Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 35 (1961)

Artikel: Über die Homotopie- und Cohomologiegruppen von Abbildungen.

Autor: Curjel, Caspar Robert

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27344

Über die Homotopie- und Cohomologiegruppen von Abbildungen[1])

Von Caspar Robert Curjel, Zürich

Einleitung und Zusammenfassung

Es werde eine stetige Abbildung f des Raumes X in den Raum Y betrachtet, $f: X \to Y$. Zur Untersuchung einer solchen Abbildung haben Eckmann-Hilton in der Note «Groupes d'homotopie. Suites exactes» (vgl. [2] des Literaturverzeichnisses am Schluß dieser Arbeit) unter Umgehung des Begriffes des Abbildungszylinders «Homotopiegruppen der Abbildung f» definiert und diese mit $\Pi_n(A, f)$ und $\Pi_n(f, A)$ bezeichnet. Dabei ist A ein festgewählter Raum, der die Rolle eines Koeffizientenbereichs spielt. Ist f eine Einbettung $X \subset Y$, so reduzieren sich diese Gruppen auf die relativen Hurewiczschen Homotopiegruppen von $Y \bmod X$ bzw. auf die relativen Cohomologiegruppen, falls für A eine Sphäre bzw. ein Eilenberg-MacLanescher Raum eingesetzt wird. Die $\Pi_n(A, f)$ treten zusammen mit entsprechenden «absoluten» Gruppen $\Pi_n(A, X)$ in einer exakten Folge auf (vgl. [2]):

$$\to \Pi_n(A, X) \xrightarrow{f_*} \Pi_n(A, Y) \xrightarrow{J} \Pi_n(A, f) \xrightarrow{\partial} \Pi_{n-1}(A, X) \to$$

und geben somit an, wie weit der von f induzierte Homomorphismus f_* davon entfernt ist, ein Isomorphismus zu sein (für die $\Pi_n(f, A)$ existiert eine analoge Folge). Im weiteren Verlauf dieser Einleitung und Zusammenfassung bezeichnen wir kurz mit $\Pi_n(f)$ entweder $\Pi_n(A, f)$ oder $\Pi_n(f, A)$ und mit $\Pi_n(X)$ entweder $\Pi_n(A, X)$ oder $\Pi_n(X, A)$.

Die vorliegende Arbeit leistet einen Beitrag zur Untersuchung der Gruppen $\Pi_n(f)$. Dabei sind wir von der folgenden Fragestellung ausgegangen: Zu den elementarsten Operationen, die mit einer stetigen Abbildung f eines Raumes X in den Raum Y in der Homotopietheorie vorgenommen werden, gehören *erstens* der Übergang zu einer homotopen Abbildung f' und *zweitens* – unter geeigneten Voraussetzungen über X oder Y – die Bildung des Produktes $f \cdot g$ zweier Abbildungen f und g, durch welches in der Menge $\Pi(X, Y)$ der Homotopieklassen von Abbildungen, kurz: in der Homotopiemenge $\Pi(X, Y)$, eine Gruppenstruktur definiert wird. Welche Wirkung haben nun diese mit f vorgenommenen Operationen auf die Struktur der Gruppen $\Pi_n(f)$?

Die Beziehungen zwischen den Homotopiegruppen $\Pi_n(f)$ und $\Pi_n(f')$ von

---

[1]) Die Ausführung dieser Arbeit wurde teilweise durch eine Zuwendung des Schweizerischen Nationalfonds zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung erleichtert.

homotopen Abbildungen f und f' werden für $n \geq 2$ in 1.3. bis 1.5. untersucht. Es stellt sich heraus, daß jede Deformation Φ von f in f' «Deformationsisomorphismen» D_Φ erzeugt:

$$D_\Phi : \Pi_n(f) \cong \Pi_n(f') , \qquad n \geq 2 .$$

Verschiedene Deformationen Φ, Ψ von f in f' erzeugen verschiedene Deformationsisomorphismen, deren Differenz im folgenden Sinne durch Untergruppen von $\Pi_n(f')$ charakterisiert wird (Sätze 1 und 2): Für jedes $\alpha \in \Pi_n(f)$ existiert eine von α abhängige Untergruppe Δ_α von $\Pi_n(f')$ mit den Eigenschaften, daß $D_\Phi(\alpha) - D_\Psi(\alpha)$ in Δ_α liegt:

$$D_\Phi(\alpha) - D_\Psi(\alpha) = d^* \in \Delta_\alpha \subset \Pi_n(f') ,$$

und daß es umgekehrt zu vorgegebenen Φ, α und $d^* \in \Delta_\alpha$ eine Deformation Ψ von f in f' gibt, für welche diese Beziehung erfüllt ist (in 1.4. wird Δ_α ausführlich mit $J\Delta(\partial\alpha, f, f')$ bezeichnet). Daraus ergibt sich eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß zwischen $\Pi_n(f)$ und $\Pi_n(f')$ ein von den verschiedenen möglichen Deformationen *unabhängiger* Isomorphismus existiert. Die Untersuchung derselben Frage im Fall $n = 1$ (2.1. bis 2.3.) wird dadurch erschwert, daß $\Pi_1(f)$ und $\Pi_1(f')$ keine Gruppen mehr, sondern nur noch Homotopie*mengen* sind. Um für diese ebenso vollständige Resultate zu erhalten, beschränken wir uns auf nullhomotope Abbildungen f. Dabei wird in 2.2. die Operation T der «Transposition» eingeführt, um einen Zusammenhang zwischen Homotopien in der Kategorie der Paare (vgl. [2]) und Deformationsisomorphismen herzustellen. Sie ist eine Abänderung der von ECKMANN-HILTON in [7] definierten Transposition und werde der Einfachheit halber mit demselben Namen bezeichnet.

Die bisher gewonnenen Ergebnisse werden in 3.1. bis 3.5. angewendet und weiter verfolgt. Wir betrachten Paare (ξ, η) von Abbildungen, deren Zusammensetzung nullhomotop ist:

$$X \xrightarrow{\xi} Y \xrightarrow{\eta} Z , \qquad \eta\xi \sim o ,$$

und nennen in Anlehnung an [4] ein solches Paar ein «homotopie-differentielles» (h-d) Tripel. Für ein h-d Tripel (ξ, η) und einen weiteren beliebigen Raum A wird in 3.2. eine Operation $\mathfrak{H}$ definiert[2]). Sie hängt nur von den Homotopieklassen $[\xi]$, $[\eta]$ der Abbildungen ξ, η ab und ordnet jedem Element α einer Teilmenge $\Pi(A, X)_0$ von $\Pi(A, X)$ – oder einer Untergruppe, je nach den Voraussetzungen über A – ein Element der Faktorgruppe $\Pi(\Sigma A, Z)/L_\alpha$ zu (Sätze 6, 7); dabei bezeichnet ΣA die Einhängung von A und L_α eine vom Argument α abhängige Untergruppe von $\Pi(\Sigma A, Z)$. Die Operation $\mathfrak{H}$ kann als

---

[2]) Wie wir erfahren haben, hat unabhänig von uns E. H. SPANIER dieselbe Operation untersucht.

eine Verallgemeinerung der HOPFschen Invariante für Abbildungen der S^{2n-1} auf die S^n betrachtet werden, da für ein geeignetes h-d Tripel $\mathfrak{H}$ eine funktionale Cohomologie-Operation (vgl. [9], [10]) ist. Des weitern kommen zur Sprache: Ein allgemeiner Beweis des Satzes von PETERSON-THOMAS [11] über den Wertebereich einer funktionalen Cohomologie-Operation in 3.3. und sein Analogon für funktionale Homotopie-Operationen in 3.5.; Zusammenhänge zwischen Anheftungsabbildungen in Komplexen und Cohomologie-Operationen in ihnen in 3.4. sowie die dazu duale Frage – Zusammenhänge zwischen den POSTNIKOV-Faktoren und Homotopie-Operationen – in 3.5.

Die Frage nach der Wirkung der Produktbildung von Abbildungen auf ihre Homotopiegruppen wird in 4.1. bis 4.3. behandelt. Es wird also vorausgesetzt, daß die Homotopiemenge $\Pi(X, Y)$ eine Gruppenstruktur besitzt. Mit Hilfe der Erweiterungstheorie ABELscher Gruppen und der Ergebnisse von 2.3. erhält man einen Homomorphismus P, der eine Untergruppe $\Pi(X, Y)_*$ von $\Pi(X, Y)$ – $\Pi(X, Y)_*$ wird in 4.1. ausführlich mit $\Pi(X, Y)_{1,0}$ bezeichnet – in ein Extensionsprodukt der Homotopiegruppen von X und Y abbildet:

$$P : \Pi(X, Y)_* \to \operatorname{Ext}\,(\Pi_*(X), \Pi_*(Y))\ .$$

Er beschreibt die Wirkung der Multiplikation von Elementen aus $\Pi(X, Y)_*$ auf ihre Homotopiegruppen und verallgemeinert die Koeffiziententheoreme für die Homotopie- und Cohomologiegruppen in dem Sinne, daß in einer bestimmten Situation der Bildbereich von P gerade der Ext-Term der Koeffizientenformeln ist (Satz 11). In [14] hat MASSEY ein algebraisches Analogon von P untersucht; unser P ist aber geometrischer Natur und scheint auch Anwendungen ganz anderer Art zu haben, auf welche im Rahmen dieser Arbeit nicht eingegangen wird.

Die hauptsächlichsten Begriffsbildungen und Sätze lassen sich im Sinne von [1] dualisieren. Die Überlegungen werden aber jeweils nur auf einer Seite vollständig durchgeführt.

Diese Arbeit geht auf eine Anregung von Herrn Prof. B. ECKMANN zurück. Für sein stetes Interesse an meinen Untersuchungen sowie seine vielen Hinweise dazu sei ihm an dieser Stelle freundlichst gedankt. Ferner danke ich Herrn Prof. P. HILTON für verschiedene konstruktive Fragen.

Terminologie

Im allgemeinen werden die Definitionen und Bezeichnungen von [1] bis [6] verwendet.

Alle Räume $X, Y, \ldots$ seien durch Wege zusammenhängend und mit einem Basispunkt o versehen, der von den Abbildungen $f, g \ldots : X \to Y, \ldots$ und deren Homotopien $f \sim f'$ respektiert werde. Mit o wird auch die konstante Abbildung eines Raumes in einen anderen bezeichnet. Es seien:

$\Pi(X, Y)$ die Homotopiemenge von Abbildungen $f: X \to Y$; $[f]$ die Homotopieklasse von f; M bzw. M' die Multiplikation bzw. Comultiplikation in einem H- bzw. H'-Raum; I das Intervall $[0, 1]$; $CX = X \times I/X \times 1 \cup o \times I$ der Kegel über X; $\Sigma X = X \times I/X \times 0 \cup X \times 1 \cup o \times I$ die Einhängung von X; EX der Raum aller von o ausgehenden Wege in X; ΩX der Schleifenraum in o von X.

Zwei Abbildungen $f, g: CA \to Y$, die auf A übereinstimmen, definieren ein Trennungselement $d(f, g)$ wie folgt: Für $(a, t) \in \Sigma A$ ist

$$\begin{aligned} d(f, g)(a, t) &= f(a, 1-2t)\,, \quad 0 \leq t \leq 1/2\,; \\ &= g(a, 2t-1)\,, \quad 1/2 \leq t \leq 1\,. \end{aligned}$$

Ebenso definieren zwei Abbildungen $f, g: A \to EY$ mit $pf = pg$, $p: EY \to Y$, ein $d(f, g): A \to \Omega Y$. Für diese Trennungselemente (das heißt deren Homotopieklassen) gelten die üblichen Rechenregeln.

Für ABELsche Gruppen G werden mit $K(G, n)$ bzw. $K'(G, n)$ EILENBERG-MACLANEsche bzw. MOOREsche Räume bezeichnet. Sie werden jeweils so auf eine feste Art als CW-Komplexe realisiert vorausgesetzt, daß $K'(G, n)$ ein Teilpolyeder von $K(G, n)$ ist.

Unter der Cohomologiegruppe $H^n(X; G)$ des Raumes X mit Koeffizienten G verstehen wir durchwegs die Gruppe $\Pi(X, K(G, n))$. $\pi_n(X)$ ist die übliche HUREWICZsche Homotopiegruppe von X. Die «Homotopiegruppe von X mit Koeffizienten G» ist als $\Pi(K'(G, n), X)$ definiert und wird mit $\pi_n(G; X)$ bezeichnet werden.

1. Die Homotopiegruppen homotoper Abbildungen

1.1. Definition der Deformationsisomorphismen D_Φ. Bis und mit 1.5. sei $A = \Sigma^n A'$, $n \geq 1$, $i: A \to CA$. Dann besitzen für ein beliebiges $f: X \to Y$ die Homotopiemengen $\Pi(i, f)$ und $\Pi(A, X)$ Gruppenstrukturen; $\Pi(\Sigma^{-1} i, f)$ ist noch definiert, aber möglicherweise keine Gruppe mehr.

Wir betrachten eine bestimmte Deformation Φ von f in f' als eine Abbildung Φ von $M = X \times I$ in Y. j und j' seien die Einbettungen von X in $M: \Phi j = f$, $\Phi j' = f'$. In der exakten Tripelfolge [6] von $\Phi j = f$:

$$\longrightarrow \Pi(i, j) \xrightarrow{(Id, \Phi)} \Pi(i, f) \xrightarrow{(j, Id)_*} \Pi(i, \Phi) \xrightarrow{J\partial} \Pi(\Sigma^{-1} i, j)$$

ist die dimensionserniedrigende Abbildung von $\Pi(i, \Phi)$ in $\Pi(\Sigma^{-1} i, j)$ mit Hilfe der Folgen $S_*(j)$ und $S_*(\Phi)$ von [2] als $J\partial$ definiert:

$$\begin{tikzcd}
S_*(j): \arrow[r] & \Pi(A, X) \arrow[r, "j_*"] & \Pi(A, M) \arrow[r, "J"] & \Pi(\Sigma^{-1}i, j) \\
& & \Pi(i, \Phi) \arrow[u, "\partial"] & \\
& & S^*(\Phi) \,. \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

Da nun j eine Homotopieäquivalenz ist, ist $\Pi(i, j) = 0$ und J der Nullhomomorphismus: Aus der Tripelfolge von $\Phi j = f$ erhält man

$$0 \longrightarrow \Pi(i, f) \xrightarrow{(j, Id)_*} \Pi(i, \Phi) \longrightarrow 0\,,$$

und ebenso für $\Phi j' = f'$

$$0 \longrightarrow \Pi(i, f') \xrightarrow{(j', Id)_*} \Pi(i, \Phi) \longrightarrow 0\,.$$

Wir nennen $D_\Phi = (j', Id)_*^{-1}(j, Id)_* : \Pi(i, f) \cong \Pi(i, f')$ einen Deformationsisomorphismus. Er hängt von der zugrunde gelegten Deformation Φ von f in f' ab.

1.2. Die Standard-Deformation. Wir werden im folgenden explizit eine Abbildung angeben, welche auf den Homotopieklassen den Isomorphismus D_Φ erzeugt. Dazu benötigt man Lemma 1 und 2.

Lemma 1. $i: B \to CB$ ist für alle B eine Cofaserung.

Beweis. Z sei ein beliebiger Raum, $s: CB \to Z$, $r = si$:

$$\begin{tikzcd}
CB \arrow[r, "s"] & Z \\
B \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "r"'] &
\end{tikzcd}$$

Eine Deformation r_τ, $0 \leq \tau \leq 1$, kann auf die folgende Weise zu einer Deformation s_τ von s erweitert werden: Für $(b, t) \in CB$ sei

$$\begin{aligned}
s_\tau(b, t) &= r_{(1-t)(1+\tau)-1}(b)\,, && 0 \leq t \leq \tau/1+\tau\,; \\
&= s(b, 1-(1-t)(1+\tau))\,, && \tau/1+\tau \leq t \leq 1\,.
\end{aligned}$$

Anschaulich: Im Zeitpunkt τ der Deformation wird die (rückwärts durchlaufene) Erzeugende $b \times I$ von CB auf denjenigen Weg in Z abgebildet, der aus $s(b, I)$ und der von $s(b, 0) = r(b)$ von 0 bis τ zurückgelegten Strecke besteht.

Die Situation in diesem Lemma beschreiben wir kurz mit den Worten: Man folgt mit s der Deformation von r. Hat man im Laufe einer Untersuchung einer Deformation in diesem Sinne zu folgen, so verwende man die soeben angegebene *Standard-Deformation*. Lemma 2 besagt nun, daß die ausschließliche Verwendung von Standard-Deformationen keine Einschränkung bedeutet.

Lemma 2. Folgt man der Deformation r_τ auf zwei verschiedene Weisen s_τ und s'_τ:

$$\begin{tikzcd} CB \arrow[r, "{s_\tau, s'_\tau}"] & Z \\ B \arrow[u, "i"] \arrow[ur, "r_\tau"'] & \end{tikzcd} \qquad s_\tau i = s'_\tau i = r_\tau$$

so sind s_1 und s'_1 homotop unter Festhaltung von B:

$$[d(s_1, s'_1)] = 0 \in \Pi(\Sigma B, Z) .$$

Beweis. Es sei $(b, t) \in CB$. Die Deformation s^*_τ:

$$\begin{aligned} s^*_\tau(b, t) &= r_{1-2t}(b) , \qquad 0 \le t \le \tau/2 ; \\ &= s'_{1-\tau}\left(b, \frac{2}{2-\tau}(t-1)+1\right), \quad \tau/2 \le t \le 1 , \end{aligned}$$

führt s'_1 unter Festhaltung von $r_1(B)$ in das Endstadium s_1 der Standarddeformation von Lemma 1 über.

1.3. Beschreibung von D_Φ. Die Wirkung von $(j', Id)^{-1}_*$ auf eine Abbildung (u', v')

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "i"'] & M = X \times I \arrow[d, "\Phi"] \\ CA \arrow[r, "v'"] & Y \end{tikzcd} \qquad u'(a) = (u'_1(a), u'_2(a))$$

läßt sich im Sinne von 1.2. wie folgt beschreiben. Die Deformation von u' durch $u'_\tau = (u'_1, (1-u'_2)\tau + u'_2)$ in eine Abbildung von A in die Deckfläche von M erzeugt eine Deformation von $\Phi u'$. Folgt man dieser mit v, so geht (u', v') in eine Abbildung der Form $(j', Id)(u'', v'')$ über:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u'"] \arrow[d, "i"'] & M \arrow[d, "\Phi"] \\ CA \arrow[r, "v'"] & Y \end{tikzcd} \sim \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u''"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "f'"] & M \arrow[d, "\Phi"] \\ CA \arrow[r, "v''"] & Y \arrow[r, "Id"] & Y \end{tikzcd} ; \quad (j', Id)^{-1}_*[u', v'] = [u'', v''] .$$

Dabei ist u'' gerade die erste Komponente u'_1 von u'. Der Übergang von $[u, v] \in \Pi(i, f)$ zu $D_\Phi[u, v] = (j', Id)^{-1}_*(j, Id)_*[u, v]$ vollzieht sich somit dadurch, daß man in (u, v) das f durch Φ in f' deformiert und der so erzeugten Deformation von fu mit v folgt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ CA \arrow[r, "v"] & Y \end{tikzcd} \quad \xRightarrow{\Phi : f \sim f'} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f'"] \\ CA \arrow[r, "v_\Phi"] & Y \end{tikzcd} .$$

Die Zuordnung $(u, v) \to (u, v_\Phi)$ erzeugt auf den Homotopieklassen den Isomorphismus D_Φ und wird ebenfalls mit D_Φ bezeichnet werden. Man beachte, daß D_Φ die erste Komponente von (u, v) unverändert läßt.

Aus dieser Beschreibung von D_Φ folgt unmittelbar, daß D_Φ mit den Homomorphismen der Folgen $S_*(f)$ und $S_*(f')$ verträglich ist:

$$\begin{tikzcd} & & & \Pi(i,f) \arrow[dd, "D_\Phi"] \arrow[dr, "\partial"] & & \\ \arrow[r] & \Pi(\Sigma A, X) \arrow[r, "f_* = f'_*"] & \Pi(\Sigma A, Y) \arrow[ur, "J"] \arrow[dr, "J'"'] & & \Pi(A, X) \arrow[r] & {} \\ & & & \Pi(i,f') \arrow[ur, "\partial'"'] & & \end{tikzcd} .$$

Somit haben f und f' nicht nur isomorphe, sondern sogar im Sinne der Erweiterungstheorie der Gruppen äquivalente Homotopiegruppen. Da für $f = o$ die Gruppe $\Pi(i, f)$ in $\Pi(A, X) + \Pi(\Sigma A, Y)$ zerfällt, gilt das

Lemma 3. Für $f \sim o$ ist $\Pi(i, f) \cong \Pi(A, X) + \Pi(\Sigma A, Y)$.

1.4. Die Differenz zweier Deformationsisomorphismen. Es seien Φ und Ψ zwei verschiedene Deformationen von f in f' und $\alpha \in \Pi(i, f)$. Wie hängen $D_\Phi(\alpha)$ und $D_\Psi(\alpha)$ in $\Pi(i, f')$ zusammen?

Nach 1.3. sind die entsprechenden Deformationsisomorphismen D_Φ und D_Ψ mit ∂ und ∂' vertauschbar:

$$\begin{tikzcd} & \Pi(i,f) \arrow[dd, shift right, "D_\Phi"'] \arrow[dd, shift left, "D_\Psi"] \arrow[dr, "\partial"] & \\ \Pi(\Sigma A, Y) \arrow[ur, "J"] \arrow[dr, "J'"'] & & \Pi(A, X), \\ & \Pi(i,f') \arrow[ur, "\partial'"'] & \end{tikzcd} \quad \partial' D_\Phi = \partial' D_\Psi = \partial .$$

Da $\partial'(D_\Phi(\alpha) - D_\Psi(\alpha)) = 0$ ist, liegt $D_\Phi(\alpha) - D_\Psi(\alpha)$ im Bild von J: $D_\Phi(\alpha) - D_\Psi(\alpha) = J d^*$, $d^* \in \Pi(\Sigma A, Y)$. Ein solches d^* findet man zum Beispiel mit Hilfe des in 1.6. fomulierten Lemma 4 auf die folgende Weise. Durch D_Φ bzw. D_Ψ gehe eine Abbildung $(u, v), [u, v] = \alpha$, in (u, v_Φ) bzw. (u, v_Ψ) über:

$$D_\Phi(u,v): \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ CA & \xrightarrow{v_\Phi} & Y \end{array} \;; \qquad D_\Psi(u,v): \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f'} \\ CA & \xrightarrow{v_\Psi} & Y \end{array} .$$

Dann ist $D_\Phi[u,v] - D_\Psi[u,v] = J[d(v_\Psi, v_\Phi)]$. Nach Lemma 1 ist $v_\Phi(a,t)$ für ein $(a,t) \in CA$ durch

$$\begin{aligned} v_\Phi(a,t) &= \Phi(u(a), 1-2t)\,, & 0 \leq t \leq 1/2\,, \\ &= v(a, 2t-1)\,, & 1/2 \leq t \leq 1\,, \end{aligned}$$

gegeben; für v_Ψ ersetze man Φ durch Ψ. Bezeichnet man für ein $v: CA \to Y$ mit v^+ die Abbildung v auf der oberen Hälfte $CA^+ = \{(a,t), 1/2 \leq t \leq 1\}$ von CA und mit v^- dieselbe auf der verbleibenden unteren Hälfte CA^-, so gilt (unter Vernachlässigung der Parametrisierung bei v^-):

$$v_\Phi^+ = v_\Psi^+\,;\; v_\Phi^- = \Phi(u \times Id),\, v_\Psi^- = \Psi(u \times Id): A \times I \xrightarrow{u \times Id} X \times I \xrightarrow{\Phi, \Psi} Y\,.$$

Für Elemente wie $[d(v_\Psi, v_\Phi)]$ gilt der

Satz 1. *Die Elemente d^*, deren J-Bilder als Differenz zweier Deformationsisomorphismen auftreten:*

$$Jd^* = D_\Phi(\alpha) - D_\Psi(\alpha)$$

liegen in einer Untergruppe $\Delta(\partial\alpha, f, f') \subset \Pi(\Sigma A, Y)$. Genauer: $u: A \to X$, $f \sim f': X \to Y$ seien feste Abbildungen; Φ, Ψ Deformationen von f in f'. Dann bilden die Elemente $[d(v_1, v_2)] \in \Pi(\Sigma A, Y)$ der Form

$$\begin{aligned} &v_1, v_2: CA \to Y\,, \\ &v_1^+ = v_2^+\,, \\ &v_1^- = \Phi(u \times Id)\,, \\ &v_2^- = \Psi(u \times Id)\,, \qquad A \times I \xrightarrow{u \times Id} X \times I \xrightarrow{\Phi, \Psi} Y\,, \end{aligned}$$

eine Untergruppe $\Delta'(u, f, f')$, die nur von $[u]$ abhängt:

$$\Delta'(u, f, f') = \Delta([u], f, f')\,.$$

Beweis. a) 1,2 und 3,4 seien Abbildungen von CA in Y dieser Art: $1^+ = 2^+, \ldots$. Da A seit 1.1. als Einhängung vorausgesetzt ist, ist $\Pi(\Sigma A, Y)$ Abelsch. Deshalb gilt für die $[d(i,j)]$ auf Grund der allgemeinen Eigenschaften der Trennungselemente

$$[d(1,2)] - [d(3,4)] = [d(1,3)] + [d(4,2)]\,.$$

Bezeichnet man mit $1^-(a, 0 \to \frac{1}{2})$ usw. das Bild der gerichteten Teilstrecke von 0 bis $\frac{1}{2}$ der Erzeugenden von a in CA unter der Abbildung 1^-, so nimmt eine Abbildung d^* der Klasse $[d(1,3)] + [d(4,2)]$ auf $(a, t) \in \Sigma A$ die folgenden Werte an:

$$\begin{aligned}
d^*(a,t) = {} & 2^+(a, 1 \to \tfrac{1}{2}), && 0 \le t \le \tfrac{1}{8}, \\
& 2^-(a, \tfrac{1}{2} \to 0), && \tfrac{1}{8} \le t \le \tfrac{1}{4}, \\
& 4^-(a, 0 \to \tfrac{1}{2}), && \tfrac{1}{4} \le t \le \tfrac{3}{8}, \\
& 4^+(a, \tfrac{1}{2} \to 1), && \tfrac{3}{8} \le t \le \tfrac{1}{2}, \\
& 3^+(a, 1 \to \tfrac{1}{2}), && \tfrac{1}{2} \le t \le \tfrac{5}{8}, \\
& 3^-(a, \tfrac{1}{2} \to 0), && \tfrac{5}{8} \le t \le \tfrac{3}{4}, \\
& 1^-(a, 0 \to \tfrac{1}{2}), && \tfrac{3}{4} \le t \le \tfrac{7}{8}, \\
& 1^+(a, \tfrac{1}{2} \to 1), && \tfrac{7}{8} \le t \le 1.
\end{aligned}$$

Für t zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{8}$ durchläuft (a, t) denselben Weg, den er schon in umgekehrter Richtung von $\frac{3}{8}$ bis $\frac{1}{2}$ zurückgelegt hat. Deshalb ist d^* homotop zu einem d^{**}, in welchem 4^+ und 3^+ fehlen. Dann kann der Abschnitt zwischen 1^- und 4^- von unten nach oben als eine einzige Deformation von f in f' betrachtet werden. Das heißt, daß $[d^{**}] = [d(1,2)] - [d(3,4)]$ sehr wohl von der verlangten speziellen Form $[d(v_1, v_2)]$ ist.

b) Λ sei eine Deformation von u in u', $[d(v_1, v_2)] \in \Delta'(u, f, f')$. Wir zeigen, daß $[d(v_1, v_2)] \in \Delta'(u', f, f')$ ist, das heißt, daß es Abbildungen w_1, w_2: $CA \to Y$ gibt mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned}
w_1^+ &= w_2^+, \\
w_1^- &= \Phi(u' \times Id), \\
w_2^- &= \Psi(u' \times Id), \\
[d(w_1, w_2)] &= [d(v_1, v_2)].
\end{aligned}$$

Dazu unterteile man CA^+ in $CA^{+-} = \{(a, t), \frac{1}{2} \le t \le \frac{3}{4}\}$ und das oberste Viertel CA^{++} und definiere $w_1^+ = w_2^+$ auf CA^{++} als $v_1^+ = v_2^+$ und auf CA^{+-} als $f\Lambda : A \times I \xrightarrow{\Lambda} X \xrightarrow{f} Y$; Λ deformiert $\Phi(u \times Id)$ beziehungsweise $\Psi(u \times Id)$ in $\Phi(u' \times Id) = w_1^-$ beziehungsweise $\Psi(u' \times Id) = w_2^-$. $d(v_1, v_2)$ und $d(w_1, w_2)$ sind offensichtlich homotop. Folglich ist $\Delta'(u, f, f') \subset \Delta'(u', f, f')$; die umgekehrte Inklusion erhält man durch Vertauschung von u und u'. Das heißt, daß $\Delta'(u, f, f')$ nur von $[u]$ abhängt: $\Delta'(u, f, f') = \Delta([u], f, f')$. Damit ist Satz 1 ganz bewiesen.

Nach Definition von $\Delta(\partial\alpha, f, f')$ ist das J-Bild eines jeden Elementes daraus eine Differenz $D_\Phi(\alpha) - D_\Psi(\alpha + J\beta)$. Diese Aussage läßt sich verschärfen im

Satz 2. Es seien $\alpha \in \Pi(i, f)$, $\Phi: f \sim f'$ und $[d(w_1, w_2)] \in \Delta(\partial\alpha, f, f')$ gegeben. Dann existiert ein $\Psi: f \sim f'$ mit

$$D_\Phi(\alpha) - D_\Psi(\alpha) = J[d(w_1, w_2)] .$$

Beweis. $d(w_1, w_2)$ ist durch zwei Deformationen $\Lambda_1, \Lambda_2: f \sim f'$ charakterisiert. Definiert man Ψ als $\Phi\Lambda_2^{-1}\Lambda_1$, so ist $d(v_\Psi, v_\Phi)$ – eine Abbildung aus der Klasse der Differenz $D_\Phi(\alpha) - D_\Psi(\beta)$ – homotop zu $d(v_1, v_2)$ wobei

$$\begin{aligned} v_1^+ &= v_2^+ = v\,, \qquad [u, v] = \alpha\,; \\ v_1^- &= \Lambda_1(u \times Id)\,, \\ v_2^- &= \Lambda_2(u \times Id)\,. \end{aligned}$$

Ein d' der Klasse $[d(v_1, v_2)] - [d(w_1, w_2)] = [d(v_1, w_1)] + [d(w_2, v_2)]$ bildet die Erzeugende von a in ΣA wie folgt in Y ab:

$$\begin{aligned} d'(a, t) = v_2^+(a, 1 \to \tfrac{1}{2}) &= v(a, 1 \to \tfrac{1}{2})\,, & 0 \le t \le \tfrac{1}{8}\,, \\ v_2^-(a, \tfrac{1}{2} \to 0) &= \Lambda_2(u \times Id)(a, \tfrac{1}{2} \to 0)\,, & \tfrac{1}{8} \le t \le \tfrac{1}{4}\,, \\ w_2^-(a, 0 \to \tfrac{1}{2}) &= \Lambda_2(u \times Id)(a, 0 \to \tfrac{1}{2})\,, & \tfrac{1}{4} \le t \le \tfrac{3}{8}\,, \\ &\vdots & \\ v_1^+(a, \tfrac{1}{2} \to 1) &= v(a, \tfrac{1}{2} \to 1)\,, & \tfrac{7}{8} \le t \le 1\,. \end{aligned}$$

d' ist nullhomotop, da das Teilstück zwischen $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{4}$ entgegengesetzt gleich zum Teilstück zwischen $\frac{1}{4}$ und $\frac{3}{8}$ usw. abgebildet wird und das erste und letzte Stück sich auch aufheben. Somit hat $\Psi = \Phi\Lambda_2^{-1}\Lambda_1$ die gewünschte Eigenschaft

$$D_\Phi(\alpha) - D_\Psi(\alpha) = J[d(w_1, w_2)] .$$

1.5. Das in 1.4. benötigte Lemma 4. Es seien Abbildungen (r, s) und (r, s') gegeben:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ CA & \xrightarrow{s} & Y \end{array}\;; \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ CA & \xrightarrow{s'} & Y \end{array}\,.$$

Für die Differenz $[r, s] - [r, s']$ gilt das

Lemma 4. $[r, s] - [r, s'] = J[d(s', s)]$.

Beweis. $((r \vee o)M', s' \vee d(s', s)M')$ ist eine Abbildung der Klasse $[r, s'] + J[d(s', s)]$:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{M'} & A \vee A & \xrightarrow{r \vee o} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ CA & \xrightarrow{M'} & CA \vee CA & \xrightarrow{s' \vee d(s', s)} & Y \end{array}\,.$$

Bei der üblichen Deformation von $(r \vee o)M'$ in r geht $(s' \vee d(s', s))M'$ in ein s'' über (für CA^{++} usw. vgl. Satz 1):

$$\begin{aligned} s''(a, \tfrac{1}{2}) &= o \qquad \text{für alle } a\,, \\ s'' \mid CA^{-} &= s'\,, \\ s'' \mid CA^{+-} &= s'\,, \\ s'' \mid CA^{++} &= s\,. \end{aligned}$$

Da die aneinanderstoßenden Teile CA^- und CA^{+-} entgegengesetzt gleich abgebildet werden, kann (r, s'') unter Festhaltung von r in (r, s) deformiert werden. Somit ist $[r, s] = [r, s'] + [Jd(s', s)]$.

Mit Satz 1 und 2 ist die in der Einleitung und Zusammenfassung beschriebene Charakterisierung der Differenz von Deformationsisomorphismen $\Pi_n(A, f) \cong \Pi_n(A, f')$ für $n \geq 2$ durch Untergruppen von $\Pi_n(A, f')$ vollständig durchgeführt. *Die Deformationsisomorphismen sind genau dann von den zugrunde gelegten Deformationen von f in f' unabhängig, wenn die Untergruppen $J\Delta(\partial\alpha, f, f') \subset \Pi_n(A, f')$ für alle $\partial\alpha \in \Pi_{n-1}(A, X)$ verschwinden.*

In den folgenden Abschnitten wird der Zusammenhang zwischen den Homotopie*mengen* $\Pi(i, f)$ und $\Pi(i, f')$ untersucht werden.

2. Die Homotopiemengen homotoper Abbildungen

2.1. D_Φ ist eineindeutig. Die Differenz zweier Deformationsisomorphismen im Falle nullhomotoper Abbildungen f. Mit der einzigen Ausnahme, daß A jetzt ein beliebiger Raum ist, werden die Bezeichnungen von 1.1. bis 1.4. beibehalten. $\Pi(i, f)$ usw. werden keine Gruppen mehr sein.

Satz 3. $D_\Phi : \Pi(i, f) \to \Pi(i, f')$ ist eineindeutig.

Beweis. Er folgt unmittelbar aus den Betrachtungen von 1.3., wo für $(j', Id)_*$ eine Umkehrung ohne jede Benützung einer additiven Struktur angegeben wurde.

Wir nennen D_Φ immer noch einen Deformationsisomorphismus; er führt die Klassen der konstanten Abbildungen ineinander über. Sind Φ und Ψ zwei Deformationen von f in f', so läßt sich im allgemeinen für ein $\alpha \in \Pi(i, f)$ eine Differenz $D_\Phi(\alpha) - D_\Psi(\alpha)$ nicht mehr definieren, da $\Pi(i, f')$ nur noch eine Homotopie*menge* ist. Setzt man hingegen voraus, daß $f' = o$, das heißt, daß Φ und Ψ Deformationen von f in die konstante Abbildung sind, so kann die Differenz von $D_\Phi(\alpha)$ und $D_\Psi(\alpha)$, die mit $D_\Phi(\alpha) \diagdown D_\Psi(\alpha)$ bezeichnet werde, auf die folgende Weise definiert werden. Jedes $\alpha' \in \Pi(i, f') = \Pi(i, o)$ kann nach Lemma 3 in 1.3. eindeutig als Paar (β, γ), $\beta \in \Pi(A, X)$ und

$\gamma \in \Pi(\Sigma A, Y)$ dargestellt werden. D_Φ und D_Ψ lassen die erste Komponente $\partial\alpha$ von $\alpha \in \Pi(i, f)$ unverändert:

$$D_\Phi(\alpha) = (\partial\alpha, \gamma_\Phi),$$
$$D_\Psi(\alpha) = (\partial\alpha, \gamma_\Psi); \quad \partial\alpha \in \Pi(A, X); \quad \gamma_\Phi, \gamma_\Psi \in \Pi(\Sigma A, Y).$$

Unter Verwendung der Addition in $\Pi(\Sigma A, Y)$ definieren wir:

$$D_\Phi(\alpha) \setminus D_\Psi(\alpha) = (o, Id)_* D_\Phi(\alpha) - (o, Id)_* D_\Psi(\alpha) = \gamma_\Phi - \gamma_\Psi.$$

Zur Untersuchung der Elemente $\gamma_\Phi - \gamma_\Psi$ wird in 2.2. eine Operation T eingeführt. Sie ist mit der in [7] verwendeten Transposition verwandt und wird der Einfachheit halber mit demselben Namen bezeichnet werden.

2.2. Die Transposition T. $p: EY \to Y$ sei die übliche Projektion von EY auf Y. Jedes $v: CA \to Y$ kann bekanntlich als ein $\bar{v}: A \to EY$ betrachtet werden und umgekehrt.

Definition. *Unter der zu* (u, v)

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ CA \arrow[r, "v"] & Y \end{tikzcd}$$

transponierten Abbildung $T(u, v)$ *verstehen wir die Abbildung*

$$T(u, v) = \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\bar{v}"] \arrow[d, "u"'] & EY \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd},$$

in welcher $\bar{v}: A \to EY$ *dem* $v: CA \to Y$ *entspricht. Die dazu duale Operation werde auch mit* T *bezeichnet:*

$$(u, v) = \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"'] & EB \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "v"] & B \end{tikzcd}, \quad T(u, v) = \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & Y \arrow[d, "v"] \\ CA \arrow[r, "\bar{u}"] & B \end{tikzcd}.$$

Es ist $TT = Id$. Man beachte, daß T auf Abbildungen (und nicht auf deren Homotopieklassen) definiert ist und daß der Wertebereich von T vom Argument (u, v) abhängt. Das Verhalten von T gegenüber dem Homotopiebegriff für Abbildungen eines Paares in ein anderes wird beschrieben im

Satz 4. a) (u, v) ist genau dann zu (u', v') homotop, wenn die transponierten Abbildungen $T(u, v)$ und $T(u', v')$ durch einen Deformationsisomorphismus ineinander übergehen:

$$(u, v) \sim (u', v') \Longleftrightarrow T(u', v') = D_\Phi T(u, v) .$$

b) Zwei Abbildungen (u, v) und (u', v') gehen genau dann durch einen Deformationsisomorphismus ineinander über, wenn ihre transponierten Bilder homotop sind:

$$(u', v') = D_\Phi (u, v) \Longleftrightarrow T(u, v) \sim T(u', v') .$$

Beweis. Infolge $TT = Id$ ist a) mit b) äquivalent. Wir beweisen a).
(1) Es sei $T(u', v') = D_\Phi T(u, v)$:

$$T(u', v') = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\overline{v'}} & EY \\ {\scriptstyle u'}\downarrow & f & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} ; \qquad T(u, v) = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\overline{v}} & EY \\ {\scriptstyle u}\downarrow & f & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

$T(u', v') = D_\Phi T(u, v)$ bedeutet: Es gibt ein $\Phi : u \sim u'$, welches eine Deformation von fu in fu' induziert. Folgt man dieser mit v, so geht $\overline{v}$ in $\overline{v'}$ über, $\overline{\Phi}_1 : \overline{v} \sim \overline{v'}$. Dem $\overline{\Phi}_1 : A \times I \to EY$ entspricht eindeutig ein $\Phi_1 : CA \times I \to Y$ mit $f\Phi = \Phi_1(i \times Id)$:

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{\Phi : u \sim u'} & X \\ \downarrow{\scriptstyle i \times Id} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ CA \times I & \xrightarrow{\Phi_1 : v \sim v'} & Y \end{array} .$$

Das heißt, daß (u, v) und (u', v') als Abbildungen von i in f homotop sind.

(2) $\Phi : u \sim u'$ und $\Phi_1 : v \sim v'$ mögen (u, v) in (u', v') deformieren. Dem $\Phi_1 : CA \times I \to Y$ entspricht aber ein $\overline{\Phi}_1 : A \times I \to EY$ mit $f\Phi = p\overline{\Phi}_1$:

$$\begin{array}{ccc} A \times I & \xrightarrow{\overline{\Phi}_1 : \overline{v} \sim \overline{v'}} & EY \\ {\scriptstyle \Phi}\downarrow & f & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \longrightarrow & Y \end{array} .$$

Das bedeutet, daß $T(u', v') = D_\Phi T(u, v)$ ist.

2.3. Anwendung von T auf die Differenz von Deformationsisomorphismen. Mit T lassen sich die für die Differenz $D_\Phi(\alpha) \setminus D_\Psi(\alpha)$ wesentlichen zweiten Komponenten $[v_\Phi]$ und $[v_\Psi]$ auf eine andere Art darstellen. Auf die Abbildung (u, v) der Klasse $\alpha \in \Pi(i, f)$ üben wir D_Φ aus:

$$(u,v) = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ CA & \xrightarrow{v} & Y \end{array}; \quad D_\Phi(u,v) = \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle o} \\ CA & \xrightarrow{v_\Phi} & Y \end{array}.$$

Dann sind nach Satz 4 die transponierten Abbildungen homotop:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar v} & EY \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \sim \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\bar v_\Phi} & EY \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{o} & Y \end{array}; \quad \bar v_\Phi : A \to \Omega Y .$$

Identifiziert man die Abbildungen von A in ΩY auf die übliche Weise mit denjenigen von ΣA in Y, so ist $\bar v_\Phi$ dasselbe wie v_Φ in $D_\Phi(u,v)$. Aus Satz 4 folgt, daß das aus einer zu (u,v) homotopen Abbildung (u',v') gewonnene $\bar v'_\Phi$ als Abbildung von A in ΩY homotop zu $\bar v_\Phi$ ist. Folglich erhält man eine Abbildung $\bar v_\Phi$ der Klasse $(o, Id)_* D_\Phi[u,v]$ dadurch, daß man (u,v) transponiert und $T(u,v) = (\bar v, f)$ mit Hilfe von $\Phi : f \sim o$ in eine Abbildung der Form $(\bar v_\Phi, o)$, $\bar v_\Phi : A \to \Omega Y$ deformiert. Der Übergang von $T(u,v)$ zu $(\bar v_\Phi, o)$ ist aber der Schritt J^{-1} in der exakten Folge $S^*(u)$ von u (vgl. [2]):

$$S^*(u) : \to \Pi(X, \Omega Y) \xrightarrow{u^*} \Pi(A, \Omega Y) \xrightarrow{J} \Pi\left(\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & EY \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}\right) \xrightarrow{\partial} .$$

Er wird durch Φ erzeugt und deshalb mit J_Φ^{-1} bezeichnet. Somit entsprechen sich die Operationen $(o, Id)_* D_\Phi$ und J_Φ^{-1} auf die folgende Weise:

Es seien eine Abbildung (u,v) von i in die nullhomotope Abbildung f sowie eine Deformation Φ von f in o gegeben:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ CA & \xrightarrow{v} & Y \end{array}, \quad \Phi : f \sim o .$$

Dann sind $(o, Id)_* D_\Phi[u,v]$ und $J_\Phi^{-1}[T(u,v)]$ dieselben Elemente in $\Pi(\Sigma A, Y) = \Pi(A, \Omega Y)$.

Da sich nun zwei verschiedene J-Urbilder um ein Element in $u^*\Pi(X, \Omega Y) \subset \Pi(A, \Omega Y)$, das heißt in $(\Sigma u)^*\Pi(\Sigma X, Y) \subset \Pi(\Sigma A, Y)$, unterscheiden, gilt für zwei Deformationen Φ und Ψ von f in o die Beziehung:

$$D_\Phi[u,v] \diagdown D_\Psi[u,v] = (\Sigma u)^*\beta\,, \qquad \beta \in \Pi(\Sigma X, Y)\,.$$

Man erhält $(o, Id)_* D_\Phi[u,v]$ ohne Verwendung von T, indem man Φ als eine Abbildung von CX in Y betrachtet und $u: A \to X$ zu einer Abbildung $Cu: CA \to CX$ erweitert; dann ist

$$(o, Id)_* D_\Phi[u,v] = [d(v, \Phi \circ Cu)] \in \Pi(\Sigma A, Y)\,.$$

Man kann übrigens direkt beweisen, daß für $f' = o$ die Untergruppe $J\Delta([u], f, f')$ mit $(\Sigma u)^*\Pi(\Sigma X, Y)$ zusammenfällt.

Zusammenfassend sieht man, daß auch zwischen den Homotopiemengen $\Pi(i,f)$ und $\Pi(i,f')$ eine eineindeutige Beziehung besteht, falls f und f' homotop sind. *Im Fall nullhomotoper Abbildungen $f, f \sim o$, ist die Beziehung zwischen $\Pi(i,f)$ und $\Pi(i,o)$ genau dann von den verschiedenen möglichen Deformationen von f in o unabhängig, wenn sich die Untergruppen $(\Sigma u)^*\Pi(\Sigma X, Y) \subset \Pi(\Sigma A, Y)$ für alle $[u] \in \Pi(A, X)$ auf die triviale Untergruppe reduzieren.*

3. Homotopie-differentielle Tripel und Operationen

In den folgenden Abschnitten 3.1. bis 3.5. wird mit Hilfe der Deformationsisomorphismen zwischen den Homotopiemengen beziehungsweise -gruppen homotoper Abbildungen eine Operation $\mathfrak{H}$ – eine Verallgemeinerung der Hopfschen Invariante – definiert und auf Cohomologie- und Homotopie-Operationen angewendet.

3.1. Homotopie-differentielle (h-d) **Tripel.** A sei ein beliebiger Raum, $i: A \to CA$. Die betrachteten Abbildungen der Homotopiemengen sollen auch Homomorphismen genannt werden, da sie unter geeigneten Voraussetzungen über die auftretenden Räume homomorph im üblichen Sinne des Wortes sind.

In Anlehnung an den Begriff der «differentiellen Tripel» (vgl. [4]) geben wir die

Definition. *Unter einem homotopie-differentiellen (h-d) Tripel $(X, Y, Z; \xi, \eta)$ verstehen wir drei Räume X, Y und Z sowie zwei Abbildungen ξ und η, deren Komposition nullhomotop ist:*

$$X \xrightarrow{\xi} Y \xrightarrow{\eta} Z\,, \qquad \eta\xi \sim o\,.$$

Es seien $(X, Y, Z; \xi, \eta)$ ein h-d Tripel, Φ eine Deformation von $\eta\xi$ in o und Ψ eine solche von o in $\eta\xi$. Zu Φ und Ψ gehören Deformationsisomorphismen D_Φ und D_Ψ, mit denen wir Homomorphismen h_Φ und g_Ψ wie folgt definieren:

$$h_\Phi = (o, Id)_* D_\Phi(Id, \eta)_* : \Pi(i, \xi) \to \Pi(\Sigma A, Z),$$
$$g_\Psi = (\xi, Id)_* D_\Psi(Id, o)_* : \Pi(A, X) \to \Pi(i, \eta) \quad .$$

h_Φ und g_Ψ stellen einen Zusammenhang zwischen den Folgen $S_*(\xi)$ und $S_*(\eta)$ her, wie aus dem folgenden Diagramm hervorgeht, das mit $S_*(\xi, \eta)$ bezeichnet werde:

$$S_*(\xi,\eta):\quad \begin{array}{ccccccccc}
\longrightarrow \Pi(\Sigma A, Y) & \xrightarrow{J} & \Pi(i, \xi) & \xrightarrow{\partial} & \Pi(A, X) & \xrightarrow{\xi_*} & \Pi(A, Y) \\
\downarrow Id & \boxed{\mathrm{I}} & \downarrow h_\Phi & \boxed{\mathrm{II}} & \downarrow g_\Psi & \boxed{\mathrm{III}} & \downarrow Id \\
\longrightarrow \Pi(\Sigma A, Y) & \xrightarrow{\eta_*} & \Pi(\Sigma A, Z) & \xrightarrow{J} & \Pi(i, \eta) & \xrightarrow{\partial} & \Pi(A, Y) .
\end{array}$$

Aus der Definition von g_Ψ und h_Φ folgt unmittelbar, daß die Quadrate $\boxed{\mathrm{I}}$ und $\boxed{\mathrm{III}}$ kommutativ sind. Für ein differentielles Tripel ist $\boxed{\mathrm{II}}$ antikommutativ. Vermutlich kann über $\boxed{\mathrm{II}}$ bei einem h-d Tripel nichts mehr allgemein ausgesagt werden, wie auch h_Φ und g_Ψ mit Abbildungen von h-d Tripeln ohne weitere Voraussetzungen nicht mehr vertauschbar sind.

Aus den Betrachtungen von 2.3. folgt das

Lemma 5. Es seien Φ und Φ' Deformationen von $\eta\xi$ in $o, [u, v] \in \Pi(i, \xi)$. Dann ist
$$h_\Phi[u, v] - h_{\Phi'}[u, v] = (\Sigma u)^* \vartheta, \; \vartheta \in \Pi(\Sigma X, Z) .$$

3.2. Die Operation $\mathfrak{H}$. Im obigen Diagramm $S_*(\xi, \eta)$ betrachten wir die Abbildung $\mathfrak{H}' = h_\Phi \partial^{-1}$. Sie hängt von den Abbildungen ξ und η sowie von der Deformation Φ von $\eta\xi$ in o ab, $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}'(\xi, \eta, \Phi)$. Die Sätze 5 und 6 beschreiben $\mathfrak{H}'$.

Satz 5. $\mathfrak{H}'(\xi, \eta, \Phi)$ ordnet jedem $\alpha \in \mathrm{Ker}\, \xi_* : \Pi(A, X) \to \Pi(A, Y)$ ein Element der Faktorgruppe $\Pi(\Sigma A, Z)/\eta_* \Pi(\Sigma A, Y)$ zu.

Beweis. Ist $\Pi(i, \xi)$ eine Gruppe, so erübrigt sich ein Beweis. Ist $\Pi(i, \xi)$ keine Gruppe, so hat man zu zeigen, daß für $[u, v]$ und $[u, v']$ in $\Pi(i, \xi)$ die Differenz $h_\Phi[u, v] - h_\Phi[u, v']$ in $\Pi(\Sigma A, Y)$ von der Form $\eta_*\gamma$ ist, $\gamma \in \Pi(\Sigma A, Y)$. Auf (u, v) und (u, v') üben wir vorerst $(Id, \eta)_*$ aus:

$$\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{Id} & X \\
i\downarrow & & \downarrow\xi & & \downarrow\eta\xi \\
CA & \xrightarrow{v} & Y & \xrightarrow{\eta} & Z
\end{array} ; \qquad
\begin{array}{ccccc}
A & \xrightarrow{u} & X & \xrightarrow{Id} & X \\
i\downarrow & & \downarrow\xi & & \downarrow\eta\xi \\
CA & \xrightarrow{v'} & Y & \xrightarrow{\eta} & Z
\end{array} .$$

Wir werden zeigen, daß $h_\Phi[u, v] - h_\Phi[u, v'] = [d(\eta v, \eta v')]$ ist. Daraus folgt dann die Behauptung, da $[d(\eta v, \eta v')] = \eta_*[d(v, v')]$ ist. Zum Beweis der ersteren Beziehung benötigt man das

Lemma 6. Die nullhomotope Abbildung F besitze zwei Deckabbildungen r und r':

$$\begin{tikzcd} & EZ \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[ur, "{r, r'}"] \arrow[r, "F"] & Z \end{tikzcd} .$$

Durch eine Deformation Φ von F in o gehen r und r' in Abbildungen r_Φ und r'_Φ von A in ΩZ über. Für diese gilt

$$[r_\Phi] - [r'_\Phi] = [d(r, r')] .$$

Der Beweis ist elementar. – Nach Satz 4 ist die Anwendung von $(o, Id)_* D_\Phi$ auf $(u, \eta v)$ äquivalent mit dem Übergang zu einer zu $T(u, \eta v)$ homotopen Abbildung $(\overline{w}_\Phi, o)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\overline{\eta v}"] \arrow[d, "u"] & EZ \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "\eta\xi"] & Z \end{tikzcd} \sim \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\overline{w}_\Phi"] \arrow[d, "u"] & EZ \arrow[d, "p"] \\ X \arrow[r, "o"] & Z \end{tikzcd} .$$

Ebenso ist $T(u, \eta v')$ homotop zu $(\overline{w}'_\Phi, o)$. Nach Lemma 6 ist $[\overline{w}_\Phi] - [\overline{w}'_\Phi] = [d(\eta v, \eta v')]$. Durch Transposition erhält man daraus die gewünschte Beziehung $h_\Phi[u, v] - h_\Phi[u, v'] = [d(\eta v, \eta v')]$.

Satz 6. Es seien: $\xi \sim \xi'; \eta \sim \eta'; \Phi: \eta\xi \sim o; \Phi': \eta'\xi' \sim o; [u, v] = \beta \in \Pi(i, \xi)$, $[u, v'] = \beta' \in \Pi(i, \xi')$. Dann ist

$$h_\Phi[u, v] - h_{\Phi'}[u, v'] = \eta_*\gamma + (\Sigma u)^*\vartheta ,$$

wobei $\gamma \in \Pi(\Sigma A, Y)$ und $\vartheta \in \Pi(\Sigma X, Z)$.

Beweis. Die gegebene Deformation von ξ in ξ' werde etwa mit Λ bezeichnet. Dann ist $h_{\Phi'} D_\Lambda = h_{\Phi'\Psi}$, wobei Ψ die von den Deformationen $\xi \sim \xi'$ und $\eta \sim \eta'$ erzeugte Deformation $\eta\xi \sim \eta'\xi'$ ist. Der Beweis von Satz 6 beruht auf dem Satz 5 und dem Lemma 5 und läßt sich im folgenden kommutativen Diagramm veranschaulichen:

$$\begin{tikzcd}
 & & \Pi(i,\xi) \arrow[rr, "\partial"] \arrow[dr, "D_A"] \arrow[dd, "h_\Phi;\ h_{\Phi'\Psi}"] & & \Pi(A,X) \arrow[r] & {} \\
{} \arrow[r] & \Pi(\Sigma A,Y) \arrow[ur, "J"] \arrow[rr, "J'"] \arrow[d, "Id"] & & \Pi(i,\xi') \arrow[ur, "\partial'"] \arrow[dl, "h_{\Phi'}"] & & \\
{} \arrow[r] & \Pi(\Sigma A,Y) \arrow[r, "\eta_*=\eta'_*"] & \Pi(\Sigma A,Z) \arrow[r] & {} & &
\end{tikzcd}$$

Aus Satz 5 folgt: $h_{\Phi'}\beta' - h_{\Phi'}D_A\beta = h_{\Phi'}\beta' - h_{\Phi'\Psi}\beta = \eta_*\gamma$, $\gamma \in \Pi(\Sigma A, Y)$. Aus Lemma 5 folgt: $h_\Phi\beta - h_{\Phi'\Psi}\beta = (\Sigma u)^*\vartheta$, $\vartheta \in \Pi(\Sigma X, Z)$. Folglich ist $h_\Phi\beta - h_{\Phi'}\beta' = \eta_*(-\gamma) + (\Sigma u)^*\vartheta$.

Der Satz 6 bedeutet, daß $\mathfrak{H}'$ *eine nur von den Homotopieklassen* $[\xi]$ *und* $[\eta]$ *abhängige Operation* $\mathfrak{H}([\xi],[\eta])$ *definiert, die jedem* $[u] \in \Pi(A,X)_0 = \operatorname{Ker} \xi_* : \Pi(A,X) \to \Pi(A,Y)$ *ein Element*

$$\mathfrak{H}([\xi],[\eta])[u] \in \Pi(\Sigma A, Z)/\eta_*\Pi(\Sigma A, Y) + (\Sigma u)^*\Pi(\Sigma X, Z)$$

zuordnet. Man beachte, daß der Bildbereich von $\mathfrak{H}$ vom Argument $[u]$ abhängt. Unter der Voraussetzung (§): «$(\Sigma u)^*\Pi(\Sigma X, Z) = 0$ für alle $[u] \in \Pi(A, X)_0$» ist dies nicht mehr der Fall. Dann folgt aus der Definition von $\mathfrak{H}$ unmittelbar der

Satz 7. Ist A ein H'-Raum, so ist $\mathfrak{H}$ unter der Voraussetzung (§) ein Homomorphismus

$$\mathfrak{H}([\xi],[\eta]) : \Pi(A,X)_0 \to \Pi(\Sigma A, Z)/\eta_*\Pi(\Sigma A, Y).$$

Wir bemerken ohne Beweis, daß $\mathfrak{H}([\xi],[\eta])$ auch immer von $[\eta]$ homomorph abhängt, sofern $\Pi(Y,Z)$ eine Gruppe ist und über den Bildbereich von $\mathfrak{H}$ eine zu (§) analoge Voraussetzung gemacht wird. Für die Abhängigkeit von $[\xi]$ ist dies ohne weitere Voraussetzungen über das zugrunde gelegte h-d Tripel $(X, Y, Z; \xi, \eta)$ nicht mehr der Fall.

3.3. Anwendung auf funktionale Cohomologie-Operationen. Θ sei eine additive Cohomologie-Operation vom Typus $(\pi, n; G, q)$. Für eine Abbildung $u : A \to X$ und ein $\Xi \in H^n(X;\pi)$ mit den Eigenschaften

$$\Theta(\Xi) = 0 \in H^q(X;G)\,,$$
$$u^*(\Xi) = 0 \in H^n(A;\pi)\,,$$

ist die funktionale Cohomologie-Operation $\Theta_u(\Xi) \in H^{q-1}(A;G)/L(\Theta, u^*)$ definiert, wobei $L(\Theta,u^*) = (\Omega\Theta)H^{n-1}(A;\pi) + u^*H^{q-1}(X;G)$ ist (vgl. [9],

[10]). Peterson und Thomas haben in [11] gezeigt, daß Θ_u auch für *nicht*-additive Operationen definiert ist. Da in der Definition von $\mathfrak{H}([\xi],[\eta])$ keine Voraussetzungen über ξ und η gemacht werden müssen (außer daß $\eta\xi \sim o$ ist), folgt dieser Satz von Peterson-Thomas aus dem

Satz 8. Für ein geeignetes h-d Tripel $(X, Y, Z; \xi, \eta)$ ist

$$\mathfrak{H}([\xi],[\eta])[u] = \Theta_u(\Xi) .$$

Beweis. a) Man betrachte das folgende h-d Tripel: X beliebig, $Y = K(\pi, n)$, $Z = K(G, q)$; $\xi : X \to K(\pi, n)$ und $\eta : K(\pi, n) \to K(G, q)$ seien Vertreter eines $\Xi \in H^n(X; \pi)$ beziehungsweise der Cohomologie-Operation Θ mit Eigenschaften $\Theta(\Xi) = O$ und $u^*(\Xi) = O$ für ein $u : A \to X$:

$$A \xrightarrow{u} X \xrightarrow{\xi} K(\pi, n) \xrightarrow{\eta} K(G, q); \quad \xi u \sim o , \quad \eta\xi \sim o .$$

b) Infolge $[\eta] = \Theta$ ist unter der Identifikation $\Pi(R, \Omega S) = \Pi(\Sigma R, S)$ $L(\Theta, u^*) = \eta_* \Pi(\Sigma A, K(\pi, n)) + (\Sigma u)^* \Pi(\Sigma X, K(G, q))$. Somit haben Θ_u und $\mathfrak{H}$ dieselben Bildbereiche.

c) $\eta : K(\pi, n) \to K(G, q)$ erzeugt ein $E\eta : EK(\pi, n) \to EK(G, q)$. In der Sprache der Cohomologiegruppen von Abbildungen ist Θ_u als die Operation $J^{-1}(E\eta, \eta)_* \partial^{-1}$ im folgenden Diagramm definiert:

$$\begin{tikzcd}
\longrightarrow H^{n-1}(A;\pi) \arrow[r] \arrow[d, "\Omega\Theta = (\Omega\eta)_*"] & H^n(u;\pi) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "(E\eta, \eta)_*"] & H^n(X;\pi) \longrightarrow \arrow[d, "\eta_* = \Theta"] \\
\longrightarrow H^{q-1}(A;G) \arrow[r, "J"] & H^q(u;G) \arrow[r] & H^q(X;G) \longrightarrow
\end{tikzcd} .$$

Ein $w : A \to K(G; q)$ aus der Homotopieklasse eines Vertreters von $\Theta_u(\Xi)$ erhält man somit dadurch, daß man auf ein (ξ_1, ξ) mit $\partial[\xi_1, \xi] = \Xi$ die Abbildung $(E\eta, \eta)_*$ ausübt und dann $\eta\xi$ in o deformiert:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\xi_1"] \arrow[d, "u"'] & EK(\pi, n) \arrow[r, "E\eta"] \arrow[d] & EK(G, q) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "\xi"] & K(\pi, n) \arrow[r, "\eta"] & K(G, q)
\end{tikzcd} \sim \begin{tikzcd}
A \arrow[r, "w"] \arrow[d, "u"'] & EK(G, q) \arrow[d] \\
X \arrow[r, "o"] & K(G, q)
\end{tikzcd} .$$

Dem entspricht in der Transposition die Anwendung von D_Φ auf $(Id, o)_* T(\xi_1, \xi)$, wobei Φ eine Deformation von $\eta\xi$ in o ist:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[r, "Id"] \arrow[d, "\xi"] & X \arrow[d, "\eta\xi"] & & A \arrow[r, "u"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "o"] \\ CA \arrow[r, "\bar{\xi}_1"] & K(\pi, n) \arrow[r, "\eta"] & K(G, q) \arrow[r, phantom, "\xrightarrow{D_\Phi}"] & & CA \arrow[r, "\bar{w}"] & K(G, q) \end{tikzcd} .$$

$[\bar{w}] \in \Pi(\Sigma A, K(G, q))$ und $[w] \in \Pi(A, \Omega K(G, q))$ sind dieselben Elemente. Folglich ist $J_\Phi^{-1}(E\eta, \eta)_*[\xi_1, \xi] = h_\Phi[\xi_1, \xi]$, und das bedeutet, daß die Beziehung

$$\mathfrak{H}([\xi], [\eta])[u] = \Theta_u(\Xi)$$

gilt. q.e.d.

Corollar. Die funktionale Cohomologie-Operation Θ_u hängt homomorph von $[u]$ ab, sofern diese Aussage einen Sinn hat. Genauer:

Es seien A ein H'-Raum und $\Pi(A, X)_0$ die Untergruppe aller $[u]$ mit $u^* H^{q-1}(X; G) = 0$. Dann gilt für $[u], [v] \in \Pi(A, X)_0$

$$\Theta_{[u]+[v]}(\Xi) = \Theta_{[u]}(\Xi) + \Theta_{[v]}(\Xi) .$$

Satz 8 und das Corollar zeigen, daß $\mathfrak{H}([\xi], [\eta])$ den HOPFschen «Homomorphismus» von $\pi_{2n-1}(S^n)$ in die ganzen Zahlen verallgemeinert, da dieser als funktionale Cohomologie-Operation aufgefaßt werden kann (vgl. [9]).

3.4. Cohomologie-Operationen in Normalpolyedern. a) X' sei ein einfach zusammenhängendes Polyeder. Nach [5] ist X' homotopie-äquivalent einem «Normalpolyeder» X, das heißt einem Polyeder X, welches durch Teilpolyeder $X_2 \subset X_3 \subset \ldots$ mit den folgenden Eigenschaften ausgeschöpft werden kann:

$$H_i(X_q) \cong H_i(X) , \quad i \leq q ,$$
$$H_i(X_q) = 0 \quad , \quad i > q .$$

X_q entsteht aus X_{q-1} dadurch, daß man mit Hilfe einer Abbildung $u = u_{q-1} : K'(H_q(X), q-1) \to X_{q-1}$ den Kegel über $K'(H_q(X), q-1)$ an X_{q-1} anheftet; wir schreiben dafür kurz

$$X_q = CK'(H_q(X), q-1) \cup_u X_{q-1} , \quad u = u_{q-1} .$$

u induziert auf den Homologiegruppen den Nullhomomorphismus, das heißt u ist «homologisch trivial».

b) Wir betrachten in einem Normalpolyeder X eine Cohomologie-Operation Θ vom Typus $(\pi, n; G, q)$, $q > n$. Es genügt, dieselbe in X_q zu betrachten. Der Homotopietypus von X_q und damit die Wirkung von Θ in X ist durch $X_{q-1}, H_q(X) = H_q$ und $u_{q-1} = u$ eindeutig bestimmt. Welchen Einfluß hat u auf die Wirkung von Θ?

c) Man unterscheide die Operation Θ in X_q und die zu u gehörende funktionale Cohomologie-Operation Θ_u. $K'(H_q, q-1) = K'_{q-1}$ besitzt nur eine einzige nichttriviale Homologiegruppe, und u ist homologisch trivial. Deshalb vereinfacht sich das Definitionsschema für Θ_u in der klassischen Schreibweise – man ersetze $H^*(u)$ durch $H^*(X_q)$ – wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & H^n(X_q;\pi) \arrow[r, "\partial"] \arrow[d, "\Theta"] & H^n(X_{q-1};\pi) \arrow[r] \arrow[d, "\Theta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^{q-1}(K'_{q-1};G) \arrow[r, "J"] & H^q(X_q;G) \arrow[r] & H^q(X_{q-1};G) \arrow[r] & 0 .
\end{tikzcd}$$

Aus diesem Diagramm ersieht man zweierlei:

Erstens ist $L(\Theta, u^*) = O$ für Θ_u. Da K'_{q-1} ein H'-Raum ist, hängt Θ_u von homologisch trivialen $u: K'_{q-1} \to X_{q-1}$ nach Satz 7 homomorph ab. – Zweitens: $\Theta_u(\Xi)$ ist genau für diejenigen $\Xi \in H^n(X_{q-1};\pi)$ definiert, welche Θ als gewöhnliche Operation in X_{q-1} annulliert. Für solche Ξ unterscheiden sich die funktionale Cohomologie-Operation Θ_u und die gewöhnliche Operation Θ in X_q nur um Isomorphismen: $\Theta_u(\Xi) = J^{-1}\Theta(\partial^{-1}\Xi)$. Ist zum Beispiel $H^q(X_{q-1};G) \cong \text{Ext}\,(H_{q-1}(X), G) = O$, so gilt dies für alle $\Xi \in H_n(X_{q-1};\pi) \cong H^n(X;\pi)$.

Zusammengefaßt erhält man den

Satz 9. *Es seien: X ein Normalpolyeder, «normalisiert» durch die Teilpolyeder $X_2 \subset X_3 \ldots$; k und l zwei homologisch triviale Elemente von $\pi_{q-1}(H_q(X); X_{q-1})$; Θ eine Cohomologie-Operation vom Typus $(\pi, n; G, q)$, $q > n$.*

Dann gilt für die funktionale Cohomologie-Operation Θ_k und Θ_l die Beziehung

$$\Theta_k(\Xi) + \Theta_l(\Xi) = \Theta_{k+l}(\Xi)\,, \qquad \Xi \in H^n(X_{q-1};\pi)\,.$$

Ist k gerade die Klasse der $(q-1)$ten Anheftungsabbildung, $k = k_{q-1}$, von X, so ist Θ_k genau für diejenigen n-dimensionalen Cohomologieklassen Ξ bis auf Isomorphismen dasselbe wie Θ, welche Θ als Operation in X_{q-1} annulliert.

Corollar 1. Es sei $\text{Ext}\,(H_{q-1}(X), G) = 0$.

Ist k_{q-1} von der Ordnung r in $\pi_{q-1}(H_q(X); X_{q-1})$, dann auch $\Theta(\Xi)$ in $H^q(X;G)$ für alle $\Theta \in H^q(\pi, n; G)$ und $\Xi \in H^n(X;\pi)$, $q > n$.

Corollar 2. Es sei $\text{Ext}\,(H_{q-1}(X), G) = 0$.

Ist Θ in $H^q(\pi, n; G)$ durch die Ordnung r von k_{q-1} teilbar, so ist $\Theta \equiv 0$ in X.

Ist k_{q-1} durch die Ordnung s von Θ teilbar, so ist $\Theta \equiv 0$ in X.

3.5. Die zu $\mathfrak{H}$ duale Operation $\bar{\mathfrak{H}}$. Für ein h-d Tripel $(X, Y, Z; \xi, \eta)$

$$X \xrightarrow{\xi} Y \xrightarrow{\eta} Z$$

und einen beliebigen Raum B existiert eine von den Homotopieklassen abhängige Operation $\bar{\mathfrak{H}}([\xi], [\eta])$, die jedem $[u] \in \Pi(Z, B)^0 = \operatorname{Ker} \eta^* : \Pi(Z, B) \to \Pi(Y, B)$ ein Element

$$\bar{\mathfrak{H}}([\xi], [\eta])[u] \in \Pi(X, \Omega B)/\xi^* \Pi(Y, \Omega B) + (\Omega u)_* \Pi(X, \Omega Z)$$

zuordnet. Ist $(\Omega u)_* \Pi(X, \Omega Z) = 0$ für alle in Frage kommenden $[u]$, so ist $\bar{\mathfrak{H}}$ ein Homomorphismus

$$\bar{\mathfrak{H}}([\xi], [\eta]) : \Pi(Z, B)^0 \to \Pi(X, \Omega B)/\xi^* \Pi(Y, \Omega B) .$$

$\bar{\mathfrak{H}}$ verallgemeinert die funktionalen Homotopie-Operationen und den dualen HOPFschen Homomorphismus (vgl. [7]). Die ersteren werden für eine Abbildung $u : Z \to B$ und eine Homotopie-Operation $\Xi \in \pi_q(G; K'(\pi, n))$ wie die funktionale Cohomologie-Operation definiert. Wir haben somit bewiesen, daß für sie ein Satz von PETERSON-THOMAS gilt, ein Satz über Operationen Ξ:

$$K'(G, q) \xrightarrow{\Xi} K'(\pi, n) \xrightarrow{\alpha, \beta} X ,$$

welche das Distributivgesetz

$$(\alpha + \beta) \circ \Xi = \alpha \circ \Xi + \beta \circ \Xi$$

nicht erfüllen.

Dual zu 3.4. kann man nach dem Zusammenhang zwischen der Wirkung einer Homotopie-Operation Ξ vom Typus $(G, q; \pi, n)$, $q > n$, und der entsprechenden funktionalen Operation Ξ_k des q-ten Faktors $k = k^q$ eines POSTNIKOV-Raumes X fragen, der aus Faserungen $\ldots \to X^{q+1} \to X^q \to \ldots$ aufgebaut ist; k ist ein Element von $H^{q+2}(X^q; \pi_{q+1}(X))$. Es existiert ein zu Satz 9 dualer Satz mit den folgenden Corollaren 1 und 2:

Corollar 1. Es sei $\operatorname{Hom}(G, \pi_q(X)) = 0$.
Ist k^q von der Ordnung r, dann auch $\Xi(\alpha)$ für alle Operationen $\Xi \in \pi_q(G; K'(\pi, n))$ und alle $\alpha \in \pi_n(G; X)$.

Corollar 2. Es sei $\operatorname{Hom}(G, \pi_q(X)) = 0$.
Ist Ξ durch die Ordnung r von k^q teilbar, so ist $\Xi \equiv 0$ in X.
Ist k^q durch die Ordnung s von Ξ teilbar, so ist $\Xi \equiv 0$ in X.

4. Zusammenhang zwischen $\Pi(X, Y)$ und Gruppenerweiterungen

Ist Y ein H-Raum, so können für beliebige Räume X zwei Abbildungen $f, g: X \to Y$ zu einer Abbildung $f \cdot g: X \to Y$ multipliziert werden. Wir fragen nach dem Zusammenhang zwischen f, g und $f \cdot g$, müssen uns aber auf Abbildungen beschränken, deren Homotopieklassen in einer Untergruppe $\Pi(X, Y)_{1,0}$ von $\Pi(X, Y)$ liegen.

4.1. Der Homomorphismus P_π. Es seien A, X, Y Räume und $f: X \to Y$ eine Abbildung, $i: A \to CA$. Bis und mit 4.2. setzen wir voraus:

(1) Y sei ein H-Raum;
(2) A sei ein H'-Raum;
(3) $\Pi(i, f)$ und $\Pi(A, X)$ seien Abelsch.

Infolge von (1) ist $\Pi(X, Y)$ eine – nicht notwendigerweise Abelsche – Gruppe. In der folgenden Definition wird der Begriff der homologisch trivialen Abbildung auf beliebige Räume verallgemeinert.

Definition. Unter $\Pi(X, Y)_{1,0}$ verstehen wir die Untergruppe derjenigen Elemente $[f] \in \Pi(X, Y)$, für welche

$$f_{*,1}: \Pi(\Sigma A, X) \to \Pi(\Sigma A, Y) \quad \text{und}$$

$$f_{*,0}: \Pi(A, X) \to \Pi(A, Y)$$

die Nullhomomorphismen sind.

Für ein $[f] \in \Pi(X, Y)_{1,0}$ reduziert sich das Ende der Folge $S_*(f)$ auf

$$0 \to \Pi(\Sigma A, Y) \to \Pi(i, f) \to \Pi(A, X) \to 0 .$$

Das heißt: $\Pi(i, f)$ ist eine Erweiterung von $\Pi(\Sigma A, Y)$ mit $\Pi(A, X)$. Aus 1.3. weiß man, daß ein zu f homotopes f' eine äquivalente Erweiterung definiert. Da nach der Erweiterungstheorie von Moduln (vgl. [12], 289ff.) jede solche Erweiterung durch ein Element in $\operatorname{Ext}(\Pi(A, X), \Pi(\Sigma A, Y))$ charakterisiert ist, entspricht jedem $[f] \in \Pi(X, Y)_{1,0}$ durch eine Zuordnung P_π ein Element in diesem Extensionsprodukt:

$$P_\pi: \Pi(X, Y)_{1,0} \to \operatorname{Ext}(\Pi(A, X), \Pi(\Sigma A, Y)) .$$

Bezüglich der in $\Pi(X, Y)_{1,0}$ nach Voraussetzung vorhandener Gruppenstruktur gilt der

Satz 10. *P_π ist ein Homomorphismus.*

Er wird im folgenden Abschnitt 4.2. bewiesen werden.

4.2. Beweis von Satz 10. Er besteht im wesentlichen darin, daß der in 2.3. beschriebene Zusammenhang zwischen den Operationen J_Φ^{-1} und $(o, Id)_* D_\Phi$ benützt wird.

a) Einige Bezeichnungen und Bemerkungen. – Es seien $M' : A \to A \vee A$ die Comultiplikation von A und $v_i : A \to X$ einige Abbildungen. Unter $\Sigma' v_i$ verstehen wir die Abbildung

$$(\ldots v_{n-3} \vee (v_{n-2} \vee (v_{n-1} \vee v_n) M') \ldots) M' ,$$

das heißt Σ' bedeutet, daß man M' auf eine ganz bestimmte Weise iteriert. – λ sei eine ganze Zahl, v eine Abbildung von A in X. Für $\lambda > 0$ verstehen wir unter λv die Abbildung $v \circ \Sigma'^{\lambda}_{i=1} Id_A^{(i)}$, für $\lambda < 0$ die Abbildung $v \circ \iota \circ \Sigma' Id_A$, wobei $\iota : A \to A$ die Inversion von A ist. – Für $a, b : A \to X$ und $a \times b : A \to X \times X$ ist $\lambda(a \times b) = \lambda a \times \lambda b$.

b) Definition des charakteristischen Elementes einer Erweiterung (vgl. [12], 290). – Das der Erweiterung $\Pi(i, f)$ entsprechende Element $P_\pi[f] \in \operatorname{Ext}(\Pi(A, X), \Pi(\Sigma A, Y))$ findet man zum Beispiel so, daß man $\Pi(A, X)$ als Faktorgruppe einer freien ABELschen Gruppe N' darstellt:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & N & \xrightarrow{j} & N' & \longrightarrow & \Pi(A, X) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle k_f} & & \downarrow{\scriptstyle h_f} & & \downarrow{\scriptstyle Id} & & \\ 0 & \longrightarrow & \Pi(\Sigma A, Y) & \xrightarrow{J} & \Pi(i, f) & \xrightarrow{\partial} & \Pi(A, X) & \longrightarrow & 0 . \end{array}$$

h_f existiert und definiert eindeutig ein k_f. Für die Identität Id von $\Pi(\Sigma A, Y)$ ist dann $P_\pi[f]$ gleich der Restklasse mod $j^* \operatorname{Hom}(N', \Pi(\Sigma A, Y))$ von $k_f^* Id \in \operatorname{Hom}(N, \Pi(\Sigma A, Y))$.

c) Wahl der Homomorphismen h_f, h_g und $h_{f \cdot g}$. – $(\ldots \beta_\sigma \ldots)$ sei eine Basis von N'; jedes Symbol β_σ entspricht einem $[u_\sigma] \in \Pi(A, X)$. Als $h_f(\beta_\sigma)$ wähle man ein $[u_\sigma, u_\sigma^f] \in \Pi(i, f)$:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u_\sigma} & X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ CA & \xrightarrow{u_\sigma^f} & Y \end{array} ,$$

und als $h_g(\beta_\sigma)$ ein $[u_\sigma, u_\sigma^g] \in \Pi(i, g)$, wobei auch $[g]$ ein Element von $\Pi(X, Y)_{1,0}$ sein soll. Ist M die Multiplikation von Y, so bezeichnen wir die Abbildung $M(f \times g) : X \to Y$ kurz mit $f \cdot g$. Als $h_{f \cdot g}(\beta_\sigma)$ wählen wir $[u_\sigma, M(u_\sigma^f \times u_\sigma^g)] \in \Pi(i, f \cdot g)$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "u_\sigma"] \arrow[dd, "i"'] & X \arrow[d, "f\times g"] \\ & Y\times Y \arrow[d, "M"] \\ CA \arrow[ur, dashed, "u_\sigma^f\times u_\sigma^g"] \arrow[r, "M(u_\sigma^f\times u_\sigma^g)"'] & Y . \end{tikzcd}$$

Wir setzen $M(u_\sigma^f \times u_\sigma^g) = u_\sigma^{f\cdot g}$. Mit dieser speziellen Definition von $h_{f\cdot g}$ werden wir beweisen, daß für ein $\beta \in N$ die Beziehung

$$J^{-1}h_f j\beta + J^{-1}h_g j\beta = J^{-1}h_{f\cdot g} j\beta$$

gilt, das heißt, daß $P_\pi[f\cdot g] = P_\pi[f] + P_\pi[g]$ bereits für $\mathrm{Hom}(N, \Pi(\Sigma A, Y))$ und nicht erst für $\mathrm{Hom}(N, \Pi(\Sigma A, Y))/j^*\mathrm{Hom}(N', \Pi(\Sigma A, Y)) = \mathrm{Ext}(\Pi(A, X), \Pi(\Sigma A, Y))$ gilt. Man beachte, daß $h_f j\beta$, $h_g j\beta$ und $h_{f\cdot g} j\beta$ in drei verschiedenen Gruppen liegen, welche durch J^{-1} in eine einzige, nämlich in $\Pi(\Sigma A, Y)$ abgebildet werden.

d) Transposition der Abbildungen. – Ein $\beta \in N$ ist eine endliche Summe $\beta = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i$. Mit den Bezeichnungen von a) ist $(\Sigma' \lambda_i u_i, \Sigma' \lambda_i u_i^f)$ eine Abbildung aus der Klasse $h_f j\beta$:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\Sigma' \lambda_i u_i"] \arrow[d, "i"'] & X \arrow[d, "f"] \\ CA \arrow[r, "\Sigma' \lambda_i u_i^f"] & Y \end{tikzcd} .$$

Ebenso erhält man Abbildungen aus den Klassen $h_g j\beta$ und $h_{f\cdot g} j\beta$. Ihre transponierten Bilder werden mit F, G und $F\cdot G$ bezeichnet und sind Abbildungen von $\Sigma' \lambda_i u_i$ in $p: EY \to Y$:

$$F = (\overline{\Sigma' \lambda_i u_i^f}, f) \;,$$
$$G = (\overline{\Sigma' \lambda_i u_i^g}, g) \;,$$
$$F\cdot G = (\overline{\Sigma' \lambda_i u^{f\cdot g}}, f\cdot g) \;.$$

$EM: EY \to EY \times EY$ sei die von $M: Y \to Y \times Y$ induzierte Multiplikation. Wir behaupten, daß für F, G und $F\cdot G$ gilt:

$$EM(\overline{\Sigma' \lambda_i u_i^f} \times \overline{\Sigma' \lambda_i u_i^g}) = \overline{\Sigma' \lambda_i u_i^{f\cdot g}} \,. \tag{A}$$

e) Beweis der Beziehung (A). – Es seien: S ein H-Raum mit Multiplikation M, R ein beliebiger Raum, a und b Abbildungen von CR in S. Dann ist immer $EM(\bar{a} \times \bar{b}) = \overline{M(a \times b)}$. Auf unsere Situation angewendet bedeutet das, daß die linke Seite von (A) gleich

$$\overline{M(\Sigma' \lambda_i u_i^f \times \Sigma' \lambda_i u_i^g)}$$

ist. Die rechte Seite von (A) läßt sich wie folgt beschreiben. Es ist $u_i^{f \cdot g} = M(u_i^f \times u_i^g)$. Nach a) ist somit $\lambda_i u_i^{f \cdot g} = M(\lambda_i u_i^f \times \lambda_i u_i^g)$. Setzt man $\lambda_i u_i^f = r_i$ und $\lambda_i u_i^g = s_i$, so hat man zum Beweis von (A) noch zu zeigen, daß

$$M(\Sigma' r_i \times \Sigma' s_i) = \Sigma' M(r_i \times s_i)$$

ist. Für $n = 2$ reduziert sich das auf die bekannte Beziehung

$$M((r_1 \vee r_2) M' \times (s_1 \vee s_2) M') = (M(r_1 \times s_1) \vee M(r_2 \times s_2)) M' .$$

Für $n > 2$ wende man Induktion an und beachte, daß Σ' bedeutet, daß man die Abbildungen auf eine ganz bestimmte Weise addiert. Damit ist (A) bewiesen.

f) Aus e) folgt: $[F] + [G] = [F \cdot G]$ in $\Pi(\Sigma' \lambda_i u_i, p)$. Φ sei eine Deformation von $\Sigma' \lambda_i u_i$ in o. $(Id, o)^* D_\Phi$ ist ein Homomorphismus von $\Pi(\Sigma' \lambda_i u_i, p)$ in $\Pi(A, \Omega Y)$:

$$(Id, o)^* D_\Phi[F] + (Id, o)^* D_\Phi[G] = (Id, o)^* D_\Phi[F \cdot G] .$$

Nach 2.3. entspricht dieser Beziehung in der Transposition

$$J_\Phi^{-1}[T(F)] + J_\Phi^{-1}[T(G)] = J_\Phi^{-1}[T(F \cdot G)] .$$

Da $[f]$ und $[g]$ in $\Pi(X, Y)_{1,0}$ liegen, ist J^{-1} eindeutig. Nach Definition ist $[T(F)] = h_f j \beta$, $[T(G)] = h_g j \beta$, $[T(F \cdot G)] = h_{f \cdot g} j \beta$. Wir haben also gezeigt, daß die Beziehung

$$J^{-1} h_f j \beta + J^{-1} h_g j \beta = J^{-1} h_{f \cdot g} j \beta$$

gilt. *Damit ist der Satz 10 bewiesen.*

g) Aus der Definition der BAERschen Addition von Erweiterungsklassen folgt das

Corollar. Es seien $[f]$ und $[g]$ Elemente von $\Pi(X, Y)_{1,0}$. Dann ist $\Pi(i, f \cdot g) = \Pi(i, M(f \times g))$ isomorph einer Faktorgruppe einer Untergruppe von $\Pi(i, f) + \Pi(i, g)$.

4.3. P_π ist nicht trivial; die Koeffiziententheoreme. G und H seien ABELsche Gruppen, $n > 1$. Wir betrachten die ganzzahlige Homotopiefolge $S_*(f)$ einer Abbildung $f: K'(H, n) \to K(G, n+1)$ und setzen zur Vereinfachung $K' = K'(H, n)$ und $K = K(G, n+1)$:

$$\to \pi_{n+1}(K') \xrightarrow{f_*} \pi_{n+1}(K) \xrightarrow{J} \pi_{n+1}(f) \xrightarrow{\partial} \pi_n(K') \to 0 .$$

Lemma 7. $f_* \pi_{n+1}(K') = 0 \subset \pi_{n+1}(K)$.

Beweis. Man betrachte das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} 0 = H_{n+1}(K') & \xrightarrow{f_*} & H_{n+1}(K) \\ \uparrow \omega_1 & & \uparrow \omega \\ \pi_{n+1}(K') & \xrightarrow{f_*} & \pi_{n+1}(K) \end{array} .$$

Der HUREWICZsche Homomorphismus ω ist ein Isomorphismus. Deshalb ist f_* trivial.

Lemma 7 hat zur Folge, daß sich $S_*(f)$ in der Dimension $n+1$ auf

$$0 \to \pi_{n+1}(K) \to \pi_{n+1}(f) \to \pi_n(K') \to 0$$

reduziert, das heißt, daß P_π auf ganz $\Pi(K', K)$ definiert ist.

Satz 11. In diesem Fall ist $P_\pi : \Pi(K', K) \to \operatorname{Ext}(\pi_n(K'), \pi_{n+1}(K))$ ein Isomorphismus.

Der Beweis befindet sich in 4.4. – Die Anwendung der Koeffiziententheoreme für die Cohomologie- und Homotopiegruppen auf $\Pi(K', K) = H^{n+1}(K'; G) = \pi_n(H; K)$ ergibt jeweils

$$\Pi(K', K) \cong \operatorname{Ext}(H, G) .$$

Der Satz 11 besagt somit, daß ein solcher Isomorphismus zum Beispiel durch P_π hergestellt wird. Man erhält aus ihm die Koeffiziententheoreme – wenn auch nicht in ihrer allgemeinsten Form – auf die folgende Weise zurück.

(X^i, k^i) sei eine Homotopiezerlegung des einfach zusammenhängenden Raumes X. Die Folge $S_*(p^n)$ der Faserung $p^n : X^{n+1} \to X^n$ mit der Faser $K = K(\pi_{n+1}(X), n+1)$ reduziert sich in der Dimension n auf

$$(\pi) \qquad 0 \to \pi_n(H; K) \to \pi_n(H; X^{n+1}) \to \pi_n(H; X^n) \to 0 .$$

Nach Satz 11 ist $\pi_n(H; K) \cong \operatorname{Ext}(H, \pi_{n+1}(X))$. Mit Hilfe von $S_*(p^{n+1})$ und $S_*(p^{n-1})$ erhält man die Isomorphismen

$$\pi_n(H; X^{n+1}) \cong \pi_n(H; X) ,$$

$$\pi_n(H; X^n) \cong \mathrm{Hom}(H, \pi_n(X)) .$$

In (π) eingesetzt erhält man das Koeffiziententheorem der Homotopiegruppen (vgl. [3]):

$$0 \to \mathrm{Ext}(H, \pi_{n+1}(X)) \to \pi_n(H; X) \to \mathrm{Hom}(H, \pi_n(X)) \to 0 .$$

Dabei wurde X als einfach zusammenhängend vorausgesetzt. Unter derselben Voraussetzung erhält man das Koeffiziententheorem für die Cohomologiegruppen aus dem Satz 11 in der Form

$$0 \to \mathrm{Hom}(H_n(X), G) \to H^n(X; G) \to \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X), G) \to 0 ,$$

wobei eine Homologiezerlegung des singulären Komplexes von X benutzt werden muß.

4.4. Beweis von Satz 11. Er wird auf den bekannten Fall einer Abbildung von $K(H, n) = K_n$ in $K = K(G, n+1)$ zurückgeführt, welcher damit in der Sprache der Homotopiegruppen von Abbildungen interpretiert wird.

a) Die Einbettung j von K' in $K(H, n) = K_n$ erzeugt Isomorphismen $j^* : \Pi(K_n, K) \cong \Pi(K', K)$, $j_* : \pi_n(K') \cong \pi_n(K_n)$ und $j^\# : \mathrm{Ext}(\pi_n(K_n), G) \cong$ $\cong \mathrm{Ext}(\pi_n(K'), G)$, welche Anlaß zum folgenden kommutativen Diagramm geben:

$$\begin{array}{ccc} \Pi(K', K) & \xrightarrow{P_\pi} & \mathrm{Ext}(\pi_n(K'), \pi_{n+1}(K)) \\ {\scriptstyle j^*}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle j^\#} \\ \Pi(K_n, K) & \xrightarrow{P_\pi} & \mathrm{Ext}(\pi_n(K_n), \pi_{n+1}(K)) \end{array} .$$

In b) und c) wird gezeigt, daß P_π auf $\Pi(K_n, K)$ monomorph und epimorph ist. – Übrigens ist P_π für beliebige Abbildungen j in diesem Sinne mit j vertauschbar.

b) Für $i \leq n$ ist $\pi_i(f) = 0$, $f : K_n \to K$. Deshalb existiert nach [6] eine Abbildung (u, v) mit der Eigenschaft, daß f über die von v über K induzierte Faserung q^1 faktorisiert werden kann:

$$\begin{tikzcd} Y^1 \arrow[d, "q^1"'] & K_n \arrow[l, "f^1"'] \arrow[r, "u"] \arrow[dl, "f"] & EK(\pi_{n+1}(f), n+1) \arrow[d] \\ K \arrow[rr, "v"] & & K(\pi_{n+1}(f), n+1) \end{tikzcd} .$$

Dabei erzeugt v den Homomorphismus J der Folge $S_*(f)$:

$$0 \to \pi_{n+1}(K) \xrightarrow{J} \pi_{n+1}(f) \xrightarrow{\partial} \pi_n(K_n) \to 0 .$$

Setzt man nun voraus, daß $\pi_{n+1}(f)$ isomorph zu $G+H$ ist, so kann $K(\pi_{n+1}(f), n+1)$ als ein Produkt $K \times K(H, n+1)$ angenommen werden:

$$\begin{tikzcd}
Y^1 \arrow[d, "q^1"'] & K_n \arrow[l, "f^1"'] \arrow[dl, "f"] \arrow[r, "u"] & EK \times EK(H, n+1) \arrow[d] \\
K \arrow[rr, "v"] & & K \times K(H, n+1) \,.
\end{tikzcd}$$

Als v kann die Einbettung von K in $K \times K(H, n+1)$ gewählt werden. Die von v induzierte Faserung ist dann die Projektion von $Y^1 = EK \times \Omega K(H, n+1)$ auf K, die $\Omega K(H, n+1)$ auf o abbildet und auf EK mit der üblichen Endpunktabbildung zusammenfällt:

$$q^1 : EK \times \Omega K(H, n+1) \to EK \to K \,.$$

q^1 ist nullhomotop. Dann ist aber auch $f = q^1 f^1$ nullhomotop. Also ist P_π monomorph.

c) Nach [13], 201, kann jede exakte Folge $0 \to G \to X \to H \to 0$ als Homotopiefolge einer Faserung $p: E \to K$ mit Faser $K(G, n)$ realisiert werden. Eine solche Faserung wird aber von einem $f: K_n \to K$ erzeugt:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[d, "p"'] & \text{mit} \quad \pi_n(E) \cong \pi_{n+1}(f) \cong X \\
K_n \arrow[r, "f"] & K \,.
\end{tikzcd}$$

Folglich ist P_π epimorph. – Damit ist der Satz 11 bewiesen.

4.5. Der zu P_π duale Homomorphismus P^H. Es seien X, Y, B Räume und $f: X \to Y$ eine Abbildung, $p: EB \to B$. Unter den Voraussetzungen

(1) X sei ein H'-Raum,
(2) B sei ein H-Raum,
(3) $\Pi(f, p)$ und $\Pi(Y, B)$ seien ABELsch

existiert ein Homomorphismus P^H von $\Pi(X, Y)^{1,0} \subset \Pi(X, Y)$ – der Untergruppe aller $[f]$ mit $f^*\Pi(Y, \Omega B) = f^*\Pi(Y, B) = 0$ – in ein Extensionsprodukt:

$$P^H : \Pi(X, Y)^{1,0} \to \operatorname{Ext}(\Pi(Y, B), \Pi(X, \Omega B)) \,.$$

Er wird mit Hilfe der Folge

$$0 \to \Pi(X, \Omega B) \to \Pi(f, p) \to \Pi(Y, B) \to 0$$

definiert.

Setzt man zum Beispiel für B einen $K(Q, n)$ ein, $Q =$ reelle Zahlen mod 1, und bezeichnet man mit Ψ einen Isomorphismus $\mathrm{Ext}(R, S) \cong \mathrm{Ext}(\mathrm{Char}\, S, \mathrm{Char}\, R)$, so definiert P^H einen Homomorphismus $P_H = \Psi P^H$:

$$\begin{tikzcd}
\Pi(X, Y)^{n,n-1} \arrow[r, "P^H"] \arrow[dr, "P_H"'] & \mathrm{Ext}(H^n(Y;Q), H^{n-1}(X;Q)) \arrow[d, "\Psi"] \\
& \mathrm{Ext}(H_{n-1}(X), H_n(Y)) \,.
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnet $\Pi(X, Y)^{n,n-1}$ die Untergruppe der in den Dimensionen n und $n-1$ homologisch trivialen Abbildungen.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] B. ECKMANN-P. HILTON, *Groupes d'homotopie et dualité*. Groupes absolus. C. R. Acad. Sci. Paris *246* (1958), 2444–2447.

[2] B. ECKMANN-P. HILTON, *Suites exactes*. ibid. *246* (1958), 2555–2558.

[3] B. ECKMANN-P. HILTON, *Coefficients*. ibid. *246* (1958), 2991–2993.

[4] B. ECKMANN-P. HILTON, *Transgression homotopique et cohomologique*. ibid. *247* (1958), 620–623.

[5] B. ECKMANN-P. HILTON, *Décomposition homologique d'un polyèdre simplement connexe*. ibid. *248* (1959), 2054–2056.

[6] B. ECKMANN-P. Hilton, *On the Homology and Homotopy Decomposition of Continuous Maps*. Proc. Nat. Ac. Sci. USA *45* (1959), 372–375.

[7] B. ECKMANN-P. Hilton, *Homotopy Groups of Maps and Exact Sequences* Comment. Math. Helv. *34* (1960), 271–304.

[8] P. HILTON, *Homotopy Theory and Duality*. Lecture Notes Cornell University 1958/59.

[9] N. E. STEENROD, *Cohomology Invariants of Mappings*. Ann. of Math. *50* (1949), 954–988.

[10] F. P. PETERSON, *Functional Cohomology Operations*. Trans. Amer. Math. Soc. *86* (1957), 197–211.

[11] F. P. PETERSON and E. THOMAS, *A Note on Non-Stable Cohomology Operations*. Bol. Soc. Mat. Mexic. 1958, 13–18.

[12] H. CARTAN-S. EILENBERG, *Homological Algebra*. Princeton 1956.

[13] J. P. SERRE, *Cohomologie mod 2 des complexes d'*EILENBERG-MACLANE. Comment. Math. Helv. *27* (1953), 198–231.

[14] W. S. MASSEY, *On the Universal Coefficient Theorem of* EILENBERG-MACLANE. Bol. Soc. Mat. Mexic. 1958, 1–12.

(Eingegangen den 8. August 1960)