

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 35 (1961)  
  
**Artikel:** Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung.  
**Autor:** Klingenberg, Wilhelm  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27330>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 16.02.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung

Von WILHELM KLINGENBERG, Göttingen

## 1. Zusammenstellung der Ergebnisse<sup>1)</sup>

**1.1.** Bekanntlich ist eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  mit konstanter positiver Riemannscher Krümmung  $K$  homöomorph (ja sogar isometrisch) zur Sphäre  $S = S_{\dim M}$  (mit der gewöhnlichen Riemannschen Metrik).

Es erhebt sich die Frage, ob man in diesem Satz die Forderung, daß  $K$  konstant ist, abschwächen kann zu der Forderung, daß  $K$  innerhalb gewisser Schranken variiert. Da auf einer kompakten, einfach zusammenhängenden Mannigfaltigkeit  $M$  notwendig Werte  $K > 0$  vorkommen, können wir annehmen, daß die Metrik auf  $M$  so normiert ist, daß die Krümmung  $K$  nur Werte  $\leq 1$  annimmt.

Einen ersten Beitrag zu unserem Problem liefert der folgende Satz von RAUCH [5]: *Falls auf einer kompakten, einfach zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit  $M$  die Krümmung  $K$  den Ungleichungen  $0,74 \dots < K \leq 1$  genügt, so ist  $M$  homöomorph zu  $S = S_{\dim M}$ .*

In der Note [3] haben wir dann gezeigt: *Für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension folgt der Satz von RAUCH schon, wenn man nur die Ungleichungen  $0,54 \dots < K \leq 1$  fordert.* Für den Beweis dieses Satzes hatten wir neue Methoden entwickelt und uns insbesondere auf eine optimale Abschätzung nach unten für den Abstand zwischen einem Punkt und seinem Schnittpunkt gestützt, vgl. Bemerkung 1 und 2 zu Theorem 2 unten. Da diese Abschätzung nur für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension bewiesen werden konnte, mußten wir uns bei der Verbesserung des Satzes von RAUCH auf geraddimensionale Mannigfaltigkeiten beschränken.

BERGER [1] gelang es dann, die in [3] benutzten Methoden wesentlich zu verfeinern und damit zu beweisen: *Eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit  $M$  gerader Dimension, deren Krümmung  $K$  den Ungleichungen  $1/4 < K \leq 1$  genügt, ist homöomorph zur Sphäre  $S_{\dim M}$ .* Die hier auftretenden Schranken für  $K$  können nicht verbessert werden, da die symmetrischen Räume vom Rang 1, die nicht homöomorph zur Sphäre sind, mit ihrer gewöhnlichen Metrik der Beziehung  $1/4 \leq K \leq 1$  genügen.

**1.2.** In der vorliegenden Note zeigen wir nun, daß das Ergebnis von BERGER auch für Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension richtig ist:

---

<sup>1)</sup> Der Verfasser hat die Hauptergebnisse dem Internationalen Kolloquium über Differentialgeometrie und Topologie, Zürich, Juni 1960, mitgeteilt.

**Theorem 1.** *Sei  $M$  eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Falls die Riemannsche Krümmung  $K$  von  $M$  den Ungleichungen*

$$1/4 < K \leq 1 \quad (1)$$

*genügt, so ist  $M$  homöomorph zur Sphäre  $S = S_{\dim M}$ .<sup>2)</sup>*

*Bemerkungen.* 1. Für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension  $> 2$  ist das vorstehende Ergebnis das bestmögliche, wie wir gerade erwähnt haben. Die einzigen bekannten Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension, die kompakt und einfach zusammenhängend sind und eine Metrik mit  $K > 0$  tragen, sind homöomorph zu den Sphären. Es erscheint daher nicht ausgeschlossen, daß sich die Behauptung des Theorems für Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension auch aus einer schwächeren Ungleichung als (1) herleiten läßt.

2. Für  $\dim M$  gerade wurde Theorem 1 von BERGER [1] bewiesen. Er mußte sich auf diesen Fall beschränken, da er seinen Beweis auf eine Abschätzung des Abstandes zwischen einem Punkt und seinem Schnittpunkt stützt, die bisher nur für gerade Dimensionen bewiesen worden ist, vgl. [3], Theorem 1. Wir zeigen nun in dieser Note, daß das in Rede stehende Ergebnis aus [3] auch für Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension richtig ist, wenn man die Voraussetzung (1) macht. Da im übrigen der Beweis von BERGER unabhängig ist von der Dimension, genügt es also zum Beweis von Theorem 1, wenn wir das benötigte Ergebnis aus [3] für Mannigfaltigkeiten mit der Eigenschaft (1) für den Fall beliebiger Dimension beweisen. *Damit ist der Beweis von Theorem 1 zurückgeführt auf den Beweis von*

**Theorem 2.** *Sei  $M$  eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit. Falls die Riemannsche Krümmung  $K$  den Ungleichungen (1) genügt, so gilt<sup>2)</sup>*

- (a) *Eine geschlossene Geodätische hat die Länge  $\geq 2\pi$ .*
- (b) *Falls zwei Punkte  $p$  und  $q$  auf  $M$  einen Abstand  $d(p, q) < \pi$  haben, so gibt es genau ein geodätisches Segment der Länge  $d(p, q)$  von  $p$  nach  $q$ .*
- (c) *Der Durchmesser  $d(M)$  von  $M$ , das heißt, der maximale Abstand, den zwei Punkte auf  $M$  haben können, ist  $\geq \pi$ .*

*Bemerkungen.* 1. Die Eigenschaft (b) läßt sich auch so formulieren: Der Abstand zwischen einem Punkt  $p$  von  $M$  und seinem Schnittpunkt  $C(p)$  ist  $\geq \pi$ . Zum Begriff des Schnittpunktes vgl. [3].

---

<sup>2)</sup> Anmerkung bei der Korrektur: Durch eine Verfeinerung der hier entwickelten Methoden gelang es inzwischen, das Theorem 2 auch unter der schwächeren Voraussetzung (1'),  $1/4 \leq K \leq 1$ , zu beweisen. Aus den Resultaten von BERGER [1] folgt damit: Wenn man in Theorem 1 (1') an Stelle von (1) fordert, so ist  $M$  homöomorph der Sphäre oder, falls  $\dim M$  gerade und  $> 2$ , isometrisch einem symmetrischen Raum vom Rang 1, ungleich der Sphäre. Siehe hierzu die demnächst erscheinende Arbeit «Über vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit nach oben beschränkter Krümmung» in den *Annali di Matematica*.

2. In [3] hatten wir die Behauptungen (a), (b), (c) für Mannigfaltigkeiten gerader Dimension aus der schwächeren Forderung:  $0 < K \leq 1$  hergeleitet. Es bleibt offen, ob dieses Ergebnis sich auch auf Mannigfaltigkeiten ungerader Dimension überträgt.

1.3. Wir bezeichnen mit  $\Omega(p, q)$  den Raum der stückweise glatten Kurven, die von  $p$  nach  $q$  laufen. Nach MORSE [4] heißt  $q$  *nichtentartet bezüglich*  $p$ , falls es in  $\Omega(p, q)$  nur endlich viele Geodätische beschränkter Länge gibt.

Ein wesentlicher Schritt bei dem Beweis von Theorem 2 besteht nun in dem Beweis von

**Theorem 3.** *Sei  $M$  eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit, für die die Riemannsche Krümmung  $K$  den Ungleichungen (1) genügt. Seien  $p$  und  $q$  zwei Punkte auf  $M$  so, daß  $q$  nicht entartet ist bezüglich  $p$  und so, daß für den Abstand  $d(p, q)$  gilt*

$$0 \leq d(p, q) < 2\pi - \pi/\sqrt{\min K}. \quad (2)$$

*Sei  $G_0$  eine Geodätische minimaler Länge  $d(p, q)$  in  $\Omega(p, q)$ . Für jede von  $G_0$  verschiedene Geodätische  $G_1$  aus  $\Omega(p, q)$  gilt dann die Beziehung*

$$L(G_1) \geq 2\pi - L(G_0) > \pi/\sqrt{\min K}. \quad (3)$$

*Hier bezeichnet  $L(H)$  die Länge der Kurve  $H$ .*

Da nun jedes der Ungleichung (3) genügende geodätische Segment  $G_1$  einen Index  $\geq n - 1$  hat,  $n = \dim M$ , während  $G_0$  wegen  $L(G_0) = d(p, q) < \pi$  den Index 0 hat, so folgt nach MORSE [4] (vgl. auch BERGER [2]) sofort:

**Korollar.**  *$M$  ist eine Homologiesphäre.*

**Bemerkungen.** 1. Da jüngst bewiesen wurde, daß eine einfach zusammenhängende Homologiesphäre der Dimension  $\geq 7$  homöomorph ist zur Sphäre (STALLINGS), läßt sich Theorem 1, jedenfalls für  $\dim M \geq 7$ , auch aus diesem Korollar erschließen.

2. Im Laufe des Beweises von Theorem 3 ergibt sich unter anderem das Folgende: *Sei  $M$  eine kompakte, einfach zusammenhängende Riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension  $\geq 3$  mit der Eigenschaft (1), und seien  $p$  und  $q$  und  $G_0$  gewählt wie in Theorem 3. Dann läßt sich jede Kurve  $H \in \Omega(p, q)$  so in  $G_0$  deformieren, daß dabei die Länge nicht zunimmt.*

3. Für  $\dim M$  gerade wurde das Korollar bewiesen von BERGER [2], unter wesentlicher Verwendung von Theorem 1 aus [3].

1.4. Ein wichtiges Hilfsmittel für den Beweis von Theorem 3 (und damit auch für den Beweis von Theorem 2 und 1) bildet das folgende



**Lemma.** Sei  $M$  eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Riemannsche Krümmung  $K \leq 1$  ist. Seien  $p$  und  $q$  zwei Punkte auf  $M$ , die durch zwei verschiedene geodätische Segmente  $G_0$  und  $G_1$  miteinander verbunden sind. Sei ferner eine stetige Schar  $H_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , von stückweise glatten Kurven  $H_t$  aus  $\Omega(p, q)$  gegeben so, daß  $H_0 = G_0$  und  $H_1 = G_1$ . Wenn dann die Länge  $L(H_t)$  von  $H_t \leq$  der Länge  $L(H_1)$  von  $H_1 = G_1$  ist, so gilt die Beziehung

$$L(G_0) + L(G_1) \geq 2\pi. \quad (4)$$

**Bemerkungen.** 1. Man beachte, daß in diesem Lemma von der Krümmung  $K$  nur vorausgesetzt wird, daß sie  $\leq 1$  ist, und daß von  $M$  nur gefordert wird, daß  $M$  vollständig ist. Schon in dem einfachen Falle, daß  $M$  eine Fläche ist, deren Gaußsche Krümmung  $K \leq 1$  ist, verdient das Lemma selbständiges Interesse. Insbesondere ist auch  $p = q$ ,  $G_0 = p$  zugelassen.

2. Der Beweis des Lemmas stützt sich auf den Vergleichssatz von RAUCH [5] (vgl. auch die Darstellung in [2] oder [3]), der sich für  $\dim M = 2$  auf den bekannten Vergleichssatz von STURM reduziert.

3. Einen wesentlichen Beitrag zu der vorstehenden Formulierung des Lemmas verdanke ich einem Gespräch mit I. M. SINGER.

## 2. Beweis des Lemmas

**2.1.** In diesem Abschnitt machen wir die im Lemma formulierten Voraussetzungen. Insbesondere folgt aus der Annahme  $K \leq 1$ , daß eine von  $p$  ausgehende Geodätische ihren ersten konjugierten Punkt frühestens im Abstand  $\pi$  hat.

Das Lemma ist jedenfalls richtig, falls  $L(G_0) = L(H_0) \geq \pi$ ; denn dann ist auch  $L(H_1) = L(G_1) \geq \pi$ . Wir betrachten daher jetzt den Fall  $L(G_0) < \pi$ . Wir wählen ein  $\varepsilon > 0$  so, daß  $L(G_0) < \pi - \varepsilon$ .

**2.2.** Sei  $\varphi$  die Exponentialabbildung des Tangentialraumes  $M_p$  im Punkte  $p$  auf die Mannigfaltigkeit  $M$ . Wenn wir  $\varphi$  einschränken auf eine geeignete offene Umgebung der abgeschlossenen Kugel  $\overline{D}(\pi - \varepsilon)$  vom Radius  $\pi - \varepsilon$  um den Ursprung  $o$  von  $M_p$ , dann ist  $\varphi$  ein lokaler Diffeomorphismus. Damit können wir das Anfangsstück einer von  $p$  auslaufenden Kurve  $H$ , die durch  $p(s)$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , gegeben sei, zusammen mit einer Umgebung des Anfangsstücks, durch  $\varphi^{-1}$  in eine von  $o$  auslaufende Kurve von  $\overline{D}(\pi - \varepsilon)$  abbilden. Wir können diese Abbildung für wachsende Parameterwerte  $s$  solange fortsetzen, wie die stetig von  $s$  abhängenden, von  $p = p(0)$  nach  $p(s)$  laufenden geodätischen Segmente nicht länger werden als  $\pi - \varepsilon$ .

Falls insbesondere  $H$  ein von  $p$  ausgehendes geodätisches Segment der

Länge  $\leq \pi - \varepsilon$  ist, so wird bei dieser Abbildung aus  $H$  eine von  $o$  ausgehende Strecke derselben Länge wie  $H$ .

**2.3.** Wir behaupten, daß es nicht möglich ist, auf die vorstehend beschriebene Weise, mit  $H_0 = G_0$  beginnend, die ganze Schar  $H_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , auf eine Schar  $H'_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$  in  $\bar{D}(\pi - \varepsilon)$  abzubilden, die wieder stetig von  $t$  abhängt. Beginnen wir mit  $H_0 = G_0$ . In  $\bar{D}(\pi - \varepsilon)$  wird daraus eine Strecke  $H'_0$  mit dem Endpunkt  $a$ . Alle genügend zu  $H_0$  benachbarten Kurven  $H_t$  gehen über in Kurven  $H'_t$  in  $\bar{D}(\pi - \varepsilon)$ , die von  $o$  nach  $a$  laufen. Ließe sich diese Abbildung fortsetzen für alle  $t$  bis einschließlich  $t = 1$ , so müßte auch  $H'_1$  eine von  $o$  nach  $a$  in  $\bar{D}(\pi - \varepsilon)$  laufende Kurve sein, während doch  $H'_1$ , als Bild eines von  $H_0 = G_0$  verschiedenen geodätischen Segments  $H_1 = G_1$ , eine von  $H'_0$  verschiedene Strecke  $H'_1$  ist.

Es gibt also einen ersten Wert  $t_0$ ,  $0 < t_0 < 1$ , so, daß  $H'_{t_0}$  einen Punkt im Abstand  $\pi - \varepsilon$  enthält. Die Kurven  $H'_t$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ , laufen alle von  $o$  nach  $a$ .

**2.4.** Wir identifizieren nun  $M_p$  (aufgefaßt als euklidischer Raum) mit dem Tangentialraum im Südpol der Einheitssphäre  $S = S_{\dim M}$  und bilden die Kurven  $H'_t$ ,  $0 \leq t \leq t_0$ , durch die Exponentialabbildung  $\psi$  in  $S$  ab. Dabei wird aus  $H'_0$  ein geodätisches Segment  $H''_0$  der Länge  $L(H''_0) = L(H'_0) = L(H_0) = L(G_0)$ , während das Bild  $H'_{t_0}$  von  $H'_{t_0}$  einen Punkt enthält, der den Abstand  $\varepsilon$  vom Nordpol von  $S$  hat, und dann zum Endpunkt von  $H''_0$  zurückkehrt. Damit haben wir die Beziehung

$$L(H''_0) + L(H'_{t_0}) \geq 2\pi - 2\varepsilon. \quad (5)$$

Nach dem Vergleichssatz von RAUCH [5] (vgl. auch die Darstellung in [2] und in [3]) gilt nun auf Grund von  $K \leq 1$ :  $L(H''_{t_0}) = L(\psi(H'_{t_0})) \leq L(\varphi(H'_{t_0})) = L(H_{t_0})$ . Nach Voraussetzung ist  $L(H_{t_0}) \leq L(G_1)$ . Da  $L(H''_{t_0}) = L(G_0)$ , folgt aus (5)

$$L(G_0) + L(G_1) \geq 2\pi - 2\varepsilon. \quad (6)$$

Da (6) für jedes genügend kleine  $\varepsilon > 0$  gilt, folgt die Behauptung (4).

### 3. Beweis von Theorem 3

**3.1.** In diesem Abschnitt machen wir die Voraussetzungen von Theorem 3.

Wir fixieren eine von  $p$  nach  $q$  laufende Geodätische  $G_0$  der Länge  $L(G_0) = d(p, q) < 2\pi - \pi/\sqrt{\min K}$ . Sei nun  $G_1$  irgend eine von  $G_0$  verschiedene Geodätische aus  $\Omega(p, q)$ . Da  $M$  einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Schar  $J_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , von stückweise glatten Kurven  $J_t$  in  $\Omega(p, q)$ , die stetig von  $t$  abhängen und so, daß  $J_0 = G_0$  und  $J_1 = G_1$ .

Auf diese  $J_t$  wenden wir den bekannten Deformationsprozeß an, vgl. neben MORSE [4] auch SEIFERT-THRELFALL [6], insbesondere § 16. Bei diesem Deformationsprozeß bleiben die Geodätischen unter den  $J_t$ , also insbesondere  $J_0 = G_0$  und  $J_1 = G_1$ , ungeändert, während die Nichtgeodätischen verkürzt werden. Die Schar  $J_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , geht dabei über in eine Schar  $H_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , mit folgenden Eigenschaften:

Es gibt eine Zahl  $u \geq 0$  so, daß die Länge  $L(H_t)$  von  $H_t \leq u$  ist für alle  $t$ , und nur für eine Geodätische  $H_t$  gilt  $L(H_t) = u$ . Da die Geodätischen in  $\Omega(p, q)$  isoliert liegen, läßt sich das  $t$ -Intervall  $[0, 1]$  so in disjunkte abgeschlossene, aufeinander folgende Teilintervalle  $T_1, \dots, T_r$  einteilen, daß alle  $t$  in einem  $T_i$  dieselbe Geodätische  $H_t$  darstellen ( $i = 1, \dots, r$ ), während für die außerhalb der  $T_i$  gelegenen  $t$ -Werte  $L(H_t) < u$  gilt. Insbesondere sind  $H_0 = G_0$  und  $H_1 = G_1$  verschiedene Geodätische.

### 3.2. Folgende beiden Möglichkeiten können eintreten:

**A** Das letzte Intervall  $T_r$  enthält den Wert 1. Dann ist  $L(H_1) = L(G_1) = u$ , und  $L(H_t) \leq L(G_1)$  für alle  $t$ . Das Lemma liefert die Behauptung.

**B** 1 ist nicht in  $T_r$  enthalten. Das heißt,  $L(H_1) = L(G_1) < u$ , also auch  $L(H_0) = L(G_0) = d(p, q) < u$ . Die Kurven  $G_0$  und  $H_{t_i}$  für  $t_i$  beliebig in  $T_i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) erfüllen die Voraussetzungen des Lemmas mit der Schar  $H_t$ ,  $0 \leq t \leq t_i$ . Aus (4) und (2) folgt daher

$$L(H_{t_i}) \geq 2\pi - L(G_0) = 2\pi - d(p, q) > \pi/\sqrt{\min K}.$$

Die Geodätischen  $H_{t_i}$  haben also einen Index  $\geq n - 1$ ,  $n = \dim M$ . Folglich können wir für jedes  $i$  ( $i = 1, \dots, r$ ) eine kleine, zusammenhängende Umgebung von  $T_i$  so finden, daß sich die Kurven  $H_t$  für  $t$  innerhalb dieser Umgebung durch kürzere, stetig von  $t$  abhängende Kurven aus  $\Omega(p, q)$  ersetzen lassen. – Bei dieser Ersetzung setzen wir  $\dim M \geq 3$  voraus; im Falle  $\dim M = 2$  kann (ebenso wie allgemeiner im Falle  $\dim M$  gerade) das Theorem 3 mit Hilfe von Theorem 1 aus [3] bewiesen werden, vgl. dazu BERGER [2].

Auf diese Weise erhalten wir aus der Schar  $H_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , eine neue Schar  $K_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , von Kurven  $K_t$  aus  $\Omega(p, q)$ , die stetig von  $t$  abhängen und für die gilt:  $K_0 = G_0$ ,  $K_1 = G_1$  und  $L(K_t) < u$  für alle  $t$ .

Auf diese Schar  $K_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , wenden wir wiederum den Deformationsprozeß aus 3.1 an und diskutieren die Möglichkeiten A und B. Da nur endlich viele Geodätische der Länge  $\leq u$  in  $\Omega(p, q)$  existieren, kommen wir nach endlich vielen Schritten auf die unter A besprochene Situation, also auf die Behauptung von Theorem 3.

## 4. Beweis von Theorem 2

4.1. In diesem Abschnitt machen wir die Voraussetzungen von Theorem 2. Wie wir in [3] gezeigt haben, genügt es zum Beweis der Behauptung (b), wenn wir nachweisen, daß (a) gilt. Die Behauptung (c) folgt dann einfach aus der Bemerkung, daß zwei Punkte  $p$  und  $q$ , die maximalen Abstand  $d(p, q) = d(M)$  besitzen, stets durch mindestens zwei geodätische Segmente der Länge  $d(p, q)$  verbunden werden können.

4.2. Wir nehmen jetzt an, daß es auf  $M$  geschlossene Geodätische der Länge  $< 2\pi$  gibt. Dann gibt es auch eine geschlossene Geodätische minimaler Länge  $2\pi - 2d < 2\pi$  auf  $M$ . Wir bezeichnen sie mit  $G$ . Theorem 2 ist bewiesen, sobald wir gezeigt haben, daß die Existenz der Geodätischen  $G$  auf einen Widerspruch führt.

4.3. Wir wählen einen Punkt  $p$  auf  $G$ . Den  $p$  auf  $G$  gegenüberliegenden Punkt bezeichnen wir mit  $r$ .  $r$  liegt auf dem Schnittpunkt  $C(p)$  von  $p$  und hat minimalen Abstand von  $p$  unter den Punkten von  $C(p)$ , vgl. [3]. Die beiden von  $p$  nach  $r$  führenden geodätischen Segmente der Länge  $\pi - d$  auf  $G$  bezeichnen wir mit  $F_0$  und  $F_1$ .  $r$  ist nicht konjugiert zu  $p$  bezüglich  $F_0$  oder bezüglich  $F_1$ . Daher besitzt  $r$ , aufgefaßt als Punkt von  $C(p)$ , auf  $C(p)$  eine Umgebung bestehend aus Punkten  $r' \in C(p)$ , die durch zwei geodätische Segmente  $F'_0$  und  $F'_1$  mit  $p$  verbunden sind, so daß  $\pi - d \leq L(F'_0) = L(F'_1) \leq \pi - d/2$  und so, daß  $F'_0$  benachbart ist zu  $F_0$  und  $F'_1$  benachbart ist zu  $F_1$ .

Die  $F'_0$  mit diesen Eigenschaften überdecken einen Kegel mit der Spitze in  $p$  und der Achse  $F_0$ , und ebenso überdecken die  $F'_1$  mit diesen Eigenschaften einen Kegel mit der Spitze in  $p$  und der Achse  $F_1$ .

Nach MORSE [4] (Seite 234) liegen die bezüglich  $p$  nichtentarteten Punkte  $q$  überall dicht in  $M$ . Es gibt also einen bezüglich  $p$  nichtentarteten Punkt  $q$  mit folgenden Eigenschaften:  $d(p, q) < 2\pi - \pi/\sqrt{\min K}$  und  $q$  liegt auf einem der Segmente  $F'_0$  des Kegels um  $F_0$ . Mit  $F'_1$  bezeichnen wir jetzt dasjenige im Kegel um  $F_1$  gelegene Segment, das mit  $F'_0$  den Endpunkt  $r'$  gemeinsam hat. Wir haben  $\pi - d \leq L(F'_0) = L(F'_1) \leq \pi - d/2$ .

$G_0$  bezeichne das von  $p$  nach  $q$  laufende Segment der Länge  $d(p, q)$  auf  $F'_0$ . Mit  $G_1$  bezeichnen wir das von  $p$  nach  $q$  laufende gebrochene geodätische Segment, das sich zusammensetzt aus dem von  $p$  nach  $r'$  laufenden Segment  $F'_1$  und dem von  $r'$  nach  $q$  laufenden Teil von  $F'_0$ .

4.4. Da  $M$  einfach zusammenhängend ist, gibt es in  $\Omega(p, q)$  eine stetige Schar  $J_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , von stückweise glatten Kurven  $J_t$  mit  $J_0 = G_0$  und  $J_{1/2} = G_1$  und  $J_{1-t} = J_t$ . Auf diese Schar wenden wir den schon im 3.1

betrachteten Deformationsprozeß an und erhalten gemäß 3.2 eine Schar  $H_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , und eine Zahl  $u \geq 0$  so, daß  $H_0 = H_1 = G_0$ ,  $L(H_t) \leq u$ , und  $L(H_t) = u$  nur, wenn  $H_t$  eine Geodätische ist. Das Bild  $H_{1/2}$  von  $J_{1/2} = G_1$  unter diesem Deformationsprozeß ist verschieden von  $G_1$ , falls  $G_1$  echt gebrochen ist.

Die Geodätischen  $H_t$  der Länge  $u$  sind isoliert; man kann, wie in 3.2, auf Grund des Lemmas diese Geodätischen durch kürzere ersetzen, falls  $L(G_0) = L(H_0) = L(H_1) < u$ . Damit gelangt man zu einer Schar  $K_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , mit  $K_0 = K_1 = G_0$  und  $L(K_t) < u$ . Nach endlich vielen Schritten dieser Art läßt sich daher die Schar  $J_t$  überführen in die uneigentliche Schar  $P_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , mit  $P_t = G_0$  für alle  $t$ .

Insbesondere geht dabei  $J_{1/2} = G_1$  stetig über in  $G_0$  mit nicht wachsender Länge. Das heißt, wir erhalten eine Schar  $Q_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , von Kurven  $Q_t$  in  $\Omega(p, q)$  mit  $Q_1 = G_1$ ,  $Q_0 = G_0$ ,  $L(Q_t) + L(G_0) \leq L(G_1) + L(G_0) \leq 2\pi - d$ .

Unter Verwendung dieser  $Q_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , definieren wir nun eine Schar  $R_t$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , von stückweise glatten Kurven  $R_t \in \Omega(p, p)$  mit  $R_0 = p$  und  $R_1 = G$  wie folgt:

Für  $0 \leq t \leq 1/3$  soll  $R_t$  eine Deformation von  $p$  in das vor- und zurück-durchlaufene Segment  $G_0$  auf  $F'_0$  sein.

Für  $1/3 \leq t \leq 2/3$  soll  $R_t$  gleich  $Q_{3t-1}$  sein, gefolgt von dem zurück durchlaufenen Segment  $G_0$ .

Für  $2/3 \leq t \leq 1$  soll  $R_t$  eine Deformation von  $F'_1 \cup F'_0$  in  $F_1 \cup F_0 = G$  sein über Segmente der Form  $F''_0 \cup F''_1$  der Länge  $\leq 2\pi - d$ .

Wir erkennen, daß  $L(R_t) \leq 2\pi - d < 2\pi$  für alle  $t$ . Auf der anderen Seite zeigt der Beweis des Lemmas, insbesondere der Abschnitt 2.3, daß für wenigstens ein  $t$  gelten muß:  $L(R_t) \geq 2\pi$  – also ein Widerspruch.

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] M. BERGER, *Les variétés riemanniennes (1/4)-pincées*. C. R. Acad. Sci. Paris, 250, 442–444 (1960). – Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 14, 161–170 (1960).
- [2] M. BERGER, *Sur certaines variétés riemanniennes à courbure positive*. C. R. Acad. Sci. Paris 247, 1165–1168 (1958). – *Les variétés riemanniennes à courbure positive*. Bull. Soc. Math. Belg. 10, 89–104 (1958).
- [3] W. KLINGENBERG, *Contributions to Riemannian geometry in the large*. Ann. of Math. 69, 654–666 (1959).
- [4] M. MORSE, *The calculus of variations in the large*. New York 1934.
- [5] H. E. RAUCH, *A contribution to differential geometry in the large*. Ann. of Math. 54, 38–55 (1951).
- [6] H. SEIFERT und W. THRELFALL, *Variationsrechnung im Großen*. Leipzig 1938.

(Eingegangen den 7. Juli 1960)