Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 34 (1960)

Artikel: Neue Ergebnisse über konvexe Flächen.
Autor: Klingenberg, Wilhelm
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26620

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Neue Ergebnisse über konvexe Flächen

von WILHELM KLINGENBERG, Göttingen

1. Zusammenstellung der Ergebnisse

1.1. Wir betrachten geschlossene, positiv gekrümmte Flächen der Klasse C^3 im Raum. Solche Flächen nennen wir kurz Eiflächen. Insbesondere gehören die Sphären zu den Eiflächen; sie sind dadurch gekennzeichnet, daß sie konstante gaußsche Krümmung haben.

Wir betrachten in dieser Note die innere Geometrie einer Eifläche M. Und zwar geben wir eine nur von dem Maximum der gaußschen Krümmung K auf M abhängende untere Schranke für die Länge eines geschlossenen geodätischen Segments[1]) auf M (Theorem 1) und für den inneren Durchmesser von M (Theorem 2) an. Bei der Diskussion des Gleichheitszeichens ergeben sich dabei zwei neue Kennzeichnungen der Sphäre unter den Eiflächen.

Diese Ergebnisse bilden das Gegenstück zu den nur von dem Minimum der gaußschen Krümmung K auf M abhängenden oberen Schranken für die Länge eines geschlossenen geodätischen Segments auf M und den inneren Durchmesser von M, wie sie kürzlich TOPONOGOW angegeben hat (Theorem 1* und 2*).

In einem Anhang geben wir eine durch das Maximum der Krümmung K auf einer Eifläche M bestimmte untere Schranke für den äußeren Durchmesser von M an (Theorem 3). Damit erhalten wir ein anscheinend bisher nicht bemerktes Gegenstück zu der auf BONNET zurückgehenden, durch das Minimum von K auf M bestimmten oberen Schranke für den äußeren Durchmesser von M. Die Diskussion des Gleichheitszeichens liefert eine weitere Kennzeichnung der Sphäre unter den Eiflächen.

1.2. Theorem 1. *Zwischen der Länge $L(G)$ eines geschlossenen geodätischen Segments G auf einer Eifläche M und dem Maximum der gaußschen Krümmung K auf M besteht die Beziehung*

$$2\pi/\sqrt{\max K} \leq L(G) \tag{1}$$

Dann und nur dann, wenn M eine Sphäre ist, gibt es auf M ein geschlossenes geodätisches Segment der Länge $2\pi/\sqrt{\max K}$.

---

[1]) Ein geschlossenes geodätisches Segment wird stets als doppelpunktfrei vorausgesetzt. Eine geschlossene Geodätische ist ein geschlossenes geodätisches Segment, für das Anfangs- und Endrichtung zusammenfallen. Unter einem Segment wollen wir stets ein geodätisches Segment verstehen.

Bemerkungen. 1. Für den Spezialfall, daß G eine geschlossene Geodätische ist, wurde die Ungleichung (1) von POGORELOW [8] bewiesen. Ein ganz anderer Beweis für die Ungleichung (1), der sich, im Unterschied zu dem Beweis von POGORELOW, sogleich für einfach zusammenhängende, positiv gekrümmte Riemannsche Mannigfaltigkeiten beliebiger gerader Dimension formulieren läßt, findet sich in [5]. Ein wesentlicher Schritt in diesem Beweis ist eine Aussage, die wir unten, für den Fall der Dimension 2, als Lemma 1 formuliert haben. Es ist dieses Lemma, das dann auch die im Theorem 1 enthaltene Kennzeichnung der Sphäre zu beweisen gestattet. Wir werden hier noch einmal einen ausführlichen Beweis des Lemmas 1, unter Berücksichtigung der sich für den Fall der Dimension 2 ergebenden Vereinfachungen, bringen.

2. Die Bedeutung der hier und im folgenden immer wieder auftretenden Zahl $\pi/\sqrt{\max K}$ beruht unter anderem darauf, daß ein geodätisches Segment mindestens die Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ haben muß, wenn seine Endpunkte konjugiert zueinander sein sollen. Das ergibt sich aus dem Vergleichssatz von STURM, vgl. BLASCHKE [1], § 100.

3. Die im zweiten Teil des Theorems enthaltene Kennzeichnung der Sphäre gestattet es, die Ungleichung (1) in folgender Weise zu verschärfen: *Sei M eine Eifläche, die nicht eine Sphäre ist. Dann hat jedes geschlossene geodätische Segment auf M eine Länge* $> 2\pi/\sqrt{\max K}$.

4. Das Theorem wird falsch, wenn man an Stelle von Eiflächen auch Flächen mit teilweise negativer Krümmung zuläßt, wie man an dem Beispiel einer Rotationsfläche mit Taille erkennen kann.

5. Theorem 1 ist das Gegenstück zu folgendem kürzlich bewiesenen Satz:

Theorem 1* (TOPONOGOW [12]). *Zwischen der Länge $L(G)$ eines geschlossenen geodätischen Segments G auf einer Eifläche M und dem Minimum der Krümmung K auf M besteht die Beziehung*

$$L(G) \leq 2\pi/\sqrt{\min K}\,. \tag{1*}$$

Dann und nur dann, wenn M eine Sphäre ist, gibt es auf M ein geschlossenes geodätisches Segment der Länge $2\pi/\sqrt{\min K}$.

Bei seinem Beweis verwendet TOPONOGOW Ergebnisse aus der Theorie der inneren Geometrie konvexer Flächen von A. D. ALEXANDROW.

1.3. In der Formulierung des Lemmas 1, und auch in den weiteren Überlegungen dieser Note, spielt der Begriff des *Schnittorts eines Punktes* eine wichtige Rolle. Dieser Begriff wurde zuerst von POINCARÉ [9] für analytische Eiflächen eingeführt. MYERS [7] untersucht den Schnittort allgemeiner auf vollständigen, analytischen Flächen. In [6] haben wir den Schnittort auch für nichtanalytische Flächen betrachtet.

Wir wollen hier noch einmal den Schnittort definieren und seine wichtigsten Eigenschaften zusammenstellen. p bezeichne jetzt einen fest gewählten Punkt auf der Eifläche M. Auf jedem von p ausgehenden geodätischen Strahl G gibt es einen wohlbestimmten Punkt q mit folgender Eigenschaft: Für jeden vor q auf G gelegenen Punkt r ist das Segment pr von G ein minimales Verbindungssegment[2]) von p nach q; dagegen gilt dies für keinen Punkt r auf G, der hinter q gelegen ist. Es folgt hieraus, daß das Segment pr von G für einen vor q gelegenen Punkt r auch das einzige minimale Verbindungssegment mit p ist, während für $r = q$ das Segment $pr = pq$ zwar noch minimal ist, jedoch nicht mehr notwendig das einzige minimale Verbindungssegment zwischen p und q zu sein braucht.

Aus der Definition von q folgt weiter, daß ein vor q auf G gelegener Punkt r nicht konjugiert sein kann zu p bezüglich G. q selber kann konjugiert sein zu p bezüglich G; wenn das jedoch nicht der Fall ist, dann gibt es noch ein weiteres minimales Verbindungssegment von p nach q. Um das einzusehen, betrachten wir eine von hinten gegen q konvergierende Folge von Punkten q_i auf G $(i = 1, 2, \ldots;\ q_i \neq q)$ und für jeden dieser Punkte q_i ein minimales Verbindungssegment mit p. Ein Häufungselement[3]) dieser Verbindungssegmente ist dann ein minimales Verbindungssegment von p nach q, und dieses ist sicherlich dann verschieden von dem auf G gelegenen minimalen Segment pq, wenn q nicht konjugiert ist zu p bezüglich G.

Der Schnittort $C(p)$ ist nun definiert als die Menge der vorstehend definierten Punkte q auf den von p ausgehenden geodätischen Strahlen. Da in beliebiger Nähe eines solchen Punktes q von $C(p)$ Punkte gelegen sind, die nicht zu $C(p)$ gehören, enthält $C(p)$ keine inneren Punkte. Jeder Punkt außerhalb $C(p)$ besitzt genau ein minimales Verbindungssegment mit p; das Komplement von $C(p)$ in M ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet, und zwar die maximale offene Menge, in der sich geodätische Polarkoordinaten mit dem Zentrum p einführen lassen.

1.4. Nach diesen Vorbereitungen können wir das für den Beweis von Theorem 1 fundamentale Lemma 1 formulieren:

Lemma 1. *Auf einer Eifläche M sei eine geschlossene Geodätische G gegeben mit folgender Eigenschaft: Für jeden Punkt von M ist der Abstand zu seinem*

---

[2]) Wir erinnern daran, daß für je zwei Punkte p, q einer Eifläche M der Abstand $d(p, q) = d(q, p)$ erklärt ist als die untere Grenze der Längen der auf M gelegenen Verbindungskurven von p mit q. Es gibt stets eine Verbindungskurve, deren Länge gleich dem Abstand $d(p, q)$ ist; eine solche Kurve ist immer geodätisch. Wir nennen sie minimales (geodätisches) Verbindungssegment zwischen p und q. Vgl. hierzu Hopf-Rinow [4].

[3]) Konvergenz ist hier verstanden im Sinne der üblichen, auf M. Morse zurückgehenden Metrik für Kurven auf einer Eifläche, vgl. Seifert-Threlfall [10], § 13.

Schnittort mindestens so groß wie die halbe Länge, $L(G)/2$, von G, oder, was dasselbe besagt: Je zwei Punkte auf M, deren Abstand kleiner ist als $L(G)/2$, besitzen genau ein minimales geodätisches Verbindungssegment.

Behauptung. *Ist p ein Punkt auf G, so treffen sich alle von p ausgehenden geodätischen Strahlen nach Durchlaufen der Strecke $L(G)/2$ in dem p auf G gegenüberliegenden Punkte q. q ist, bezüglich eines jeden von p ausgehenden geodätischen Strahls, konjugiert zu p. Der Schnittort $C(p)$ von p besteht aus dem Punkt q allein.*[3a])

1.5. Aus dem Beweis von Theorem 1 ergibt sich unmittelbar: Ist p ein Punkt auf einer Eifläche M, dann ist der Abstand $d(p, C(p))$[4]) zwischen p und seinem Schnittort $C(p)$ mindestens $\pi/\sqrt{\max K}$. Insbesondere gibt es also Punktepaare auf M, deren Abstand $\geq \pi/\sqrt{\max K}$ ist. Wenn wir mit $d(M)$ den *inneren Durchmesser von M* (das ist der maximale Abstand, gemessen auf M, den zwei Punkte von M haben können) bezeichnen, dann gilt also $d(M) \geq \pi/\sqrt{\max K}$. Wir ergänzen dieses Ergebnis durch die Bemerkung, daß nur für die Sphäre $d(M) = \pi/\sqrt{\max K}$ gilt. Damit haben wir dann eine zweite Kennzeichnung der Sphäre gewonnen.

Theorem 2. *Sei p ein Punkt auf einer Eifläche M, $C(p)$ sein Schnittort. Dann ist der Abstand $d(p, C(p)) \geq \pi/\sqrt{\max K}$, wo K die gaußsche Krümmung auf M bezeichnet. Insbesondere gilt also für den inneren Durchmesser $d(M)$ von M die Beziehung*

$$\pi/\sqrt{\max K} \leq d(M) . \tag{2}$$

Dann und nur dann, wenn M eine Sphäre ist, gibt es auf M einen Punkt p so, daß alle Punkte von M einen Abstand $\leq \pi/\sqrt{\max K}$ von p haben. Insbesondere: Dann und nur dann, wenn M eine Sphäre ist, gilt $d(M) = \pi/\sqrt{\max K}$.

Bemerkungen. 1. Der erste Teil des Theorems, und insbesondere die Ungleichung (2), gehen schon auf POGORELOW [8] zurück. Vgl. auch [5]. Für ein Gegenstück zu Theorem 2 siehe das unten formulierte Theorem 2*.

2. Für den Beweis der im zweiten Teil des Theorems enthaltenen Kennzeichnung der Sphäre spielt folgendes Lemma eine wichtige Rolle:

Lemma 2. *Sei p ein Punkt auf einer Eifläche M derart, daß alle Punkte auf*

3a) Es läßt sich zeigen, daß jede Fläche, die den Voraussetzungen des Lemmas genügt, eine sogenannte Wiedersehensfläche ist. Vgl. die Definition in [1], § 102. Die einzigen bekannten Wiedersehensflächen sind die Sphären.

4) $d(p, C(p))$, der Abstand zwischen einem Punkt p und seinem Schnittort $C(p)$, ist, wie üblich, definiert als die untere Grenze der Werte $d(p, q')$ für $q' \in C(p)$. Da $C(p)$ kompakt ist (vgl. etwa [6]), wird diese untere Grenze für ein $q \in C(p)$ angenommen.

dem Schnittort $C(p)$ von p den gleichen Abstand $\pi/\sqrt{\max K}$ von p haben. Dann besteht $C(p)$ aus nur einem einzigen Punkt, und dieser Punkt ist konjugiert zu p bezüglich eines jeden von p ausgehenden geodätischen Strahls.

Wenn nämlich p ein Punkt auf M ist, derart, daß alle Punkte von M einen Abstand $\leq \pi/\sqrt{\max K}$ von p haben, dann haben, da $d(p, C(p)) \geq \pi/\sqrt{\max K}$, die Punkte von $C(p)$ genau den Abstand $\pi/\sqrt{\max K}$ von p. Aus Lemma 2 folgt, daß dann $C(p)$ nur einen einzigen Punkt, q, enthält, und q ist konjugiert zu p bezüglich eines jeden von p auslaufenden Strahls. Auf jedem von p auslaufenden geodätischen Strahl erscheint also der erste konjugierte Punkt im Abstand $\pi/\sqrt{\max K}$, und daher ist längs eines jeden solchen Strahls, bis dieser q trifft, die Krümmung $K = \max K = \text{const.}$, das heißt, M ist eine Sphäre.

3. Das Lemma 2 folgt nun für analytische Eiflächen M sofort aus den Untersuchungen von Poincaré [9] und Myers [7] über die Struktur des Schnittorts für solche Flächen. Danach gilt nämlich, wenn der Schnittort $C(p)$ eines Punktes p mehr als einen Punkt enthält, daß es auf $C(p)$ sogenannte Endpunkte gibt, das sind Punkte auf $C(p)$, die nur genau ein minimales Verbindungssegment mit p haben; wenn q ein solcher Endpunkt auf $C(p)$ ist, dann hat q kleineren Abstand von p als alle genügend zu q benachbarten Punkte $q' \neq q$ auf $C(p)$, das heißt, es gibt auf $C(p)$ Punkte, die verschiedenen Abstand von p haben.

Für nichtanalytische Eiflächen dagegen, wie wir sie betrachten, scheinen Ergebnisse von der vorstehenden Art nicht zur Verfügung zu stehen. Der unten geführte Beweis von Lemma 2 erfordert daher eingehendere Überlegungen. In jedem Fall kann unser Beweis von Lemma 2 für sich in Anspruch nehmen, daß in ihm nicht auf anderweitig veröffentlichte, tieferliegende Ergebnisse verwiesen zu werden braucht.

4. Das Gegenstück zu Theorem 2 wurde kürzlich bewiesen:

Theorem 2* (Toponogow [11]). *Sei p ein Punkt auf einer Eifläche M. Dann ist der Abstand $d(p, C(p))$ zwischen p und seinem Schnittort $C(p)$ $\leq \pi/\sqrt{\min K}$, wo $\min K$ das Minimum der Gaussschen Krümmung K auf M bezeichnet. Insbesondere gilt für den inneren Durchmesser $d(M)$ von M die Beziehung*

$$d(M) \leq \pi/\sqrt{\min K}\,. \tag{2*}$$

Dann und nur dann, wenn M eine Sphäre ist, gilt $d(M) = \pi/\sqrt{\min K}$.

Bei seinem Beweis verwendet Toponogow wiederum Methoden von A. D. Alexandrow. Die Ungleichung (2*) geht schon auf Bonnet [3] zurück, vgl. Blaschke [1], § 100. Die im zweiten Teil enthaltene Kennzeichnung der

Sphäre dürfte jedoch bisher nicht bekannt gewesen sein. Für analytische Eiflächen ergibt sie sich übrigens wiederum leicht aus den Ergebnissen von MYERS [7] über die Struktur des Schnittorts für solche Flächen: Seien nämlich p und q zwei Punkte auf M mit dem Abstand $\pi/\sqrt{\min K}$. Dann liegt q auf dem Schnittort $C(p)$ von p, und q ist konjugiert zu p bezüglich eines jeden von p nach q laufenden minimalen Segments. Wenn nun $C(p)$ nur aus dem Punkt q besteht, dann muß M die Sphäre der Krümmung $\min K$ sein. Wenn $C(p)$ dagegen mehr als einen einzigen Punkt enthält, so bemerkt MYERS, daß ein konjugierter Punkt auf $C(p)$ stets auf einer zugewandten Spitze des Orts der konjugierten Punkte von p gelegen sein muß (das folgt sogleich aus dem Enveloppentheorem, vgl. BLASCHKE [1], § 99, der hier einen Gedanken von DARBOUX wiedergibt). Nun kann aber der Punkt q nicht auf einer solchen zugewandten Spitze des konjugierten Orts von p gelegen sein, da $\pi/\sqrt{\min K}$ die maximale Länge ist, die ein Segment mit konjugierten Endpunkten auf M haben kann.

1.6. Neben dem inneren Durchmesser $d(M)$ einer Eifläche M betrachten wir noch den *äußeren Durchmesser von* M, $D(M)$. Darunter verstehen wir das Maximum des Abstandes zweier Punkte von M, gemessen im Raum. $D(M)$ ist dasselbe wie der Durchmesser des durch M bestimmten konvexen Körpers, vgl. BONNESEN-FENCHEL [2], § 7.

Offenbar ist $D(M) < d(M)$, und damit ist nach dem Satz von BONNET (vgl. Theorem 2*) $\pi/\sqrt{\min K}$ eine obere Schranke für $D(M)$. $\pi/\sqrt{\min K}$ ist sogar eine obere Grenze für $D(M)$, wie die an den Spitzen abgerundeten spindelförmigen Drehflächen konstanter Krümmung zeigen, vgl. BLASCHKE [1], § 100.

Wir ergänzen dieses klassische Ergebnis durch die Angabe einer nur von $\max K$ abhängenden unteren Schranke für $D(M)$ und erhalten dabei eine weitere Kennzeichnung der Sphären unter den Eiflächen:

Theorem 3. *Zwischen dem äußeren Durchmesser $D(M)$ einer Eifläche M und den Extremwerten der Krümmung K auf M bestehen die Beziehungen*

$$2/\sqrt{\max K} \leq D(M) < \pi/\sqrt{\min K}\,. \tag{3}$$

Hier kann die rechts stehende Zahl nicht verkleinert werden, während links dann und nur dann das Gleichheitszeichen steht, wenn M eine Sphäre ist.

Bemerkung. Wir beweisen die links stehende Ungleichung in (3) unter Verwendung der in Theorem 2 bewiesenen Ungleichung $\pi/\sqrt{\max K} \leq d(M)$, indem wir durch zwei Punkte p, q auf M mit maximalem inneren Abstand

$d(p, q) = d(M)$ einen ebenen Schnitt legen und auf die Länge $L(C)$ und den äußeren Durchmesser $D(C)$ der so entstehenden ebenen Schnittkurve C die Beziehung $L(C) \leq \pi D(C)$ anwenden (vgl. BONNESEN-FENCHEL [2] § 10).

Einen anderen Beweis der Ungleichung $\pi/\sqrt{\max K} \leq D(M)$ verdanke ich einer Mitteilung von C. POMMERENKE: Unter Verwendung des GAUSSschen Integralsatzes und der Beziehung $F(M) \leq \pi(D(M))^2$ zwischen der Oberfläche $F(M)$ und dem Durchmesser $D(M)$ einer Eifläche M (vgl. BONNESEN-FENCHEL [2], § 10) ergibt sich

$$4\pi = \int_M K d\omega \leq F(M) \max K \leq \pi(D(M))^2 \max K$$

und damit die Behauptung.

2. Beweis von Lemma 1

2.1. Wir betrachten in diesem Abschnitt eine Eifläche M der Klasse C^3, auf der eine geschlossene Geodätische G der Länge $L = L(G)$ gegeben ist mit der Eigenschaft: Je zwei Punkte auf M mit einem Abstand $< L/2$ besitzen genau ein minimales Verbindungssegment.

2.2. Satz 2.1. *Sei G eine (beliebige) geschlossene Geodätische auf einer Eifläche M. Dann sind alle zu G genügend benachbarten Parallelkurven H von G kürzer als G.*

Beweis. Nach Wahl eines Anfangspunktes p auf G und einer an G tangentialen Anfangsrichtung in p führen wir längs G geodätische Parallelkoordinaten ein, vgl. BLASCHKE [1], § 73. In diesem Koordinatensystem wird G durch $u = 0$, $0 \leq v \leq L$ (L bezeichnet die Länge von G) beschrieben, und das Linienelement hat die Gestalt $ds^2 = du^2 + G(u, v)dv^2$ mit $G(0, v) = 1$, $G_u(0, v) = 0$, $G_{uu}(0, v) = -K(0, v)$. ($K(0, v)$ ist die Krümmung in dem Punkt mit den Koordinaten $(0, v)$).

Die Parallelkurven $H(\varepsilon)$ zu G im Abstand $|\varepsilon|$ sind durch $u = \varepsilon$, $0 \leq v \leq L$ gegeben. Es ist $H(0) = G$.

Für die Länge $L(\varepsilon) = L(H(\varepsilon)) = \int_0^L G(\varepsilon, v)\, dv$ von $H(\varepsilon)$ in Abhängigkeit von ε finden wir: $L'(0) = 0, L''(0) = -\int_0^L K(0, v)dv < 0$, das heißt, $G = H(0)$ hat strikt größere Länge als jede Parallelkurve $H(\varepsilon)$, $\varepsilon \neq 0$.

2.3. Zu jeder zu G benachbarten Parallelkurve H (H sei stets verschieden von G) bezeichne $p(H)$ denjenigen Punkt, in welchem die zu G in p orthogonale Geodätische die Kurve H trifft. Offenbar konvergiert $p(H)$ gegen p,

wenn H gegen G konvergiert. Wenn wir H noch in Richtung wachsender v-Werte orientieren, können wir H als geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt $p(H)$ auffassen.

Die geschlossene Geodätische G zerlegt die Eifläche M in zwei Teile; wir nennen sie die beiden *Hälften* von M (bezüglich G).

Da eine Parallelkurve H zu G kürzer ist als G, also alle Punkte von H einen Abstand $< L(G)/2$ von $p(H)$ haben, besitzt, nach der in **2.1** gemachten Voraussetzung, jeder Punkt r von $H - p(H)$ ein eindeutig bestimmtes minimales Verbindungssegment $p(H)r$ mit $p(H)$. Jedes dieser Segmente $p(H)r$ bildet im Punkt $p(H)$ mit der Anfangsrichtung von H einen gewissen Winkel[5]) Wir behaupten dazu:

Satz 2.2. *Sei α ein Winkel zwischen 0 und π. Auf jeder in einer fest gewählten Hälfte von M gelegenen Parallelkurve H gibt es einen Punkt $r(H, \alpha)$ derart, daß das minimale Verbindungssegment $p(H)r(H, \alpha)$ mit der Kurve H im Punkt $p(H)$ den Winkel α bildet. Das Segment $p(H)r(H, \alpha)$ verläuft dabei ganz in der gewählten Hälfte von M.*

Beweis. Da H kürzer ist als G, trifft H den Schnittort $C(p(H))$ des Punktes $p(H)$ nicht. H gehört also ganz demjenigen Gebiet auf der Eifläche an, das sich durch die geodätischen Polarkoordinaten mit Zentrum $p(H)$ und mit der Anfangsrichtung von H als 0-Richtung beschreiben läßt. Der Winkel zwischen der Anfangsrichtung von $p(H)r$, wo r ein Punkt von $H - p(H)$ ist, und der Anfangsrichtung von H ist also nichts anderes als die Winkelkoordinate des Punktes r und daher eine stetige Funktion von r. Da $H - p(H)$ einfach zusammenhängend ist, füllen die Werte dieser stetigen Funktion ein Intervall in $[0, \pi]$ aus. Da aber Punkte r auf $H - p(H)$ vorkommen, deren Winkelkoordinate beliebig nahe an 0 oder an π gelegen ist, gibt es für jedes α zwischen 0 und π einen Punkt $r = r(H, \alpha)$ mit der in dem Satz genannten Eigenschaft.

Da schließlich Anfangs- und Endpunkt des Segments $p(H)r(H, \alpha)$ der gewählten Hälfte von M angehören, und da das Segment kürzer als $L/2$ ist, gehört es ganz dieser Hälfte an.

Satz 2.3. *Sei α ein Winkel zwischen 0 und π. Für jede auf einer fest gewählten Hälfte von G gelegene Parallelkurve $H \neq G$ sei $r(H, \alpha)$ ein Punkt auf H so, daß das minimale Segment $p(H)r(H, \alpha)$ mit der Kurve H in $p(H)$ den Winkel α bildet.*

Behauptung. *Wenn H gegen G konvergiert, so konvergiert $p(H)$ gegen den Punkt p auf G und $r(H, \alpha)$ konvergiert gegen den p auf G gegenüberliegenden*

[5]) Wir betrachten, falls nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt wird, stets nichtorientierte Winkel, so daß nur Winkelwerte von 0 bis π vorkommen.

Punkt q. Das minimale Segment $p(H)r(H, \alpha)$ konvergiert folglich gegen ein auf der fest gewählten Hälfte von M gelegenes minimales Verbindungssegment von p nach q, das in p mit der Geodätischen G den Winkel α bildet.

Beweis. Offenbar ist $\lim p(H) = p$ für $\lim H = G$. Wenn wir noch zeigen, daß $\lim r(H, \alpha) = q$ für $\lim H = G$, dann ergeben sich die übrigen Behauptungen des Satzes sofort: Denn der Grenzwert[6]) einer Folge minimaler geodätischer Segmente ist offenbar wiederum ein minimales geodätisches Segment, und da die Segmente $p(H)r(H, \alpha)$ alle in einer fest gewählten Hälfte von M verlaufen und mit der Kurve H im Punkt $p(H)$ den Winkel α bilden, so gilt dasselbe für die Grenzlage.

Da M kompakt ist, besitzen die Punkte $r(H, \alpha)$ für $\lim H = G$ jedenfalls einen Häufungspunkt r; r ist offenbar auf G gelegen. Wir haben zu zeigen, daß $r = q$ ist.

Zunächst ist leicht zu sehen, daß r nicht ein von p und q verschiedener Punkt auf G sein kann. Denn dann würden die minimalen Segmente $p(H)r(H, \alpha)$ gegen ein minimales Segment von p nach r konvergieren, das mit G in p den Winkel α, $0 < \alpha < \pi$, einschließt. Da $r \neq q$, also r nicht zu $C(p)$ gehört, kann es aber nur das eine, zu G gehörende minimale Verbindungssegment von p nach r geben – ein Widerspruch.

Es bleibt also noch die Möglichkeit auszuschließen, daß der Punkt p als ein Häufungspunkt der Punkte $r(H, \alpha)$ für $\lim H = G$ auftritt. Dies würde bedeuten, daß es eine Folge von gegen G konvergierenden Parallelkurven H_i $(i = 1, 2, \ldots)$ zu G gibt derart, daß die Folge $r_i = r(H_i, \alpha)$ gegen p konvergiert.

Wir betrachten die folgenden beiden Verbindungskurven von $p_i = p(H_i)$ nach $r_i = r(H_i, \alpha)$: Einmal das minimale Segment $G_i = p_i r_i$, und zum anderen den kürzeren Bogen K_i der beiden von p_i nach r_i laufenden Bögen von H_i (da $\lim r_i = p$, ist, jedenfalls für genügend große i, K_i durch unsere Forderung eindeutig bestimmt).

Die Kurven G_i und K_i sind ganz in dem geodätischen Polarkoordinatensystem mit p_i als Zentrum gelegen. Diese Polarkoordinaten vermitteln einen Diffeomorphismus ψ einer Umgebung des Punktes p_i auf eine Umgebung des Ursprungs o der Tangentialebene T_i in p_i. Hierbei ist das Bild ψG_i in T_i des geodätischen Segments G_i die Verbindungsstrecke von $\psi p_i = o$ nach ψr_i, während das Bild ψK_i von K_i eine zweite Verbindungskurve von $\psi p_i = o$ nach ψr_i ist, die sich beliebig wenig von dem mit der gleichen Anfangsrichtung von 0 ausgehenden geradlinigen Segment der gleichen Länge unterscheidet, sobald nur i genügend groß gewählt ist. Denn die Kurve K_i

[6]) Vgl. Fußnote 3.

unterscheidet sich, als ein Bogen der gegen die Geodätische G konvergierenden Kurve H_i, für genügend große i beliebig wenig von einem mit der gleichen Anfangsrichtung von p_i ausgehenden Segment der gleichen Länge, und ein solches Segment wird ja unter ψ in ein geradliniges Segment des Tangentialraumes T_i abgebildet.

Nun bilden aber die Anfangsrichtungen der beiden Verbindungskurven ψG_i und ψK_i von $o = \psi p_i$ nach ψr_i im Punkt o den fest gewählten Winkel α, $0 < \alpha < \pi$. Zwei mit einem solchen Winkel von einem Punkt o einer euklidischen Ebene ausgehende Kurven, von denen die eine geradlinig ist und die andere der Geradlinigkeit in einem beliebig vorgebbaren Maße nahe kommt, können sich aber nicht in einem Punkte wiedertreffen, der beliebig nahe an o gelegen ist.

Damit ist der Satz 2.3 bewiesen.

2.4. Aus den vorangehenden Sätzen folgt nun sofort das Lemma 1. Sei nämlich, unter den in **2.1** angegebenen Voraussetzungen, ein Punkt p auf G und in diesem Punkt eine Anfangsrichtung für G gewählt. Von den beiden durch G bestimmten Hälften von M wählen wir eine aus. α sei ein beliebiger Winkel zwischen 0 und π. Wie in **2.2** wählen wir auf den in der gewählten Hälfte gelegenen Parallelkurven H zu G die Punkte $p(H)$. Nach Satz 2.2 gibt es auf jedem dieser H einen Punkt $r(H, \alpha)$ derart, daß das minimale Segment $p(H)r(H, \alpha)$ mit der Kurve H im Punkt $p(H)$ den Winkel α bildet. Nach Satz 2.3 konvergieren diese Segmente für $\lim H = G$ gegen ein minimales, in der gewählten Hälfte gelegenes Verbindungssegment von p mit q, das mit G in p den Winkel α bildet.

Das heißt: Ein von p mit dem Winkel α in die gewählte Hälfte von M auslaufender geodätischer Strahl trifft G in dem p auf G gegenüberliegenden Punkt q wieder, und zwar nach Durchlaufen der Strecke $L/2$, $L = L(G)$ die Länge von G. Der Schnittort $C(p)$ besteht also nur aus dem Punkt q, q ist konjugiert zu p bezüglich eines jeden von p ausgehenden geodätischen Strahls.

3. Beweis von Theorem 1

3.1. In diesem Abschnitt betrachten wir Eiflächen der Klasse C^3.

Satz 3.1. *Sei p ein Punkt auf einer Eifläche M und q ein Punkt auf dem Schnittort $C(p)$ von p mit minimalem Abstand von p. Wenn*

$$d(p, q) = d(p, C(p)) < \pi/\sqrt{\max K}\ ^{7)},$$

dann gibt es genau zwei minimale Verbindungssegmente von p nach q, und

[7]) Vgl. Fußnote 4.

diese treffen sich in q mit dem Winkel π. q ist also der Mittelpunkt eines von p ausgehenden und dorthin zurückkehrenden geodätischen Segments der Länge $2d(p, q) = 2d(p, C(p)) < 2\pi/\sqrt{\max K}$ [8]).

Beweis. Sei G_0 ein minimales Verbindungssegment von p nach q. Da G_0 nach Voraussetzung kürzer ist als $\pi/\sqrt{\max K}$, ist q nicht konjugiert zu p bezüglich G_0. Es gibt also, nach den in **1.3** hergeleiteten Grundeigenschaften des Schnittorts, ein zweites, von G_0 verschiedenes, minimales Verbindungssegment H_0 von p nach q. Wir behaupten, daß G_0 und H_0 im gemeinsamen Endpunkt q den Winkel π miteinander bilden.

Zum Beweis betrachten wir die von p ausgehenden geodätischen Segmente der Länge $d(p, q) < \pi/\sqrt{\max K}$. Diese Segmente enthalten keinen konjugierten Punkt zu p, ihre Endpunkte bilden folglich eine Kurve K auf der Eifläche, die in jedem ihrer Endpunkte eine zur Endrichtung des Segments orthogonale Tangente besitzt. Insbesondere gehören G_0 und H_0 zu diesen Segmenten, und ihr gemeinsamer Endpunkt ist ein mehrfacher Punkt der Kurve K.

Angenommen, G_0 und H_0 bilden mit ihren Endrichtungen im Punkte q einen Winkel $< \pi$. Dann sind die dazu senkrechten Tangenten an K im Punkte q voneinander verschieden, und daraus folgt, daß es Segmente G_0' und H_0' der Länge $d(p, q)$ gibt, die in der Nähe von G und H verlaufen derart, daß sie einen inneren, in der Nähe von q gelegenen Punkt gemeinsam haben. Das bedeutet aber, daß G_0' und H_0' den Schnittort $C(p)$ schon vor Erreichen ihres Endpunktes treffen, also in einem Abstand $< d(p, q) = d(p, C(p))$ – ein Widerspruch.

Also treffen sich G_0 und H_0 in q mit dem Winkel π, und hieraus folgt dann auch, daß es nicht mehr als zwei minimale Segmente von p nach q geben kann.

3.2. Satz 3.2. *Wenn es auf einer Eifläche M ein geschlossenes geodätisches Segment der Länge $< 2\pi/\sqrt{\max K}$ gibt, dann gibt es auch eine geschlossene Geodätische G der Länge $L(G) < 2\pi/\sqrt{\max K}$ derart, daß jedes andere geschlossene geodätische Segment auf M die Länge $\geq L(G)$ hat* [9]).

Beweis. Wir betrachten die Menge der geschlossenen geodätischen Segmente der Länge $\leq 2\pi/\sqrt{\max K}$ auf M. Nach Voraussetzung ist diese Menge nicht leer, und es ist leicht zu sehen, daß sie kompakt ist im Sinne der üblichen Metrik [10]). Die Längenfunktion ist stetig auf dieser Menge, sie nimmt also einen

---

[8]) Satz und Beweis gelten auch für beliebige kompakte Flächen, vgl. [5] und [6].

[9]) Vgl. Fußnote 8.

[10]) Vgl. Fußnote 3.

kleinsten Wert an. Sei G ein geschlossenes geodätisches Segment kleinster Länge $L(G)$. Nach Voraussetzung ist $L(G) < 2\pi/\sqrt{\max K}$. Wir behaupten, daß G eine geschlossene Geodätische ist.

Dazu betrachten wir den Anfangs- und Endpunkt p von G. Sei q der Mittelpunkt von G. Spätestens beim Punkt q trifft also der von p in der Anfangsrichtung von G ausgehende geodätische Strahl den Schnittort $C(p)$ von p, das heißt, der Abstand $d(p, C(p))$ zwischen p und $C(p)$ ist $\leq L(G)/2$.

Angenommen, es wäre $d(p, C(p)) < L(G)/2$. Dann würde aus Satz 3.1 die Existenz eines geschlossenen geodätischen Segments der Länge $2d(p, C(p)) < L(G)$ folgen – im Widerspruch zur Wahl von G. Also ist $d(p, C(p)) = L(G)/2$, q liegt auf $C(p)$ und der von p nach q laufende erste Teil und der von q nach p laufende zweite Teil von G liefern zwei minimale Segmente von p nach q.

Andererseits liegt aber p auf dem Schnittort $C(q)$ von q, da wir ja gerade zwei minimale Verbindungssegmente von q nach p nachgewiesen haben. Also ist $d(q, C(q)) \leq d(p, q) < \pi/\sqrt{\max K}$. Wäre $d(q, C(q)) < d(p, q)$, so folgte nach Satz 3.1 die Existenz eines geschlossenen Segments der Länge $2d(q, C(q)) < 2d(p, q) = L(G)$, im Widerspruch zur Wahl von G. Also ist $d(q, C(q)) = d(p, q) < \pi/\sqrt{\max K}$, das heißt, p ist ein auf $C(q)$ gelegener Punkt mit kleinstem Abstand von q. Aus Satz 3.1 folgt dann aber, daß die beiden von q nach p laufenden minimalen Segmente sich in p mit dem Winkel π treffen, das heißt, G ist eine geschlossene Geodätische.

Damit ist Satz 3.2 bewiesen.

Satz 3.3. *Wenn auf einer Eifläche M eine geschlossene Geodätische G minimaler Länge $L(G)$ existiert (das heißt: Jede andere geschlossene Geodätische hat mindestens die Länge $L(G)$), und wenn $L(G) \leq 2\pi/\sqrt{\max K}$, dann ist der Abstand zwischen einem Punkt von M und seinem Schnittort stets $\geq L(G)/2$.*

Beweis. Wenn p' ein Punkt auf G ist, so trifft G den Schnittort $C(p')$ von p' spätestens in dem p' gegenüberliegenden Punkt q' auf G, das heißt, eine für alle Punkte p von M gültige untere Schranke für den Abstand $d(p, C(p))$ ist $\leq L(G)/2$.

Angenommen, es gibt einen Punkt p auf M, für den $d(p, C(p)) < L(G)/2 \leq \pi/\sqrt{\max K}$ ist. Dann folgt aus Satz 3.1 die Existenz eines geschlossenen geodätischen Segments der Länge $2d(p, C(p)) < L(G) \leq 2\pi/\sqrt{\max K}$, und aus Satz 3.2 folgt die Existenz einer geschlossenen Geodätischen der Länge $\leq 2d(p, C(p)) < L(G)$ - ein Widerspruch zur Wahl von G.

3.3. Wir können jetzt die Ungleichung (1) in Theorem 1 beweisen. Angenommen, es gibt ein geschlossenes geodätisches Segment einer Länge

$< 2\pi/\sqrt{\max K}$. Dann gibt es nach Satz 3.2 eine geschlossene Geodätische G minimaler Länge $L(G) < 2\pi/\sqrt{\max K}$, und nach Satz 3.3 ist $L(G)/2$ eine untere Grenze für den Abstand $d(p, C(p))$, p ein beliebiger Punkt auf M.

Die geschlossene Geodätische G erfüllt also die Voraussetzungen von Lemma 1, und daher sind zwei einander auf G gegenüberliegende Punkte p und q konjugiert zueinander bezüglich eines von p nach q laufenden halben Bogens von G. Ein solcher Bogen hat aber die Länge $L(G)/2 < \pi/\sqrt{\max K}$ und kann folglich kein Paar von konjugierten Punkten enthalten – ein Widerspruch.

3.4. Mit den bisherigen Ergebnissen sind wir nun in der Lage, das Gleichheitszeichen in der Beziehung (1) zu diskutieren.

Falls M eine Sphäre ist, so steht in (1) offenbar das Gleichheitszeichen. Falls umgekehrt auf einer Eifläche M eine geschlossene Geodätische G der Länge $2\pi/\sqrt{\max K}$ gegeben ist, so folgt aus dem soeben bewiesenen ersten Teil von Theorem 1, daß jede andere geschlossene Geodätische auf M mindestens die gleiche Länge hat wie G. Auf Grund von Satz 3.3 sind also die Voraussetzungen von Lemma 1 erfüllt.

Wenn also p ein Punkt auf G ist und q der gegenüberliegende Punkt im Abstand $\pi/\sqrt{\max K}$, dann treffen sich alle von p ausgehenden geodätischen Strahlen nach Durchlaufen der Strecke $\pi/\sqrt{\max K}$ im Punkte q wieder. q ist konjugiert zu p bezüglich eines jeden dieser von p nach q laufenden Segmente der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$. Daraus folgt, daß die Krümmung K längs eines jeden dieser Segmente nicht Werte kleiner als $\max K$ annehmen kann, das heißt, $K = \max K = \text{const.}$ auf ganz M, M ist eine Sphäre.

Wir zeigen jetzt noch: *Ein geschlossenes geodätisches Segment G der Länge $2\pi/\sqrt{\max K}$ ist eine geschlossene Geodätische.* Angenommen, Anfangs- und Endrichtung von G bilden in p einen Winkel $< \pi$. Dann betrachten wir einen Punkt $p' \neq p$ auf G und den p' auf G gegenüberliegenden Punkt q'. Von p' nach q' laufen ein geodätisches Segment H und ein bei p gebrochenes geodätisches Segment H', beide von der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$. Da H' nicht minimale Verbindung seiner Endpunkte ist, ist auch H nicht minimale Verbindung seiner Endpunkte, das heißt, der Abstand $d(p', C(p'))$ von p' zu seinem Schnittort $C(p')$ ist $< \pi/\sqrt{\max K}$. Nach Satz 3.1 folgt daraus die Existenz eines geschlossenen geodätischen Segments der Länge $2d(p', C(p')) < 2\pi/\sqrt{\max K}$, im Widerspruch zu der Beziehung (1).

4. Beweis von Lemma 2 und Theorem 2

4.1. Der erste Teil von Theorem 2, und insbesondere die Ungleichung (2), ergibt sich unmittelbar aus den vorangegangenen Überlegungen. Denn angenommen, es gäbe einen Punkt p auf M derart, daß alle Punkte q auf M einen Abstand $< \pi/\sqrt{\max K}$ von p besitzen. Dann ist also insbesondere der Abstand $d(p, C(p))$ zwischen p und seinem Schnittort $C(p)$ kleiner als $\pi/\sqrt{\max K}$, und das führt, wie wir am Schluß des letzten Absatzes gesehen haben, auf einen Widerspruch.

4.2. Es bleibt also der zweite Teil von Theorem 2 zu beweisen und insbesondere der Fall zu diskutieren, daß in (2) das Gleichheitszeichen steht. Wir nehmen also jetzt an:

Auf der Eifläche M gibt es einen Punkt p derart, daß alle Punkte von M einen Abstand $\leq \pi/\sqrt{\max K}$ von p besitzen.

Satz 4.1. *Unter der angegebenen Voraussetzung trifft jeder von p ausgehende geodätische Strahl den Schnittort $C(p)$ nach Durchlaufen der Strecke $\pi/\sqrt{\max K}$. M erfüllt also die Voraussetzungen von Lemma 2.*

Beweis. Jeder Punkt q auf $C(p)$ hat mindestens den Abstand $\pi/\sqrt{\max K}$ von p, andernfalls wäre $d(p, C(p)) < \pi/\sqrt{\max K}$, und das führt, wie wir soeben in **4.1** sahen, auf einen Widerspruch. Da nach Voraussetzung kein Punkt von M einen Abstand $> \pi/\sqrt{\max K}$ von p hat, folgt die Behauptung.

Satz 4.2. *Der Endpunkt eines von p ausgehenden Segments der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ ist dann und nur dann konjugiert zu p (bezüglich dieses Segments), wenn für alle Punkte des Segments $K = \max K = \text{const.}$ ist.*

Beweis. Das folgt unmittelbar aus dem schon zitierten Vergleichsatz von STURM, vgl. BLASCHKE [1], § 100.

Hiermit können wir nun, *unter Voraussetzung von Lemma* 2, zeigen, daß eine Eifläche mit der eingangs erwähnten Eigenschaft eine Sphäre ist. Denn wegen Satz 4.1 erfüllt M die Voraussetzung von Lemma 2, $C(p)$ besteht also aus nur einem einzigen Punkt, q. Auf jedem von p ausgehenden geodätischen Strahl treffen wir daher nach Durchlaufen der Strecke $\pi/\sqrt{\max K}$ auf einen konjugierten Punkt (nämlich q), und nach Satz 4.2 ist daher auf M $K = \max K = \text{const.}$

4.3. Der Beweis von Theorem 2 ist damit auf den Beweis von Lemma 2 zurückgeführt. Wir nehmen daher für den Rest des Abschnitts an: *p ist ein Punkt auf einer Eifläche M derart, daß alle Punkte von $C(p)$ den gleichen*

Abstand $\pi/\sqrt{\max K}$ *von* p *besitzen.* Wir wollen zeigen, daß $C(p)$ dann nur einen einzigen Punkt enthält.

Zunächst vereinbaren wir folgende Abkürzungen in der Sprechweise: Ein von p ausgehendes Segment der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ heißt *konjugiert* oder *nichtkonjugiert*, je nachdem der Endpunkt dieses Segments konjugiert ist zu p (bezüglich dieses Segments) oder nicht. Eine Richtung in p heißt *konjugiert* oder *nichtkonjugiert*, je nachdem das in dieser Richtung von p ausgehende Segment der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ konjugiert ist oder nicht.

Satz 4.3. *Die konjugierten Richtungen bilden einen abgeschlossenen Teil des Richtungskreises* R *in* p.

Beweis. Die Menge derjenigen Punkte auf der Eifläche M, für die die Krümmung $K < \max K$ ist, bilden einen offenen Teil von M. Der Endpunkt eines von p ausgehenden Segments G der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ ist genau dann nicht konjugiert zu p, wenn G einen Punkt mit diesem offenen Teil gemeinsam hat, vgl. Satz 4.2. Dann enthält aber offenbar auch jedes Segment der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$, dessen Anfangsrichtung genügend benachbart ist zur Anfangsrichtung von G, einen Punkt, in dem die Krümmung $K < \max K$ ist.

4.4. Wir setzen nun die Diskussion einer Eifläche M mit den in **4.3** angegebenen Eigenschaften fort, indem wir folgende drei Fälle betrachten, mit denen offenbar alle Möglichkeiten ausgeschöpft werden.

A. *Alle von* p *ausgehenden Segmente sind konjugiert.*

B. *Unter den von* p *ausgehenden Segmenten der Länge* $\pi/\sqrt{\max K}$ *gibt es zwei verschiedene,* G *und* H, *die nichtkonjugiert sind und einen gemeinsamen Endpunkt haben.*

C. *Es gilt weder* **A** *noch* **B**.

Wir zeigen in den folgenden drei Sätzen, daß im Fall **A** M eine Sphäre ist, also insbesondere das Lemma 2 gilt, während die Fälle **B** und **C** auf einen Widerspruch führen.

Satz 4.4. *Unter den in* **4.3** *angegebenen Voraussetzungen folgt aus* **A**, *daß die Eifläche eine Sphäre ist.*

Beweis. Nach Satz 4.2 ist in diesem Falle $K = \max K = \text{const.}$ längs eines jeden von p ausgehenden Segments, also $K = \text{const.}$ auf M, also M eine Sphäre.

Satz 4.5. *Unter den in* **4.3** *angegebenen Voraussetzungen folgt aus* **B** *ein Widerspruch.*

Beweis. Zunächst behaupten wir, daß die Endrichtungen der beiden nichtkonjugierten Segmente G und H in ihrem gemeinsamen Endpunkt den Winkel π miteinander bilden. Denn sonst würde sich, ebenso wie beim Beweis von Satz 3.1, die Existenz eines Punktes auf $C(p)$ ergeben, der weniger als $\pi/\sqrt{\max K}$ von p entfernt ist, im Widerspruch zu dem in **4.1** bewiesenen ersten Teil von Theorem 2.

Da aber andererseits p auf dem Schnittort $C(q)$ von q gelegen ist, zeigt dieselbe Argumentation, daß auch die Anfangsrichtungen von G und H in p den Winkel π miteinander bilden. Es ergibt sich also, daß G und H zusammen eine geschlossene Geodätische der Länge $2\pi/\sqrt{\max K}$ ausmachen, und hieraus folgt nach Theorem 1, daß die Eifläche M eine Sphäre ist. Dann sind aber G und H konjugierte Segmente – ein Widerspruch.

Satz 4.6. *Unter den in* **4.3** *angegebenen Voraussetzungen folgt aus* **C** *ein Widerspruch.*

Beweis. Wir fixieren für den Richtungskreis R im Punkte p eine Orientierung. Dann bestimmt jedes geordnete Paar σ, τ von Richtungen in p ein *Intervall* $[\sigma, \tau]$, bestehend aus σ, τ und allen zwischen σ und τ gelegenen Richtungen. Die Länge dieses Intervalls $[\sigma, \tau]$, auch *Abstand* von σ und τ genannt[11]), ist nichts anderes als das Bogenmaß des von σ und τ gebildeten orientierten Winkels.

Da **A** ausgeschlossen ist, geht von p ein nichtkonjugiertes Segment G der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ aus. Sei q der Endpunkt von G. Nach Voraussetzung gehört q zu $C(p)$. Da G nichtkonjugiert ist, gibt es ein zweites minimales Segment der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ von p nach q, und da **B** ausgeschlossen ist, ist dieses Segment konjugiert.

Die Menge der Anfangsrichtungen derjenigen von p ausgehenden Segmente der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$, die q als Endpunkt besitzen und für die q konjugierter Punkt zu p ist, diese Menge ist also nicht leer, und außerdem ist sie offenbar abgeschlossen im Richtungskreis R in p. Also ist durch folgende Eigenschaften ein von p ausgehendes Segment H der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ wohlbestimmt: H ist konjugiert, hat q als Endpunkt und das von der Anfangsrichtung σ von G und der Anfangsrichtung τ von H gebildete Intervall $[\sigma, \tau]$ hat minimale Länge.

Die so bestimmten Segmente G und H zerlegen die Eifläche M in zwei Teile.

---

[11]) Dieser Abstand hängt also von der Reihenfolge der Richtungen ab!

Da zwei verschiedene, von p ausgehende Segmente der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$, außer p, höchstens ihren Endpunkt gemeinsam haben können, wird einer dieser beiden Teile vollständig überdeckt von denjenigen von p ausgehenden Segmenten der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$, deren Anfangsrichtung zu Intervall $[\sigma, \tau]$ gehört. Wir bezeichnen diesen Teil von M, der übrigens der abgeschlossenen Halbsphäre homeomorph ist, mit N.

Da die nichtkonjugierten Richtungen in p einen offenen Teil des Richtungskreises R ausmachen, ist die nichtkonjugierte Richtung σ in einem offenen Intervall von nichtkonjugierten Richtungen enthalten Der Durchschnitt dieses Intervalls mit dem Intervall $I = [\sigma, \tau]$ ist ein in I offenes Intervall J der Form $[\sigma, \varrho[$. Da **B** ausgeschlossen ist, haben nichtkonjugierte Segmente mit verschiedenen Anfangsrichtungen in J auch verschiedene Endpunkte.

Jedem Segment G' der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$, dessen Anfangsrichtung σ' zum Intervall J gehört, ist durch folgende Bedingungen eindeutig ein konjugiertes Segment H' zugeordnet: H' ist konjugiert, hat den Endpunkt q' von G' als Endpunkt und das von der Anfangsrichtung σ' von G' und der Anfangsrichtung τ' von H' gebildete Intervall $[\sigma', \tau']$ hat minimale Länge.

Die Existenz und Eindeutigkeit von H' ergeben sich dabei ebenso wie oben, wo wir durch die gleichen Bedingungen dem Segment G das Segment H zugeordnet hatten. Insbesondere folgt also aus $G' = G$, daß $H' = H$ ist.

Nun gehört die Anfangsrichtung τ' des dem Segment G' zugeordneten Segments H' dem Intervall $[\sigma, \tau]$ an, und zwar sogar dem Inneren des Intervalls, wenn $G' \neq G$ ist. Denn wenn $G' \neq G$ ist, so gehört der Endpunkt q' von G' zum Inneren des durch G und H begrenzten Teils N der Eifläche M; H' hat also seinen Endpunkt im Inneren von N und folglich seine Anfangsrichtung im Inneren von $[\sigma, \tau]$.

Ein Segment G' der betrachteten Art und das ihm zugeordnete Segment H' begrenzen, ähnlich wie die Segmente G und H, einen der abgeschlossenen Halbsphäre homeomorphen Teil N', der ganz überdeckt wird von den von p ausgehenden Segmenten der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ mit der Anfangsrichtung im Intervall $[\sigma', \tau']$. Offenbar ist N' ganz in N enthalten.

Indem wir jeder in J gelegenen (nichtkonjugierten) Anfangsrichtung σ' eines Segments G' die Anfangsrichtung τ' des durch G' wie oben bestimmten Segments H' zuordnen, erhalten wir eine Abbildung φ des in $I = [\sigma, \tau]$ gelegenen Intervalls $J = [\sigma, \varrho]$ in das Intervall $I - J$ von I. Diese Abbildung φ ist streng monoton fallend im folgenden Sinne: Wenn $\sigma'' \in J$ auf $\sigma' \in J$ folgt, so liegt das Bild $\tau'' = \varphi(\sigma'')$ vor $\tau' = \varphi(\sigma')$. Denn nach den vorstehenden Betrachtungen ist der von dem Segment G'' mit der Anfangsrichtung σ'' und dem Segment H'' mit der Anfangsrichtung $\tau'' = \varphi(\sigma'')$ be-

grenzte Teil N'' von M ganz in dem von den Segmenten G' mit der Anfangsrichtung σ' und H' mit der Anfangsrichtung $\tau' = \varphi(\sigma')$ begrenzten Teil N' enthalten.

Diese Abbildung $\varphi : J \to I - J$ ist vielleicht nicht stetig, aus der strengen Monotonie ergibt sich jedoch, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ aufeinander folgende, verschiedene Richtungen σ' und σ'' vom Abstand $< \varepsilon$ gibt derart, daß auch die Richtungen $\tau'' = \varphi(\sigma'')$ und $\tau' = \varphi(\sigma')$ einen Abstand $< \varepsilon$ haben. σ' und σ'' sowie $\tau'' = \varphi(\sigma'')$ und $\tau' = \varphi(\sigma')$ sollen jetzt Richtungen mit dieser Eigenschaft sein. Da, wegen des Ausschlusses von **B**, der gemeinsame Endpunkt q' von G' und H' verschieden ist von dem gemeinsamen Endpunkt q'' von G'' und H'', sind τ'' und τ' voneinander verschiedene konjugierte Richtungen.

Es können jedoch nicht alle zwischen τ'' und τ' gelegenen Richtungen konjugiert sein, denn dann würde, auf Grund von Satz 4.2, längs aller Segmente der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ mit Anfangsrichtung im Intervall $[\tau'', \tau']$ die Krümmung $K = \max K = \text{const.}$ sein, und dies wiederum würde zur Folge haben, daß alle diese Segmente einen gemeinsamen Endpunkt besitzen, während doch der Endpunkt q'' von H'' verschieden ist von dem Endpunkt q' von H'.

Es gibt also ein nichtkonjugiertes Segment H^* der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$, dessen Anfangsrichtung τ^* zum Innern des Intervalls $[\tau'', \tau']$ gehört. Der Endpunkt q^* von H^* ist folglich gleichzeitig Endpunkt eines zweiten, wegen des Ausschlusses von **B**, konjugierten Segments G^* der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$. Da q^* im Innern des durch G' und H' begrenzten Gebietes N', aber außerhalb des durch G'' und H'' begrenzten Gebietes N'' gelegen ist (denn q^* ist, wegen des Ausschlusses von **B**, verschieden sowohl vom Endpunkt q' des nichtkonjugierten Segments G' als auch vom Endpunkt q'' des nichtkonjugierten Segments G''), liegt die Anfangsrichtung σ^* und G^* entweder zwischen σ' und σ'' oder zwischen τ'' und τ'. Die erste Möglichkeit fällt aus, da σ^*, als konjugierte Richtung, nicht dem aus nichtkonjugierten Richtungen bestehenden Intervall J angehören kann. Also liegt σ^*, ebenso wie τ^*, im Intervall $[\tau'', \tau']$ der Länge $< \varepsilon$.

Wir wollen nun die Zahl $\varepsilon > 0$ von vorneherein so klein gewählt annehmen, daß zwei von p ausgehende Segmente der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$, die einen gemeinsamen Endpunkt haben und deren Anfangsrichtungen in einem Intervall der Länge $< \varepsilon$ gelegen sind, im Endpunkt sich mit einem Winkel $\leq \pi/4$ treffen. Die Existenz eines solchen ε ergibt sich aus der stetigen Abhängigkeit eines Segments der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ von seiner Anfangsrichtung.

Die Segmente G^* und H^* treffen sich also in dem gemeinsamen Endpunkt q^* mit einem Winkel $\leq \pi/4$. Da mit der Anfangsrichtung τ^* von H^* auch

alle genügend zu τ^* benachbarten Richtungen in p nichtkonjugiert sind, bilden die Endpunkte der von p mit einer genügend zu τ^* benachbarten Anfangsrichtung auslaufenden Segmente der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$ eine durch q^* laufende Kurve, deren Tangente in q^* senkrecht steht zur Endrichtung von H^*. Da nun aber die Endrichtungen von G^* und H^* in q^* einen Winkel $\leq \pi/4 < \pi/2$ bilden, gibt es beliebig nahe an H^* gelegene, von p ausgehende Segmente der Länge $\pi/\sqrt{\max K}$, die das Segment G^* schon vor seinem Endpunkt q^* treffen – ein Widerspruch zu der Tatsache, daß zwei verschiedene, von p ausgehende Segmente sich frühestens im Abstand $\pi/\sqrt{\max K}$ wieder treffen können.

Damit ist Satz 4.6 und damit das Lemma 2 und damit auch Theorem 2 bewiesen.

Anhang. Beweis von Theorem 3

Da die rechte Ungleichung in (3) schon auf Bonnet zurückgeht, begnügen wir uns mit dem Beweis der linken Ungleichung in (3).

Dazu wählen wir auf der Eifläche M zwei Punkte p, q mit maximalem inneren Abstand: $d(p, q) = d(M)$. Durch p und q legen wir eine Ebene. Diese Ebene trifft die Eifläche M in einer konvexen Kurve C. Die beiden von p nach q laufenden Bögen der Kurve C haben jeder mindestens die Länge $d(p, q)$ und wegen Theorem 2 also mindestens die Länge $\pi/\sqrt{\max K}$. Ferner ist der äußere Durchmesser $D(M)$ von M mindestens so groß wie der äußere Durchmesser $D(C)$ von C. Unter Verwendung der Ungleichung $L(C) \leq \pi D(C)$ erhalten wir daher

$$2\pi/\sqrt{\max K} \leq 2d(M) = 2d(p, q) \leq L(C) \leq \pi D(C) \leq \pi D(M)$$

und dies liefert die linke Ungleichung in (3).

Falls die äußeren Terme der vorstehenden Folge von Ungleichungen übereinstimmen, gilt insbesondere $\pi/\sqrt{\max K} = d(M)$, und daraus folgt nach Theorem 2, daß M eine Sphäre ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, Band 1, 4. Auflage, Berlin 1945.

[2] T. Bonnesen – W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Erg. der Math., Berlin 1934.

[3] O. Bonnet, *Sur quelques propriétés des lignes géodésiques*, C. R. Acad. Sci. Paris *40*, 1311 à 1313 (1855).

[4] H. Hoff – W. Rinow, *Über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche*. Comment. Math. Helv. *3*, 209–225 (1931).

[5] W. Klingenberg, *Contributions to Riemannian geometry in the large*. Ann. of Math. *69*, 654–666 (1959).

[6] W. KLINGENBERG, *Über kompakte Riemannsche Mannigfaltigkeiten*. Math. Ann. *137*, 351–361 (1959).

[7] S. B. MYERS, *Connections between differential geometry and topology*. Duke Math. J. *1*, 376–391 (1935).

[8] A. W. POGORELOW, *Ein Satz über geschlossene Geodätische auf konvexen Flächen* (russ.). Math. Sb., N. S. *18* (60), 181–183 (1946).

[9] H. POINCARÉ, *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes*. Trans. Amer. Math. Soc. *6*, 237–274 (1905).

[10] H. SEIFERT – W. THRELFALL, *Variationsrechnung im Großen*. Leipzig 1928.

[11] W. A. TOPONOGOW, *Riemannsche Räume, deren Krümmung nach unten durch eine positive Zahl beschränkt ist* (russ.). Dokl. Akad. Nauk SSSR *120*, 719–721 (1958).

[12] W. A. TOPONOGOW, *Berechnung der Länge einer geschlossenen Geodätischen auf einer konvexen Fläche* (russ.). Dokl. Akad. Nauk SSR *124*, 282–284 (1959).

(Eingegangen den 27. Juli 1959)