Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 34 (1960)

Artikel: Zur Definition der quasikonformen Abbildungen.
Autor: Renggli, Heinz
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26633

Zur Definition der quasikonformen Abbildungen

von Heinz Renggli, New Brunswick, N. J.

1. Einleitung

1. Es sei D ein in der komplexen z-Ebene E gelegenes Gebiet und V, $V \subset D$, ein Viereck. Darunter verstehen wir das Innere $I(\Gamma)$ einer Jordankurve Γ, $\Gamma \subset D$, $I(\Gamma) \subset D$, auf der vier verschiedene Punkte ausgezeichnet sind. Damit sind die vier Seiten von V bestimmt. Wir betrachten nun die beiden Kurvenscharen, die in V je zwei gegenüberliegende Seiten verbinden. Ihre Extremallängen seien m und μ; sie heißen die Moduln von V. Ferner gilt $m \cdot \mu = 1$. Für diese Definition der Moduln wird keine konforme Abbildung vorausgesetzt.

Ist f eine orientierungstreue topologische Abbildung, $f: D \leftrightarrow D^*$, $D^* \subset E$, so sind analog in $V^* = f(V)$ die m und μ entsprechenden Moduln m^* und μ^* erklärt.

Bemerkung. *Die Bezeichnungen* $f: D \leftrightarrow D^*$; $V \leftrightarrow V^*$, $m \leftrightarrow m^*$, $\mu \leftrightarrow \mu^*$, *haben im folgenden immer die hier gegebene Bedeutung.*

2. Bei beliebigem f ist das m zugeordnete m^* i.a. von m unabhängig. Ist dagegen f konform, so gilt $m^* = m$ und damit $\mu^* = \mu$. Dies charakterisiert sogar die konformen Abbildungen. Hat nämlich umgekehrt ein f die Eigenschaft, daß in jedem Paar $V \leftrightarrow V^*$ für die Moduln $m = m^*$ und folglich $\mu = \mu^*$ gilt, so ist f konform [1, S. 8].

Lockert man diese Invarianzeigenschaft der Moduln, so gelangt man zur sog. geometrischen Definition der quasikonformen Abbildungen: Existiert bei gegebenem f eine Konstante K, $K \geq 1$, derart, daß für alle Vierecke V bzw. für deren Moduln die Ungleichungen $m/K \leq m^* \leq mK$ gelten, so heißt f quasikonform.

3. Wir geben nun eine neue Definition der quasikonformen Abbildungen, in der die Konstante K nicht mehr explizit auftritt. Wir können ferner zeigen, daß diese Definition mit der geometrischen äquivalent ist, mit andern Worten, wir werden beweisen:

Satz. *Es sei* $f: D \leftrightarrow D^*$ *topologisch und orientierungstreu. Ferner sei* $\mathfrak{V}$ *eine unendliche Menge beliebig gegebener, paarweise disjunkter Vierecke* V_i. *In jedem* V_i *sei einer der beiden Moduln* m_i *ausgezeichnet;* m_i^* *sei der zugehörige Modul von* V_i^*.

Eine Abbildung f ist dann und nur dann quasikonform, falls für alle derartigen $\mathfrak{V}$ die Reihen $\sum_{i=1}^{\infty} m_i$ und $\sum_{i=1}^{\infty} m_i^*$ entweder beide konvergieren oder beide divergieren.

Der eine Teil unseres Satzes folgt unmittelbar aus der geometrischen Definition der quasikonformen Abbildungen. Dem Beweis des andern Teils sind die folgenden Ausführungen gewidmet.

2. Ein Lemma

1. Ist f gegeben, so kann für jede Zuordnung $V \leftrightarrow V^*$ die Variation $m \leftrightarrow m^*$ betrachtet werden. Daß man dabei die Moduln in gewissem Sinne normieren kann, ist die Aussage von

Lemma 1. *Es sei $m^*/m > Q$ für die zugeordneten Moduln von $V \leftrightarrow V^*$. Dann existiert ein Viereck V_0, $V_0 \subset V$, derart, daß für die Zuordnungen $V_0 \leftrightarrow V_0^*$ bzw. $m_0 \leftrightarrow m_0^*$ die Ungleichungen $m_0 \leq 2$ und $m_0^* > Q$ erfüllt sind.*

2. Beweis von Lemma 1.

α) Zuerst zeigen wir, daß V_1, $V_1 \subset V$, mit $m_1 \leq 2$ gewählt werden kann. Ist nämlich $m > 2$, so gibt es eine natürliche Zahl N mit $2N \geq m$. Nun bilden wir V^* derart konform auf $R^* = \{z : 0 < \Re z < 1,\ 0 < \Im z < m^*\}$ ab, daß bei der Randzuordnung die vier Seiten von V^* den vier Seiten von R^* entsprechen und die zur Berechnung von m^* ausgezeichnete Kurvenschar die Horizontalseiten von R^* verbindet.

R^* wird nun durch die Geraden $\Im z = k \cdot m^*/N$ $(k = 1, 2, \ldots, N-1)$ in N Rechtecke unterteilt. Die entsprechenden Teilkurvenscharen haben jeweils die Extremallänge m^*/N. Jedem dieser konform invariant nach V^* übertragenen Modul ist ein entsprechender Modul der induzierten Unterteilung in V zugeordnet. Die Moduln in V haben ein Minimum; wir wählen ein Viereck V_1, $V_1 \subset V$, aus, dessen Modul m_1 diesen kleinsten Wert besitze. Es sei $V_1 \leftrightarrow V_1^*$ und $m_1 \leftrightarrow m_1^*$.

Nun gilt nach einem bekannten Zerlegungssatze für Extremallängen $N m_1 \leq m$ (zum Beispiel [5], § 2.4.). Mit Hilfe von $m \leq 2N$ und $m_1^* = m^*/N$ erhält man damit $m_1 \leq 2$ und $m_1^*/m_1 \geq m^*/m > Q$.

β) In einem zweiten Schritt zeigen wir, daß sogar $1 \leq m_0 \leq 2$ vorausgesetzt werden darf.

Wäre nämlich $m_1 < 1$, so existierte eine natürliche Zahl L mit $1 \leq L m_1 \leq 2$. Nun bilden wir diesmal V_1 konform derart auf $R_1 = \{z : 0 < \Re z < 1, 0 < \Im z < m_1\}$ ab, daß wiederum die Seiten einander entsprechen und die ausgezeichnete Kurvenschar in R_1 vertikal verläuft.

R_1 wird nun durch die Geraden $\Re z = k/L$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, L-1)$ in L Rechtecke unterteilt. Die entsprechenden Teilkurvenscharen haben jeweils die Extremallänge $m_1 L$. Wieder betrachten wir die in V_1^* zugeordneten Teilkurvenscharen; die größte der dort vorkommenden Extremallängen bezeichnen wir mit m_0^*.

Jetzt wählen wir ein Viereck V_0, $V_0 \subset V_1$, mit $V_0 \leftrightarrow V_0^*$ und $m_0 \leftrightarrow m_0^*$. Dann gilt nach einem bekannten Zerlegungssatze für Extremallängen $L/m_0^* \leq 1/m_1^*$ (zum Beispiel [5], § 2.3.). Mit $1 \leq L m_1 \leq 2$ und $m_0 = m_1 \cdot L$ erhält man daraus $1 \leq m_0 \leq 2$ und $m_0^*/m_0 \geq m_1^*/m_1 > Q$.

3. Die Verzerrungsfunktion $\delta(p)$

1. Es sei $f: D \leftrightarrow D^*$, und W, $W \subset D$, enthalte eine offene Teilmenge von D. Wir betrachten die Menge $\mathfrak{V}$ aller Vierecke V mit $V \subset W$. Die Größe $\delta(V) = \mathrm{Max}\,[m^*/m, \mu^*/\mu]$ nennen wir die Verzerrung von V; analog heißt $\delta(W) = \sup\limits_{\mathfrak{V}} \delta(V)$ die Verzerrung von W.

Definition 1. *Es sei $\mathfrak{U}$ der Filter der Umgebungen U, $U \subset D$, eines gegebenen Punktes p, $p \in D$. Die Größe $\delta(p) = \inf\limits_{\mathfrak{U}} \delta(U)$, die in jedem Punkte p definiert ist, heißt Verzerrungsfunktion $\delta(p)$ der Abbildung f.*

Da $m \cdot \mu = 1$ für jedes V, so ist $\delta(p) \geq 1$. Die Beziehung $\delta(p) = 1$, gültig in D, charakterisiert die konformen Abbildungen. Existiert hingegen eine Konstante K, $K > 1$, derart, daß $\delta(p) \leq K$ in D erfüllt ist, so ist f im geometrischen Sinne quasikonform. Infolge Definition 1 gilt dann nämlich bei gegebenem ε, $\varepsilon > 0$, die Beziehung $\delta(V) < K + \varepsilon$ lokal. Daß aber daraus die globale Eigenschaft $\delta(V) \leq K$, $V \subset D$, folgt, ist bekannt [1, S. 7/8].

2. Die Funktion $\delta(p)$ ist i.a. nicht stetig. Aus Definition 1 folgt hingegen unmittelbar

Lemma 2. *Die Funktion $\delta(p)$ ist nach oben halbstetig.*

3. Da $\delta(p)$ sozusagen die Abweichung von der Konformität beschreibt, und wir uns mit quasikonformen Abbildungen beschäftigen, treffen wir folgende

Definition 2. *Ist $\delta(p) = \infty$, so heißt p ein singulärer Punkt der Abbildung f.*

Aus Lemma 2 folgt

Korollar 1. *Die Menge der singulären Punkte von f ist in D abgeschlossen. In jedem kompakten Teil von D, der keine singulären Punkte aufweist, ist f quasikonform.*

Man könnte ein f schwach quasikonform nennen, wenn $\delta(p)$ endlich ist, mit andern Worten, wenn f in jedem kompakten Teil quasikonform ist.

4. Aus [1, S. 8/9] folgt mit Hilfe von Definition 1

Lemma 3. *Gibt es zu einem Punkte p eine Umgebung $U(p)$ und eine Konstante k derart, daß $\delta(q) \leq k$ für jedes $q \in U(p)$, $q \neq p$, so ist auch $\delta(p) \leq k$.*

Korollar 2. *Zu jedem p existiert eine Folge p_n $(n = 1, 2, 3 \ldots)$, $p_n \neq p$, $p_n \mapsto p$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} \delta(p_n) = \delta(p)$.*

4. Schluß

1. Jetzt beweisen wir

Lemma 4. *In bezug auf f sei p_ν $(\nu = 1, 2, 3 \ldots)$, $p_\nu \in D$, eine Punktfolge mit den Eigenschaften: Jeder Punkt p_ν sei isoliert, das heißt, es existiere zu jedem p_ν eine Umgebung $U(p_\nu)$ mit $p_\mu \notin U(p_\nu)$ für $\mu \neq \nu$; ferner gelte $\delta(p_\nu) \to \infty$.*

Dann gibt es eine Menge $\mathfrak{V}$ paarweise disjunkter Vierecke V_i derart, daß $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m_i$ divergiert, während $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m_i^*$ konvergiert.

Beweis: Infolge $\delta(p_\nu) \to \infty$ kann jeder natürlichen Zahl n ein Punkt p_n der Folge p_ν zugeordnet werden mit $\delta(p_n) > n^2$. Gemäß Definition 1 und den obigen Voraussetzungen gibt es für jedes n ein Viereck V_n mit den folgenden Eigenschaften: Es ist $V_n \subset U(p_n)$ und $V_n \cap V_m = \emptyset$ für $n \neq m$; für die Moduln μ_n^* und μ_n von $V_n \leftrightarrow V_n^*$ gilt $\mu_n^*/\mu_n > n^2$.

Nach Lemma 1 kann man solche Teilvierecke auswählen, für die entsprechend $\mu_{0n} \leq 2$ und $\mu_{0n}^* > n^2$ gilt. Nun betrachten wir die reziproken Moduln $m_n = 1/\mu_{0n}$ und $m_n^* = 1/\mu_{0n}^*$, für die $m_n \geq 1/2$ und $m_n^* < 1/n^2$ gelten.

2. Aus Lemma 4 folgt

Korollar 3. *Ist f quasikonform im Sinne von 1.3., so gibt es in D keine Folge isolierter Punkte p_n $(n = 1, 2 \ldots)$ mit der Eigenschaft $\delta(p_n) \to \infty$.*

Aus Korollar 3 folgt, daß für eine quasikonforme Abbildung die Menge $S = \{p : \delta(p) = \infty\}$ der Singularitäten von f höchstens endlich ist und daß überdies die Verzerrungsfunktion $\delta(p)$ im Komplement $D - S$ beschränkt bleibt. Dies zusammen mit Lemma 3 ergibt die Beschränktheit von $\delta(p)$. Damit ist unser Satz bewiesen.

Zusatz. *Daß unsere Definition der quasikonformen Abbildungen auch mit der sog. analytischen Definition äquivalent ist, folgt aus den Arbeiten* [2], [3], [4].

LITERATUR

[1] L. V. AHLFORS, *On quasiconformal mappings.* J. d'Analyse Math. *3* (1953/54), 1–58.
[2] L. BERS, *On a theorem of Mori and the definition of quasiconformality.* Trans. Amer. Math. Soc. *84* (1957), 78–84.
[3] A. MORI, *On quasi-conformality and pseudo-analyticity.* Trans. Amer. Math. Soc. *84* (1957), 56–77.
[4] A. PFLUGER, *Über die Äquivalenz der geometrischen und der analytischen Definition quasikonformer Abbildungen.* Comment. Math. Helv. *33* (1959), 23–33.
[5] H. RENGGLI, *Zur konformen Abbildung auf Normalgebiete.* Comment. Math. Helv. *31* (1956), 5–40.

(Eingegangen den 10. November 1959)