Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 35 (1961)

Artikel: Die Dimensionsdefekte der BURNSIDE-Gruppen mit zwei Erzeugenden
Autor: Holenweg, W.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-27341

Die Dimensionsdefekte der Burnside-Gruppen mit zwei Erzeugenden*)

von W. Holenweg, Zürich

Einleitung

Burnside[1]) hat erstmals die Struktur der freien Gruppe mit endlichvielen Erzeugenden untersucht. Seine Vermutung: «Eine Gruppe mit dem Exponenten p und einer endlichen Anzahl von Erzeugenden ist endlich», ist bis heute ein Problem der Gruppentheorie geblieben[2]). Die Zahl p soll in allen weitern Betrachtungen Primzahl sein. Nach Ph. Hall läßt sich das Burnside-Problem folgendermaßen umformen:

Die Behauptung: «Eine Gruppe mit dem Exponenten p und einer endlichen Anzahl von Erzeugenden ist nilpotent», ist zur Burnside-Vermutung äquivalent.

Es sei F freie Gruppe mit q Erzeugenden: $a_1, \ldots, a_q$. F^p stellt den von den p-ten Potenzen in F erzeugten Normalteiler dar. Ferner sei $F = H_1 \supset H_2 \supset \cdots \supset H_w \supset H_{w+1} \supset \cdots$ die bekannte absteigende Zentralreihe von F und $F/F^p = B_1^p \supset B_2^p \supset \cdots \supset B_w^p \supset B_{w+1}^p \supset \cdots$ die entsprechende Reihe von F/F^p.

Wenn das Burnside-Problem richtig ist, dann gilt: $B_w^p = 1$ für irgendein w. Wir setzen im folgenden für $B_w^p = w(B)$. G sei freie Gruppe der Klasse w: $(w+1)(G) = 1$. Gilt die Burnside-Behauptung, so ist B_w^p das homomorphe Bild irgendeiner Gruppe G. Also können alle Betrachtungen ohne Verlust der Allgemeinheit in G durchgeführt werden.

Wird in G der Begriff des Basiskommutators eingeführt (siehe 1. §1) und bedeutet $x_1, \ldots, x_r$ die aufsteigende Reihe der Basiskommutatoren, so läßt sich jedes Element $y \in G$ eindeutig in der Form: $x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \ldots x_r^{\lambda_r}$ (λ_i ganze Zahl) darstellen.

G_h/G_{h+1} ist frei abelsch mit d_h^q Erzeugenden. Die Anzahl d_h^q wurde erstmals von Witt berechnet (siehe 1. §1).

L sei freie Gruppe mit dem Exponenten p und von der Klasse k; dann ist L homomorphes Bild von B^p und G. Für festes p gilt: L_h ist homomorphes Bild von L_{h+1} usw. Wir setzen für die beliebige Gruppe A mit q Erzeugenden: $A_h/A_{h+1} = c_h(A)$. $c_h(A)$ ist abelsche Gruppe. Für die Gruppe

---

*) Diese Arbeit wurde als Inaugural-Dissertation von der Philosophischen Fakultät II der Universität Zürich angenommen.

[1]) W. Burnside: On an unsettled question in the theory of discontinuous groups. Quart. Math. *33* (1902), 230–238.

[2]) R. Baer: The higher commutator subgroups of a group. Bull. Amer. Math. Soc. *50* (1944), 143–160. Siehe Bemerkung am Schluß dieser Arbeit.

F wird $c_h(F)$ frei abelsch mit d_h^q Erzeugenden. Da F freie Gruppe ist, so wird $c_h(A)$ zum homomorphen Bild von $c_h(F)$. $c_h(L)$ ist abelsch vom Exponenten p, also eine elementare abelsche Gruppe. Die Anzahl der Erzeugenden in $c_h(L)$ beträgt höchstens d_h^q, damit wird $c_h(L)$ charakteristisch für die Erzeugendenzahl. $c_h(L)$ besitze $d_{h,p}^q$ Erzeugende und wir setzen mit Ph. Hall: $d_{h,p}^q = d_h^q - \delta_h^q$. Darin wird δ_h^q als Dimensionsdefekt bezeichnet. Läßt sich nun umgekehrt eine Methode entwickeln, die es gestattet, sämtliche Dimensionsdefekte zu berechnen, so kann die Frage nach der Nilpotenz – und damit das Burnside-Problem – entschieden werden.

Die Arbeit von H. Meier-Wunderli, «Über die Struktur der Burnsidegruppe mit zwei Erzeugenden und vom Primzahlexponenten $p > 3$»[3]), diente als Grundlage zum ersten Teil dieser Abhandlung. So stellen 1. §2, 1. §4 eine Erweiterung von § 2, § 4, § 5 der erwähnten Arbeit dar, während § 3 als 1. §3 direkt übernommen wurde.

Anschließend wird gezeigt, daß für jedes Gewicht $c = p + n$ mit $n < p - 1$ zur Bestimmung von δ_{p+n}^q nur solche Basiskommutatoren eine Rolle spielen, die in ihren Erzeugenden das Gewicht p besitzen. Damit ist zugleich eine obere Grenze für die betreffenden Dimensionsdefekte festgelegt. Für $n = 0, 1$ wird diese obere Grenze erreicht und δ_p^q, δ_{p+1}^q lassen sich innerhalb der Gruppe bestimmen. R. C. Lyndon hat erstmals die beiden Werte mit Hilfe des Gruppenringes berechnet[4]).

Im 3. Teil wird die Unabhängigkeit der Basiskommutatoren untersucht und dabei bewiesen, daß die Relationen von Basiskommutatoren mit zwei freien Erzeugenden und vom Gewicht p in den Erzeugenden für $c = p + n$ und $n \leq p - 2$ unabhängig sind.

Die Ergebnisse des 2. und 3. Teils werden zusammengefaßt im folgenden Hauptsatz (4. Teil):

«*Für zwei freie Erzeugende, das Gewicht* $c = p + n$ *und* $n \leq p - 2$ *wird die Defektgruppe genau durch die verschiedenen Relationen erzeugt, welche Basiskommutatoren vom Gewicht* p *in ihren Erzeugenden enthalten.*»

Diese Aussage wurde von H. Meier-Wunderli vermutet.

Der angegebene Hauptsatz gestattet die Bestimmung sämtlicher Dimensionsdefekte δ_{p+n}^2 für $n \leq p - 2$. Anhand einiger Beispiele wird die Methode der Bestimmung erläutert. Es ergeben sich dabei die bekannten Werte δ_p^q, δ_{p+1}^q[4]), $\delta_{p+2,3}^2$[5]), neu ist: $\delta_{p+4}^2 = 15p - 13$ für $p > 5$[6]).

[3]) Siehe: Comment. Math. Helv. Vol. XXX (1956), 144–174.

[4]) R. C. Lyndon: On Burnsides Problem. Trans. Amer. Math. Soc. *77* (1954), 202–215.

[5]) δ_{p+2}^2 war erstmals Ph. Hall, δ_{p+3}^2 H. Meier-Wunderli bekannt (unveröffentlichte Arbeiten). R. C. Lyndon berechnet in [4]) δ_{p+2}^2 und δ_{p+3}^2 in: «On Burnsides Problem II». Trans. Amer. Math. Soc. *78* (1955), 329–332.

[6]) H. Meier-Wunderli hat diesen Wert vermutet.

1. Allgemeine Betrachtungen[7]

§ 1. Basiskommutatoren

Wir nennen die freien Erzeugenden $a_1, \ldots, a_q$ von F Basiskommutatoren vom Gewicht $w = 1$. Diese bilden eine Eindeutigkeitsbasis für die Faktorkommutatorgruppe von F. Anstelle von a_j schreiben wir $K_{1,j}$ $(j = 1, \ldots, q)$ und sagen $K_{1,j}$ gehe $K_{1,i}$ voran $(K_{1,j} \prec K_{1,i})$ dann und nur dann, wenn $j < i$.

Was wir unter der geordneten Reihe der Basiskommutatoren $K_{c,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, d_c^q)$ vom Gewicht c verstehen, definieren wir induktiv.

Wir nehmen an, die Basiskommutatoren vom Gewicht $w < c$ seien bereits erklärt und vermöge der Anordnungsrelation «$\prec$» wohlgeordnet.

Wir definieren nun:

Die Basiskommutatoren vom Gewicht c haben die Gestalt:

$$K_{c,i} = [K_{a,k}, K_{b,j}]$$

mit den folgenden Eigenschaften:

1) $a + b = c$
2) $a \geq b \geq 1$
3) Ist $a = b$, so soll $K_{b,j} \prec K_{a,k}$
4) Ist $a > b$ und also $K_{a,k} = [K_{e,i}, K_{f,h}]$, so soll entweder $K_{f,h} = K_{b,j}$ oder $K_{f,h} \prec K_{b,j}$
5) Ist $K_{c,i} = [K_{d,r}, K_{e,s}]$ und $K_{c,l} = [K_{a,k}, K_{b,j}]$, so gilt $K_{c,i} \prec K_{c,l}$ falls entweder $K_{e,s} \prec K_{b,j}$ oder $K_{d,r} \prec K_{a,k}$ wenn $K_{e,s} = K_{b,j}$.

Die Anzahl der Basiskommutatoren vom Gewicht w bei q Erzeugenden d_w^q wurde von E. WITT[8] bestimmt. Sie beträgt:

$$d_w^q = \frac{1}{w} \sum_{t/w} \mu(t) q^{\frac{w}{t}}.$$

Es gilt nun der wichtige Satz[9]:

1.1. Satz. *Die Basiskommutatoren vom Gewicht $\leq w$ liefern eine geordnete Eindeutigkeitsbasis der freien nilpotenten Gruppe der Klasse w mit der Erzeugendenzahl q.*

Also besitzt jedes Element aus $F \bmod H_{w+1}$ eindeutig die folgende Gestalt:

$$K_{1,1}^{x_{1,1}} \ldots K_{1,q}^{x_{1,q}} K_{2,1}^{x_{2,1}} \ldots K_{w,1}^{x_{w,1}} \ldots K_{w,dw}^{x_{w,dw}} \quad (-\infty < x_{i,j} < +\infty) \tag{1.2}$$

[7]) Siehe Bemerkungen in der Einleitung.

[8]) E. WITT: Treue Darstellung LIEscher Ringe. J. reine angew. Math. *177* (1937), 152–160.

[9]) M. HALL: A basis for free LIErings and higher commutators in free groups. Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950). – H. MEIER WUNDERLI: Note on a basis of PH. HALL for the higher commutators in free groups. Comment. Math. Helv. *26* (1952).

und jedes Element aus H_w/H_{w+1} läßt sich darstellen in der Form:

$$\prod_{k=1}^{d_w} K_{w,k}^{x_{w,k}} \; (-\infty < x_{i,j} < +\infty) \,. \tag{1.3}$$

§ 2. Ein Satz über die Exponenten in der HALLschen Identität[10])

Wird die Potenz $(K_1^{x_1} \dots K_q^{x_q})^n$ mit $x_i > 0$ $(i = 1, \dots, q)$ und $n = 2, 3, \dots \bmod H_{w+1}$ gemäß der Normalform (1.2) entwickelt, so ergibt sich eine Identität der Form:

$$(K_1^{x_1} \dots K_q^{x_q})^n = \prod_{c=1}^{w} K_{c,1}^{f_{c,1}^{(n)}} \dots K_{c,d_c}^{f_{c,d_c}^{(n)}} \,. \tag{1.4}$$

Dies ist die Identität von HALL, und es gilt der fundamentale Satz:
Die Exponenten in (1.4) *sind von der Form:*

$$f_{c,j}^{(n)} = \sum_{k=1}^{\min(c,n)} \binom{n}{k} a_{c,j}^{(k)}(x_1, \dots, x_q) \,. \tag{1.5}$$

Über die darin auftretenden Polynome gibt der folgende Satz Aufschluß:

1.6. Satz. *Die* $a_{c,k}^{(k)}$ *in* (1.5) *sind ganze rationale Polynome in den Unbestimmten* $\binom{x_i}{k_i}$ $(i = 1, \dots, q)$. *Die natürlichen Zahlen* k_i $(i = 1, \dots, q)$ *genügen den Ungleichungen*

$$1 \le k_i \le c - k + 1 \,.$$

Beweis. Wir führen den Labeling-Prozeß von PH. HALL durch. Die Potenz links in (1.4) schreiben wir in der Form:

$$\prod_{\varrho=1}^{n} K_1^{(\varrho,1)} \dots K_1^{(\varrho,x_1)} K_2^{(\varrho,1)} \dots K_2^{(\varrho,x_2)} \dots K_q^{(\varrho,1)} \dots K_q^{(\varrho,x_q)} \,. \tag{1.7}$$

Das Symbol (ϱ, τ) von K_i heißt Label von K_i. Es beschreibt die Stellung von K_i innerhalb des Produktes von (1.7) eindeutig.

Man gewinnt nun (1.4) dadurch, indem man in (1.7) zuerst alle K_1, dann alle K_2, usw., nach allen K_q alle $[K_2, K_1] = K_{2,1}$ usw., das heißt alle im Durchziehprozeß auftretenden Basiskommutatoren $K_{c,j}$ ihrer Anordnung gemäß an die zugehörige Stelle bringt. Dies geschieht durch elementare Transformationen der Form:

$$\dots SR \dots = \dots RS[S, R] \dots \,. \tag{1.8}$$

---

[10]) PH. HALL: A contribution to the theory of groups of primepower order. Proc. London Math. Soc. II, Ser. *36* (1933), 29–95.

Um diesen Prozeß eindeutig zu machen, setzen wir fest, daß von zwei Basiskommutatoren zuerst der am weitesten links an seine richtige Stelle gerückt wird.

Ist $K_{c,j}$ der r-te Basiskommutator in (1.2), so nennen wir den Prozeß, welcher $K_{c,j}$ an die richtige Stelle bringt, den r-ten Schritt. Nach der Definition der Basiskommutatoren werden bei jedem Schritt die induzierten Kommutatoren in (1.8) Basiskommutatoren. Und da das Gewicht von $[S, R]$ stets größer ist als dasjenige des durchzuziehenden Elementes R, gelangt man nach einer endlichen Anzahl von Schritten zur gesuchten Darstellung.

Jedem im Prozeß auftretenden Kommutator in (1.8) $[K_{c,j}, K_{b,i}]$ ordnen wir ein Label zu. Man erhält es, indem man mit den als schon bekannt gedachten Label $L(K_{c,j})$ und $L(K_{b,i})$ von $K_{c,j}$ bzw. $K_{b,i}$ das Symbol $(L(K_{c,j}), L(K_{b,i}))$ bildet. Dadurch wird jedem Kommutator in (1.8) ein Label zugeordnet. Da kein Kommutator mehr als einmal mit demselben Label vorkommen kann, gibt der zu $[K_{c,j}, K_{b,i}]$ in (1.4) gehörende Exponent gerade die Anzahl der verschiedenen Label von $[K_{c,j}, K_{b,i}]$ an.

Wir nennen ein System von Bedingungen C, welchem die Unbestimmten $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ zu genügen haben, ein System von Π-Bedingungen, falls Π mittels logischer Summen- und Produktbildung aus einem System von elementaren Bedingungen der Form:

$$\lambda_i < \lambda_j \quad \text{oder} \quad \lambda_i = \lambda_j$$

gewonnen werden kann. Daß Π-Bedingungen bei logischen Summen- und Produktbildungen wieder Π-Bedingungen ergeben, ist klar.

Es sei K_i der i-te Kommutator in (1.2). Wir bezeichnen die Bedingung, daß K_i in (1.8) mit vorgegebenem Label auftreten kann mit E_i. Entsprechend bezeichnen wir mit $Q_{i,j}$ diejenigen Bedingungen, die garantieren, daß der Basiskommutator K_i mit gegebenem $L(K_i)$ nach Ausführung gewisser Operationen (1.8) links vom Basiskommutator K_j mit vorgegebenem $L(K_j)$ auftritt.

Man zeigt wie bei PH. HALL:

(I) Die im r-ten Schritt in (1.8) auftretenden Bedingungen E und Q werden gewonnen mittels logischer Summen- und Produktbildung aus schon bestehenden E und Q.

Im 0-ten Schritt sind folgende E und Q zu untersuchen: $E_1, \ldots, E_q$; $Q_{1,1}, \ldots, Q_{1,q}, Q_{2,1}, \ldots, Q_{2,q}, \ldots, Q_{q,1}, \ldots, Q_{q,q}$. Zunächst sind die E_i $(i = 1, \ldots, q)$ leer. Die Bedingungen $Q_{r,r}$ $(r = 1, \ldots, q)$ sind äquivalent mit

$$\varrho_i < \varrho_j \quad \text{oder} \quad \varrho_i \leq \varrho_j \quad \text{und} \quad \tau_i < \tau_j\,.$$

Die Bedingungen $Q_{r,s}$ sind äquivalent mit $(r \neq s;\ r, s = 1, \ldots, q)$

$$\text{a)}\quad r < s \quad \varrho_i \leq \varrho_j \qquad\qquad \text{b)}\quad r > s \quad \varrho_i < \varrho_j \,.$$

Damit sind alle E und Q im 0-ten Schritt Π-Bedingungen und zwar zwischen den ϱ allein und den τ allein. Aus (I) folgt:

(II) Die E und Q des r-ten Schrittes sind Π-Bedingungen zwischen den ϱ allein und den τ allein.

Genauer können wir sagen: Die E und Q des 0-ten Schrittes enthalten höchstens dann Π-Bedingungen für τ_i und τ_j, wenn erstens $\varrho_i = \varrho_j$ und wenn zweitens (ϱ_i, τ_i) und (ϱ_j, τ_j) Label desselben Kommutators vom Gewicht 1 sind, das heißt also Label von einem der K_i $(i = 1, \ldots, q)$. Wegen (I) folgt:

(III) Die E und Q des r-ten Schrittes enthalten höchstens dann Π-Bedingungen für τ_i, τ_j, wenn

a) $\varrho_i = \varrho_j$ und

b) (ϱ_i, τ_i) und (ϱ_j, τ_j) zwei Label von einem der K_i sind.

Es sei $L_{\varrho,\tau} = ((\varrho_1, \tau_1), \ldots, (\varrho_c, \tau_c))$ Label eines Kommutators vom Gewicht c. Dies bedeutet nach (II), daß zwischen den ϱ allein und den τ allein gewisse Π-Bedingungen bestehen müssen. Setzt man $\varrho = (\varrho_1, \ldots, \varrho_c)$ und heißen ϱ und ϱ' äquivalent, wenn für $\varrho_i < \varrho_j$ oder $\varrho_i = \varrho_j$ in ϱ stets auch $\varrho'_i < \varrho'_j$ oder $\varrho'_i = \varrho'_j$ in ϱ' für alle Indexpaare i, j erfüllt ist, so folgt aus der Definition der Π-Bedingungen, daß auch $L_{\varrho',\tau} = ((\varrho'_1, \tau_1), \ldots, (\varrho'_c, \tau_c))$ Label desselben Kommutators ist.

Es möge ϱ genau k verschiedene ϱ_i enthalten und es sei:

$$\varrho_{i_1} < \varrho_{i_2} < \cdots < \varrho_{i_k} \,.$$

Heißt man jetzt zwei Label äquivalent, wenn $\varrho \sim \varrho'$, so erhält man eine Klasseneinteilung aller Label in fremde Klassen. In der Klasse N von $L(\varrho, \tau)$ gibt es demnach $\binom{n}{k}$ Systeme von Label, die sich nur durch die ϱ unterscheiden; das heißt in einem System ist ϱ konstant.

Um die Anzahl aller Label unseres Kommutators in der Klasse N zu bestimmen, hat man nur die Anzahl aller Label mit festem ϱ zu betrachten.

Nach (III) wirken die E und Q nicht auf alle τ, sondern nur auf gewisse Blöcke der τ, etwa $(b_1, \ldots, b_{r_q})$. Zwei τ rechnen wir zum selben Block gehörend, falls in (III) a) und b) erfüllt sind. Ist $b_i = (\tau_1^i, \ldots, \tau_c^i)$, so schreiben wir $\tau = (b_1, \ldots, b_{r_q})$ und heißen τ und τ' äquivalent, falls $b_i \sim b'_i$ $(i = 1, \ldots, r_q)$. Nach (II), (III) und der Definition der Π-Bedingungen gilt, daß mit $L_{\varrho,\tau}$ auch $L_{\varrho,\tau'}$ Label unseres Kommutators ist.

Enthält b_i genau k_i verschiedene τ und gilt:

$$\tau^i_{j_1} < \tau^i_{j_2} < \cdots < \tau^i_{j_{k_i}}$$

so gibt es in der Klasse von $L_{\varrho,\tau}$ mit festem ϱ gerade

$$\prod_{i=1}^{r_1}\binom{x_1}{k_i}\prod_{i=r_1+1}^{r_2}\binom{x_2}{k_i}\cdots\prod_{i=r_{q-1}+1}^{r_q}\binom{x_q}{k_i}$$

Label mit äquivalentem τ. Dabei nehmen wir an, die Blöcke seien so numeriert, daß alle τ in b_i $(i = 1, \ldots, r_1)$ natürliche Zahlen $\leq x_1$ und in b_i $(i = r_{j-1}+1, \ldots, r_j)$ natürliche Zahlen $\leq x_j$ sind, denn die τ gehören zu Label, die alle zu einem der K_i $(i = 1, \ldots, q)$ gehören.

Die Anzahl aller Label mit festem ϱ in N ist also eine endliche Summe von Aggregaten der angegebenen Form. Damit ist die Anzahl aller Label in N gleich:

$$\binom{n}{k}\Sigma\prod_{i=1}^{r_1}\binom{x_1}{k_i}\cdots\prod_{i=r_{q-1}+1}^{r_q}\binom{x_q}{k_i}.$$

Summiert man über alle Labelklassen, deren ϱ genau k verschiedene ϱ_i aufweist, so erhält man das Glied:

$$\binom{n}{k}a_{c,j}^{(k)}.$$

Nun ist k_i stets kleiner oder höchstens gleich der maximalen Anzahl der übereinstimmenden ϱ_i. Diese ist $\leq c - k + 1$. Damit ist Satz (1.6) bewiesen.

§ 3. Nilpotente Gruppen der Klasse $c < p$[11])

Über nilpotente Gruppen der Klasse $c < p$ gilt der folgende Satz:

1.9. Satz. $g = \{K_1, \ldots, K_r\}$ *sei nilpotente Gruppe der Klasse* $c < p$ *mit den folgenden Eigenschaften:*

a) $g^{(i)} = \{K_i, K_{i+1}, \ldots, K_r\}$ *ist Normalteiler von* g $(g^{(1)} = g)$.

b) $g^{(i)}/g^{(i+1)}$ *ist zyklisch von unendlicher Ordnung.*

c) $g^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, r)$ *ist Zentralkette von* g.

Dann ist $g^p = \{K_1^{x_1} \ldots K_r^{x_r}\}$ mit $x_1, \ldots, x_r \equiv 0 \bmod p$.

Beweis. Aus a) und b) folgt $g^{(i)} = \{K_i^{x_i} \ldots K_r^{x_r}\}$ mit $(-\infty < x_i < +\infty)$.

Der Satz ist richtig für die im Zentrum gelegene Gruppe $g^{(z)}$. Wir dürfen daher vollständige Induktion nach fallenden i vornehmen; es ist unsere Induktionsvoraussetzung:

$$(g^{(i+1)})^p = \{K_{i+1}^{x_{i+1}} \ldots K_r^{x_r}\} \text{ mit } x_{i+1}, \ldots, x_r \equiv 0 \bmod p$$

und $(g^{(i+1)})^p$ Normalteiler von g.

---

[11]) Siehe Bemerkungen in der Einleitung.

Wir berechnen die p-te Potenz $(x^{-1}K_i x)^p \bmod (g^{(i+1)})^p$. Es gilt: $x^{-1}K_i x = K_i[K_i, x]$ mit $[K_i, x] \subset g^{(i+1)}$ nach c).

Nun betrachten wir die HALLsche Identität, die zu dieser p-ten Potenz gehört. Wegen $c < p$ sind nach (1.5) alle Exponenten $f_{c,j}^{(p)} \equiv 0 \bmod p$. Das heißt:

$$(x^{-1}K_i x)^p = K_i^p [K_i, x]^p \dots [\ ]^p .$$

Mit Hilfe von c) und der Induktionsvoraussetzung folgt daher:

$$x^{-1}K_i^p x \equiv K_i^p \bmod (g^{(i+1)})^p .$$

Damit liegt K_i^p im Zentrum von $g/(g^{(i+1)})^p$, und die Gruppe

$$N = \{K_i^p, (g^{(i+1)})^p\}$$

ist Normalteiler von g. N besitzt nach a) und b) die Gestalt:

$$N = \{K_i^{x_i} \dots K_r^{x_r}\} \text{ mit } x_i, \dots, x_r \equiv 0 \bmod p .$$

Da $g^{(i)}$ von der Klasse $c < p$, hat jede p-te Potenz der Elemente in $g^{(i)}$ wegen der Existenz der Eindeutigkeitsbasis und nach der Induktionsvoraussetzung über $g^{(i+1)}$ die Form der Elemente in N. Es folgt daher $N = (g^{(i)})^p$.

Im nächsten Abschnitt verwenden wir noch den folgenden Hilfssatz:

1.10. Hilfssatz. Ist $x \in H_\alpha$ und $y \in H_\beta$, so gelten die Kongruenzen

$$[x, y^p] \equiv 1 \bmod H_{\alpha+p\beta} H_{\alpha+\beta}^p$$
$$[x^p, y^p] \equiv 1 \bmod H_{p(\alpha+\beta)} H_{\alpha+\beta}^p .$$

Beweis. Es gilt:

$$[x, y^p] = (y^{-1}[y^{-1}, x])^p y^p .$$

Nach dem Beweis von Satz (1.9) folgt jedoch:

$$(y^{-1}[y^{-1}, x])^p \equiv y^{-p} \bmod H_{\alpha+\beta+(p-1)\beta} H_{\alpha+\beta}^p ,$$

denn die Klasse von $H_{\alpha+\beta}/H_{\alpha+p\beta}$ ist $< p$. Somit gilt:

$$[x, y^p] \equiv 1 \bmod H_{\alpha+p\beta} H_{\alpha+\beta}^p .$$

§ 4. Einführung der Defektgruppe

Wir rechnen in diesem Abschnitt $\bmod H_{2p-1}$. Dadurch kann H_p als abelsche Gruppe behandelt werden und H_2 ist nilpotent von der Klasse $c \not< p$.

Zum Studium der Gruppe $H_{2p-1}F^p/H_{2p-1}$ gehen wir von H_2 aus. H_2 genügt den Voraussetzungen von Satz (1.9). Man hat als Gruppen $g^{(i)}$ nur die Gruppen $\{K_i \dots, K_r\}$ $(i \geq q+1)$ zu bilden, wobei $K_{q+1}, K_{q+2}, \dots, K_r$

die aufsteigende Reihe der Basiskommutatoren vom Gewicht $w = 2$ bis zum Gewicht $w = 2p - 2$ bedeutet. Dann sind a)–c) erfüllt nach Satz (1.1).

Setzt man $D = H_{2p-1}H_2^p$, so folgt nach Satz (1.9)

$$D/H_{2p-1} \equiv \{K_{q+1}^{x_{q+1}} \dots K_r^{x_r}\} \tag{1.11}$$
$$\text{mit } x_{q+1}, \dots, x_r \equiv 0 \bmod p .$$

Also kann zur Ermittlung von Dimensionsdefekten vom Gewicht w mit $p \leq w \leq 2p - 2$ stets $\bmod D$ gerechnet werden. Im folgenden rechnen wir, ohne spezielle Angabe, immer $\bmod D$.

Jedes Element aus F hat die Gestalt:

$$K_1^{x_1} \dots K_q^{x_q} K_{q+1}^{x_{q+1}} \dots K_r^{x_r}$$
$$-\infty < x_1, \dots, x_q < +\infty; \qquad 0 \leq x_{q+1}, \dots, x_r < p .$$

Bildet man hiervon die p-te Potenz nach (1.6), so ergibt sich:

$$K_1^{px_1} \dots K_q^{px_q} \prod_i P_i^{a_i(p)} \equiv K_1^{px_1} \dots K_q^{px_q} h(x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_r) \tag{1.12}$$

wobei die P_i Kommutatoren in den Erzeugenden K_i sind und vom Gewicht $w \geq p$ in diesen Komponenten. Die P_i vom Gewicht $2 \leq w \leq p$ in den Komponenten K_i haben nach (1.5) Exponenten, die durch p teilbar sind, so daß man sie $\bmod D$ weglassen kann.

Über die Struktur der h-Bestandteile der p-ten Potenz (1.12) gilt der folgende Satz:

1.13. Hilfssatz. 1) Falls $x_i \equiv r_i \bmod p\ (i = 1, \dots, q)$, so gilt:

$$h(x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_r) \equiv h(r_1, \dots, r_q, x_{q+1}, \dots, x_r) \bmod p .$$

2) Zu gegebenen ganzen Zahlen $x_i : 0 \leq x_1, \dots, x_r < p$ mit $x_1 \neq 0$ gibt es eindeutig bestimmte ganze Zahlen $y_i : 0 \leq y_2, \dots, y_r < p$, so daß:

$$h(x_1, \dots, x_r) \equiv (h(1, y_2, \dots, y_r))^{x_1} \bmod D .$$

Beweis. 1) Dies ist eine Folgerung von Satz (1.6) und von (1.11). $h(x_1, \dots, x_r)$ stellt ein Produkt von Basiskommutatoren P_j in den Erzeugenden $K_i\ (i = 1, \dots, r)$ und vom Gewicht $\geq p$ in diesen Erzeugenden dar. Also können wir annehmen, P_j enthalte gerade die Komponenten $K_{m_1}, \dots, K_{m_l}$ und es sei P_j vom Gewicht c_{m_i} in K_{m_i}; so daß $\sum_{i=1}^{l} c_{m_i} = c \geq p$. Nach Satz (1.6) und dessen Beweis nimmt nun der zu P_j gehörende HALLsche Exponent $a_j^{(p)}$ in (1.5) die Gestalt an:

$$a_j^{(p)} = \Sigma [x_{m_1}][x_{m_2}] \dots [x_{m_l}]$$
$$\text{mit } [x_{m_i}] = \prod_{u_{m_i}} \binom{x_{m_i}}{u_{m_i}}; \qquad 1 \leq \Sigma u_{m_i} \leq c_{m_i} .$$

Da jedoch $c \leq 2p - 2$ und $k = p$, so folgt, daß $c - k + 1 < p$, was ergibt $1 \leq u_{mi} < p$. Daraus folgt unmittelbar 1).

2) Es gilt $\bmod H_{2p-1}$:

$$(K_1 K_2^{y_2} \ldots K_q^{y_q} \ldots K_r^{y_r})^{x_1} \equiv K_1^{x_1} K_2^{y_2 x_1} \ldots K_q^{y_q x_1} \ldots K_i^{y_i x_1 + c(x_1; y_2, \ldots, y_{i-1})} \tag{1.14}$$

wo $c(x_1; y_2, \ldots, y_{i-1})$ ein Polynom in den Unbestimmten $x_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$ bedeutet. Wählt man bei gegebenen x_1 $(i = 1, \ldots, r)$ in (1.14) die y_i $(i = 2, \ldots, r)$ gemäß der Kongruenz:

$$y_j x_1 \equiv x_j \bmod p \qquad (j = 2, \ldots, q) \tag{1.15}$$
$$y_i x_1 + c(x_1; y_2, \ldots, y_{i-1}) \equiv x \bmod p \qquad (i = q+1, \ldots, r)$$

so ist y_i im angegebenen Bereich eindeutig bestimmt.

Bildet man die p-te Potenz von (1.14) unter Berücksichtigung von (1.15), so folgt nach Satz (1.6):

$$(K_1^p \ldots K_q^{y_q p} h(1, y_2, \ldots, y_r))^{x_1} \equiv K^{p x_1} \ldots K^{p y_q x_1} h(x_1, \ldots, x_r) .$$

Die linke Seite ist aber gleich:

$$K_1^{p x_1} \ldots K_q^{p y_q x_1} (h(1, y_2, \ldots, y_r))^{x_1} \Pi$$

wobei Π ein Produkt aus Basiskommutatoren der Form $[[x^p, y^p], \ldots]$ und $[[h, x^p], \ldots]$ darstellt. Nach (1.10) sind aber diese Kommutatoren in $H_{2p} H_2^p$ enthalten. Damit folgt:

$$(h(1, y_2, \ldots, y_r))^{x_1} \equiv h(x_1, \ldots, x_r) .$$

Bemerkung. Nach (1.5) ist der Exponent von P_j in (1.12) durch p teilbar, wenn P_j in den K_i das Gewicht $w < p$ hat. Daher braucht man mit K_i nur bis zu Basiskommutatoren vom Gewicht $w < p$ zu gehen. Enthält nämlich P_j ein K_i vom Gewicht $\geq p$, so kann es in den $K_i \bmod H_{2p-1}$ höchstens das Gewicht $p - 1$ haben. Ein solches P_j liefert nur Beiträge in D.

Die h-Bestandteile der Potenzen in (1.12) liegen alle in $H_p D / D$. Dies ist eine elementare abelsche Gruppe vom Exponenten p.

Mit D' bezeichnen wir die Gruppe $\{h(x_1, \ldots, x_r), D\}$. Es gilt:

1.16. Hilfssatz. D' ist Normalteiler von F und D'/D ist eine abelsche Gruppe vom Exponenten p.

Beweis. Es ist nur zu zeigen, daß D' Normalteiler von F. Wir zeigen dies mod D.

Es sei h ein h-Bestandteil und es gelte:

$$(K_1^{x_1} \dots K_r^{x_r})^p \equiv K_1^{p x_1} \dots K_q^{p x_q} h(x_1, \dots, x_r) .$$

Dann folgt durch Transformation mit $x \in F$:

$$(K_1^{x_1}[K_1^{x_1}, x] K_2^{x_2}[K_2^{x_2}, x] \dots)^p \equiv (K_1^{x_1}[K_1^{x_1}, x])^p \dots (K_q^{x_q}[K_q^{x_q}, x])^p x^{-1} h x$$

somit $$K_1^{p x_1} \dots K_q^{p x_q} h^{(1)} \equiv K_1^{p x_1} h^{(2)} \dots K_q^{p x_q} h^{(q+1)} x^{-1} h x$$

wenn $h^{(i)}$ h-Bestandteile bedeuten. Da das Gewicht dieser $h^{(i)} > p$, folgt nach (1.10)

$$[h^{(i)}, K_{i-1}^{p x_{i-1}}] \equiv 1 \bmod H_{2p} H_2^p .$$

Also gilt: $h^{(i)} \equiv h^{(2)} \dots h^{(q+1)} x^{-1} h x$, das heißt $x^{-1} h x$ gehört zu D' mod D. Damit ist D' Normalteiler von F.

Mit D'' bezeichnen wir die Gruppe $\{K_1^p, \dots, K_q^p, D'\}$. Dann gilt:

1.17. Hilfssatz. D'' ist Normalteiler von F und D''/D' ist eine freie abelsche Gruppe.

Beweis. Wir berechnen die p-te Potenz $(x^{-1} K_1 x)^p$ mod D'. Da $x^{-1} K_1 x = K_1 [K_1, x]$, so folgt: $x^{-1} K_1^p x \equiv K_1^p \bmod D'$. Das heißt $K_1^p, \dots, K_q^p$ liegen im Zentrum von F/D'. Also ist D'' Normalteiler von F und D''/D' ist abelsch. Da aber $D' \subset H_2$ ist D''/D' frei abelsch.

Über die Struktur der Gruppe $H_{2p-1} F^p / H_{2p-1}$ gibt der folgende Satz Aufschluß:

1.18. Satz:

$$H_{2p-1} F^p / H_{2p-1} = \{K_1^{x_1} \dots K_q^{x_q} h_1^{\lambda_1} \dots h_g^{\lambda_g} K_{q+1}^{x_{q+1}} \dots K_r^{x_r}\}$$

$$\textit{mit } x_1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_r \equiv 0 \bmod p ; \quad 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_g < p .$$

Beweis. Einerseits enthält D''/H_{2p-1} nach Konstruktion alle p-ten Potenzen der Elemente aus F. Andererseits liest man aus der ermittelten Normalform der Elemente in D''/H_{2p-1} ab, daß diese Gruppe in $H_{2p-1} F^p / H_{2p-1}$ enthalten ist. Somit folgt $D'' = H_{2p-1} F^p$.

Definition. *Die Gruppe D'/D heißt Defektgruppe.*

Mit Hilfe der Sätze (1.13) und (1.16) bis (1.18) ergibt sich der folgende wichtige Satz über die Defektgruppe:

1.19. Satz. *Zur Bestimmung der Dimensionsdefekte im Bereiche $0 \leq w \leq 2p-2$ hat man nur die Defektgruppe D'/D zu betrachten. δ_w^p ist gleich der Anzahl aller*

$$\begin{array}{l} h(1, x_2, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_r) \\ h(0, 1, \dots, x_q, x_{q+1}, \dots, x_r) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ h(0, \dots, 0, 1, x_{q+1}, \dots, x_r) \end{array}$$

mit $0 \leq x_2, \dots, x_r < p$ *in* $H_w D/D$ *die* $\operatorname{mod} H_{w+1} D$ *voneinander unabhängig sind.*

Um die Struktur der Defektgruppe D'/D zu untersuchen, bilden wir die p-ten Potenzen (Hallsche Identität) der Gestalt:

$$\begin{array}{ll} (K_1 K_2^{x_2} \dots K_r^{x_r})^p & \\ (K_2 K_3^{x_3} \dots K_r^{x_r})^p & 0 \leq x_2, \dots, x_r < p; \quad w(K_r) \leq p - 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots & \\ (K_q K_{q+1}^{x_{q+1}} \dots K_r^{x_r})^p . & \end{array} \tag{1.20}$$

Wir denken uns dies formal in den Unbestimmten $x_2, \dots, x_r$ durchgeführt, das heißt wir nehmen an, daß zu jedem auftretenden Kommutator vom Gewicht $w \geq p$ in den K_i das $a_{c,j}^{(p)}$ nach (1.5) in den Unbestimmten $x_2, \dots, x_r$ bestimmt sei. Dadurch gewinnt man die generellen

$$h_i = h(0, \dots, 0, 1, x_{i+1}, \dots, x_{q+2}, \dots, x_r) \quad (i = 1, \dots, q) .$$

Da D'/D nach (1.16) abelsche Gruppe vom Exponenten p ist, dürfen wir wegen Satz (1.6) das generelle $h \operatorname{mod} D$ folgendermaßen schreiben $(c - k + 1 < p)$:

1) Man schreibe jedes $a_{c,j}^{(p)}$ als ganzzahliges $\operatorname{mod} p$ reduziertes Polynom. Jede Potenz x^n mit $n \geq p$ wird reduziert nach der immer gültigen Kongruenz $x^p \equiv x \operatorname{mod} p$.

2) Nun ordne man nach den verschiedenen Monomen m_i in den x_i, die bei der Reduktion 1) in den Exponenten entstanden sind. Das heißt man schreibe h als ein Produkt von Potenzen, deren Exponenten die voneinander verschiedenen Monome m_i sind.

Das generelle $h(1, x_2, \dots, x_r)$ nimmt dabei die Gestalt an:

$$h(1, x_2, \dots, x_r) \equiv e_1^{m_1} \dots e_{s_1}^{m_{s_1}} \tag{1.21}$$

wobei $m_1, \dots, m_{s_1}$ die im Prozeß 1) und 2) entstandenen verschiedenen Monome bedeuten. Analog schreibt man sich das generelle h_i in der Form:

$$h(0, \dots, 0, 1, x_{i+1}, \dots, x_{q+2}, \dots, x_r) \equiv e_{s_i+1}^{m_1} \dots e_{s_{i+1}}^{m_t} \tag{1.22}$$
$$(i = 1, \dots, q; \quad s_{i+1} = s_i + t)$$

wobei $m_1, \dots, m_t$ Monome in $x_{i+1}, \dots, x_r$ sind.

Es gilt der grundlegende Satz:

1.23. Satz. *Die Defektgruppe D'/D wird von den Elementen $e_{s_i}(s_i = 1, \ldots, s_1, \ldots, s_q)$ erzeugt.*

Beweis. Es ist $h \subset \{e_1, \ldots, e_{s_q}\}$. Also bleibt zu zeigen, daß $e_i \subset \{h_1, \ldots, h_g\}$. Dies folgt jedoch sofort aus:

1.24. Hilfssatz. Wenn in einer abelschen Gruppe vom Exponenten p Elemente der Form $h(x_1, \ldots, x_r) = e_1^{m_1} \ldots e_q^{m_q}$ gegeben sind, wobei die $m_1, \ldots, m_q$ sämtliche Monome in $x_1, \ldots, x_r$ und $x_1, \ldots, x_r$ unabhängig voneinander die Zahlen von 0 bis $p-1$ durchlaufen, so sind $e_1, e_2, \ldots, e_q$ in der von den $h(x)$ erzeugten Gruppe enthalten.

Beweis. Schreibt man h in der Form:

$$h(x_1, \ldots, x_r) = f_1^{x_1^1} f_2^{x_1^2} \ldots f_{p-1}^{x_1^{p-1}} f_p$$

und gibt man x_1 die Werte $0, 1, \ldots, p-1$, so kann man, weil die Determinante der Exponenten von Null verschieden ist, die f_i $(i = 1, \ldots, p)$ auflösen und durch die $h(x)$ ausdrücken. Die f_i haben dieselbe Gestalt wie die $h(x)$, aber die Exponenten sind nur Monome in $x_2, x_3, \ldots, x_r$. Wiederholt man das Verfahren mit x_2 usw., so erhält man schließlich $e_1, \ldots, e_q$ durch die $h(x)$ ausgedrückt.

2. Über die Bestimmung von Dimensionsdefekten für q Erzeugende

§ 1. Der Fall $c < p$

Wir setzen, wie in der Einleitung erwähnt: $F/F^p = B^p$. Nun wollen wir die Ordnung der Gruppe B_w^p/B_{w+1}^p bestimmen.

Zu diesem Zwecke wählt man in Satz (1.9) die Gruppen $g^{(i)}$ folgendermaßen:

$$g^{(i)} = \{K_i, K_{i+1}, \ldots, K_r\}$$

wobei $K_1, \ldots, K_r$ die aufsteigende Reihe der Basiskommutatoren vom Gewicht $< p$ bedeutet.

Damit sind die Voraussetzungen von (1.9) erfüllt und es gilt:

$$F^p = \{K_1^{x_1} \ldots K_r^{x_r}\} \quad \text{mit} \quad x_1, \ldots, x_r \equiv 0 \bmod p;$$

angewandt auf B^p:

$$B^p = \{K_1, \ldots, K_r\} \quad \text{mit der Relation} \quad K_i^{x_i} \equiv 1 \bmod p\,,$$

falls $x_1 \equiv 0 \bmod p$ $(i = 1, \ldots, r)$; daraus ergibt sich für B_w^p:

$$B_w^p = \{K_i, \ldots, K_r\} \quad \text{mit der Relation} \quad K_j^{x_j} \equiv 1 \bmod p\,,$$

wenn $x_j \equiv 0 \bmod p$ $(j = 1, \ldots, r)$, wobei $K_i, \ldots, K_r$ die aufsteigende Reihe der Basiskommutatoren vom Gewicht $\geq w$ bedeutet.

Für $B_w^p \bmod B_{w+1}^p$ folgt demnach:

$$B_w^p \equiv \{K_i, \ldots, K_{d_w}\} \bmod B_{w+1}^p \quad \text{mit der analogen Relation.}$$

$K_i, \ldots, K_{d_w}$ sind die Basiskommutatoren des Gewichtes w. Ihre Anzahl beträgt nach Witt (siehe 1.1) d_w^q.

Die Berücksichtigung der bestehenden Relation ergibt für die Ordnung

$$o(B_w^p / B_{w+1}^p) = p^{d_w^q}, \quad \text{das heißt} \quad d_{w,p}^q = d_w^q \quad \text{oder:}$$

2.1. Theorem. $\delta_w^q = 0$ *für* $c < p$.

§ 2. Bestimmung einer obern Grenze des Dimensionsdefektes für $c = p + n$

Wir rechnen $\bmod H_{2p-1}$ (siehe 1.4). Dadurch hat n der Einschränkung

$$n \leq p - 2 \qquad (\text{aus} \quad c \leq 2p - 2) \tag{2.2}$$

zu genügen.

Aus (1.12) folgt direkt:

$$\prod_i P_i^{a_i^{(p)}} = h(x_1, \ldots, x_r)$$

wobei die P_i Kommutatoren in den Erzeugenden K_i sind und vom Gewicht $p + n \geq w \geq p$ in diesen Komponenten; denn die P_i vom Gewicht $2 \leq w \leq p$ haben in K_i durch p teilbare Exponenten (1.5); sie können also $\bmod D$ weggelassen werden ($D = H_{2p-1} H_2^p$ siehe auch (1.4)).

Nach (1.19) ist demnach δ_{p+n}^q gleich der Anzahl aller

$$\begin{array}{l} h(1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_r) \\ h(0, 1, x_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_r) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ h(0, \ldots, 0, 1, x_{q+1}, \ldots, x_r) \end{array} \tag{2.3}$$

mit $0 \leq x_2, \ldots, x_r < p$ in $H_{p+n} D / D$ die $\bmod H_{p+n+1} D$ voneinander unabhängig sind. Es bleibt nach (1.24) die Anzahl der in (1.21) und (1.22) auftretenden e_{si} zu bestimmen.

Wir untersuchen vorerst die Struktur der e-Elemente. Dabei gehen wir aus von $h(1, x_2, \ldots, x_r)$ in (1.21) unter Berücksichtigung von (2.3). h ist Endresultat eines Durchziehprozesses, der die p-te Potenz

$$\underbrace{K_1 K_2^{x_2} \ldots K_r^{x_r}}_{1} \ldots \underbrace{K_1 K_2^{x_2} \ldots K_r^{x_r}}_{p}$$

in die Form (1.2) überführt.

Die e_i sind demnach Produkte aus Basiskommutatoren $K_{p,j}$ vom Gewicht $p \leq w \leq p + n$ in den Erzeugenden $K_1, \ldots, K_r$. Sie besitzen also die Form:

$$e = \prod_j K_{p,j}^{a_{p,j}^{(p)}} .$$

Ist etwa $m_i = x_{i_1}^{\alpha_{i_1}} \ldots x_{i_l}^{\alpha_{i_l}}$ das Monom, welches zu e_i gehört mit $2 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_l \leq r$, so folgt aus dem Beweis von (1.6), daß alle $K_{p,j}$ Basiskommutatoren in den Komponenten $K_{i_1}, \ldots, K_{i_l}$ (und eventuell K_1) sein müssen. Die α_{i_k} genügen der Bedingung (vgl. Beweis zu (1.13)) $c_{i_k} \geq \alpha_{i_k}$ $(k = 1, \ldots, l)$, wobei c_{i_k} das Gewicht von K_{i_k} in $K_{p,j}$ bedeutet.

Im weitern betrachten wir einen beliebigen Basiskommutator vom Gewicht $p \leq w \leq p + n$ in den Erzeugenden und berechnen den zugehörigen HALLschen Exponenten (1.6). Es sei:

$$P_{w,m} = [K_{m_j}, K_{m_1}, \ldots, K_{m_1}, \ldots, K_{m_t}, \ldots, K_{m_t}]$$

wobei $P_{w,m}$ vom Gewicht c_{m_i} in K_{m_i}, also $p \leq \sum_{i=1}^{t} c_{m_i} \leq p + n$.

Nach dem Beweis von (1.6) folgt:

$a_m^{(p)} = \Sigma [x_{m_1}] \ldots [x_{m_t}]$ mit $[x_{m_i}] = \prod \binom{x_{m_i}}{u_{m_i}}$; $1 \leq \sum_i u_{m_i} \leq c_{m_i}$. Da nun $c = p + n$, $k = p$ gilt: $c - k + 1 = n + 1$, was nach (1.6) ergibt: $1 \leq u_{m_i} \leq n + 1$. Das Glied $\prod \binom{x_{m_i}}{k}$ verlangt jedoch einen Kommutator von mindestens dem Gewicht $p + k - 1$ in den Erzeugenden K_i.

Das allgemeine Label, welches zu $a_m^{(p)}$ führt, hat die Form (vgl. (1.6)):

$$((\varrho_1, \tau_1), \ldots, (\varrho_{p+i}, \tau_{p+i})) \qquad (0 \leq i \leq n) .$$

In diesem Label müssen nun k der ϱ_i gleich sein. $a_m^{(p)}$ erfülle diese Bedingungen und betrage:

$$a_m^{(p)} = \beta_m x_{m_1}^{\alpha_{m_1}} \ldots x_{m_r}^{\alpha'_{m_r}} \prod_k \binom{x_{m_r}}{k}^{\alpha''_{m_r}} \ldots x_{m_s}^{\alpha'_{m_s}} \prod_v \binom{x_{m_s}}{v}^{\alpha''_{m_s}} \ldots x_{m_t}^{\alpha_{m_t}} . \tag{2.4}$$

Da $c_{m_i} \geq \alpha_{m_i}$ und $\sum_1^t c_{m_i} \leq p + n$ folgt $0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_i} \leq p + n$.

Nach der Folgerung von (1.19) kann $a_m^{(p)} \bmod p$ betrachtet werden und jede Potenz läßt sich reduzieren nach der immer gültigen Kongruenz: $x^p \equiv x \bmod p$. Damit erfüllen alle α_{m_i} die Bedingung

$$0 \leq \alpha_{m_i} \leq p - 1 . \tag{2.5}$$

Wie man leicht einsieht, sind alle diejenigen $h(x) \bmod H_{p+n+1} D$ voneinander unabhängig, deren α_{m_i} unter Berücksichtigung der Bedingungen (2.4) und (2.5) voneinander verschieden sind. Eine Veränderung in den α_{m_i} bedingt eine Veränderung der Gewichte c_{m_i} der Erzeugenden K_{m_i} in den $P_{w,m}$ und stellt dadurch einen neuen, unabhängigen Basiskommutator dar.

Um die Struktur der $P_{w,m}$ und deren $a_m^{(p)}$ zu untersuchen, beweisen wir folgende Hilfssätze:

2.6. Hilfssatz. Jedes Glied der Form $\prod_k \binom{x_{m_i}}{k}$ reduziert die Bedingung $0 \leq \sum_i \alpha_{m_i} \leq p+n$ auf $0 \leq \sum_i \alpha_{m_i} \leq p+n-k$.

Beweis. Die α_{m_i} in $a_j^{(p)}$ sollen die angegebenen Voraussetzungen erfüllen und es sei:

$$a_j^{(p)} = \sum x_{m_1}^{\alpha_{m_1}} \ldots x_{m_i}^{\alpha'_{m_i}} \prod_k \binom{x_{m_i}}{k}^{\alpha''_{m_i}} \ldots x_{m_r}^{\alpha_{m_r}}$$

folglich

$$a_j^{(p)} = \sum x_{m_1}^{\alpha_{m_1}} \ldots x_{m_i}^{\alpha'_{m_i}} x_{m_i}^{\alpha''_{m_i}} \binom{x_{m_i}}{2}^{\alpha''_{m_i}} \ldots \binom{x_{m_i}}{k}^{\alpha''_{m_i}} \ldots x_{m_r}^{\alpha_{m_r}}$$

wobei $\alpha''_{m_i} = 1$.

Wenn nun c_{m_i} das Gewicht von K_{m_i} in $P_{j,p+n}$ bedeutet, so gilt: $0 \leq \alpha_{m_i} \leq c_{m_i}$; $c_{m_i} < p$, $c_{m_i} = c'_{m_i} + c''_{m_i}$ mit $c''_{m_i} \geq k$ und $k \leq \sum \alpha_{m_i} \leq c_{m_i}$, denn ist $\sum \alpha''_{m_i} < k$, zum Beispiel $\sum \alpha''_{m_i} = k-1$, dann tritt höchstens das Glied $\prod \binom{x_{m_i}}{k-1}$ auf, was der Voraussetzung widerspricht. Also da $0 \leq \alpha_{m_i} \leq p-1$ und $\alpha_{m_i} \geq \alpha'_{m_i} + k$ folgt $\alpha'_{m_i} \leq \alpha_{m_i} - k$.

Wir wissen: $0 \leq \sum_1^s \alpha_{m_i} \leq p+n$. Mit dem Auftreten von $\prod \binom{x_{m_i}}{k}$ wird nun darin α_{m_i} durch α'_{m_i} ersetzt und die bekannte Bedingung reduziert sich auf: $0 \leq \sum_1^s \alpha_{m_i} \leq p+n-k$.

2.7. Hilfssatz. Treten im generellen Label eines Basiskommutators des Gewichtes $p+n$ in den Erzeugenden K_i zwei oder mehrere ϱ_i auf, die durch keine τ-Bedingungen gebunden und sich gleich sind, dann leistet der betreffende Kommutator keinen Beitrag zur Defektgruppe.

Beweis. Wir betrachten folgenden Kommutator:

$$P_{j,p+n} = [K_{m_k}, c_{m_1} K_{m_1}, \ldots, c_{m_{k-1}} K_{m_{k-1}}, (c_{m_k} - 1) K_{m_k}, c_{m_{k+1}} K_{m_{k+1}}, \ldots, c_{m_r} K_{m_r}]$$

mit $p \leq \sum_{i=1}^r c_{m_i} \leq p+n$.

Der dazugehörige HALLsche Exponent beträgt: $a_j^{(p)} = \zeta_j [x_{m_1}] \ldots [x_{m_k}] \ldots [x_{m_r}]$.

Und das generelle Label, das zu $a_j^{(p)}$ führt, hat die Form:

$$((\varrho_1, \tau_1), \ldots, (\varrho_{p+i}, \tau_{p+i})) \qquad (1 \leq i \leq n)\,.$$

Wie man sich leicht überlegt, lauten die E-Bedingungen, wenn noch $\sum\limits_{i=1}^{i} c_{m_i} = c_s$ gesetzt wird:

$$\begin{array}{ll}
\varrho_1 \leq \cdots\cdots\cdots\cdots \leq \varrho_{c_{m_1}+1} & \\
\varrho_1 \leq \varrho_{c_s+2} \leq \cdots\cdots \leq \varrho_{c_{s+1}+1} & (s = 1, \ldots, k-2) \\
\varrho_1 \leq \varrho_{c_{k-1}+2} \leq \cdots \leq \varrho_{c_k} & \\
\varrho_1 \leq \varrho_{c_{m_t}+1} \leq \cdots \leq \varrho_{c_{m_{t+1}}} & (t = k, \ldots, r-2) \\
\varrho_1 \leq \varrho_{c_{m_{r-1}}+1} \leq \cdots \leq \varrho_{p+i}\,. &
\end{array}$$

Dabei treten alle Zahlen von 1 bis p auf. Also ist $\varrho_1 = 1$. Da nach Voraussetzung wenigstens zwei ϱ_i gleich sind und durch keine τ-Bedingungen gebunden werden, nimmt ζ_j die Form an:

$$\zeta_j = \binom{p+t}{c_{m_1}} \prod_{i=2}^{k-1} \binom{p+t-c_{i-1}}{c_{m_i}} \binom{p+t-c_{k-1}}{c_{m_{k-1}}} \prod_{j=k+1}^{r-1} \binom{p+t-c_{j-1}}{c_{m_j}}$$

mit $1 \leq t \leq n$ und $1 \leq c_{m_1} \leq p$, $1 \leq c_{m_i} \leq p+t-c_{i-1}$, $1 \leq c_{m_j} < p+t-c_{j-1}$,

$$\text{folglich} \qquad \zeta_j \equiv 0 \bmod p \qquad \text{w.z.b.w.}$$

Im weitern betrachten wir alle diejenigen $P_{w,m}$, welche in den Erzeugenden K_m vom Gewicht p sind:

$$P_{p+n,m_1} = [K_{m_i}, c_{m_1} K_{m_1}, \ldots, (c_{m_i} - 1) K_{m_i}, c_{q+1} K_{q+1}] \qquad (2.8)$$

mit $\sum\limits_{1}^{i} c_{m_j} = p-1$, $c_{q+1} = 1$ und $w(K_{m_j}) = 1$, $w(K_{q+1}) = n+1$

$$P_{p+n,m_2} = [K_{m_i}, c_{m_1} K_{m_1}, \ldots, (c_{m_i} - 1) K_{m_i}, c_{m_t} K_{m_t}, c_{m_{t+1}} K_{m_{t+1}}]$$

mit $\sum\limits_{1}^{i} c_{m_j} = p-2$, $c_{m_t} + c_{m_{t+1}} = 2$ und $w(K_{m_j}) = 1$, $w(K_{m_t}) + w(K_{m_{t+1}}) = n+2$;

durch diese Bedingungen ist P_{p+n,m_2} nicht eindeutig festgelegt; es treten mehrere Möglichkeiten auf.

....

$$P_{p+n,m_r} = [K_{m_i}, c_{m_1} K_{m_1}, \ldots, (c_{m_i} - 1) K_{m_i}, c_{m_{s1}} K_{m_{s1}}, \ldots, c_{m_{sn}} K_{m_{sn}}]$$

mit $\sum\limits_{1}^{i} c_{m_j} = p-n$, $\sum\limits_{t+1}^{n} c_{m_{st}} = n$ und $w(K_{m_j}) = 1$, $w(K_{m_{st}}) = 2$.

(Hierbei ist si für s_i gesetzt.)

Da keine τ-Bedingungen auftreten, lauten die entsprechenden $a_{mi}^{(p)}$:

$$a_{m_1}^{(p)} = \Sigma x_{m_1}^{\alpha m_1} \dots x_{m_i}^{\alpha m_i} x_{q+1} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \sum_1^i \alpha_{m_j} \leq p - 1 \tag{2.9}$$

$$a_{m_2}^{(p)} = \Sigma x_{m_1}^{\alpha m_1} \dots x_{m_i}^{\alpha m_i} x_{m_t}^{\alpha m_t} x_{m_{t+1}}^{\alpha m_t + 1} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \sum_1^i \alpha_{m_j} \leq p - 2, \quad \text{da} \quad \alpha_{m_t} + \alpha_{m_{t+1}} = 2 .$$

Diese Ungleichung ist eindeutig; das heißt sie gilt für alle möglichen Kommutatoren dieser Art.

. . . .

$$a_{m_r}^{(p)} = \Sigma x_{m_1}^{\alpha m_1} \dots x_{m_i}^{\alpha m_i} x_{m_{s1}}^{\alpha m_{s1}} \dots x_{m_{sh}}^{\alpha m_{sh}} \quad \text{mit} \quad 0 \leq \sum_1^i \alpha_{m_j} \leq p - n, \quad \text{da} \quad \sum_{t=1}^h \alpha_{m_{st}} = n .$$

Die Frage nach der Struktur der $P_{w,m}$ wird größtenteils durch den folgenden Satz gelöst:

2.10. Satz. *In die Defektgruppe müssen nur Kommutatoren $P_{w,m}$ vom Gewicht p in den Erzeugenden K_m aufgenommen werden.*

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend. Es sei $P_{w,m}$ ein Kommutator vom Gewicht p in K_m:

$$P_{w,m} = [K_{m_j}, c_{m_1} K_{m_1}, \dots, (c_{m_j} - 1) K_{m_j}, c_{m_{j+1}} K_{m_{j+1}}, \dots, c_{m_t} K_{m_t}]$$

$$\text{mit} \qquad \sum_1^t c_{m_i} = p \quad \text{und} \quad w(K_{m_i}) = 1, 2 \leq w(K_{m_{j+1}}) \leq n .$$

Der zugehörige HALLsche Exponent beträgt (es können keine τ-Bedingungen auftreten):

$$a_m^{(p)} = \beta_m x_{m_1}^{\alpha m_1} \dots x_{m_t}^{\alpha m_t} .$$

Das Label, welches zu $a_m^{(p)}$ führt, hat die Form:

$$((\varrho_1, \tau_1), \dots, (\varrho_p, \tau_p)) .$$

Und die E-Bedingungen lauten, falls noch $\sum_1^s c_{m_i} = c_s$ gesetzt wird:

$$\begin{array}{ll}
\varrho_1 < \dots\dots\dots\dots < \varrho_{c_{m_1}+1} & \\
\varrho_1 < \varrho_{c_s+2} < \dots\dots < \varrho_{c_{s+1}+1} & (s = 1, \dots, j-2) \\
\varrho_1 < \varrho_{c_{j-1}+2} < \dots < \varrho_{c_j} & \\
\varrho_1 < \varrho_{c_s+1} < \dots\dots < \varrho_{c_{s+1}} & (s = j, \dots, t-2) \\
\varrho_1 < \varrho_{c_{t-1}+1} \dots\dots < \varrho_p . &
\end{array}$$

Dabei treten alle Zahlen von 1 bis p auf. Also ist $\varrho_1 = 1$ und es wird:

$$\beta_m = \binom{p-1}{c_{m_1}} \prod_{i=2}^{j-1} \binom{p-1-c_{i-1}}{c_{m_i}} \binom{p-1-c_{j-1}}{c_{m_j-1}} \prod_{s=j+1}^{t-1} \binom{p-1-c_{s-1}}{c_{m_s}} .$$

Wegen $1 \leq c_{m_i} \leq p - 1 - c_{i-1}$ ist $\beta_m \not\equiv 0 \bmod p$. Andererseits gelten die Ungleichungen (vgl. 2.3; 2.5) $0 \leq x_{m_i} \leq p - 1$ und $0 \leq \alpha_{m_i} \leq p - 1$ folglich $x_{m_1}^{\alpha m_1} \ldots x_{mt}^{\alpha mt} \not\equiv 0 \bmod p$. Demnach muß der Kommutator $P_{w,m}$ für die Defektgruppe berücksichtigt werden.

Die Bedingung ist auch notwendig. Wir gehen von einem Kommutator aus, der das Gewicht $p + \nu (1 \leq \nu \leq n)$ in den Erzeugenden besitzt. Er habe die Form:

$$P_{p+n, m_\nu} = [K_{m_j}, c_{m_1} K_{m_1}, \ldots, (c_{m_j} - 1) K_{m_j}, \ldots, c_{mtr} K_{mtr}]$$

mit $\quad \sum_1^j c_{m_u} = p - r, \ \sum_{\nu=1}^r c_{m_{t_\nu}} = s; \ -r + s = \nu$ und $w(K_{m_u}) = 1, \quad (2.11)$

$$2 \leq w(K_{m_{t_\nu}}) \leq \nu + 1 .$$

Ihm entspricht folgendes $a_{m_\nu}^{(p)}$:

$$a_{m_\nu}^{(p)} = \Sigma [x_{m_1}] \ldots [x_{mtr}] \tag{2.12}$$

und das Label, das zu diesem $a_{m_\nu}^{(p)}$ führt, hat die Gestalt:

$$((\varrho_1, \tau_1), \ldots, (\varrho_{p+\nu}, \tau_{p+\nu})) .$$

Nach (2.7) treten im Label τ-Bedingungen auf (ist dies nicht der Fall, so sind unter den $(p + \nu)$ der ϱ_i des Labels, da nur p von ihnen verschieden sein können, einige sich gleich). Es sind dabei folgende Fälle möglich:

1) $(\nu + 1)$ der ϱ_i sind sich gleich und durch τ-Bedingungen gebunden $(\varrho_{i_1} = \cdots = \varrho_{i_{\nu+1}})$.

2) ν und 2 der ϱ_i sind sich gleich und je durch τ-Bedingungen gebunden $(\varrho_{i_1} = \cdots = \varrho_{i_\nu}; \ \varrho_{j_1} = \varrho_{j_2})$.

....

1) Hier tritt im HALLschen Exponent das Glied $\Pi \binom{x_{m_i}}{\nu + 1}$ auf. Nach (2.6) reduziert sich also $0 \leq \sum_i \alpha_{m_i} \leq p + n$ auf:

$$0 \leq \sum_i \alpha_{m_i} \leq p + n - \nu - 1 . \tag{2.13}$$

2) In $a_{m_\nu}^{(p)}$ treten die Glieder $\Pi \binom{x_{m_i}}{\nu}$ und $\Pi \binom{x_{m_j}}{2}$ auf. Wenden wir zweimal (2.6) an, so folgt analog zu (2.13):

$$0 \leq \sum_i \alpha_{m_i} \leq p + n - \nu - 2 .$$

Man sieht sofort: Je mehr die τ-Bedingungen auf verschiedene der ϱ_i verteilt werden, um so kleiner wird die obere Grenze für $\sum_i \alpha_{m_i}$ der entsprechenden $a_m^{(p)}$. Wir können uns deshalb im weitern auf den 1. Fall beschränken.

Also beträgt (2.12):

$$a_{m_\nu}^{(p)} = \Sigma x_{m_1}^{\alpha_{m_1}} \ldots x_{m_c}^{\alpha'_{m_c}} \Pi \binom{x_{m_c}}{\nu+1}^{\alpha''_{m_c}} \ldots x_{m_{tr}}^{\alpha_{m_{tr}}} .$$

Nun ist $0 \leq \sum_{i=1}^{tr} \alpha_{m_i} \leq \sum_u c_{m_u} + \sum_v c_{m_{tv}} = p + \nu$, das heißt die Ausgangsbedingung in (2.13) reduziert sich auf:

$$0 \leq \sum_i \alpha_{m_i} \leq p - 1 . \tag{2.14}$$

Wird hingegen (2.11) von denselben Erzeugenden K_m gebildet, ist jedoch deren Gewicht in $P_{w,m}$ gleich p, so ändert sich das Gewicht w von $P_{w,m}$ und wir erhalten den Kommutator $P'_{w',m}$. Diese Reduktion von $P_{w,m}$ auf $P'_{w',m}$ ist nach (2.7) immer möglich. Falls nämlich jede der Erzeugenden K_m in $P_{w,m}$ nur einmal auftritt und $\sum_{i=1}^{tr} c_{m_i} > p$ ist, so erscheinen im entsprechenden Label keine τ-Bedingungen und einige der ϱ_i müssen sich gleich sein.

In (2.11) galt: $w(P_{w,m}) = p + n$; nun ist $w(P'_{w',m}) = p + \mu$ ($0 \leq \mu \leq n$; für $\mu < 0$ leistet der betreffende Kommutator keinen Beitrag zur Defektgruppe). Vorerst bleibt (2.12) formell erhalten. Im Label, das zu $a_{m_\nu}^{(p)}$ führt, treten jedoch diesmal nur ϱ-Bedingungen auf, und (2.14) nimmt die Form an:

$$0 \leq \Sigma \alpha_{m_i} \leq p .$$

Der Kommutator (2.11) wird also schon unter den Kommutatoren des Gewichtes p in den Erzeugenden K_m berücksichtigt. Damit ist (2.10) bewiesen.

3. Unabhängigkeitsuntersuchungen

§ 1. Begriff der Unabhängigkeit und Einteilung der Kommutatoren

Wir untersuchen zunächst den Begriff der Unabhängigkeit von Basiskommutatoren. Dazu betrachten wir folgende Potenz:

$$(K_{m_1} K_{m_2} \ldots K_{m_t})^p \equiv 1 \bmod H_{p+n+1} H_2^p . \tag{3.1}$$

Nach der Definition der Defektgruppe folgt, daß alle Produkte von Basiskommutatoren, die der Kongruenz (3.1) genügen und unabhängig sind, die Defektgruppe erzeugen. Zur Bestimmung von δ_{p+n}^q genügt es jedoch, solche Kommutatoren zu betrachten, welche das Gewicht $c = p + n$ besitzen. Dabei kommen nur Kommutatoren in Frage, die in ihren Erzeugenden das Gewicht p haben (2.10); die Hallschen Exponenten dieser Kommutatoren sind dann inkongruent Null mod p. Ferner müssen nach (1.23) nur Kommutatoren berücksichtigt werden, deren mögliche Monome verschieden sind. (3.1) läßt sich also in der Form schreiben:

$$(K_{m_1} \ldots K_{m_t})^p = A_1^{\alpha_1} \ldots A_s^{\alpha_s} \equiv 1 \bmod H_{p+n+1} H_2^p . \tag{3.2}$$

Die A_i bedeuten dabei Relationen von Basiskommutatoren mit $c = p + n$ und vom Gewicht p in ihren Erzeugenden; die $\alpha_i \not\equiv 0 \bmod p$ $(i = 1, \ldots, s)$ durchlaufen alle möglichen Monome. Falls alle A_i voneinander unabhängig sind, gilt: $\delta_{p+n}^q = s$.

Um nun über die Unabhängigkeit (Unabhängigkeit bedeutet im folgenden immer unabhängig $\bmod H_{p+n+1} H_2^p$) dieser Relationen weitere Aussagen machen zu können, teilen wir die Basiskommutatoren nach zwei verschiedenen Gesichtspunkten ein.

a) Einteilung nach dem Gewicht eines Kommutators. In diesem Fall spricht man vom Typus eines Kommutators.

Definition. F sei freie Gruppe mit den freien Erzeugenden $K_1, \ldots, K_q$. Ein Kommutator heißt vom Typus $(w_1, \ldots, w_q)$, wenn er in der Komponente K_i das Gewicht w_i besitzt $(i = 1, \ldots, q)$.

Sind L und K Kommutatoren aus F mit den Typen $(v_1, \ldots, v_q)$ bzw. $(w_1, \ldots, w_q)$, so sagen wir, L und K seien vom selben Typus, falls $w_i = v_i$ $(i = 1, \ldots, q)$.

b) Einteilung des Kommutators nach seinen Erzeugenden. Hier spricht man von der Art eines Kommutators.

Was man unter der Stufe eines Kommutators versteht, definieren wir induktiv: Die freien Erzeugenden $K_1, \ldots, K_q$ heißen von 0-ter Stufe. Ein Kommutator $[K_{m_i}, K_{m_j}]$ heißt von s-ter Stufe, falls die Stufe von K_{m_i} gleich s_{m_i}, diejenige von K_{m_j} gleich s_{m_j} und $s = \max(s_{m_i}, s_{m_j} + 1)$. Nun betrachten wir die geordnete Reihe der Basiskommutatoren. Basiskommutatoren in dieser Reihe werden identifiziert, falls sie gleiches Gewicht, gleiche Stufe und für jeden erzeugenden Basiskommutator $K_m = [K_{m_2}, K_{m_1}]$ mit $w(K_m) > 2$ in K_{m_1} gleiches Gewicht besitzen. Tritt dabei ein Kommutator an i-ter Stelle auf, so heißt er Basiskommutator i-ter Ordnung. Diese Ordnung ist automatisch vorhanden.

Beispiel. Nach der angegebenen Einteilung gehören die Basiskommutatoren von 2. Stufe und des Gewichtes 7: $[K_{i_4}, K_{i_1}, K_{i_1}, K_{i_3}, [K_{i_4}, K_{i_2}, K_{i_5}]]$ und $[K_{i_3}, K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_4}, [K_{i_7}, K_{i_6}, K_{i_6}]]$ zur selben Ordnung, hingegen ist der Basiskommutator $[K_{i_3}, K_{i_1}, K_{i_2}, K_{i_4}, K_{i_5}, [K_{i_7}, K_{i_6}]]$ von kleinerer Ordnung $(1 \leq i_j \leq q;\ i_{j-1} < i_j,\ j = 1, \ldots)$.

Definition. Ein Kommutator heißt von der Art $(t_1, \ldots, t_s)$, wenn er t_i Erzeugende i-ter Ordnung enthält.

Sind K und L Kommutatoren der Art $(t_1, \ldots, t_s)$ bzw. $(r_1, \ldots, r_n)$, so sagen wir, K und L seien von derselben Art, falls $n = s$ und $t_i = r_i$ $(i = 1, \ldots, s)$.

Über die Unabhängigkeit von Basiskommutatoren folgt nun aus dem Beweis von (2.10) sofort:

3.3. Hilfssatz. Basiskommutatoren verschiedener Typen sind unabhängig.

Mit Hilfe von (3.3) läßt sich (3.2) wie folgt ausdrücken: Alle Relationen von Basiskommutatoren desselben Typus werden in eine Hauptrelation zusammengefaßt; dies ist gestattet, da die A_i eine einfache abelsche Gruppe aufspannen. Die so entstandenen Hauptrelationen sind untereinander unabhängig. Es genügt also, die Unabhängigkeit innerhalb der Hauptrelationen zu zeigen. Damit nimmt (3.2) die Form an:

$$(K_{m_1}, \ldots, K_{m_t})^p \equiv B_1^{\beta_1} \ldots B_r^{\beta_r} \equiv 1 \bmod H_{p+n+1} H_2^p \tag{3.4}$$

mit $B_i = \prod_j A_{i,j}^{\alpha_{i,j}}$, wobei alle A_i vom selben Typus sind.

Wird die Defektgruppe insbesonders nur von einer Art von Basiskommutatoren erzeugt, so folgt aus (2.10):

3.5. Satz. *Wird die Defektgruppe durch Relationen von Kommutatoren einer und derselben Art erzeugt, so sind alle Relationen der Basiskommutatoren dieser Art und vom Gewicht p in den Erzeugenden unabhängig und erzeugen D/D' vollständig.*

Da auch alle weitern Betrachtungen auf (2.10) aufgebaut werden, gelten sämtliche Aussagen unter Berücksichtigung der Einschränkung $n \leq p - 2$.

Die Voraussetzungen von (3.5) sind für $n = 0, 1$ erfüllt; also lassen sich dafür die entsprechenden Dimensionsdefekte sofort bestimmen.

Sind die Relationen des Typus $(w_1, \ldots, w_q)$ abhängig, so bedeutet das:

α) Die Determinante der Exponenten in der Hauptrelation ist kongruent Null mod p; oder

β) Zwischen den Relationen des Typus $(w_1, \ldots, w_q)$ besteht eine Abhängigkeitskongruenz der Form:

$$C_{q,1}^{\alpha_{q,1}} \ldots C_{q,s}^{\alpha_{q,s}} \equiv C_{q,s+1} \,. \tag{3.6}$$

Diese Kongruenz soll gekürzt sein; das heißt bei Weglassen einer Relation C_i tritt Unabhängigkeit auf.

§ 2. Einige Abbildungssätze für höhere Kommutatorgruppen

Wird durch die Abbildung ι die eine freie Erzeugende auf eine andere freie Erzeugende abgebildet, so gilt[12]:

3.7. Satz. *F sei freie Gruppe mit dem System M freier Erzeugender; K_{q-1}, K_q seien Elemente von M, M' die Menge aller Elemente von M mit Ausnahme von K_q. Nun werde K_q mittels ι auf K_{q-1} abgebildet. Dann stellt die Abbildung ι einen Homomorphismus der freien Gruppe F auf die freie Gruppe F' mit dem System M' freier Erzeugender dar.*

Beweis. Die Abbildung ι ist ein Homomorphismus. Sind W_1, W_2 Worte aus F, so gilt, wie man leicht einsieht: $\iota(W_1 \cdot W_2) = \iota(W_1)\iota(W_2)$; für das leere Wort Z ist $\iota(Z) = Z$.

Man erhält also mit Hilfe von ι eine Untergruppe F' von F. Da nun F freie Gruppe und F' echte Untergruppe von F, ist nach Satz von NIELSEN-SCHREIER auch F' frei. Wir können demnach annehmen: F' besitzt das Erzeugendensystem S. Dann gilt: $S \subset M$ und $M' \subseteq S$; da aber zwischen M' und M (nach Konstruktion) kein Erzeugendensystem enthalten ist, wird $S = M'$.

Mit Hilfe von ι kann F_q auf jedes F_r mit $1 \leq r \leq q-1$ homomorph abgebildet werden.

Aus (3.7) folgt für die spezielle Abbildung ι^*:

3.8. Korollar. F sei freie Gruppe mit dem System M freier Erzeugender, F' freie Gruppe mit dem System M' freier Erzeugender, zudem sei $M \frown M' = N$; $K_q, K_{q+1} \not\subset N$; $M = (N, K_q)$, $M' = (N, K_{q+1})$. Wird durch ι^* K_q auf K_{q+1} abgebildet, so stellt ι^* einen Isomorphismus zwischen F und F' her.

Beweis. Nach (3.7) ist ι^* Homomorphismus. Durch die Abbildung ι^* wird aber M isomorph auf M' und damit F isomorph auf F' abgebildet.

Wir betrachten die höhern Kommutatorgruppen von F. Es sei:

$$D^0F = F, D^1F = DF, \ldots, D^sF = D(D^{s-1}F),$$

wobei DF die Gruppe erzeugt aus allen Kommutatoren $[F, F]$ darstellt.

Dieselbe Definition gilt auch für F_q, falls $q > 1$. Für $q = 1$ wird F_q Abelsch.

Bedeutet $\varkappa$ eine homomorphe Abbildung der freien Gruppe F in sich, so gilt:

---

[12]) A. G. KUROSCH: Gruppentheorie (Berlin 1953), p. 75.

3.9. Hilfssatz. Der homomorphe Abbildungsoperator $\varkappa$ und der Ableitungsoperator D von F sind vertauschbar.

Beweis. Wir haben zu zeigen: $\varkappa(DF) = D(\varkappa F)$. $a, b, \ldots$ seien Elemente aus F. Wir behaupten

$$\varkappa(DF) \subseteq D(\varkappa F) \quad \text{und} \quad D(\varkappa F) \subseteq \varkappa(DF) .$$

Da $[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$ und $\varkappa$ homomorphe Abbildung ist, gelten

$$\begin{aligned} \varkappa[a, b] &= \varkappa(a^{-1}b^{-1}ab) \\ &= (\varkappa a)^{-1}(\varkappa b)^{-1}(\varkappa a)(\varkappa b) \\ &= [\varkappa a, \varkappa b] \end{aligned} \qquad \begin{aligned} [\varkappa a, \varkappa b] &= (\varkappa a)^{-1}(\varkappa b)^{-1}(\varkappa a)(\varkappa b) \\ &= \varkappa(a^{-1}b^{-1}ab) \\ &= \varkappa[a, b] . \end{aligned}$$

Damit wird: $\varkappa(DF) = D(\varkappa F)$.

Aus (3.9) ergibt sich der wichtige Satz:

3.10. Satz. *Ist $\varkappa$ homomorphe Abbildung der freien Gruppe F in sich, so stellt $\varkappa$ auch eine homomorphe Abbildung von D^sF in sich dar.*

Beweis. Wir zeigen: $\varkappa(D^sF) \simeq D^sF'$, wobei $\varkappa F = F'$.

Unsere Behauptung ist nach (3.9) für $s = 0, 1$ erfüllt. Induktionsannahme: $\varkappa(D^{i-1}F) \simeq D^{i-1}F'$, nun gilt: $D^iF = D(D^{i-1}F)$, $\varkappa D^iF = \varkappa D(D^{i-1}F) = = D\varkappa(D^{i-1}F) \simeq D(D^{i-1}F') = D^iF'$ w.z.b.w.

Im speziellen stellt also ι einen Homomorphismus von D^sF auf D^sF' und ι^* einen Isomorphismus der entsprechenden höhern Kommutatorgruppen dar.

Insbesondere wird mit Hilfe von ι D^sF_q auf jedes D^sF_r mit $1 < r < q$ homomorph und mittels ι^* jedes D^sF_q auf $D^sF'_{q+1}$ isomorph abgebildet. Im letzten Fall ist $F_q \simeq F'_{q+1}$ und $F'_{q+1} \subset F_{q+1}$.

Sind also homomorphe Abbildungen für höhere Kommutatorgruppen oder (wie man leicht einsieht) für die Gruppen H_w gesucht, so genügt es, homomorphe Abbildungen innerhalb der freien Gruppe zu bestimmen.

Bekanntlich hat jedes Element aus $F \bmod H_{c+1}$ eindeutig die Gestalt (1.2):

$$K_{1,1}^{x_{1,1}} \ldots K_{1,q}^{x_{1,q}} \ldots K_{c,1}^{x_{c,1}} \ldots K_{c,d_c}^{x_{c,d_c}} \quad (-\infty < x_{i,j} < +\infty) .$$

Wir nennen die $K_{i,j}$ Erzeugende von $F \bmod H_{c+1}$. Jedes Element aus $F \bmod H_{c+1}$, das durch eine geordnete aufsteigende Reihe von Erzeugenden gegeben ist, heiße f-Element. Die Gruppe $F \bmod H_{c+1}$ besteht aus der Gesamtheit aller f-Elemente. Wird auf zwei aneinandergereihte f-Elemente der Hallsche Durchziehprozeß ausgeübt, so erhält man wiederum ein f-Element. Diesen Vorgang nennen wir Produkt zweier f-Elemente. Werden bei der Produktbildung keine Kommutatoren umbenennt, was in allen unsern Untersuchungen der Fall ist, so treten im Produkt nur die Erzeugenden der f-Elemente und Basiskommutatoren in diesen Erzeugenden auf. Für mehrere f-Elemente gilt in der erklärten Produktbildung das assoziative Gesetz; dies folgt sofort aus dem assoziativen Gesetz von F. Werden die Produkte ohne Umbenennung gebildet, so können auf einfache Art zwei weitere Abbildungen angegeben werden. Wir sprechen hier von Abbildungen für f-Elemente.

Betrachtet man die Gruppe $\{f\}$ erzeugt durch bestimmte f-Elemente, so bedeutet jede homomorphe Abbildung für diese f-Elemente einen Homomorphismus von $\{f\}$ in sich. Da im weitern $\{f\} \subseteq F$, kann Satz (3.10) auf $\{f\}$ angewandt werden.

1. Die Abbildung $\tau : \tau$ bilde die eine Erzeugende $K_{r,s}$ auf das Einheitselement von F ab. Damit ist τ homomorphe Abbildung für f-Elemente. Wir haben zu zeigen, daß $\tau(f_1 f_2) = \tau(f_1)\tau(f_2)$. Man erhält das Produkt $f_1 f_2$ mit Hilfe des HALLschen Durchziehprozesses. Wendet man darauf τ an, so bleibt die geordnete aufsteigende Reihe von Erzeugenden und Basiskommutatoren als solche erhalten, hingegen fallen die Erzeugenden $K_{r,s}$ und sämtliche Basiskommutatoren, welche diese Erzeugende enthalten, weg. Dieses Produkt entspricht daher genau dem Produkt der Erzeugenden von f_1' und f_2', wobei die f_i' gleich den f_i ohne die Erzeugende $K_{r,s}$ sind; das heißt es wird: $f_1' f_2' = \tau(f_1)\tau(f_2)$.

2. Die Abbildung σ: In allen f-Elementen, die berücksichtigt werden, trete die Erzeugende $K_{r,s}$ nicht auf. σ bilde die benachbarte Erzeugende gleichen Gewichtes $K_{r,s+1}$ (oder $K_{r,s-1}$) auf $K_{r,s}$ ab. Dann ist σ isomorphe Abbildung für f-Elemente ohne $K_{r,s}$ in solche ohne $K_{r,s+1}$ (oder $K_{r,s-1}$). Wendet man auf $f_1 f_2$ den Durchziehprozeß an, so entstehen Basiskommutatoren in den Erzeugenden von f_1 und f_2, das heißt es tritt kein Kommutator auf, der die Erzeugende $K_{r,s}$ enthält. Die Abbildung σ führt Basiskommutatoren in Basiskommutatoren über: Es sei $[K_{r,s+1}, K_{r,n}]$ Basiskommutator, das heißt $K_{r,n} \prec K_{r,s+1}$. Dann ist auch $\sigma[K_{r,s+1}, K_{r,n}] = [K_{r,s}, K_{r,n}]$ Basiskommutator, denn aus $K_{r,n} \neq K_{r,s}$ und $K_{r,n} \prec K_{r,s+1}$ folgt $K_{r,n} \prec K_{r,s}$. Ist $[K_{m,n}, K_{r,s+1}]$ Basiskommutator, das heißt $m > r$ und $K_{m,n} = [K_{e,i}, K_{f,h}]$ mit $K_{f,h} = K_{r,s+1}$ oder $K_{f,h} \prec K_{r,s+1}$ so bleibt diese Eigenschaft auch für $\sigma[K_{m,n}, K_{r,s+1}]$ mit $\sigma K_{m,n} = K_{m,n}'$ bestehen; denn es ist $m > r$ (unberührt von σ) $\sigma K_{f,h} = K_{r,s}$ falls $K_{f,h} = K_{r,s+1}$ oder $K_{f,h} \prec K_{r,s}$ wenn $K_{f,h} \prec K_{r,s+1}$. Jeder weitere Fall läßt sich auf die erklärten zurückführen. Es bleibt noch zu zeigen: $\sigma(f_1 f_2) = \sigma(f_1)\sigma(f_2)$; σ läßt die aufsteigende Reihe der Basiskommutatoren im ausgerechneten Produkt $f_1 f_2$ invariant: Falls $K_{c,i} = [K_{d,r}, K_{e,s}] \prec K_{c,l} = [K_{a,k}, K_{b,j}]$, das heißt $K_{e,s} \prec K_{b,j}$ oder $K_{d,r} \prec K_{a,k}$ wenn $K_{e,s} = K_{b,j}$, so ist auch $\sigma K_{c,i} \prec \sigma K_{c,l}$. Die Behauptung ist für $K_{a,k} = K_{r\ s+1}$ oder $K_{b,j} = K_{r,s+1}$ (und analog für $K_{d,r} = K_{r,s+1}$

oder $K_{e,s} = K_{r,s+1}$) trivial. Ist $K_{r,s+1}$ jedoch Bestandteil von $K_{a,k}$ oder $K_{b,j}$ (und entsprechend $K_{d,r}$ oder $K_{e,s}$), so folgt die Behauptung sofort durch Induktion. Durch σ wird demnach in der aufsteigenden Reihe der Basiskommutatoren von $f_1 f_2$ lediglich jede auftretende Erzeugende $K_{r,s+1}$ (oder $K_{r,s-1}$) durch $K_{r,s}$ ersetzt. Man erhält aber dieselbe aufsteigende Reihe, wenn sie durch das Produkt $\sigma(f_1)\sigma(f_2)$ gebildet wird. Das Erzeugendensystem von $\{f\}$ ohne $K_{r,s}$ sei M, dasjenige von $\{f'\}$ ohne $K_{r,s+1}$ (oder $K_{r,s-1}$) M'. Durch σ wird $M \simeq M'$ und damit $\{f\} \simeq \{f'\}$. Im weitern ändert σ das Gewicht der entsprechenden Erzeugenden nicht. Wird zudem σ auf H_{c+1} angewendet, so fallen sämtliche Kommutatoren der Form $[K_{r,s+1}, K_{r,s}, \ldots]$ weg. Damit ist $\sigma(H_{c+1}) \subset H_{c+1}$ und auch nach angewandter Abbildung σ kann $\bmod H_{c+1}$ gerechnet werden.

§ 3. Unabhängigkeit der Relationen von Basiskommutatoren mit zwei freien Erzeugenden

Wir wenden die Abbildung $\iota^* : K_2 \to K_3$ auf F_2 an. Dadurch erhalten wir die freie Gruppe F_3' mit den Eigenschaften $F_2 \simeq F_3'$ und $F_3' \subset F_3$ (vgl. 3.8); das heißt wir betten F_2 in F_3 ein. Es gilt:

3.11. Hilfssatz. Benachbarte Erzeugende der aufsteigend geordneten Reihe von F_2 gehen bei Anwendung von ι^* in nicht benachbarte Erzeugende der aufsteigend geordneten Reihe F_3 über.

Beweis. Alle auftretenden Erzeugenden sind Basiskommutatoren in den freien Erzeugenden K_1, K_2 und nach der Abbildung ι^* solche in den freien Erzeugenden K_1, K_3. Dabei ist $K_1 \prec K_2$ und K_1 zu K_2 benachbart und $K_1 \prec K_3$, hingegen K_1 nicht zu K_3 benachbart, da zwischen K_1 und K_3 die freie Erzeugende K_2 geschoben werden kann. Wir nehmen an, (3.11) sei für alle Basiskommutatoren des Gewichtes $< c$ bewiesen. Nach Definition besitzen die Basiskommutatoren des Gewichtes c die Gestalt $K_{c,l} = [K_{a,k}, K_{b,j}]$. Zudem seien in F_2 die Kommutatoren $K_{c,i} = [K_{d,r}, K_{e,s}]$ und $K_{c,l} = [K_{a,k}, K_{b,j}]$ benachbart; das heißt entweder sind $K_{e,s}$ und $K_{b,j}$ benachbart oder $K_{d,s}$ und $K_{a,k}$ benachbart falls $K_{e,s} = K_{b,j}$. Nach Induktionsvoraussetzung kann aber in beiden Fällen eine Erzeugende zwischen die ursprünglich benachbarten geschoben werden.

Um nun die Unabhängigkeit der Relationen von Basiskommutatoren mit zwei freien Erzeugenden zu zeigen, beweisen wir vorerst den folgenden Hilfssatz:

3.12. Hilfssatz. Die Relationen der Basiskommutatoren mit zwei freien Erzeugenden und von einer Art sind für $c = p + n$ und $1 < n \leq p - 2$ unabhängig.

Beweis (indirekt): Es bestehe die folgende Abhängigkeitskongruenz: (vgl. 3.6) (I) $D_1^{\alpha_1} \ldots D_s^{\alpha_s} \equiv D_{s+1} \bmod H_{c+1}^p$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

α) In (I) treten nur Erzeugende 1. Stufe auf. In den verschiedenen Relationen D_i sind verschiedene Basiskommutatoren enthalten, denn sonst stellt (I) eine Identität dar. Da aber nach Voraussetzung sämtliche Kommutatoren der Relationen D_i von gleicher Art sind, muß der Unterschied in gewissen Erzeugenden gleichen Gewichtes (> 1) liegen. Basiskommutatoren 1. Stufe und gleichen Gewichtes sind jedoch nur dann verschieden, wenn sie verschiedenen Typus besitzen. Wir können also annehmen, daß die Erzeugende $K_{r,s}$ ($r > 1$) in den Kommutatoren der verschiedenen Relationen nicht gleich oft auftritt. Damit jedoch die Art erhalten bleibt, kommen an ihrer Stelle Erzeugende $K_{r,n}$ eines andern Typus vor.

Wir wenden $\iota^* : K_2 \to K_3$ auf F_2 an. Dabei geht die Kongruenz (I) in eine solche von F_3 über. In der neuen Kongruenz, wir nennen sie (I′), ist die freie Erzeugende K_2 nicht enthalten; das heißt (I′) wird durch f'-Elemente erzeugt, die K_2 nicht besitzen. Durch ι^* gehen $K_{r,s}$ und $K_{r,n}$ in $K'_{r,s}$ und $K'_{r,n}$ über. Der Zusammenhang von $K_{r,s}$ und $K_{r,n}$ bleibt auch für $K'_{r,s}$ und $K'_{r,n}$ erhalten. Sind $K_{r,s}$ und $K_{r,m}$ benachbarte Basiskommutatoren, so kann nach (3.11) zwischen $K'_{r,s}$ und $K'_{r,m}$ ein Basiskommutator eingeschoben werden. Da die Erzeugenden K' nur durch die freien Erzeugenden K_1 und K_3 gebildet werden, enthalten die Basiskommutatoren, welche die Lücken in der aufsteigenden Reihe gebildet durch die K' ausfüllen, auch die Erzeugende K_2. Wende ich nun auf $\{f'\} \subset F_3$ die Abbildung $\sigma : K'_{r,s} \to K'_{r,s+1}$ an, so bleibt die Kongruenz als solche bestehen. Hingegen wechseln beim Ersetzen von $K'_{r,s}$ durch $K'_{r,s+1}$ die betroffenen Kommutatoren und damit die entsprechenden Relationen ihren Typus. Da aber die Erzeugende $K'_{r,s}$ in den Kommutatoren verschiedener Relationen verschieden oft vorkommt, treten in der umgeformten Kongruenz Relationen mit Kommutatoren verschiedener Typen auf, was (3.3) widerspricht.

β) In (I) treten auch Erzeugende 2. Stufe auf. Unterscheiden sich die Erzeugenden 2. Stufe nicht, so kann α) wiederholt werden. Die Erzeugenden 2. Stufe sollen verschieden sein; das heißt falls $K_{r,s}$ Erzeugende 2. Stufe ist, kann ich annehmen, daß $K_{r,s}$ in den Kommutatoren verschiedener Relationen verschieden oft enthalten ist. Werden nun, wie unter α), die Abbildungen ι^* und σ ausgeführt, so läßt sich derselbe Schluß wiederholen, da (3.11) unabhängig von der Stufe Gültigkeit hat. In analoger Weise läßt sich der Beweis auf Erzeugende beliebiger Stufe ausdehnen.

Damit ergibt sich nun:

3.13. Satz. *Die Relationen der Basiskommutatoren mit zwei freien Erzeugenden sind für* $c = p + n$ *und* $1 < n \leqslant p - 2$ *unabhängig.*

Beweis (indirekt): Es bestehe folgende Abhängigkeitskongruenz:

$$D_1^{\alpha_1} \ldots D_r^{\alpha_r} \equiv D_{r+1} \bmod H_{c+1}^p . \tag{1}$$

In (I) treten nach (3.12) mindestens zwei verschiedene Arten von Basiskommutatoren auf. Es gibt demnach mindestens eine Erzeugende $K_{r,s}$ $(r > 1)$ die nicht in allen Basiskommutatoren der Relationen von (I) gleich oft enthalten ist. Mit Hilfe der Abbildungen $\iota^* : K_2 \to K_3$ und anschließend $\sigma : K'_{r,s} \to K'_{r,s+1}$ kann daher der Beweis analog zu (3.12) geführt werden.

In den Sätzen (3.12) und (3.13) hatte n die Bedingungen $n \leq p - 2$ und $1 < n$ zu erfüllen. Berücksichtigt man Satz (3.5), so fällt die zweite Einschränkung weg.

4. Die Methode zur Berechnung der Dimensionsdefekte für $n \leq p - 2$

§ 1. Hauptsatz zur Bestimmung von Dimensionsdefekten

Kombiniert man die Aussagen (2.10) und (3.13), so erhält man das folgende Hauptergebnis:

4.1. Hauptsatz. *Für zwei freie Erzeugende, das Gewicht* $c = p + n$ *und* $n \leq p - 2$ *wird die Defektgruppe genau durch die verschiedenen Relationen erzeugt, welche Basiskommutatoren vom Gewicht* p *in ihren Erzeugenden enthalten.*

Mit Hilfe von (4.1) lassen sich sämtliche Dimensionsdefekte δ^2_{p+n} für $n \leq p - 2$ berechnen und nach (3.5) können auch δ^q_p, δ^q_{p+1} bestimmt werden.

Die Methode der Berechnung von δ^q_{p+n} knüpft an die Betrachtungen im 2. Teil. Es sei P_{w,m_t} ein beliebiger Basiskommutator vom Gewicht p in seinen Erzeugenden (vgl. 2.8):

$$P_{w,m_t} = [K_{m_j}, K_{m_1}, \ldots, K_{m_1}, \ldots, K_{m_t}, \ldots, K_{m_t}] \tag{4.2}$$

wobei P_{w,m_t} vom Gewicht c_{m_t} in K_{m_t}; das heißt $\sum_{i=1}^{t} c_{m_t} = p$ und $w(P_{w,m_t}) = p + n$ mit $0 \leq n \leq p - 2$. Für $c < p$ siehe (2.1). Das entsprechende $a^p_{m_t}$ lautet: (2.9) $a^p_{m_t} = \Sigma x_{m_1}^{\alpha m_1} \ldots x_{m_t}^{\alpha m_t}$ mit $0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_j} \leq p - \nu$ $(0 \leq \nu \leq n)$. Berücksichtigt man (1.19), so reduziert sich die angegebene Bedingung:

$$0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_j} \leq p - \nu - 1 \quad \text{und} \quad 0 \leq \alpha_{m_t} \leq p - 1 . \tag{4.3}$$

Dabei ist ν abhängig von der Anzahl der auftretenden Erzeugenden K_{m_r} mit $w(K_{m_r}) > 1$.

Über die Anzahl der verschiedenen α_{m_i} gibt der folgende, leicht zu beweisende Satz Aufschluß:

4.4. Hilfssatz. Die Anzahl aller α_{m_i}, welche der Bedingung $0 \leq \Sigma\alpha_{m_i} \leq p - \nu - 1$ genügen, ist gleich: $\binom{p-\nu+q-1}{p-\nu}$.

Um die Anzahl der verschiedenen Monome des Basiskommutators P_{w,m_i} zu bestimmen, wird die zutreffende Bedingung (4.3) aufgestellt und nach (4.4) die Zahl der verschiedenen möglichen α_{m_i} berechnet. Da jedoch für die Erzeugenden K_{m_r} mit $w(K_{m_r}) \geq 2$ mehrere Möglichkeiten bestehen, so muß auch die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten für die auftretenden K_{m_r} berücksichtigt werden. Die Anzahl der K_{m_r} mit $w(K_{m_r}) = u > 1$ wird durch die WITTsche Formel gegeben.

In den folgenden beiden Paragraphen wird die erklärte Methode an einigen Beispielen durchgeführt.

§ 2. Berechnung von δ_p^q, δ_{p+1}^q

a) δ_p^q: Als Kommutator (4.2) ist nur der folgende möglich:

$$P_{p,m_1} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, (c_{m_j} - 1)K_{m_j}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}]$$

wobei $w(K_{m_i}) = 1$ für $1 \leq i \leq t$.

Damit wird die entsprechende Bedingung (4.3): $0 \leq \Sigma\alpha_{m_i} \leq p - 1$ und die Anzahl der verschiedenen α_{m_i} beträgt (4.4): $\binom{p+q-1}{p}$. Bei dieser Abzählung sind aber auch alle Kommutatoren, die aus nur einer Erzeugenden K_{m_i} mit $c_{m_i} = p$ bestehen, berücksichtigt. Ihre Anzahl beträgt q. Nach Definition der Basiskommutatoren fallen diese q aus. Daraus folgt:

4.5. Theorem[13]. $\delta_p^q = \binom{p+q-1}{p} - q$.

b) δ_{p+1}^q: (4.2) nimmt in diesem Falle die Form an:

$$P_{p+1,m_1} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, (c_{m_j} - 1)K_{m_j}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}, K_{q+1}]$$

mit $w(K_{m_i}) = 1$ für $1 \leq i \leq t$; $w(K_{q+1}) = 2$ und $\sum_1^t c_{m_i} = p - 1$. Also wird (4.3): $0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_i} \leq p - 2$ und damit beträgt die Anzahl der verschiedenen α_{m_i}: $\binom{p+q-2}{p-1}$. Da aber nur verlangt wird, daß $w(K_{q+1}) = 2$, gibt

[13]) Siehe Bemerkungen in der Einleitung.

es für K_{q+1} nach WITT $\binom{q}{2}$ Möglichkeiten. Die Bedingung $n \leq p-2$ ergibt die Einschränkung $p > 2$. Also wird:

4.6. Theorem[14]. $\delta^q_{p+1} = \binom{q}{2}\binom{p+q-2}{p-1}$ *für* $p > 2$.

§ 3. Berechnung von δ^2_{p+n} für $n = 2, 3, 4$

a) δ^2_{p+2}: Folgende Basiskommutatoren (4.2) sind möglich:

α) $P_{p+2,m_1} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, (c_{m_j}-1)K_{m_j}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}, K_r]$

mit $w(K_{m_i}) = 1$ für $1 \leq i \leq t$, $w(K_r) = 3$ und $\sum_1^t c_{m_i} = p-1$.

β) $P_{p+2,m_2} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, (c_{m_j}-1)K_{m_j}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}, K_t, K_{t+1}]$

mit $w(K_{m_i}) = 1$ für $1 \leq i \leq t$, $w(K_t) = w(K_{t+1}) = 2$, $\sum_1^t c_{m_i} = p-2$.

Und die entsprechenden Bedingungen (4.3) lauten:

$$\alpha)\quad 0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_i} \leq p-2 \qquad \beta)\quad 0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_i} \leq p-3$$

das heißt die Anzahl der verschiedenen α_{m_i} beträgt:

$$\alpha)\quad p \qquad \beta)\quad p-1\,.$$

Für die Erzeugende K_r gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten, während $K_t = K_{t+1}$ ist (zwei freie Erzeugende). Demnach treten $2p$ verschiedene Kommutatoren P_{p+2,m_1} und $(p-1)$ verschiedene P_{p+2,m_2} auf; das heißt mit $n \leq p-2$ ist:

4.7. Theorem[14]. $\delta^2_{p+2} = 3p-1$ *für* $p > 3$.

b) δ^2_{p+3}: Es gibt die folgenden verschiedenen P_{p+3,m_i}:

α) $P_{p+3,m_1} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}, K_s]$

mit $w(K_{m_i}) = 1$, $w(K_s) = 4$ und $\sum_1^t c_{m_i} = p-1$.

β) $P_{p+3,m_2} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}, K_t, K_r]$

mit $w(K_{m_i}) = 1$, $w(K_t) = 2$, $w(K_r) = 3$ und $\sum_1^t c_{m_i} = p-2$.

γ) $P_{p+3,m_3} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}, c_tK_t]$

mit $w(K_{m_i}) = 1$, $w(K_t) = 2$, $\sum_1^t c_{m_i} = p-3$, $c_t = 3$.

Damit wird (4.3):

---

[14]) Siehe Bemerkungen in der Einleitung.

$\alpha)\quad 0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_i} \leq p - 2 \qquad \beta)\quad 0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_i} \leq p - 3 \qquad \gamma)\quad 0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_i} \leq p - 4$

und die Anzahl der verschiedenen α_{m_i} beträgt entsprechend (4.4):

$$\alpha)\ p \qquad \beta)\ p - 1 \qquad \gamma)\ p - 2\,.$$

Für die Erzeugenden K_s treten drei Möglichkeiten auf; das heißt es gibt $3p$ verschiedene P_{p+3,m_1}, $2(p-1)$ verschiedene P_{p+3,m_2} und $(p-2)$ verschiedene P_{p+3,m_3}; damit ist, da $n \leq p - 2$:

4.8. Theorem[15]**.** $\delta^2_{p+3} = 6p - 4$ *für* $p > 4$.

c) δ^2_{p+4}: Es treten fünf Basiskommutatoren P_{p+4,m_i} der Form (4.2) auf:

$\alpha)$ $P_{p+4,m_1} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}, K_u]$

mit $w(K_{m_i}) = 1$, $w(K_u) = 5$, $\sum_1^t c_{m_i} = p - 1$.

$\beta)$ $P_{p+4,m_2} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}, K_t, K_s]$

mit $w(K_{m_i}) = 1$, $w(K_t) = 2$, $w(K_s) = 4$, $\sum_1^t c_{m_i} = p - 2$.

$\gamma)$ $P_{p+4,m_3} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}, c_rK_r]$

mit $w(K_{m_i}) = 1$, $w(K_r) = 3$, $\sum_1^t c_{m_i} = p - 2$, $c_r = 2$.

$\delta)$ $P_{p+4,m_4} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}, c_tK_t, K_r]$

mit $w(K_{m_i}) = 1$, $w(K_t) = 2$, $w(K_r) = 3$, $\sum_1^t c_{m_i} = p - 3$, $c_t = 2$.

$\varepsilon)$ $P_{p+4,m_5} = [K_{m_j}, c_{m_1}K_{m_1}, \ldots, c_{m_t}K_{m_t}, c_tK_t]$

mit $w(K_{m_i}) = 1$, $w(K_t) = 2$, $\sum_1^t c_{m_i} = p - 4$, $c_t = 4$.

Die dazugehörenden Bedingungen lauten nach (4.3):

$$\alpha)\quad 0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_i} \leq p - 1 \qquad \beta,\gamma)\quad 0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_i} \leq p - 2$$

$$\delta)\quad 0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_i} \leq p - 3 \qquad \varepsilon)\quad 0 \leq \sum_1^t \alpha_{m_i} \leq p - 4$$

und die entsprechenden Werte für die verschiedenen α_{m_i} betragen (4.4):

$\alpha)\ p \qquad \beta)\ p - 1 \qquad \gamma)\ p - 1 \qquad \delta)\ p - 2 \qquad \varepsilon)\ p - 3\,.$

Für die Erzeugende K_u bestehen sechs Möglichkeiten. Damit gibt es folgende Anzahlen von verschiedenen P_{p+4,m_i}:

[15]) Siehe Bemerkungen in der Einleitung.

α) $6p$ β) $3(p-1)$ γ) $3(p-1)$: Bezeichnen wir die zwei möglichen K_r mit K_{r_1} und K_{r_2}, dann geben die Kombinationen $[\ldots, K_{r_1}, K_{r_2}]$ und $[\ldots, K_{r_2}, K_{r_1}]$ nur zu einem Monom Anlaß.

δ) $2(p-2)$ ε) $(p-3)$.

Also folgt unter Berücksichtigung von $n \leq p-2$:

4.9. Theorem[16]**.** $\delta^2_{p+4} = 15p - 13$ *für* $p > 5$.

(Eingegangen den 16. März 1960)

Bemerkung: Inzwischen wurde die Arbeit von Novikov «Über periodische Gruppen» (Dokl. Akad. Nauk. SSSR 127 (1959)) bekannt, in der er zeigt, daß die Burnsidesche Vermutung für den Exponenten $n \geq 72$ falsch ist.

[16]) Siehe Bemerkungen in der Einleitung.