k_i^{(\mu)}$. Man wähle aus $\mathfrak{M}$ eine Untermenge $\mathfrak{M}_{k_1^*}$ mit minimalen $k_1^*$ aus allen $k_1^{(\mu)}$, dann aus $\mathfrak{M}_{k_1^*}$ die Untermenge $\mathfrak{M}_{k_1^* k_2^*}$ mit minimalen $k_2^*$ $(\leq k_1^*)$ usw. Offensichtlich bricht dieser Prozeß nach endlich vielen Schritten ab, womit eine in bezug auf « $\succ$ » minimale Sequenz $\varkappa^* = k_1^* k_2^* \ldots k_t^*$ von $\mathfrak{M}$ bestimmt wird.

**Feststellung.** Ist $\zeta = Hpt(Z)$ und $\widehat{\zeta} = k_1 k_2 \ldots k_r$, $k_i \geq k_{i+1}$, so ist nach Satz 38 $S\{Z\} = k_1$ und nach Satz 39 $sh(\zeta) = SH\{Z\} = (k_1, h)$, mit $h \geq 1$.

**Definition.** In naheliegender Verallgemeinerung der vorigen Feststellung definieren wir $CH\{Z\} = ch(Hpt(Z))$.

**Bemerkungen. 1)** Aus der obigen Feststellung schließt man unmittelbar: gilt $SH\{Z\} > SH\{Y\}$, so ist $CH\{Z\} > CH\{Y\}$.

**2)** Da $Hpt(Z) = Hpt(WZ)$, folgt $CH\{Z\} = CH\{WZ\}$.

**Satz 45.** Es ist $CH\{Z\} = CH\{A_k Z\}$, wo $A_k$ eine ausführbare Amplifikation von $Z$ bedeutet.

Beweis: Sei $Hpt(Z) = \zeta = k_1 k_2 \ldots k_r$, so ist $Hpt(A_k Z) = k\zeta$, und da $A_k$ eine mögliche Amplifikation von $Z$ ist, so muß $k < k_1$ sein. Nach Definition der Charakteristik hat man dann:

$$ch\,(Hpt(Z)) = ch\,(Hpt(A_k Z))\,,$$

woraus folgt die Behauptung.

**Satz 46.** Als naheliegende Verallgemeinerung des Satzes 45 gilt: $CH\,\{Z\} = CH\,\{VZ\}$, wo $V$ eine beliebige Verschiebung von $Z$ bedeutet.

*2. Vergleichsätze.*

**Satz 47.** Ist $CH\,\{Z\} > CH\,\{Y\}$, das heißt für $\zeta = Hpt(Z)$ und $\eta = Hpt(Y)$

$$\widehat{\zeta} > \widehat{\eta}\,, \quad \text{so ist} \quad Z > Y\,.$$

Beweis: Sei $\zeta = \alpha_1 k_1 \alpha_2 k_2 \ldots \alpha_r k_r$, $\widehat{\alpha}_i < k_i$ für $1 \leq i \leq r$ und $\eta = \beta_1 l_1 \beta_2 l_2 \ldots \beta_p l_p$, $\widehat{\beta}_j < l_j$ für $1 \leq j \leq p$. Dann ist $\widehat{\zeta} = k_1 k_2 \ldots k_r$ und $\widehat{\eta} = l_1 l_2 \ldots l_p$.

Nach Voraussetzung gibt es entweder ein kleinstes $i'$ mit $1 \leq i' \leq \mathrm{Min}(r, p)$ so daß $k_{i'} > l_{i'}$ gilt, oder es ist $k_j = l_j$ für $1 \leq j \leq p$ und $r > p$. Setzen wir noch $\varkappa_j = \alpha_1 k_1 \ldots \alpha_j k_j$, $\varkappa_0$ leer und $\lambda_j = \beta_1 l_1 \ldots \beta_j l_j$, $\lambda_0$ leer. Nehmen wir zuerst an, es gibt ein $i'$ mit eben erwähnten Eigenschaften. Dann ist nach der in der vorangehenden Seite erwähnten Feststellung und nach Bedeutung von $i'$

$$S\,\{Z_{\varkappa_{i'-1}\alpha_{i'}}\} = k_{i'} > l_{i'} = S\,\{Y_{\lambda_{i'-1}\beta_{i'}}\}\,,$$

also nach Satz 27 $Z_{\varkappa_{i'-1}\alpha_{i'}} > Y_{\lambda_{i'-1}\beta_{i'}}$.

Nehmen wir an, es sei schon bewiesen, daß

$$Z_{\varkappa_t \alpha_{t+1}} \equiv Z' > Y_{\lambda_t \beta_{t+1}} \equiv Y' \tag{1}$$

ist für $0 \leq t < i' - 1$. Nun ist $Hpt(Z') = \alpha_{t+1} k_{t+1} \ldots \alpha_r k_r$, $Hpt(Y') = \beta_{t+1} l_{t+1} \ldots \beta_p l_p$ und $sh(\alpha_{t+1} k_{t+1}) = sh(\beta_{t+1} l_{t+1}) = (k_{t+1}, 1)$, da $t < i' - 1$ und nach Definition von $i'$ $k_{t+1} = l_{t+1}$ ist. Wir können also auf $Z_{\varkappa_t}$ und $Y_{\lambda_t}$ den Satz 43 (mit $k_{t+1} = s$) anwenden. Wegen (1) gilt nach diesem Satz $Z_{\varkappa_t} > Y_{\lambda_t}$. Da die Annahme (1) für $t = i' - 1$ als richtig erwiesen wurde, so folgt daraus durch $i'$-malige Anwendung des Satzes 43 $Z_{\varkappa_0} \equiv Z > Y_{\lambda_0} \equiv Y$.

Ist nun $k_i = l_i$ für $1 \leq i \leq p$ und $r > p$, so ist $Y_{\lambda_p}$ eine Zahl, und es gilt $Z_{\varkappa_p} > Y_{\lambda_p}$. Setzt man dann $i' = p$, so wird man auf den vorangehenden Fall zurückgeführt. Somit ist der Satz voll bewiesen.

Als Spezialfall zu diesem Satz haben wir dann zum Beispiel:

Ist $Hpt(Z) = \alpha s \tau$, $Hpt(Y) = \beta s \varrho$, $\widehat{\alpha} < s$ und $\widehat{\beta} < s$ und $\widehat{\tau} > \widehat{\varrho}$, so ist $Z > Y$. Denn es ist $ch\,(Hpt(Z)) = s\widehat{\tau} > ch\,(Hpt(Y)) = s\widehat{\varrho}$.

**Satz 48.** Sei $Hpt(Z) = \varkappa s \tau$ mit $\varkappa = k_1 k_2 \ldots k_r$ und $Hpt(Y) = \lambda s \varrho$ mit $\lambda = l_1 l_2 \ldots l_p$, weiter $k = \mathrm{Max}\,(k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_p)$.

Dann gilt unter den Voraussetzungen:

$$\text{(a)} \quad k < s \quad \text{und} \quad ch(s\tau) = ch(s\varrho)$$
$$\text{(b)} \quad \overline{Z}_\varkappa^{(k)} > \overline{Y}_\lambda^{(k)}$$

$Z > Y$.

Beweis: Es ist nach (a) $sh(\varkappa s) = sh(\lambda s) = (s, 1)$.

Nun ist aber $\sigma(\overline{Z}_\varkappa^{(k)}) = \sigma(\overline{Y}_\lambda^{(k)}) = s$, also nach (b) durch HLV $Z_\varkappa > Y_\lambda$. Dann ist aber der Satz 43 anwendbar und ergibt die Behauptung.

**Satz 49.** Sei $\zeta = Hpt(Z) = \alpha s \tau$, $sh(\alpha) = (k, p)$, $\alpha = \alpha_1 k \alpha_2$, $\eta = Hpt(Y) = \beta s \varrho$, $sh(\beta) = (l, q)$ und

(a) $\widehat{\zeta} = \widehat{\eta} = s\widehat{\tau} = s\widehat{\varrho}$, aber $k > l$,

(b) die Reduktion $R_k Z_{\alpha_1 k}$ ist nicht ausführbar, das heißt, $k$ ist «unreduzierbar» aus $\alpha$,

(c) $\overline{Z}_\alpha^{(k)} = \overline{Y}_\beta^{(k)}$,

dann ist $Z > Y$.

Beweis: Da $\widehat{\zeta} = \widehat{\eta}$, so kann man $Z$ und $Y$ in $GE$ überführen. Nach Bildungsvorschrift der $GE$ ist der gemeinsame Zeiger der $GE$ von der Form $\gamma s = \gamma_1 k \alpha_2 s \varphi$ (wo für $sh(\zeta) = (s, h)$ und $h = 1$ $\varphi$ leer, für $h > 1$ $\varphi = \delta_1 s \ldots \delta_{h-1} s$ ist). Setzen wir $Z' \equiv \mathfrak{A}_\mu Z$ und $Y' \equiv \mathfrak{A}_\nu Y$, wo $\mathfrak{A}_\mu$ bzw. $\mathfrak{A}_\nu$ die zur Herstellung der $GE$ nötigen Amplifikationsreihen sind, so gilt nach Feststellung i) von § 3 und nach Voraussetzung (c): $\overline{Z}_\gamma^{\prime(k)} \equiv \overline{Z}_\alpha^{(k)} = \overline{Y}_\beta^{(k)} \equiv \overline{Y}_\gamma^{\prime(k)}$ und $Y'_{\gamma t} = 0$ für $1 < t \le k$. Hingegen gibt es nach (b) ein $t_0$ mit $1 < t_0 \le k$, so daß $Z'_{\gamma t_0} > 0$ ist. Wegen (c) ist hiernach nach HLV $Z'_\gamma > Y'_\gamma$ und folglich nach Satz 43 $Z > Y$, w.z.b.w.[13]).

Wir zeigen noch die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes:

**Satz 50.** Seien die Voraussetzungen des vorigen Satzes mit Ausnahme von (a) erfüllt. Statt (a) nehmen wir jetzt

($a'$) $\widehat{\zeta} = \widehat{\eta} = s\widehat{\tau} = s\widehat{\varrho}$ und $k = l$, aber es soll $(k, p) = sh(\alpha) > sh(\beta) = (k, q)$, das heißt $p > q$ gelten.

Dann ist auch $Z > Y$.

Beweis: Sei $\zeta = \alpha_1 k \alpha_2 s \tau$ und $\eta = \beta_1 k \beta_2 s \varrho$, wobei $sh(\alpha_1 k) = sh(\beta_1 k) =$

[13]) Danach ist zum Beispiel $Y = [5, 2, 1] < Z = [1, [1, 1, 1]]$, da es ist $\zeta = 23$, $\eta = 3$, $\alpha = k = 2$, $\beta$ und somit $l$ leer, und $\overline{Z}_2^{(2)} = \overline{Y}^{(2)} = [0, 0, 1]$. Dieses Resultat kann man auch durch Bildung der $GE$ vermöge $A_2 Y \equiv Y'$ bestätigen, da es ist nach $HLV$ $Y' \equiv [5, [2, 0, 1]] < Z \equiv Z'$. Hingegen ist nach Satz 48 zum Beispiel $W = [1, 5, 2, 1] > [1, [1, 1, 1, 1]] = X$, da $k = \lambda = 2$, $\varkappa$ leer und $[0, 0, 2, 1] = \overline{W}^{(2)} > \overline{X}_2^{(2)} = [0, 0, 1, 1]$ ist.

$= (k, q)$ und $sh(\alpha_2) = (k, p - q) > sh(\beta_2)$, da $sh(\beta_2) < (k, 1)$ sein muß. Dann ist nach vorangehendem Satz $Z_{\alpha_1 k} > Y_{\beta_1 k}$ und hiernach nach Satz 43 $Z > Y$, w.z.b.w.

**Satz 51.** Sei $Z = [0, \ldots, 0, Z_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_h]$, $CH\{Z\} = h\widehat{\tau}$ und $Z^* = [0, \ldots, 0, Z_k^*, Z_{k+1}, \ldots, Z_h]$, $Hpt(Z_h) = \tau$, das heißt $\overline{Z^{(k)}} = \overline{Z^{*(k)}}$, $Z$ und $Z^*$ vereinfacht und $Z_k < Z_k^*$, dann ist für ein $Y$ in Normalform:

(a) *hinreichend*, damit $Z \leq Y < Z^*$ gilt

(1) $Hpt(Y) = \eta = \alpha h \tau'$, wo $\widehat{\alpha} < k$ also $\alpha$ leer für $k \leq 2$, und $\widehat{\tau'} = \widehat{\tau}$.

(2) Für $k < h$ ist der Term $Y_\alpha$ von $Y$ von der Form:

$$Y_\alpha = [Y_{\alpha 1}, \ldots, Y_{\alpha k}, Z_{k+1}, \ldots, Z_h], \text{ das heißt } \overline{Y_\alpha^{(k)}} = \overline{Z^{(k)}}$$

(3a) $Z_k \leq Y_{\alpha k} < Z_k^*$

(b) *notwendig*, damit $Z \leq Y \leq Z^*$ gilt

(1) und (2) wie für (a) bevor,

(3b) $Z_k \leq Y_{\alpha k} \leq Z_k^*$.

Beweis: Nach Satz 48 und HLV sind die Bedingungen (1), (2) und (3a) *hinreichend*. Für $k \leq 2$ ist die Anwendung des Satzes 48 überflüssig und $\alpha$ leer.

*Notwendig:* Nach Satz 47 muß $ch(\eta) = ch(h\tau) = h\widehat{\tau}$ sein. $\eta$ muß also die Form $\eta = \alpha h \tau'$ haben mit $\widehat{\alpha} < h$ und $\widehat{\tau'} = \widehat{\tau}$. Also ist (1) notwendig. Ist $k = h$, so ist (2) gegenstandslos, und es muß nach Satz 42 noch (3b) gelten, da sonst $Y < Z$ oder $Y > Z^*$ folgen würde.

Für $k < h$ muß nun $\overline{Y_\alpha^{(t)}} = \overline{Z^{(t)}} = \overline{Z^{*(t)}}$ für jedes $t \geq k$ sein, da man sonst nach Satz 48 auf die Negation der in (b) verlangten Beziehung schließen könnte. Somit ist für $k < h$ (2) notwendig.

Dann muß aber nach HLV und Satz 48 und Satz 49 für das Bestehen der Beziehung (b) noch die Bedingung (3b) erfüllt sein. Somit ist diese Bedingung für jedes $k$ notwendig. Dadurch ist die Behauptung in vollem Umfange bewiesen[14]).

## § 8. Wohlordnungsbeweis

Wir zeigen jetzt, daß die Klasse aller $Z$-Ausdrücke in bezug auf die in § 4 definierte Ordnung wohlgeordnet ist.

**Satz 52.** Nach § 4 ist 0 offenbar der kleinste $Z$-Ausdruck überhaupt. Für alle $Z \neq 0$ gilt danach $Z \geq 1$.

---

[14]) Es ist zum Beispiel $Z = [0, 0, 1, 1] < Y = [0, [0, 1, 1, 1]] < Z^* = [0, 0, 2, 1]$, wo $h = 4$, $k = 3$, $\eta = 24$, $\alpha = 2$ und $\tau$ leer ist.

**Satz 53.** Sei $\mathfrak{M}^{(s,y)}$ die Menge aller $Z$-Ausdrücke mit $S\{Z\} = s > 1$ und der Termen $Z_{\varkappa s} = y$, $\widehat{\varkappa} < s$.

Dann ist der kleinste $Z$-Ausdruck in $\mathfrak{M}^{(s,y)}$

$$[0, 0, \ldots, 0, y] = Y, \quad \sigma(Y) = s.$$

Beweis: Wir zeigen: für jedes $X = [X_1, \ldots, X_p]$ aus $\mathfrak{M}^{(s,y)}$ gilt $Y \leq X$. Offenbar genügt es, diejenigen $X$ mit $SH\{X\} = SH\{Y\}$ zu betrachten.

(1) $p > s$ ist nach Definition von $\mathfrak{M}^{(s,y)}$ nicht möglich.

(2) $p = s$; nach HLV ist für jedes $X = [X_1, \ldots, X_{s-1}, y]$: $Y \leq X$, wobei «$=$» nur für alle $X_i = 0$, $1 \leq i < s$, und $X_s = y$ gilt.

(3) $p < s$; sei $\zeta = \varkappa s \tau$ der Hauptzeiger von $X$. Nach Bildung der $GE$ für $Y$ und $X$ hat man $\mathfrak{A} Y \equiv Y'$ mit $Y'_\varkappa \equiv Y$. Nach HLV folgt dann $X \geq Y'$, wobei «$=$» dann und nur dann gilt, falls für $\varkappa = k_1 \ldots k_r$, $X_{\varkappa s} = y$ und alle $X_{k_1 \ldots k_i t} = 0$ für $1 \leq i < r$ und $1 \leq t < k_{i+1}$ ist.

Es ist dann auch $\varkappa$ aus $\zeta$ reduzierbar, und falls in $X$ $y$ statt $X_{\varkappa s}$ gesetzt wird, so ist für eine entsprechende Reduktionsreihe $\mathfrak{R}$ $\mathfrak{R} X \equiv Y$ w.z.b.w.

**Folgerungen. (1)** Insbesondere ist für $y = 1$ $U_{(s)} = [0, 0, \ldots, 0, 1]$ $\sigma(U_{(s)}) = s$, der kleinste Ausdruck in $\mathfrak{M}^{(s,1)}$. Nach Satz 43 (für $m = s$) folgt aus $y' < y''$, daß alle $Z'$ aus $\mathfrak{M}^{(s,y')}$ kleiner sind als jedes $Z''$ aus $\mathfrak{M}^{(s,y'')}$. Da für alle $Z_{\varkappa s} \neq 0$ gilt $Z_{\varkappa s} \geq 1$, so ist $U_{(s)}$ der kleinste Ausdruck $s$-ter Stufe überhaupt.

**(2)** Speziell ist dann $[0, 1]$ der überhaupt kleinste Ausdruck, wenn man von Zahlen absieht.

**(3)** Durch gewöhnliche Induktion nach $h$ folgt: Ist $U_{(s,1)} = U_{(s)}$ und $U_{(s,r+1)} = [0, \ldots, 0, U_{(s,r)}]$ mit $\sigma(U_{(s,r+1)}) = s$, dann ist $U_{(s,h)}$ der kleinste $Z$-Ausdruck mit $SH\{Z\} = (s, h)$.

**(4)** Ist $Hpt(X) = \varkappa s \tau$, $\widehat{\varkappa} < s$, $Y$ von der Form, wie im Satz 53 und $X < Y$, so muß $X_{\varkappa s} < y = Y_s$ sein.

**Satz 54.** Ist $\mathfrak{M}$ eine wohlgeordnete Menge von Ausdrücken $Z_s$, so ist die Menge der Ausdrücke $Z = [0, \ldots, 0, Z_s]$, mit $\sigma(Z) = s$, auch wohlgeordnet.

Beweis: Nach HLV ist für $Z'_s < Z''_s$ auch $[0, \ldots, 0, Z'_s] < [0, \ldots, 0, Z''_s]$. Die Abbildung, die jedem $Z_s$ den Ausdruck $Z$ zuordnet, ist also eine ähnliche, folglich gilt der Satz.

**Satz 55.** Ist $F_k(0) = [0, \ldots, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_k]$[15]) ein gegebener Ausdruck und $\mathfrak{M}$ eine wohlgeordnete Menge von Ausdrücken $Y_k$, so ist die Menge der Ausdrücke $F_k(Y_k) = [0, \ldots, 0, Y_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_s]$ auch wohlgeordnet.

[15]) Weiteres zur Einführung von Funktionen von $Z$-Ausdrücken siehe § 9 und § 11.

Beweis: Nach Monotoniesatz 32 ist die Abbildung der $Y_k$ auf die $F_k(Y_k)$ eine ähnliche, so daß der Satz gilt.

**Definition** *der Erreichbarkeit.* Ein Ausdruck $Z$ ist *erreichbar,* falls die Menge aller Ausdrücke $X \leq Z$ wohlgeordnet ist.

Aus dieser Definition folgen offenbar, nach bekannten Eigenschaften der Wohlordnung, die nachstehenden *Prinzipien*[16]):

**I.** Jede Zahl ist erreichbar.

**II.** Ist $Z$ erreichbar, so sind alle $X \leq Z$ erreichbar.

**III.** Sind alle $X < Z$ erreichbar, so ist $Z$ erreichbar.

**Bemerkung.** Es folgt insbesondere aus der Definition der Erreichbarkeit: Ist $Z$ erreichbar, so gilt bis $Z$ die *transfinite Induktion.*

Aus I und III und Folgerung (2) zu Satz 53 folgt, daß der Ausdruck $[0, 1]$ erreichbar ist.

**Satz 56.** Ist $F_1(0) = [0, Z_2, \ldots, Z_s]$ erreichbar und $Z_1$ erreichbar, so ist auch $Z = F_1(Z_1) = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_s]$ erreichbar.

Beweis: Sei also $\overline{Z}_1^{(1)} \leq \overline{Z}^{(1)}$, denn wäre $Z_1$ Hauptglied von $Z$, so wäre $Z_1 = Z$, das heißt, $Z$ wäre erreichbar. Sei irgendein $Y \leq Z$. Aus $\overline{Y}^{(1)} < \overline{Z}^{(1)}$ folgt $Y < \overline{Z}^{(1)}$. Es ist also $Y$ erreichbar, nach Voraussetzung. Ist $\overline{Y}^{(1)} = \overline{Z}^{(1)}$, dann muß $y_1 \leq Z_1$ sein. Nun sind aber nach Voraussetzung über $Z_1$ und Definition der Erreichbarkeit alle diese $y_1$ wohlgeordnet. Folglich auch nach Satz 55, Fall $k = 1$, alle Ausdrücke $Y = F_1(y_1) \leq Z$ wohlgeordnet. Also ist $Z$ erreichbar (Prinzip III), w.z.b.w.

**Satz 57.** Ist $Z \geq [0, 1]$, $Z$ 1-vereinfacht und $\overline{Z}^{(1)}$ erreichbar, dann ist $Z$ erreichbar.

Beweis: Nach Voraussetzung folgt, daß jedes $X$ mit $\overline{X}^{(1)} \leq \overline{Z}^{(1)}$ erreichbar ist.

Wir definieren die Zahl $\varrho(Z)$ folgendermaßen:

Sei $\varepsilon_0$ die leere Folge und $\varepsilon_r = 11\ldots1$ eine Sequenz von $r$ Einsen, dann ist $\varrho(Z) = m$, falls $m$ diejenige Zahl ist, für die der Term $Z_{\varepsilon_m} =$ Zahl $\geq 0$ ist.

Ist $m = 1$, so ist bereits $Z_1$ eine Zahl, also erreichbar. Nach Satz 56 ist dann $Z$ erreichbar.

Ist $m > 1$, so muß noch – da $Z$ 1-vereinfacht ist – folgendes gelten:

$$\overline{Z}^{(1)} \geq \overline{Z}_1^{(1)} \geq \overline{Z}_{11}^{(1)} \geq \cdots \geq \overline{Z}_{\varepsilon_{m-1}}^{(1)} \geq Z_{\varepsilon_m}.$$

---

16) Vgl. Ackermann [4], Seite 408.

Sei $p$ die kleinste Zahl, $0 < p \leq m$, für die in der obigen Reihe «>» gilt, dann ist:

$$\overline{Z}^{(1)} = \overline{Z}_1^{(1)} = \overline{Z}_{11}^{(1)} = \cdots = \overline{Z}_{s_{p-1}}^{(1)} > \overline{Z}_{s_p}^{(1)} \quad (\text{für } p = m \text{ ist } \overline{Z}_{s_p}^{(1)} = 0)\,.$$

Alle diese Ausdrücke sind nach Voraussetzung bzw. nach Prinzip I oder II erreichbar. Nach Folgerung zu Satz 31 ist aber $Z_{s_p} < \overline{Z}^{(1)}$, folglich ist $Z_{s_p}$ erreichbar. Aus der Erreichbarkeit von $Z_{s_p}$ und $\overline{Z}_{s_{p-1}}^{(1)}$ folgt nach Satz 56 diejenige von $Z_{s_{p-1}}$ usw. Nach insgesamt $p+1$ analogen Schlüssen ergibt sich die Erreichbarkeit von $Z$, w.z.b.w.

**Satz 58.** Wir beweisen gleichzeitig zwei Behauptungen:

$(A_k)$ Wenn $[0, 0, \ldots, 0, 1] = U_{(k)}$ und $Z_k$ zugleich erreichbar sind, dann ist auch $[0, 0, \ldots, 0, Z_k]$ erreichbar.

$(B_k)$ Wenn $[0, \ldots, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_s]$ vereinfacht und erreichbar ist, dann ist auch

$$[0, \ldots, 0, Z_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_s]\,, \quad \text{falls vereinfacht,}$$

erreichbar.

Beweis: Wir beweisen $(A_k)$ und $(B_k)$ unter der Annahme, daß $(A_j)$ und $(B_j)$ für $j < k$ bereits gilt; ($(A_1)$ ist trivial, $(B_1)$ ist der Satz 56).

Nehmen wir ein festes $Z_k$, das nach Annahme erreichbar ist. Dann sind alle $Y \leq Z_k$ wohlgeordnet.

Wir führen dann eine transfinite Induktion nach $Y$. Dazu sei ein $X$, welches vereinfacht ist, mit

$$[0, \ldots, 0, 1] \equiv U_{(k)} \leq X < [0, \ldots, 0, Y], \ \sigma([0, \ldots, 0, Y]) = k\,.$$

Dann muß sein: $Hpt(X) = \varkappa k \tau$, nach Satz 51, $1 \leq X_{\varkappa k} < Y$ nach Bemerkung 4 zu Satz 53 und $\widehat{\varkappa} < k$.

Somit ist $[0, \ldots, 0, X_{\varkappa k}]$ erreichbar.

Durch $k-1$-malige Anwendung von $B_j$ $(j = k-1, \ldots, 1)$ ergibt sich, daß $X_\varkappa$ erreichbar ist.

Sei $\varkappa = \lambda r$; dabei ist, wegen $\widehat{\varkappa} < k$ $r < k$ und $X_\lambda = [X_{\lambda 1}, \ldots, X_{\lambda r}]$, $X_{\lambda r} = X_\varkappa$ also erreichbar.

Gemäß der Voraussetzung von $(A_k)$ und $(B_k)$ ist $U_{(k)}$ erreichbar, a fortiori also $U_{(r)}$ erreichbar, somit nach $(A_r)$ $[0, \ldots, 0, X_{\lambda r}]$ erreichbar. Durch Anwendung von $(B_{r-1}), (B_{r-2}), \ldots, (B_1)$ folgt, daß $X_\lambda$ erreichbar ist. Auf entsprechende Art folgt, daß $X$ erreichbar ist. Somit folgt nun: $[0, \ldots, 0, Y]$ ist erreichbar. Hiermit ist $(A_k)$ bewiesen.

Ad $(B_k)$: Nach Voraussetzung von $(B_k)$ ist insbesondere $\overline{Z}_k^{(1)} \leq \overline{Z}^{(k)} =$

$= [0, \dots, 0, Z_{k+1}, \dots, Z_s]$, somit $\bar{Z}_k^{(1)}$ erreichbar; außerdem ist $Z_k$ vereinfacht, somit $Z_k$ erreichbar (Satz 57).

Wir fixieren $Z_k$ und beweisen: Wenn $Y \leq Z_k$, so ist der Ausdruck $[0, \dots, 0, Y, Z_{k+1}, \dots, Z_s]$, falls vereinfacht, erreichbar.

Wir zeigen dies durch eine Induktion nach $Y$. Es gelte die Behauptung schon für $Y' < Y$. Wir haben also zu zeigen: Wenn $X$ in Normalform und

$$[0, \dots, 0, Z_{k+1}, \dots, Z_s] \leq X < [0, \dots, 0, Y, Z_{k+1}, \dots, Z_s]$$

ist, so ist $X$ erreichbar. Es muß sein $Hpt(X) = \varkappa s \tau$, mit $\widehat{\varkappa} < k$,

$$X_\varkappa = [X_{\varkappa 1}, \dots, X_{\varkappa k}, Z_{k+1}, \dots, Z_s] \text{ und } X_{\varkappa k} < Y.$$

Somit ist gemäß der Induktionsvoraussetzung in bezug auf $Y$ $[0, \dots, 0, X_{\varkappa k}, Z_{k+1}, \dots, Z_s]$ erreichbar.

Durch Anwendung von $(B_{k-1}), \dots, (B_1)$ folgt nun, daß $X_\varkappa$ erreichbar ist. Da $\varkappa < k$, folgt weiter durch Anwendung von $(B_{k-1}), \dots, (B_1)$, daß $X$ erreichbar ist.

Demnach ist $[0, \dots, 0, Y, Z_{k+1}, \dots, Z_s]$ erreichbar. Insbesondere ist also $[0, \dots, 0, Z_k, Z_{k+1}, \dots, Z_s]$ erreichbar, w.z.b.w.

**Satz 59.** Wenn $[0, \dots, 0, 1] = U_{(k)}$ sowie $Z_k$ erreichbar sind, so ist auch $Z = [Z_1, \dots, Z_k]$, falls vereinfacht, erreichbar. Beweis durch Anwendung von $(A_k), (B_k), \dots, (B_1)$.

**Folge:** Ist $U_{(t)}$ für $t < s$ erreichbar, $Z$ vereinfacht mit $Hpt(Z) = \varkappa s \tau$, $\widehat{\varkappa\tau} < s$ und $Z_{\varkappa s}$ erreichbar, so ist auch $Z$ erreichbar.

Beweis durch mehrmalige Anwendung von Satz 59.

**Satz 60.** Sei $U_{(s)}$ erreichbar, $Z$ ein vereinfachter Ausdruck mit $S\{Z\} \leq s$, dann ist $Z$ erreichbar.

Beweis: Sei $SH\{Z\} = (s, 1)$, dann ist $Hpt(Z) = \varkappa s \tau$, wobei $\widehat{\varkappa\tau} < s$. Somit ist $Z_{\varkappa s} < U_{(s)}$, also $Z_{\varkappa s}$ erreichbar und nach Folge zu Satz 59 $Z$ selbst erreichbar.

Sei jetzt $SH(Z) = (s, h)$, so ergibt sich die Behauptung durch eine gewöhnliche Induktion nach $h$. Nehmen wir an, der Satz gelte für $SH\{Z\} = (s, j)$, $j < h$. Dann ist $Hpt(Z) = \varkappa s \tau$, wobei $sh(\tau) = (s, h-1)$ und $SH\{Z_{\varkappa s}\} = (s, h-1)$, also $Z_{\varkappa s}$ erreichbar und nach Folge zu Satz 59 $Z$ selbst erreichbar.

**Satz 61.** Zu jedem Ausdruck $Y$ mit $S\{Y\} = p$, gibt es einen anderen $Y' > Y$ für den $S\{Y'\} = p$ gilt.

Beweis: Sei $p \geq 2$, da sonst die Behauptung klar ist. Sei auch, wie im Satz 57, $\varepsilon_r = 11 \dots 1$ ein Zeiger mit $r$ Einsen. Es gibt dann eine Zahl $m$, für die der Term $Y_{\varepsilon m} =$ einer Zahl $n \geq 0$ ist. Dann hat zum Beispiel der Ausdruck $Y'$ mit den Termen $Y'_\alpha = Y_\alpha$ für $\alpha > \varepsilon_m$ und $Y'_{\varepsilon m} = n + k$, wo $k$ eine positive (ganze) Zahl ist, nach HLV und wegen $S\{n\} = S\{n + k\}$, die gewünschten Eigenschaften.

**Satz 62.** Für jedes $s$ ist $U_{(s)} = [0, \ldots, 0, 1]$ erreichbar.

Beweis: durch Induktion nach $s$.

$U_{(1)} = 1$ ist erreichbar.

Sei schon erwiesen, daß $U_{(s)}$ für jedes $s < s'$ erreichbar ist. Nach Satz 60 ist dann für jedes vereinfachte $Z_s < U_{(s')}$ auch $[0, \ldots, 0, Z_s]$ erreichbar. Folglich nach Satz 59 ist jedes vereinfachte $Z'$ mit $Z'_s = Z_s$ erreichbar. Ferner ist jedes $X$ der Stufe $s$ mit $X_{\varkappa s} = Z_s$ und $\widehat{\varkappa} < s$ erreichbar, da zu jedem $Z_s$ ein größeres $Z''_s$ existiert (Satz 61), was erreichbar ist. Hiernach ist also $[0, \ldots, 0, Z''_s]$ erreichbar und nach Satz 43 $X$ kleiner als dieser Ausdruck. Nach Prinzip II ist also jedes solche $X$ erreichbar. Daraus folgt, daß jeder Ausdruck $Z$, mit $S\{Z\} < s'$ erreichbar ist. Da $U_{(s')}$ der kleinste Ausdruck $s'$-ter Stufe ist, so ist nach Prinzip III $U_{(s')}$ erreichbar, w.z.b.w.

**Satz 63.** Jeder $Z$-Ausdruck ist erreichbar.

Beweis: Sei $S\{Z\} = s$, so ist nach Satz 62 $U_{(s+1)}$ $(> Z)$ erreichbar. Nach Prinzip II ist also auch $Z$ erreichbar.

Somit ist die Wohlordnung der Klasse aller $Z$-Ausdrücke gezeigt.

II. TEIL

# Das Rechnen im Bereiche der $Z$-Ausdrücke

## § 9. Addition

Wir führen jetzt die Addition von Ausdrücken ein. Diese Bezeichnung wird durch die nachstehenden Bestimmungen und Sätze gerechtfertigt:

**($A_1$)** $n + m$ hat die übliche Bedeutung,
**($A_2$)** $n + Z = Z$, für $Z \geq [0, 1]$,
**($A_3$)** für $Y \geq [0, 1]$ und $Z$ beliebig, ist $Y + Z = [Y_1 + Z, Y_2, \ldots, Y_s]$.

Ist $N(X)$ die in § 2 definierte Klammeranzahl von $X$, so gilt zunächst offenbar: $N(Y + Z) = N(Y) + N(Z)$; dies kann man etwa aus $(A_1)$, $(A_2)$ und $(A_3)$ durch Induktion nach $N(Y)$ beweisen.

Nach endlich vielen Itrationen von $(A_3)$ auf $Y_1 + Z$, $Y_{11} + Z$ usw. wird man auf $(A_1)$ oder $(A_2)$ zurückgeführt. «+» ist also durch die bisherigen Zeichen ausdrückbar.

**Satz 64.** $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$.

Beweis: Da $N((X+Y)+Z) = N(X+(Y+Z)) = N(X)+N(Y)+N(Z)$ ist, so kann der Beweis durch Induktion nach $N(X+Y+Z) = p$ geführt werden. Ist $p = 0$, das heißt, $X, Y, Z$ sind Zahlen, so ist die Behauptung wahr.

Die Fälle, wo $X$ eine Zahl ist, erledigen sich nach $(A_2)$ einfach. Sei jetzt $\sigma(X) > 1$ und sei die Behauptung erwiesen für $p' \leq k$. Setzen wir nun für $p = k+1$ $W' = (X+Y)+Z = [(X_1+Y)+Z, X_2, \ldots, X_s]$ und $W'' = X+(Y+Z) = [X_1+(Y+Z), X_2, \ldots, X_s]$, so gilt nach Induktionsvoraussetzung, da $N(X_1+Y+Z) \leq k$ ist, $(X_1+Y)+Z = X_1+(Y+Z) = X_1+Y+Z$, folglich auch $W' = W''$, w.z.b.w.

**Satz 65.** Für $X_1 > 0$ gilt nach Satz 29: $\bar{X}^{(1)} + X_1 = X > \bar{X}^{(1)}$.

**Satz 66.** Nach Satz 34 gilt auch: $X = \bar{X}^{(1)} + X_1 \geq X_1$. Weiter beweist man leicht durch Induktion nach $N(X) = p$ und unter Benutzung der Sätze des § 5, den folgenden

**Satz 67.** Für $Z > 0$ ist $X + Z > X$.

Beweis: Für $p = 0$ ist die Behauptung wahr. Angenommen, sie sei schon für $p' < p$ bewiesen, und es sei $N(X) = p$, so ist

$$X + Z = (\bar{X}^{(1)} + X_1) + Z = \bar{X}^{(1)} + (X_1 + Z) = \bar{X}^{(1)} + W, \text{ mit } W = X_1 + Z.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist aber $W > X_1$, folglich nach HLV bzw. Satz 32 $\bar{X}^{(1)} + X_1 = X < X + Z = \bar{X}^{(1)} + W$, w.z.b.w.

Es seien noch folgende Sätze, die man durch ganz analoge Schlüsse beweisen kann, erwähnt:

**Satz 68.** $X + 0 = X$.

**Satz 69.** $X + Z \geq Z$.

**Satz 70.** Ist $Y < Z$, so ist auch $X + Y < X + Z$.

**Satz 71.** Ist $Y < Z$, so ist auch $Y + X \leq Z + X$.

**Satz 72.** Ist $Y = Z$, so ist $Y + X = Z + X$ und $X + Y = X + Z$.

**Satz 73.** Ist $X$ 1-vereinfacht und $Z$ 1-vereinfacht, so ist (a) $\bar{X}^{(1)} < \bar{Z}^{(1)}$ die hinreichende und notwendige Bedingung, damit $X + Z = Z$ gilt.

Bemerkung: Nach (a) folgt, daß $Z$ keine Zahl sein kann.

Beweis: *Hinreichend.* Sei $N(X) = 0$, das heißt $X$ eine Zahl. Da $Z \geq [0, 1]$ ist, so gilt nach $(A_2)$ die Behauptung. Sei jetzt der Satz schon bewiesen für $N(X) \leq p$ und sei nun $N(X) = p + 1$. Dann ist $X + Z = \bar{X}^{(1)} + (X_1 + Z)$, Nach Voraussetzung über $X$ ist $\overline{X}_1^{(1)} \leq \overline{X}^{(1)}$; wegen (a) ist also $\overline{X}_1^{(1)} < \overline{Z}^{(1)}$. Wegen $N(X_1) \leq p$ folgt nach Induktionsvoraussetzung $X_1 + Z = Z$. Also ist $X + Z = \overline{X}^{(1)} + Z = Z'$, mit $Z' \equiv [Z, X_2, \ldots, X_s]$. Nach (a) ist aber $Z$ Hauptglied von $Z'$, das heißt, man hat $WZ \equiv WZ'$, und es ist $Z' = Z$; hiermit ist (a) hinreichend.

*Notwendig.* Offenbar kann $Z$ keine Zahl sein. Wäre $\overline{X}^{(1)} > \overline{Z}^{(1)}$, so hätte man nach Satz 28 $X > Z$, also nach Satz 67 $X + Z > X > Z$. Sei jetzt $\overline{X}^{(1)} = \overline{Z}^{(1)}$, das heißt $Z = [Z_1, X_2, \ldots, X_s]$. Da $Z$ 1-vereinfacht ist, hat man nach Satz 30 $Z > Z_1$. Andererseits ist $X + Z = [X_1 + Z, X_2, \ldots, X_s]$. Nun ist nach Satz 70 und Satz 69 $X_1 + Z > X_1 + Z_1 \geq Z_1$; man hätte also nach HLV: $X + Z > Z$. Die Bedingung (a) ist danach notwendig, w.z.b.w.

**Beispiel.** Sei $X = [6, 1]$ und $Z = [5, 2]$. Nun ist $\overline{X}^{(1)} = [0, 1] < \overline{Z}^{(1)} = [0, 2]$. Folglich ist $[6, 1] + [5, 2] = [6 + [5, 2], 1] = [[5, 2], 1] = [5, 2]$.

**Satz 74. a)** Ist $X + Z = Z$ und $Y \leq X$, so ist $Y + Z = Z$.

**b)** Ist $X + Z = Z$ und $W > Z$, so ist auch $X + W = W$.

Beweis: **a)** Nach Satz 71 muß sein $Y + Z \leq X + Z = Z$. Da auch $Y + Z \geq Z$ sein muß, so gilt die Behauptung.

**b)** Es ist $\overline{X}^{(1)} < \overline{Z}^{(1)}$ sowie (nach Kontraposition des Satzes 28) $\overline{W}^{(1)} \geq \overline{Z}^{(1)}$. Hiernach hat man $\overline{X}^{(1)} < \overline{W}^{(1)}$ und nach Satz 73 $X + W = W$, w.z.b.w.

Als **Folge** zu diesem Satz hat man: Ist $X + Z = Z$, so gilt auch für jedes Glied von $X$: $X_k + Z = Z$, da $X_k \leq X$ ist.

Eine weitere **Anwendung** des Satzes 73 ist diese:

Ist $Z \geq [0, 1]$ und $Z_1 = 0$, so gilt $Z = \overline{Z}^{(1)}$. Danach ist für jedes $X < Z$ auch $\overline{X}^{(1)} < \overline{Z}^{(1)}$, also $X + Z = Z$. Die Ausdrücke $Z \geq [0, 1]$ mit $Z_1 = 0$ haben also die charakteristische Eigenschaft von «*additiven (transfiniten) Hauptzahlen*».

**Satz 75.** Ist $Y < Z$, so gibt es ein $X$, so daß $Y + X = Z$ ist.

Beweis: durch Induktion nach $N(Z) = p$. Für $p = 0$ ist der Satz klar. Nehmen wir an, der Satz sei schon bewiesen für Ausdrücke $Z'$ mit $N(Z') \leq p_0$ und sei $N(Z) = p_0 + 1$. Ist nun $\overline{Y}^{(1)} < \overline{Z}^{(1)}$, so ist $Y + Z = Z$, also ist $Z = X$. Ist $\overline{Y}^{(1)} = \overline{Z}^{(1)}$, so muß nach Voraussetzung $Y_1 < Z_1$ sein. Nach Induktionsvoraussetzung gibt es also ein $X$, so daß $Y_1 + X = Z_1$ gilt. Dann hat man aber

$$Z = \overline{Z}^{(1)} + Z_1 = \overline{Y}^{(1)} + Y_1 + X = Y + X, \quad \text{w.z.b.w.}$$

Wir führen noch den Begriff «*Nachfolger*» ein.

**Definition.** $X'$ ist Nachfolger von $X$, falls
(a) $X' > X$ ist und
(b) es kein $Y$ gibt, so daß $X < Y < X'$ richtig ist.

**Satz 76.** Der Nachfolger von $X$ ist $X + 1$.

Beweis: Es ist nach Satz 67 $X + 1 > X$. Nun hat aber $X + 1$ auch die Eigenschaft (b). Denn gäbe es ein $Y$, so daß $X < Y < X + 1$ richtig wäre, so müßte nach Satz 75 $Y = X + W$ und andererseits, wegen $Y < X + 1$, $W < 1$ sein. Wäre nämlich $W \geq 1$, so wäre nach Satz 70 bzw. 72 $Y \geq X + 1$. Also muß $W = 0$ sein, womit der Satz bewiesen ist.

**Definition** von $F_k(Y, Z)$:

Ist $Y = [Y_1, \ldots, Y_k, \ldots, Y_s]$ und $k \leq s$, so sei für ein beliebiges $Z$: $F_k(Y, Z) = [Y_1, \ldots, Y_{k-1}, Y_k + Z, Y_{k+1}, \ldots, Y_s]$. Speziell ist dann $F_1(Y, Z) = Y + Z$, nach $(A_3)$.

Man hat für $F_k(Y, Z)$ eine Reihe analoger Sätze wie für die Addition $F_1(Y, Z)$. Sie seien hier ohne Beweise angegeben, da ihre Richtigkeit aus den Monotoniesätzen und den Eigenschaften von $F_1(Y, Z)$ (etwa durch Induktion nach $N(Y)$ bzw. $N(Z)$) leicht eingesehen werden kann. Es sollen auch in diesen Sätzen $Y$ bzw. $Y'$ und $Y''$ als vereinfacht angenommen werden.

**Satz 77.** Es ist $F_k(Y, Z) > Y$ für jedes $Z > 0$.

**Satz 78.** Aus $Z' < Z''$ folgt $F_k(Y, Z') < F_k(Y, Z'')$.

**Satz 79.** Aus $Y' < Y''$ folgt $F_k(Y', Z) \leq F_k(Y'', Z)$, wobei «$=$» dann und nur dann gilt, falls $F_k(Y'', Z) = Z$ ist.

**Satz 80.** Es ist $F_k(Y, Z) \geq Z$.

**Satz 81.** Ist $F_k(Y, Z) = Z$, so ist $Y_k + Z = Z$. Denn wäre $Y_k + Z > Z$, so wäre nach Satz 80 $F_k(Y, Z) \geq Y_k + Z > Z$, entgegen der Voraussetzung.

Die Eigenschaften von $F_k(Y, Z)$ gestatten eine etwas weitere Fassung des Kriteriums von Satz 37; für $F_k(Y, Z)$ haben wir nämlich, auch mit $Y_k > 0$, den

**Satz 82.** Sei $Y$ vereinfacht und $k < \sigma(Y)$ und $Z$ in Normalform. Dann sind die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für $F_k(Y, Z) = Z$:

(a) $\sigma(Z) > k$ und $\overline{Z}^{(k)} > \overline{Y}^{(k)}$ und falls $k > 1$ weiter
(b) $Z_t = 0$ für $1 \leq t \leq k$
(c) $Y_j = 0$ für $1 \leq j < k$.

Bemerkung: Die Bedingungen (a), (b), (c) sind gleichbedeutend mit $Y \equiv \overline{Y}^{(k-1)} < Z \equiv \overline{Z}^{(k)}$.

Beweis: Nach Satz 73 ist der Fall $k = 1$ erledigt, da dann die Bedingungen (b) und (c) gegenstandslos sind. Sei also $k > 1$ und

$Y' = [Y_1, \dots, Y_{k-1}, 0, Y_{k+1}, \dots, Y_s]$, so ist $F_k(Y, Z) = F_k(Y', Y_k + Z)$.

Nun ist nach (a) und da $Y$ vereinfacht ist: $\overline{Y}_k^{(1)} \leq \overline{Y}^{(k)} < \overline{Z}^{(1)}$, also nach Satz 73 $Y_k + Z = Z$. Somit hat man

$$F_k(Y, Z) = F_k(Y', Z) \tag{d}$$

Da $Y'_k = 0$ ist, so sind die Bedingungen (a), (b), (c) in bezug auf $Y'$ und $Z$ gleichbedeutend mit den Bedingungen (1), (2), (3) und (4) des Satzes 37, also gilt, nach Bedeutung von $F_k(Y', Z)$: $F_k(Y', Z) = Z$. (a), (b), (c) sind nach (d) somit hinreichend.

Notwendig: Nach Satz 81 folgt aus $F_k(Y, Z) = Z : Y_k + Z = Z$, also nach (d) und Satz 37 sind (a), (b), (c) notwendig, w.z.b.w.

**Satz 82a.** Im Falle $k = s$ bekommen wir einen analogen Sachverhalt, indem wir nur (a) im Satz 82 durch (a'): $\sigma(Z) > k$ und $\overline{Y}_k^{(1)} < \overline{Z}^{(1)}$ ersetzen. Es gilt dann $Y_k + Z = Z$, und man ist dadurch auf den Satz 37 zurückgeführt.

## § 10. Der Limesbegriff

Sei $n$ eine Variable, die Zahlen durchläuft.

**Definition.** Ist $Z^{(n)}$ eine wachsende Folge von $Z$-Ausdrücken, so sei $\lim Z^{(n)} = Z^{(\omega)}$ der kleinste Ausdruck, der größer ist als alle $Z^{(n)}$.

Nach Folge (2) zu Satz 53 hat man direkt

**Satz 83.** Ist $Z^{(n)} = n$, so ist $\lim n = [0, 1]$. Offenbar gilt auch $\lim f(n) = [0, 1]$, für jede wachsende Funktion $f(n)$, deren Werte Zahlen sind.

**Satz 84.** Sei $U_{(p)} = [0, \dots, 0, 1]$, $\sigma(U_{(p)}) = p > 1$, und $Z^{(1)} = U_{(p)}$, $Z^{(n+1)} = F_p(U_{(p)}, Z^{(n)})$; dann ist $\lim Z^{(n)} = U_{(p+1)}$.

Beweis: Nach Satz 27 ist $U_{(p+1)} > Z^{(n)}$ für alle $n$, weil $S\{U_{(p+1)}\} = p + 1$, hingegen $S\{Z^{(n)}\} = p$ ist. Sei jetzt $Y < U_{(p+1)}$, so muß nach Satz 53 $S\{Y\} \leq p$ sein. Ist $S\{Y\} < p$, so ist bereits $Y < Z^{(1)}$. Sei also $S\{Y\} = p$, und zwar sei $SH\{Y\} = (p, t)$. Dann ist nach Definition von $Z^{(n)}$: $SH\{Z^{(n)}\} = (p, n)$ also nach Satz 44 $Z^{(t+1)} > Y$. Hiermit erfüllt $U_{(p+1)}$ die Definition von $\lim Z^{(n)}$, w.z.b.w.

**Definition der *Iteration* $F_k^n(Y, Z)$.** Es sei $F_k^0(Y, Z) = Z$ und $F_k^{n+1}(Y, Z) = F_k(Y, F_k^n(Y, Z))$.

**Satz 85.** Ist $Z^{(1)} \equiv [0, \ldots, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_s]$, $k < s$ in Nf und

$$Z^{(n+1)} = F_k(Z^{(1)}, Z^{(n)}) = [0, \ldots, 0, Z^{(n)}, Z_{k+1}, \ldots, Z_s],$$

so ist $\lim Z^{(n)} = [0, \ldots, 0, 0, Z_{k+1} + 1, Z_{k+2}, \ldots, Z_s] \equiv Z^{(\omega)} = F_{k+1}(Z^{(1)}, 1)$.

Beweis: Zunächst sei gezeigt, daß $Z^{(n)}$ eine aufsteigende Folge ist. Nach HLV gilt: $Z^{(2)} > Z^{(1)}$; angenommen es ist $Z^{(m+1)} > Z^{(m)}$, so gilt nach Satz 78

$$F_k(Z^{(1)}, Z^{(m+1)}) = Z^{(m+2)} > F_k(Z^{(1)}, Z^{(m)}) = Z^{(m+1)}.$$

Nun ist im Falle $k=1$, nach HLV $Z^{(\omega)} > Z^{(n)}$, für jedes $n$. Sei dann $k > 1$ und $\zeta^{(1)} = Hpt(Z^{(1)}) = s\sigma$. Da $\overline{(Z^{(2)})_k}^{(1)} = \overline{Z^{(2)(k)}} = Z^{(1)}$ ist, (es bedeutet $\overline{Z^{(n)(t)}}$ den Ausdruck $Z^{(n)}$ in dem die $t$ ersten Glieder durch Nullen ersetzt sind) also $(Z^{(2)})_k$ ist nicht Hauptglied von $Z^{(2)}$, so hat man $\zeta^{(2)} = Hpt(Z^{(2)}) = s\sigma$. Hingegen ist für $n > 2$ $\zeta^{(n)} = Hpt(Z^{(n)}) = k_1 k_2 \ldots k_{n-2} s$, wo alle $k_i = k$ sind. Sei für $n > 2$ $\beta = k_1 k_2 \ldots k_{n-2}$, wo alle $k_i = k$ sind, so gilt für alle $n$: $\overline{Z^{(\omega)(k)}} > \overline{Z^{(n)(k)}}$, also nach Satz 48 $Z^{(\omega)} > Z^{(n)}$ für jedes $n$ und somit auch für jedes $k < s$. Sei nun ein $Y$ mit $Z^{(1)} < Y < Z^{(\omega)}$, so gibt es ein $r \geq 2$, so daß $Y < Z^{(r)}$ ist. Denn nach Satz 51 (angewandt auf $k+1$) muß $Y$ von der Form sein: $Hpt(Y) = \varkappa s \sigma'$, $sh(\varkappa) < (k+1, 1)$, $\widehat{\sigma'} = \widehat{\sigma}$, $Y_\varkappa = [Y_{\varkappa 1}, \ldots, Y_{\varkappa k}, Z_{k+1}, \ldots, Z_s]$, weil es ja zwischen $Z_{k+1}$ und $Z_{k+1} + 1$ kein Glied geben kann. Gilt $sh(\varkappa) = (k, h)$, so ist sicher $Z^{(h+3)} > Y$, denn es ist $\zeta^{(h+3)} = \lambda s \sigma$, mit $sh(\lambda) = (k, h+1)$, also $\widehat{\lambda} > \widehat{\varkappa}$, und da $\overline{Z^{(h+3)(k)}} = \overline{Y^{(k)}}$ ist, so folgt nach Satz 49 $Z^{(h+1)} > Y$. Nach Definition ist daher $\lim Z^{(n)} = Z^{(\omega)}$, w.z.b.w.

Dieses Resultat kann noch so ausgedrückt werden: Es ist für $Z \equiv Z^{(1)}$ $F_k^n(Z, Z)$ aufsteigend in $n$ und $\lim\limits_n F_k(Z, Z^{(n)}) = \lim\limits_n F_k^{n+1}(Z, Z) = F_{k+1}(Z, 1)$.

Als spezielle Folgerung ergibt sich für den Fall $k = 1$: Auf Grund der Definition von $F_1(X, Y)$ kann man vermöge einer Rekursion nach $n$ festlegen: $F_1(Z, Z) = Z + Z = Z \times 2$, $Z^{(n+1)} = F_1(Z, Z^{(n)}) = Z + Z^{(n)} = Z \times (n+1)$. Dann hat man z.B. $Z^{(n)} + Z^{(m)} = F(Z^{(n)}, Z^{(m)}) = Z \times (n+m) = Z^{(n+m)}$ und, weil $Z_1$ nicht Hauptglied von $Z$ ist, $\overline{Z}^{(1)} \times n \leq Z \times n < \overline{Z}^{(1)} \times (n+1)$. Nach Definition von $Z^{(\omega)}$ ist also (mit $Z = Z^{(1)}$):

$$\lim Z \times n = \lim Z^{(1)} \times n = F_2(Z, 1) = Z^{(\omega)}.$$

Weiter hat man offenbar für jedes $k$: ist $Z^{(1)}$ in Normalform, so ist auch $Z^{(\omega)}$ in Normalform: nach Satz 82 gilt dann $F_k(Z^{(1)}, Z^{(\omega)}) = Z^{(\omega)}$.

**Satz 86.** Sei $z_k^{(n)}$ eine aufsteigende Folge und $\lim\limits_n z_k^{(n)} = z_k^{(\omega)}$, $k$ fest und $Z^{(n)} = [0, \ldots, 0, z_k^{(n)}, z_{k+1}, \ldots, z_s]$, $k \leq s$, $z_t = 0$, $1 \leq t \leq k$, so ist $\lim Z^{(n)} =$

$=[0, \ldots, 0, 0, z_k^{(\omega)}, z_{k+1}, \ldots, z_s]=Z^{(\omega)}$; oder mit $\overline{Z}^{(k)}\equiv[0, \ldots, 0, 0, z_{k+1}, \ldots, z_s]$: $\lim F_k(\overline{Z}^{(k)}, z_k^{(n)}( = F_k(\overline{Z}^{(k)}, \lim z_k^{(n)})$. Seien noch die $z_k^{(n)}$ wie auch $\overline{Z}^{(k)}$ in Nf.

Beweis: Da $z_k$ eine aufsteigende Folge ist, so ist es nach Satz 32 auch der Fall für die Folge $Z^{(n)}$; wegen $z_k^{(n)} < z_k^{(\omega)}$ ist auch nach obigem Satz $Z^{(n)} < Z^{(\omega)}$. Sei für das folgende $Z^{(\omega)}$ vereinfacht.

(a) Sei $z_k^{(\omega)} \leq Z^{(\omega)}$ (das heißt $z_k^{(\omega)}$ nicht Hauptglied von $Z^{(\omega)}$) und betrachten wir ein $Y$ mit $Z^{(1)} < Y < Z^{(\omega)}$.

Nach Satz 51 ist dann $Y$ von der Form: $Hpt(Y) = \varkappa s \tau$, $sh(\varkappa) < (k, 1)$, für $k = 1$ $\varkappa$ leer, mit dem Term $y_\varkappa = [y_{\varkappa 1}, \ldots, y_{\varkappa k}, z_{k+1}, \ldots, z_s]$ und $z_k^{(1)} \leq y_{\varkappa k} < z_k^{(\omega)}$.

Nun gibt es nach Definition von $z_k^{(\omega)}$ ein $p$, so daß $z_k^{(p)} > y_{\varkappa k}$ ist, also auch $Z^{(p)} > Y$ gilt. Folglich ist die Behauptung richtig.

(b) Sei $\overline{z_k^{(\omega)(1)}} > \overline{Z}^{(k)}$, das heißt, es ist $z_k^{(\omega)}$ Hauptglied von $Z^{(\omega)}$. Nach HLV ist dann auch $z_k^{(\omega)} > \overline{Z}^{(k)}$; nach Definition von $z_k^{(\omega)}$ gibt es dann ein $n_0$, so daß für $n > n_0$ $z_k^{(n)} > \overline{Z}^{(k)}$ und danach

$$\overline{z_k^{(n)(1)}} \geq \overline{Z}^{(k)} \tag{1}$$

gilt.

(b 1) Sei $k > 1$. Auf Grund von $z_k^{(n)} > \overline{Z}^{(k)}$ kann in (1) nur «$>$» gelten, da $(\overline{Z}^{(k)})_t = 0$ ist, für $1 \leq t \leq k$.

Also ist $Z^{(\omega)} = [0, \ldots, 0, z_k^{(\omega)}]$ und für $n > n_0$ $Z^{(n)} = [0, \ldots, 0, z_k^{(n)}]$. Dann ist nach HLV $Z^{(\omega)} > Z^{(n)}$.

Sei jetzt ein $Y$ mit $Z^{(n)} < Y < Z^{(\omega)}$ für ein $n > n_0$, so muß $Y$ von der Form: $Hpt(Y) = \varkappa k \tau$, $\widehat{\varkappa} < k$, $Y_\varkappa = [y_{\varkappa 1}, \ldots, y_{\varkappa(k-1)}, y_{\varkappa k}]$ mit

$$z_k^{(n)} \leq y_{\varkappa k} < z_k^{(\omega)}$$

sein. Nun gibt es nach Definition von $z_k^{(\omega)}$ ein $p$, so daß $z_k^{(r)} > y_{\varkappa k}$ für $r > p$, also nach Satz 53 $Z^{(r)} > Y$; folglich ist

$$Z^{(\omega)} = \lim Z^{(n)} .$$

(b 2) Sei jetzt $k = 1$, das heißt $\overline{Z_1^{(\omega)(1)}} > \overline{Z}^{(1)}$.

Gilt in (1) für «fast alle» $n: \overline{z_1^{(n)(1)}} > \overline{Z}^{(1)}$, so ergibt sich die Richtigkeit der Behauptung genau wie im Fall (b 1).

Es sei also von einem gewissen $n_1$ ab $\overline{z_1^{(n)(1)}} = \overline{Z}^{(1)}$. Es ist dann $z_1^{(\omega)} = Z^{(\omega)} > Z^{(n)} \geq z_1^{(n)}$. Da $z_1^{(\omega)} = \lim z_1^{(n)}$ ist, kann es kein $Y$ geben, daß $Z^{(n)} < Y < Z^{(\omega)}$ für alle $n$ richtig wäre.

Folglich ist $Z^{(\omega)} = [z_1^{(\omega)}, z_2, \ldots, z_s]$, also die Behauptung auch in diesem Falle richtig. (NB. Es ist leicht, einzusehen, daß in diesem Falle nach Satz 85 $Z^{(\omega)} = [0, z_2 + 1, z_3, \ldots, z_s]$ sein muß.)

**Satz 87.** Es gilt $\lim (Y + Z^{(n)}) = Y + \lim Z^{(n)}$, falls $Z^{(n)}$ eine aufsteigende Folge ist, das heißt es ist auch für $y_1 > 0 : \lim F_1(Y, Z^{(n)}) = F_1(Y, \lim Z^{(n)})$.

Beweis: nach Induktion über $N(Y)$. Ist $N(Y) = 0$, das heißt $Y$ eine Zahl, so gilt der Satz; denn sind die $Z^{(n)}$ sämtlich Zahlen, so ist die Behauptung bekanntlich richtig; sonst ist $Y + Z^{(n)} = Z^{(n)}$.

Sei schon die Behauptung bewiesen für alle $Y'$, für die $N(Y') \leq p$ ist, und sei $N(Y) = p + 1$. Nach Satz 86, Fall $k = 1$, hat man

$$\lim (Y + Z^{(n)}) = [\lim (y_1 + Z^{(n)}), y_2, \ldots, y_s] .$$

Nach Induktionsvoraussetzung gilt aber $\lim (y_1 + Z^{(n)}) = y_1 + \lim Z^{(n)}$, folglich ist nach Definition der Addition:

$$\lim (Y + Z^{(n)}) = [y_1 + \lim Z^{(n)}, y_2, \ldots, y_s] = Y + \lim Z^{(n)}, \text{ w.z.b.w.}$$

Für $Y^{(n)} = [0, \ldots, 0, y_k + Z^{(n)}, y_{k+1}, \ldots, y_s]$ gilt nach Satz 86 und nach Satz 87:

$$\lim Y^{(n)} = [0, \ldots, 0, y_k + \lim Z^{(n)}, y_{k+1}, \ldots, y_s] .$$

Wir können dies noch für $k > 1$ auf folgende Weise formulieren:

**Satz 88.** Ist $y_t = 0$ für $1 \leq t < k$, so gilt – also auch falls $y_k > 0$ ist –

$$\lim_n F_k(Y, Z^{(n)}) = F_k(Y, \lim Z^{(n)}) .$$

**Satz 89.** Über *konfinale* [17]) Folgen.

Sei $Y \equiv [Y_1, Y_2, \ldots, Y_k, Z_{k+1}, \ldots, Z_s]$ und mindestens ein $Y_j > 0$ für $1 \leq j \leq k$ sowie $Z \equiv \overline{Y}^{(k)} \equiv [0, \ldots, 0, Z_{k+1}, \ldots, Z_s]$, $Z$ und $Y$ in Nf. Bilden wir die Folgen: $Y^{(1)} = Y$, $Y^{(n+1)} = F_k(Y, Y^{(n)})$ und $Z^{(1)} = Z$, $Z^{(n+1)} = F_k(Z, Z^{(n)})$, so gilt $\lim Y^{(n)} = \lim Z^{(n)}$.

Beweis: Der Fall $k = 1$ ist nach Folgerung zu Satz 85 erledigt. Sei also $k > 1$. Man überzeugt sich durch eine ähnliche Überlegung wie im Satz 85, daß die beiden Folgen $Z^{(n)}$ und $Y^{(n)}$ aufsteigend sind. Nun gilt nach HLV $Z^{(1)} < Y^{(1)}$. Ist schon bewiesen für $r \geq 1$, daß $Z^{(r)} < Y^{(r)}$ ist, so hat man nach Satz 78 auch $Z^{(r+1)} = F_k(Z, Z^{(r)}) < F_k(Y, Y^{(r)}) = Y^{(r+1)}$; also ist

$$\lim Z^{(n)} \leq \lim Y^{(n)} . \qquad (\alpha)$$

Wir zeigen jetzt, daß es zu jedem $p$ ein $m$ gibt, so daß $Y^{(p)} < Z^{(m)}$ ist. Es ist nämlich $\overline{Y}_k^{(1)} \leq \overline{Y}^{(k)} = Z$. Gilt $\overline{Y}_k^{(1)} < Z$, so ist auch $Y_k < Z$ (Satz 28) und folglich $Y^{(1)} < Z^{(2)}$ nach HLV. Gilt $\overline{Y}^{(1)} = Z$, so ist $Y_{kk} = Z_k = 0$ und deswegen $Y_k < Z^{(2)}$; danach ist nach HLV auch

---

[17]) Hier Folgen, die den gleichen Limes haben.

$Y^{(1)} < Z^{(3)}$. Man hat also jedenfalls $Y_k < Z^{(2)}$ und $Y = Y^{(1)} < Z^{(3)}$. Bemerken wir, daß nach Folge zu Satz 74 und nach Folge zu Satz 85 für jedes $k$: $Z^{(q)} + Z^{(t)} \leq Z^{(q+t)}$. Nehmen wir nun an, es sei schon $Y^{(p)} < Z^{(3p)}$ erwiesen; dann ist $Y_k + Y^{(p)} < Z^{(2)} + Z^{(3p)} \leq Z^{(3p+2)}$. Nun ist $Y_k + Y^{(p)}$ das $k$-te Glied von $Y^{(p+1)}$, also gilt nach HLV:

$$Y^{(p+1)} < Z^{(3p+2+1)} = Z^{(3(p+1))}.$$

Setzen wir $m = 3p$, so ist $Y^{(p)} < Z^{(m)}$. Daraus folgt

$$\lim Y^{(n)} \leq \lim Z^{(n)}. \tag{$\beta$}$$

Nach ($\alpha$) und ($\beta$) muß also $\lim Y^{(n)} = \lim Z^{(n)}$ sein, w.z.b.w.

**Satz 90.** Ist $Z^{(1)} = [Z_1, \ldots, Z_{m-1}, Z_m]$ mit $SH\{Z^{(1)}\} = (s, h)$ und $Z^{(n+1)} = [Z_1, \ldots, Z_{m-1}, Z_m + Z^{(n)}]$, so ist $\lim Z^{(n)} = U_{(s+1)}$.

Beweis: Durch Induktion nach $n$ ergibt sich $SH\{Z^{(n)}\} = (s, h \times n)$. Bilden wir die Folge $U_{(s,1)} = U_{(s)}$ und $U_{(s,p+1)} = [0, \ldots, 0, U_{(s,p)}]$ mit $\sigma(U_{(s,p+1)}) = s$, so gilt $SH\{U_{(s,q)}\} = (s, q)$ und folglich nach Satz 44:

$$U_{(s,h\times n)} \leq Z^{(n)} < U_{(s,(h+1)\times n)}. \tag{$\alpha$}$$

Da $\lim\limits_{q} U_{(s,q)} = U_{(s+1)}$ ist (Satz 84), so gilt nach ($\alpha$) die Behauptung.

## Definition der Ausdrücke erster und zweiter Art.

Sei $Z > 0$ und $\varepsilon_j = 11\ldots1$ ein Zeiger, der nur aus $j$ Einsen besteht, $r$ diejenige Zahl, für die $Z_{\varepsilon_r} = m$ eine Zahl ist.

Ist $m = 0$, so ist $Z$ *zweiter Art* oder ein *Limes-Ausdruck.* Ist $m > 0$, so ist $Z$ *erster Art.*

Danach ist jeder $Z$-Ausdruck entweder 0 oder erster oder zweiter Art, da für jeden $Z$-Ausdruck genau einer von diesen Fällen eintreten muß. Nach dieser Definition und nach Definition von «+» (vgl. ($A_3$)), ist $Z$ dann und nur dann erster Art, falls er sich als Summe $Z = Y + m$, mit einer Zahl $m > 0$ darstellen läßt. Ist hingegen $Z$ zweiter Art, so gibt es danach kein $Y$, so daß $Z = Y + 1$ richtig wäre.

## Zuordnung von Hauptfolgen zu Ausdrücken zweiter Art.

Sei $Z$ ein Ausdruck zweiter Art. Wir bestimmen in der Menge aller Folgen, deren Limes $Z$ ist, die *Hauptfolge* von $Z$.

$[0, 1]$ ist natürlich der kleinste Ausdruck zweiter Art. Die $[0, 1]$ zugeordnete Hauptfolge soll sein $Z^{(n)} = n$; es ist auch $\lim Z^{(n)} = [0, 1]$. Nach Satz 84 setzen wir für $p > 1$ fest: Die Hauptfolge von $U_{(p+1)}$ soll sein $Z^{(1)} = U_{(p)}, Z^{(n+1)} = F_p(Z^{(1)}, Z^{(n)})$.

Sei jetzt ein Ausdruck $Y$, für den $N(Y) = 1$ gilt und $Y$ zweiter Art.

Dann ist $Y$ von der Form: $Y = [0, \ldots, 0, m_{k+1} + 1, \ldots, m_s]$. (Wenn $m_{k+1} = 0$ und $k + 1 = s$, so ist $Y = U_{(k+1)})$. Wir setzen fest: Die Hauptfolge von $Y$ soll sein $Z^{(1)} = [0, \ldots, 0, m_{k+1}, \ldots, m_s]$, $Z^{(n+1)} = F_k(Z^{(1)}, Z^{(n)})$. Nach Satz 72 gilt natürlich $\lim Z^{(n)} = Y$.

Seien jetzt Hauptfolgen zu allen Ausdrücken zweiter Art $Z'$ mit $N(Z') \leq r$ schon bestimmt, und sei $Z$ ein Ausdruck zweiter Art mit $N(Z) = r + 1$. Sei auch $k \geq 1$ die kleinste Zahl, für die $z_k > 0$ ist, das heißt, man hat

$$Z = [0, \ldots, 0, z_k, \ldots, z_s] .$$

Ist $z_k$ erster Art – also es muß dann $k > 1$ sein – das heißt $z_k = z'_k + 1$, so wird, wie eben erklärt, die Hauptfolge von $Z$ durch

$$Z^{(1)} = [0, \ldots, 0, z'_k, \ldots, z_s] \quad \text{und} \quad Z^{(n+1)} = F_k(Z^{(1)}, Z^{(n)})$$

gegeben.

Ist $z_k$ zweiter Art, so gibt es bereits eine Hauptfolge zu $z_k$, da $N(z_k) \leq r$ sein muß. Sei etwa $z_k^{(n)}$ die erwähnte Hauptfolge, so bestimmen wir: Es sei

$$Z^{(n)} = [0, \ldots, 0, z_k^{(n)}, z_{k+1}, \ldots, z_s]$$

die zu $Z$ zugeordnete Hauptfolge. Nach Satz 86 gilt nämlich $\lim Z^{(n)} = Z$.

Hiermit wird jedem Ausdruck zweiter Art eine Hauptfolge zugeordnet.

## § 11. Normalfunktionen
## Rechengesetze für die Multiplikation und die Potenz

*1. Normalfunktionen* $\Phi_k(Y, Z)$

Mit Hilfe der in den §§ 9 und 10 behandelten Funktionen $F_k(Y, Z)$ können wir jetzt sogenannte *Normalfunktionen*[18]) $\Phi_k(Y, Z)$ aufbauen. Es sollen dabei die vorkommenden Argumente $Y$ und $Z$ als vereinfacht angenommen werden.

Dazu fügen wir noch zu der in § 10 definierten Iteration $F_k^{n+1}(Y, Z) = F_k(Y, F_k^n(Y, Z))$ die aus dem Satz 89 folgende Gleichheit: $\lim_n F_k^n(Y, Y) = F_{k+1}(\overline{Y}^{(k)}, 1)$ hinzu.

Ist dann $\Phi_1(Y, Z) = F_1(Y, Z) = Y + Z$, so soll $\Phi_{k+1}(Y, Z)$ durch das folgende *rekursive Schema* definiert werden:

$$\Phi_{k+1}(Y, 1) = \lim_n F_k^n(Y, Y) = F_{k+1}(\overline{Y}^{(k)}, 1) ,$$
$$\Phi_{k+1}(Y, X + 1) = \lim_n F_k^n(\Phi_{k+1}(Y, X), \Phi_{k+1}(Y, X)) ,$$
$$\Phi_{k+1}(Y, \lim_n X^{(n)}) = \lim_n \Phi_{k+1}(Y, X^{(n)}) .$$

Dabei soll $X^{(n)}$ eine aufsteigende Folge bedeuten. Nun kann man leicht durch Induktion nach $k$ und transfinite Induktion nach $X$ zeigen, daß

$$\Phi_{k+1}(Y, X) = F_{k+1}(\overline{Y}^{(k)}, X) = [0, \ldots, 0, Y_{k+1} + X, Y_{k+2}, \ldots, Y_s] \quad (1)$$

[18]) Vgl. etwa JACOBSTHAL, Math. Ann. *66*, oder BACHMANN, Literaturverzeichnis [8].

gilt. Denn sei diese Gleichheit schon erwiesen für alle $k' \leq k$ und alle $X' \leq X$ und sei etwa $\Phi_{k+1}(Y, X) = [0, \ldots, 0, Y_{k+1} + X, Y_{k+2}, \ldots, Y_s] = Y^*$, so ist $\Phi_{k+1}(Y, X+1) = \lim\limits_n F_k^n(Y^*, Y^*) = F_{k+1}(Y^*, 1) = F_{k+1}(\overline{Y^{(k)}}, X+1)$, wie es aus der Definition von $F_{k+1}(Y, Z)$ zu ersehen ist.

Für $X = \lim X^{(n)}$ ergibt sich (1) aus der «*Stetigkeitsbedingung*» in der Definition von $\Phi_{k+1}(Y, X)$; nach Satz 88 hat man noch

$$\Phi_{k+1}(Y, \lim X^{(n)}) = \lim_n F_{k+1}(\overline{Y^{(k)}}, X^{(n)}) .$$

Aus (1) folgt weiter für jedes $Y$ mit $\sigma(Y) \geq k+1$ und $k \geq 0$

$$\Phi_{k+1}(Y, X) \equiv \Phi_{k+1}(\overline{Y^{(k)}}, X) . \tag{2}$$

An Hand der Definitionsgleichungen für $\Phi_t(Y, Z)$ zeigt man leicht, daß die Eigenschaften der Funktionen $F_t(Y, Z)$, die in den Sätzen 77 bis 82 und 88 ausgedrückt sind, sich auf die Funktionen $\Phi_t(Y, Z)$ übertragen. Insbesondere besitzen diese Funktionen sogenannte «*kritische Stellen*», das heißt Lösungen der Gleichung $\Phi_t(Y, Z) = Z$. Sei nun $Z^*$ so eine kritische Stelle, so muß nach Satz 82 $Z^*$ in Nf von der Form $Z^* \equiv \overline{Z^{*(t)}}$ sein. Ist nun $Y < Z^*$ und $\sigma(Y) > t$, so muß nach HLV bereits $\overline{Y^{(t)}} < \overline{Z^{*(t)}}$ sein. Dann gilt aber nach (2) und nach Satz 82: $\Phi_t(Y, Z^*) = \Phi_t(\overline{Y^{(t)}}, Z^*) = Z^*$. Setzen wir noch $\Phi_t(Y, Z) = Z$ für jedes $Y < Z$ mit $\sigma(Y) \leq t$ (da dann $\overline{Y^{(t)}} = 0$ ist), so ist für *jedes* $Y < Z^*$ $\Phi_t(Y, Z^*) = Z^*$ (im Gegensatz zu $F_t(Y, Z^*)$, wo $F_t(Y, Z^*) = Z^*$ nur für die $Y < Z^*$ von der Form $Y \equiv \overline{Y^{(t)}}$ gilt, vgl. Satz 82). Es ist also $Z^*$ eine *Hauptzahl* von $\Phi_t(Y, Z)$, und diese Funktion ist danach eine Normalfunktion in bezug auf das zweite Argument.

Durch transfinite Induktion nach $Z$ kann man unter Benützung der Sätze 82 und 88 leicht zeigen, daß die Funktion $\Phi_{t+1}(Y, Z)$[19]) von $Z$ genau alle Hauptzahlen (die eventuell noch zu vereinfachen sind) von $\Phi_t(Y, X)$ enthält. $\Phi_{t+1}(Y, Z)$ ist also die sogenannte *Ableitung* von $\Phi_t(Y, X)$ und ist ihrerseits auch eine Normalfunktion «in $Z$».

Man hat dann weiter nach Satz 82: $U_{(p+1)} = [0, \ldots, 0, 1]$ ist die kleinste gemeinsame Hauptzahl für alle Funktionen $\Phi_t(Y, X)$ mit $t \leq p$.

Nach Heranziehung der Sätze 83 und 84 und der Funktionen $\Phi_k(Y, Z)$ kann man auch jeden Ausdruck als *Wert einer Normalfunktion von kleineren Argumenten* erreichen. Dies soll aber hier nicht näher ausgeführt werden.

---

[19]) Es ist sogar $[0, \ldots, 0, 0, Y_{k+1} + Z, Y_{k+2}, \ldots, Y_s] = Z^*$ die $Z$-te Hauptzahl von $\Phi_k(Y, X)$ oberhalb $Y$. Ist $Z^*$ zugleich noch Hauptzahl von $\Phi_{k+i}(Y, X)$ für $i > 0$, so ist $Z^*$ einer Vereinfachung fähig.

2. *Multiplikation und Potenz* [20])

Als weitere Normalfunktionen führen wir noch die *Multiplikation* $f_2(X, Y)$ und die *Potenz* $f_3(X, Y)$ ein. Wird hier die Addition $\Phi_1(X, Y) = f_1(X, Y)$ gesetzt, so ist bekanntlich für $X > 0$ $f_2(X, Y)$ bzw. $f_3(X, Y)$ durch die folgenden Rekursionen charakterisiert:

$$\begin{aligned} &f_2(X, 0) = 0\\ &f_2(X, Y+1) = f_1(f_2(X, Y), X)\\ &f_2(X, \lim Y^{(n)}) = \lim f_2(X, Y^{(n)}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &f_3(X, 0) = 1\\ &f_3(X, Y+1) = f_2(f_3(X, Y), X)\\ &f_3(X, \lim Y^{(n)}) = \lim f_3(X, Y^{(n)})\,. \end{aligned}$$

Auf ähnliche Weise kann man bekanntlich «*höhere arithmetische Funktionen*» $f_k(X, Y)$ bilden.

Setzen wir wie üblich $f_2(X, Y) = X \times Y$, so ergibt sich etwa durch transfinite Induktion nach $Y$, daß die folgenden **Formeln** die Rekursionsgleichungen für $f_2(X, Y)$ erfüllen:

$$X \times 0 = 0\,,$$

$$m \times n \quad \text{mit üblicher Bedeutung,}$$

$$m > 0 \ \text{ und } \ Y \geq [0, 1], \ \text{ so } \ m \times Y = [m \times Y_1, Y_2, \ldots, Y_s]\,,$$

$$X \geq [0, 1], \ \text{ so } \ X \times (n+1) = [X_1 + X \times n, X_2, \ldots, X_p]\,, \tag{1}$$

$$X \geq [0, 1] \ \text{ und } \ Y \geq [0, 1]\,, \ \text{ so}$$
$$X \times Y = [X \times Y_1, X_2 + [Y_2, 0, Y_3, \ldots, Y_s], X_3, \ldots, X_p]\ ^{21)}. \tag{2}$$

Bekanntlich folgt aus den Definitionsgleichungen für $f_2(X, Y)$ das rechtseitige Distributive Gesetz: $X \times (Y + Z) = X \times Y + X \times Z$ sowie das Assoziativgesetz. Speziell folgt noch aus (2):

$$Z \times [0, 1] = [0, Z_2 + 1, Z_3, \ldots, Z_r] = \lim (Z \times n) \tag{2.1}$$

gemäß Satz 85.

Für die Richtigkeit der *Gleichung* $X \times Y = Y$ für ein $X$ muß nach Formel (2) $Y$ folgende **Bedingungen** erfüllen:

(1) $Y_1 = 0$ und $\sigma(Y) > 1$

(2a) Im Falle $\sigma(Y) = 2 : \overline{Y}_2^{(1)} > \overline{X}_2^{(1)}$. Es ist dann also nach Satz 73 $X_2 + Y_2 = Y_2$ und $X \times Y = [0, Y_2] = Y$.

---

[20]) Vgl. dazu W. Sierpinski, Leçons sur les nombres transfinis (Gauthier-Villars, Paris 1928), chap. X, oder Finsler, Literaturverzeichnis [6], oder Bachmann [8].

[21]) Es ist zum Beispiel $[0, X_2] \times [0, Y_2] = [0, X_2 + Y_2]$, $[0, X_2] \times [0, Y_2, Y_3] = [0, X_2 + [Y_2, 0, Y_3]]$ $[0, X_2, X_3] \times [0, Y_2] = [0, X_2 + Y_2, X_3]$. Die Formel (2) wird hiernach besser verständlich, wenn man auf $Y$ die Amplifikation $A_2 Y = [Y_1, [Y_2, 0, Y_3, \ldots, Y_s]]$ ausübt und das distributive Gesetz $X \times Y = X \times (Y^{(1)} + Y_1)$ anwendet.

(2b) Im Falle $\sigma(Y) > 2$, so $\overline{Y}^{(2)} > \overline{X}^{(2)}$. Da $\overline{X}_2^{(1)} \leq \overline{X}^{(2)}$, so folgt dann von selbst

$$X_2 + [Y_2, 0, Y_3, \ldots, Y_s] = [Y_2, 0, Y_3, \ldots, Y_s] .$$

Nach Vereinfachung und Reduktion ergibt sich dann

$$[0, [Y_2, 0, Y_3, \ldots, Y_s], X_3, \ldots, X_p] = [0, Y_2, Y_3, \ldots, Y_s] = Y .$$

Es muß also jedenfalls $\sigma(Y) \geq 2$ sein. Nach der obigen Rechnung sind auch diese Bedingungen hinreichend. Fragt man nach der Gestalt von $Y$, damit $X \times Y = Y$ für *alle* $X < Y$ gilt, so ergibt sich nach den obigen Bedingungen und nach Satz 73 die folgende Beschaffenheit:

($\alpha$) $\sigma(Y) > 1$ und $Y_1 = 0$, und entweder
($\beta$a) $\sigma(Y) = 2$ und $\sigma(Y_2) \geq 2$ und $Y_{21} = 0$ oder
($\beta$b) $\sigma(Y) > 2$ und $Y_2 = 0$.

Ist $Y$ von dieser Gestalt und $X < Y$, so müssen die in (2a) bzw. in (2b) angegebenen Bedingungen erfüllt sein und somit $X \times Y = Y$ gelten. Die Ausdrücke $Y$ von dieser Gestalt haben also die charakteristische Eigenschaft der «*multiplikativen (transfiniten) Hauptzahlen*». Es sind z.B. $[0, [0, 2, 1]]$ und $[0, 0, 1]$ solche Ausdrücke. Man verifiziert, daß nach ($\alpha$) die genannten $Y$ auch die Eigenschaften der additiven Hauptzahlen besitzen (vgl. Folge zu Satz 73).

Wir geben noch kurz einige **Formeln** für die **Potenz** an. Durch Induktion nach $n$ bekommt man:

$$Z^{n+1} = f_3(Z, n+1) = [Z^n \times Z_1, Z_2 + [Z_2, 0, Z_3, \ldots, Z_s] \times n, Z_3, \ldots, Z_s] .^{22)} \quad (3)$$

Bemerken wir, daß $f_3(\overline{Z}^{(1)}, n) \leq Z^n < f_3(\overline{Z}^{(1)}, n+1)$ ist, so folgt nach den Stetigkeitseigenschaften der $f_k(X, Y)$, Satz 87 und 88 und der Formel (2.1) für $\sigma(Z) > 2$:

$$\begin{aligned} \lim Z^n = \lim f_3(\overline{Z}^{(1)}, n) &= [0, [0, 1, Z_3, \ldots, Z_s], Z_3, \ldots, Z_s] = \\ &= [0, [0, 1, Z_3, \ldots, Z_s]] \text{ nach Vereinfachung.} \end{aligned} \quad (4)$$

Für $\sigma(Z) = 2$ hat man durch eine ähnliche Überlegung:

$$f_3([Z_1, Z_2], [0, 1]) = [0, Z_2 \times [0, 1]] . \quad (4.1)$$

Durch transfinite Induktion nach $Y$ hat man allgemeiner

$$f_3([Z_1, Z_2], Y) = [0, [Z_2 \times Y]] . \quad (4.2)$$

---

[22]) Man hat zum Beispiel unter Verwendung der Amplifikation $A_2[0, 0, 1]$: $f_3([0, 0, 1], n+1) = f_3([0, [0, 0, 1]], n+1) = [0, [0, 0, 1] \times (n+1)]$, was nach Reduktion $R_2$, die hier ausführbar ist, $[0, [0, 0, 1] \times n, 1]$ ergibt. Dies entspricht genau der Rechnung:

$$\varepsilon_1^{n+1} = (\omega^{\varepsilon_1})^{n+1} = \omega^{\varepsilon_1 \times (n+1)} = \varepsilon_1 \times \omega^{\varepsilon_1 \times n} .$$

Durch transfinite Induktion nach $X$ hat man weiter

$$f_3(Z,[0,X]) = [0,[0,X,Z_3,\ldots,Z_s],Z_3,\ldots,Z_s] = [0,[0,X,Z_3,\ldots,Z_s]] \quad (5)$$

nach Vereinfachung. Unter Benützung der «Stetigkeit» von $f_3(Z,X)$ und nach transfiniter Induktion nach $X$ bzw. nach $X_2$ erhält man die Formeln:

$$f_3(Z,[0,0,X]) = [0,[0,[0,0,X],Z_3,\ldots,Z_s]] \quad (6)$$

nach Vereinfachung, und

$$f_3(Z,[0,X_2,X_3]) = [0,[0,[X_2,0,X_3],Z_3,\ldots,Z_s]]\,. \quad (7)$$

Zur allgemeinen Formel $f_3(Z,X)$ ist folgendes zu bemerken: Aus den Definitionsgleichungen für $f_3(Z,X)$ kann man auf bekannte Weise die Richtigkeit der Gesetze

$$f_3(f_3(Z,X),Y) = f_3(Z,f_2(X,Y))$$
$$f_2(f_3(Z,X),f_3(Z,Y)) = f_3(Z,f_1(X,Y))$$

nachweisen. Da $X = \overline{X}^{(1)} + X_1$ ist, so hat man

$$f_3(Z,X) = f_3(Z,\overline{X}^{(1)}) \times f_3(Z,X_1)\,.$$

Wir geben also hier nur noch die Formel für $f_3(Z,\overline{X}^{(1)})$ an:

$$f_3(Z,[0,X_2,\ldots,X_p]) = [0,[0,[X_2,0,X_3,\ldots,X_p],Z_3,\ldots,Z_s]]\,. \quad (8)$$

Gilt speziell $\overline{X}^{(2)} > \overline{Z}^{(2)}$, so ergibt sich die folgende Vereinfachung:

$$f_3(Z,\overline{X}^{(1)}) = [0,[0,[X_2,0,X_3,\ldots,X_p]]]\,,$$

was weiter nach Reduktion $R_{22}$

$$f_3(Z,\overline{X}^{(1)}) = [0,[0,X_2,X_3,\ldots,X_p]] \quad (8.1)$$

ergibt.

Sind also in $X$ die ersten zwei Glieder $X_1 = X_2 = 0$ und $\sigma(X) \geq 3$, so ist noch in (8.1) die Reduktion $R_2$ ausführbar; dann ist

$$f_3(Z,[0,0,X_3,\ldots,X_p]) = [0,0,X_3,\ldots,X_p]\,. \quad (8.2)$$

Die «*kritischen*» Ausdrücke der Potenzfunktion sind also (in Nf) von der Form $X' \equiv [0,0,X_3,\ldots,X_p]$, da dann für jedes $Z < X'$ auch $\overline{Z}^{(2)} < \overline{X}'^{(2)}$ gilt, folglich ist nach (8.2) $f_3(Z,X') = X'$.

$X'$ hat also die charakteristische Eigenschaft der *Epsilonzahlen*.

## Anhang. Zuordnung zur Cantorschen Schreibweise

Es ist $[0,1] = \omega$ und nach den Formeln (4) $[a,b] = \omega^b + a$. Zum Beispiel ist $[[1,3],3] = \omega^3 + \omega^3 + 1 = \omega^3 \times 2 + 1$ und $[0,[0,1]] = \omega^\omega$. Nach (8.2) ist $[0,0,1] = \varepsilon_1$ die kleinste Epsilonzahl (statt der üblichen

Bezeichnung $\varepsilon_0$). Durch transfinite Induktion nach $c$ ist weiter $[0, 0, c] = \varepsilon_c$ und $[a, b, c] = A_2[a, b, c] = [a, [b, 0, c]] = \omega^{\varepsilon c+b} + a = \varepsilon_c \times \omega^b + a$. Zum Beispiel ist $[0, 0, [0, 0, 1]] = \varepsilon_{\varepsilon_1}$, $[0, 1, 1] = \varepsilon_1 \times \omega$, $[0, [0, 0, 1], 1] = = \varepsilon_1 \times \omega^{\varepsilon_1} = \varepsilon_1^2$, $[0, [0, 1, 1]] = \omega^{\varepsilon_1 \times \omega} = \varepsilon_1^\omega$, $[0, [0, [0, 0, 1], 1]] = = [0, \varepsilon_1^2] = \omega^{\varepsilon_1^2} = (\omega^{\varepsilon_1})^{\varepsilon_1} = \varepsilon_1^{\varepsilon_1}$. Ist $Z^{(1)} = [0, 0, 1] = \varepsilon_1$, $Z^{(n+1)} = [0, 0, Z^{(n)}] = \varepsilon_{Z^{(n)}}$, so ist nach Satz 84 $Z^{(\omega)} = \lim Z^{(n)} = [0, 0, 0, 1] = \zeta_1$ die erste kritische $\varepsilon$-Zahl, bei der die übliche Schreibweise aufhört. Man hat auch, zum Beispiel durch Ausführung einer Reduktion, $R_3[0, 0, \zeta_1] = \zeta_1$, wie es sein soll. Weiter ist $[0, 0, 0, d] = \zeta_d$ die $d$-te kritische $\varepsilon$-Zahl (etwa nach Satz 90 und transfiniter Induktion nach $d$); dann hat man $[a, b, c, d] = [a, b, [c, 0, 0, d]]$ (Anwendung der Amplifikation $A_3$), also nach den obigen Formeln $[a, b, c, d] = \varepsilon_{\zeta_d + c} \times \omega^b + a$.

Diese Zuordnungsweise gestattet eine naheliegende **Verallgemeinerung,** zu der wir noch kurz einige Bemerkungen anschließen. Schreibt man zunächst statt $\omega^\alpha : \omega_\alpha$ (nicht zu verwechseln mit der üblichen Bezeichnung für die Anfangszahl der $2 + \alpha$-ten Zahlklasse) und benützt «die Amplifikation» $\varepsilon_\gamma \times \omega_\beta = \omega_{\varepsilon_\gamma + \beta}$, so kann man die Ordnungszahlen, die $[a, b, c]$ bzw. $[a, b, c, d]$ gleich sind, noch so schreiben:

$$[a, b, c] = \omega_{\varepsilon_c + b} + a \quad \text{und} \quad [a, b, c, d] = \omega_{\varepsilon_{\zeta_d + c} + b} + a\,.$$

Nun kann man leicht einsehen (etwa durch Induktion nach $p$ und Benützung des Satzes 84), daß zur Fortsetzung der Cantorschen Bezeichnungsweise für jeden Ausdruck $U_{(p)} = [0, \ldots, 0, 1]$ mit $\sigma(U_{(p)}) = p$ ein *neues Zeichen*, zum Beispiel $\Theta_1^{(p)}$, eingeführt werden muß. Durch transfinite Induktion über $Z_p$ hat man

$$[0, \ldots, 0, Z_p] = \Theta_{Z_p}^{(p)} \tag{$\alpha$}$$

und danach $[Z_1, 0, \ldots, 0, Z_p] = \Theta_{Z_p}^{(p)} + Z_1$ [24]).

**Satz 91.** Jeder Ausdruck $Z = [Z_1, Z_2, \ldots, Z_p]$ läßt sich in der Form $Z' \equiv [Z_1, [Z_2, 0, [Z_3, 0, \ldots, [Z_{p-1}, 0, \ldots, 0, Z_p] \ldots]]]$ schreiben; dabei stehen nach jedem Term $Z_k$ $k - 1$ Nullen als Terme.

Beweis: Die Anwendung der Amplifikationsreihe

$$A_2(A_3(\ldots (A_{p-1} Z) \ldots)) \equiv Z'$$

---

[23]) Es entspricht dieser Zahl für $\varphi(x) = 1 + x$ das Schüttesche $\varphi$-Zahlzeichen (die zweiten Zeilen mögen hier weggelassen bleiben): $\varphi(a^* (b^* (c^* (d^* \; 1 \; 1)) \; 0 \; 1))$, wobei $a^*$ usw. den $a, b, c, d$ entsprechende $\varphi$-Zahlzeichen sind.

[24]) Dabei sollen $Z_p$ und $Z_1$ gleichzeitig die Cantorsche Bezeichnung für die $Z_p$ bzw. $Z_1$ gleiche Ordnungszahl bedeuten.

leistet das Gewünschte. Durch Induktion nach $N(Z)$ kann man weiter zeigen, daß eine analoge Darstellung für alle Terme $Z_\alpha$, mit $\sigma(Z_\alpha) > 1$, gilt.

Diese Betrachtungen zeigen, daß man zu jeder Ordnungszahl $\psi$ in CANTORscher Schreibweise eine Darstellung, wo nur Indizes und «$+$»-Zeichen als Operationen verwendet werden (wie zum Beispiel oben für $\psi = [a, b, c, d]$), angeben kann *(Indexform)*. Mit Hilfe von $(\alpha)$ und des Satzes 91 kann man die Sätze über den Vergleich von $Z$-Ausdrücken auf diese Indexformen übertragen. Da $CH(U_{(p)}) = p$ ist, so kann man insbesondere leicht die Charakteristik einer Ordinalzahl in Indexform aufschreiben; bei dem Vergleich der auf diese Weise dargestellten Ordinalzahlen kann also u.a. der Satz 47 gute Dienste leisten.

Z. B. ist $\psi = \varepsilon_{\zeta_{\zeta_\omega}+\zeta_{\varepsilon_1}} < \psi' = \zeta_{\zeta_{\varepsilon_1}}$, weil $CH(\psi) = 442 < CH(\psi') = 443$.

## Ausblick

Die *Grenzzahl* des hier behandelten Abschnittes der zweiten Zahlklasse ist die Ordinalzahl $U^* = \lim U_{(p)}$, die wir zweckmäßigerweise durch $U_{([0,1])} = [1_{[0,1]}]$ bezeichnen können. Unter Benützung der hier entwickelten Theorie der $Z$-Ausdrücke mit *endlicher* Stellenzahl, kann man aber auf geeignete Weise den Aufbau der Ausdrücke mit *transfiniter* Stellenzahl über $U_{([0,1])}$ fortsetzen. (Dabei kann man zeigen, daß man zur Darstellung eines Ausdruckes mit einer endlichen Klammernanzahl auskommen kann.) Ist $T^{(1)} = [1_{[0,1]}]$ und $T^{(n+1)} = [1_{T^{(n)}}]$, so ist $\lim T^{(n)} = Z^*$ die Grenzzahl des so erweiterten Systems. Für diese Zahl gilt $\sigma(Z^*) = Z^*$, das heißt $Z^*$ ist eine Zahl, die – im System der $Z$-Ausdrücke – gleich ihrer Stellenzahl ist. Um die zweite Zahlklasse über diese Zahl weiter fortzubauen, muß man für $Z^*$ ein neues (Klammer-) Zeichen einführen.


LITERATUR

[1] O. VEBLEN, *Continous increasing functions of finite and transfinite ordinals.* Trans. Amer. Math. Soc. *9* (1908), 280.

[2] A. CHURCH and S. C. KLEENE, *Formal definitions in the theory of ordinal numbers.* Fund Math. *28* (1937), 11.

[3] A. CHURCH, *The constructive second number class.* Bull. Amer. Math. Soc. *44* (1938), 224–232.

[4] W. ACKERMANN, *Konstruktiver Aufbau eines Abschnittes der zweiten* CANTOR*schen Zahlklasse.* Math. Z. *53* (1951), 403.

[5] H. BACHMANN, *Die Normalfunktionen und das Problem der ausgez. Folgen von Ordnungszahlen.* Vierteljschr. Naturforsch. Ges. Zürich *95* (1950), 115–147.

[6] P. FINSLER, *Eine transfinite Folge arithmetischer Funktionen.* Comment. Math. Helvet. *25* (1951), 75–90.

[7] K. SCHÜTTE, *Kennzeichnung von Ordnungszahlen durch rekursiv erklärte Funktionen.* Math. Ann. *127* (1954), 15.

[8] H. BACHMANN, *Transfinite Zahlen* (Springer, Berlin 1955).


(Eingegangen den 30. August 1960)