

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 34 (1960)

Artikel: Eine differentialgeometrische Anwendung der Extremallängentheorie.
Autor: Lampe, Bernt
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26631>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 11.01.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Eine differentialgeometrische Anwendung der Extremallängentheorie

VON BERNT LAMPE, Basel

1. Einleitung

1.1. Wir betrachten auf einer differentialgeometrischen Fläche F eine Kurvenschar \mathfrak{C} , welche gegenüber allen zur Identität homotopen topologischen Selbstabbildungen von F invariant ist. Es sei $L(\mathfrak{C})$ das Infimum der Längen aller rektifizierbaren Kurven aus \mathfrak{C} und $A(F)$ der Flächeninhalt der Fläche F . Dann kann man in gewissen Fällen für den Quotienten $\frac{A(F)}{[L(\mathfrak{C})]^2}$ eine positive untere Schranke finden, die nur vom topologischen Typus der Fläche abhängt.

Das gelang P. M. PU [1] und J. HERSCH [2] für eine Reihe von Kurvenscharen auf Flächen, die eine kontinuierliche Gruppe von konformen Selbstabbildungen besitzen. Ein wichtiges Hilfsmittel ist dabei der Begriff der Extremallängen von L. AHLFORS und A. BEURLING [3], der zwar bei PU nicht explizit verwandt wird, mit dem sich aber, wie HERSCH in [2] zeigt, seine Rechnung vereinfacht.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, wie ein derartiges Problem für einen Typ von Flächen gelöst werden kann, die nur eine endliche Gruppe von konformen Selbstabbildungen besitzen. Auch hier handelt es sich im wesentlichen darum, Extremallängen abzuschätzen.

1.2. Es wird der folgende Satz bewiesen:

Satz A. *Es sei F eine differentialgeometrische Fläche¹⁾, die homöomorph der dreifach punktierten Kugel ist; sei \mathfrak{C} die Menge der geschlossenen Kurven auf F ,*

¹⁾ Unter «differentialgeometrischer Fläche» sei eine Fläche mit dreimal stetig differenzierbarer Struktur verstanden, auf der durch eine positiv definite Differentialform

$$ds^2 = E(u, v)du^2 + 2F(u, v)dudv + G(u, v)dv^2$$

(u, v seien lokale Parameter der Struktur) mit zweifach stetig differenzierbaren Koeffizienten E, F, G eine Metrik gegeben ist. Unter der Länge einer Kurve c ist dann das Integral

$$\int_c ds,$$

unter dem Flächeninhalt eines Teilgebietes X der Fläche das Integral

$$\iint_X df; \quad df = \sqrt{EG - F^2} \, dudv$$

verstanden.

welche je zwei der Enden voneinander trennen, \mathfrak{G} die Menge der Kurven auf F , welche je zwei Enden miteinander verbinden. Dann gilt die Ungleichung

$$A(F) \geq \frac{2}{\sqrt{3}} L(\mathfrak{C}) \cdot L(\mathfrak{G}), \quad (1)$$

wobei das Produkt auf der rechten Seite der Ungleichung im Falle $L(\mathfrak{C}) = 0$, $L(\mathfrak{G}) = \infty$ gleich Null zu setzen ist.

1.3. Dieser Satz wird sich als Korollar des folgenden Satzes über Extremallängen ergeben:

Satz B. Es sei G ein beschränktes Gebiet der komplexen Ebene, welches von drei nicht punktförmigen Randkontinuen $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ berandet wird. Es sei \mathfrak{C}_i die Menge der Kurven, die α_m von α_n ²⁾ trennen, \mathfrak{G}_i die Menge der Kurven, die α_i mit $\alpha_m \cup \alpha_n$ verbinden, es seien ferner λ_i, λ_i^* die Extremallängen ³⁾ der Kurvenscharen $\mathfrak{C}_i, \mathfrak{G}_i$. Dann gelten die Ungleichungen

$$\sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda_k \lambda_k^*} \geq 4, \quad (2)$$

$$\sum_{k>j} \frac{1}{\lambda_k \lambda_j^*} = \sum_{k>j} \frac{1}{\lambda_k^* \lambda_j} \geq 4. \quad (3)$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn jede Randkomponente durch eine konforme Selbstabbildung von G in jede andere übergeführt werden kann.

Die Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Herrn Prof. H. HUBER, dem ich für seine mannigfaltigen Hinweise meinen wärmsten Dank aussprechen möchte.

2. Zurückführung auf kreisberandete Gebiete

2.1. Wie sich aus der Formulierung des Satzes A ergibt, kann man sich beim Beweis auf den Fall

$$A(F) < \infty, \quad L(\mathfrak{C}) > 0 \quad (1)$$

beschränken.

²⁾ Das Indextripel (l, m, n) bedeute im Folgenden immer eine beliebige gerade Permutation von $(1, 2, 3)$.

³⁾ Ist \mathfrak{M} die Menge aller in G stetigen, nicht negativen Funktionen $\varrho(z)$, $l(\varrho, c) = \int_c \varrho |dz|$ die Länge der Kurve c und $A(\varrho, G) = \iint_G \varrho^2 [dz]$ der Flächeninhalt von G bezüglich der Metrik $ds^2 = \varrho^2(z) |dz|^2$, dann heißt

$$\lambda(\mathfrak{C}) = \sup_{\varrho \in \mathfrak{M}} \frac{\inf_{c \in \mathfrak{C}} [l(\varrho, c)]^2}{A(\varrho, G)}$$

die Extremallänge der Kurvenschar \mathfrak{C} . (Siehe [3].)

2.2. Die Fläche F kann als RIEMANNsche Fläche aufgefaßt werden. Denn unter den in ¹⁾ gemachten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen induziert bekanntlich ⁴⁾ die durch die quadratische Differentialform gegebene Metrik auf der Fläche eine solche komplexe Struktur, daß die Differentialform in einem lokalen Parameter dieser Struktur die Gestalt

$$ds^2 = \varrho(z)^2 \cdot |dz|^2 \quad (2)$$

annimmt.

2.3. Da die Fläche F schlichtartig ist, gibt es nach einem Satz von KOEBE [6], [7] eine konforme Abbildung ψ von F auf ein Gebiet G der abgeschlossenen Ebene, das von drei Kreisen berandet wird.

Daß diese Kreise unter der Voraussetzung (1) nicht zu Punkten entarten können, läßt sich wie folgt zeigen: Angenommen das Bild G von F habe einen isolierten Randpunkt a , dann kann die Abbildung ψ so gewählt werden, daß er in den Nullpunkt fällt. Sei R eine solche positive Zahl, daß die punktierte Kreisscheibe

$$K = \{z \mid 0 < |z| < R\} \quad (3)$$

ganz in G liegt, dann ist

$$ds = \varrho(z) |dz| ; \quad z \in K \quad (4)$$

und

$$L(\mathfrak{C}) \leq \int_0^{2\pi} \varrho(re^{i\varphi}) r d\varphi ; \quad 0 < r < R, \quad (5)$$

da jeder Kreis um den Nullpunkt, der in K liegt, zu $\psi(\mathfrak{C})$ gehört. Nach der SCHWARZschen Ungleichung ist aber

$$\left(\int_0^{2\pi} \varrho d\varphi \right)^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \varrho^2 d\varphi. \quad (6)$$

Aus (5) und (6) folgt durch Integration über r

$$[L(\mathfrak{C})]^2 \cdot \int_{\varepsilon}^R \frac{dr}{r} \leq 2\pi \int_0^R \int_0^{2\pi} \varrho^2 r d\varphi dr ; \quad 0 < \varepsilon < R. \quad (7)$$

Das rechts stehende Integral ist gerade der Flächeninhalt eines Teilgebietes von G und daher nicht größer als $A(F)$

$$[L(\mathfrak{C})]^2 \cdot \log \frac{R}{\varepsilon} \leq 2\pi A(F). \quad (8)$$

Ist $L(\mathfrak{C}) > 0$, dann kann die linke Seite der Ungleichung durch Wahl von ε beliebig groß gemacht werden, was im Widerspruch zu (1) steht.

Nach dem erwähnten Satz von KOEBE kann die Abbildung ψ so gewählt werden, daß die Mittelpunkte der drei Randkreise alle auf der reellen Achse liegen.

⁴⁾ Siehe [8] S. 12, sowie [4] und [5].

2.4. Es genügt nach dem Vorangegangenen, den Satz A für ein Gebiet G der Ebene zu beweisen, das von drei Kreisen berandet ist, und auf dem eine beliebige konforme Metrik (2) gegeben ist.

Ist für ein solches Gebiet der Satz B bewiesen, so folgt daraus Satz A: Da

$$\mathfrak{C}_k \subset \mathfrak{C}, \quad \mathfrak{G}_k \subset \mathfrak{G}, \quad (9)$$

$$\text{ist} \quad \lambda \leq \lambda_k, \quad \lambda^* \leq \lambda_k^*, \quad (10)$$

wenn λ, λ^* die Extremallängen von $\mathfrak{C}, \mathfrak{G}$ sind.

Nach der Definition der Extremallängen ist

$$\left[\frac{A(G)}{L(\mathfrak{C}) \cdot L(\mathfrak{G})} \right]^2 \geq \frac{1}{\lambda \lambda^*}; \quad (11)$$

und wegen (10) ist

$$\frac{1}{\lambda \lambda^*} \geq \frac{1}{3} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda_k \lambda_k^*} \geq \frac{4}{3}, \quad (12)$$

woraus sich Satz A ergibt.

2.5. Sämtliche Behauptungen sind bewiesen, wenn Satz B für den Fall bewiesen ist, daß das Gebiet G in der Halbebene $\operatorname{Re} z > 0$ liegt und von drei Kreisen berandet ist, deren Mittelpunkte auf der reellen Achse liegen, da jedes der in Satz B vorkommenden Gebiete einem solchen kreisberandeten Gebiet G konform äquivalent ist, und da die Extremallängen konforme Invarianten sind.

3. Die Differentiale Ω_i

3.1. Die drei G berandenden Kreiswege $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ seien so orientiert, daß

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \quad (1)$$

das Gebiet G positiv berandet (Fig. 1).

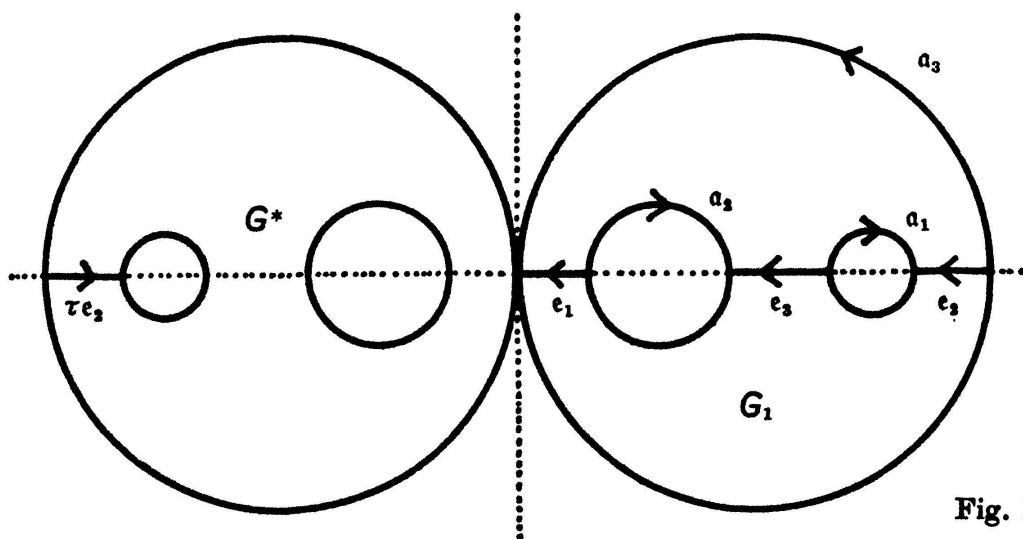


Fig. 1

e_i sei der Weg, der auf der reellen Achse von α_m nach α_n läuft⁵⁾.

⁵⁾ Vgl. Fußnote 2).

Wir konstruieren die sogenannte SCHOTTKYSche Verdoppelung von G : Es sei G^* das zu G bezüglich der imaginären Achse symmetrische Gebiet. Wir identifizieren jeden Randpunkt z von G mit dem Randpunkt $-\bar{z}$ von G^* und definieren in geeigneter Weise ortsuniformisierende Parameter für diese identifizierten Punkte⁶⁾. So entsteht eine geschlossene RIEMANNsche Fläche V vom Geschlecht zwei, auf welcher G und G^* Teilgebiete sind.

Die Abbildungen

$$\tau: z \rightarrow -\bar{z}, \quad (2)$$

$$\sigma: z \rightarrow \bar{z}, \quad (3)$$

sind offenbar umkehrbar eindeutige antikonforme Abbildungen der Fläche V auf sich, und es gilt

$$\tau^2 = \sigma^2 = 1. \quad (4)$$

3.2. Die Abbildungen τ und σ induzieren im Raum der ABELSchen Differentiale Ω auf V antilineare Abbildungen

$$\begin{aligned} \tau: \Omega &\rightarrow \Omega^\tau, \\ \sigma: \Omega &\rightarrow \Omega^\sigma, \end{aligned} \quad (5)$$

die dadurch eindeutig charakterisiert sind, daß für jeden Weg c auf V gilt

$$\begin{aligned} \int_c \Omega^\tau &= \overline{\int_{\tau c} \Omega}, \\ \int_c \Omega^\sigma &= \overline{\int_{\sigma c} \Omega}. \end{aligned} \quad (6)$$

Für jedes Teilgebiet $X \subset V$ gilt, wie sich leicht zeigen läßt,

$$\begin{aligned} \|\Omega\|_{\tau X} &= \|\Omega^\tau\|_X, \\ \|\Omega\|_{\sigma X} &= \|\Omega^\sigma\|_X \quad ^7). \end{aligned} \quad (7)$$

Bezeichnet man mit b_k den geschlossenen Weg

$$b_k = e_k - \tau e_k, \quad (8)$$

dann sind

$$\{a_l, -b_m, a_m, b_l\}; \quad l = 1, 2, 3 \quad (9)$$

drei kanonischen Homologiebasen von V . Ferner ist (\sim bezeichne Homologie)

$$a_n \sim -a_l - a_m; \quad b_n \sim -b_l - b_m. \quad (10)$$

⁶⁾ Zur Definition der SCHOTTKYSchen Verdoppelung siehe [8] S. 14.

⁷⁾ Unter $\|\Omega\|_X$ sei die Norm von Ω bezüglich X verstanden, gemäß der Definition von PFLUGER [8] S. 64.

Auf V seien die drei ABELSchen Differentiale Ω_l durch ihre Perioden auf α_l und α_m wie folgt definiert:

$$\int_{\alpha_l} \Omega_l = 0, \quad \int_{\alpha_m} \Omega_l = -i. \quad (11)$$

Sie besitzen die Eigenschaften

$$1) \int_{\alpha_n} \Omega_l = i, \quad (12)$$

$$2) \Omega_n = -\Omega_l - \Omega_m. \quad (13)$$

Für zwei beliebige Differentiale Ω, Ω' gilt die erste RIEMANNsche Periodenrelation⁸⁾:

$$-\int_{\alpha_l} \Omega \cdot \int_{b_m} \Omega' + \int_{b_m} \Omega \cdot \int_{\alpha_l} \Omega' + \int_{\alpha_m} \Omega \cdot \int_{b_l} \Omega' - \int_{b_l} \Omega \cdot \int_{\alpha_m} \Omega' = 0; \quad (14)$$

setzt man darin

$$\Omega = \Omega_l, \quad \Omega' = \Omega_m \quad (15)$$

ein, so erhält man

$$\int_{b_m} \Omega_l = \int_{b_l} \Omega_m. \quad (16)$$

Setzt man

$$d_n = -\int_{b_m} \Omega_l = -\int_{b_l} \Omega_m, \quad (17)$$

so ergibt sich aus Gleichung (10) die folgende Periodentabelle

	α_1	α_2	α_3	b_1	b_2	b_3
Ω_1	0	$-i$	i	$d_2 + d_3$	$-d_3$	$-d_2$
Ω_2	i	0	$-i$	$-d_3$	$d_1 + d_3$	$-d_1$
Ω_3	$-i$	i	0	$-d_2$	$-d_1$	$d_1 + d_2$

(18)

Die Wege α_j sind gegenüber der Abbildung τ invariant; daher ist

$$\int_{\alpha_j} \Omega_k^\tau = \overline{\int_{\tau\alpha_j} \Omega_k} = \overline{\int_{\alpha_j} \Omega_k} = -\int_{\alpha_j} \Omega_k; \quad (19)$$

und weil ein ABELSches Differential durch seine Perioden auf α_1 und α_2 schon eindeutig definiert ist, folgt daraus

$$\Omega_k^\tau = -\Omega_k; \quad k = 1, 2, 3. \quad (20)$$

4. Abbildung von G auf ein Ringschlitzgebiet

4.1. Lemma 1. Die Funktion

$$w = \varphi_l(p) = a_l \cdot e^{\frac{2\pi}{p_0} \int_{p_0}^p \Omega_l}; \quad p_0 \in G, \quad \text{fest} \quad (1)$$

⁸⁾ Siehe [9] S. 175.

bildet G konform auf einen Kreisring S_i ab, der längs eines Kreisbogens, des Bildes von α_i , aufgeschlitzt ist. Dabei kann a_i so gewählt werden, daß der innere Randkreis der Einheitskreis ist.

φ_i ist eindeutig und analytisch auf G , da $\int_{p_0}^p \Omega_i$ modulo i auf G eindeutig und analytisch ist.

Ist c ein Wegstück, das auf α_k liegt, dann ist

$$\tau c = c. \quad (2)$$

Für einen solchen Weg c gilt infolge Gleichung (3.20)

$$\int_c \Omega_i = - \int_c \Omega_i^\tau = - \int_{\tau c} \overline{\Omega_i} = - \int_c \overline{\Omega_i}; \quad (3)$$

also verschwindet

$$\int_c d \log |\varphi_i| = 2\pi \operatorname{Re} \int_c \Omega_i, \quad (4)$$

was gleichbedeutend damit ist, daß $|\varphi_i|$ auf jedem α_k konstant ist, α_k also in einen Kreis um den Nullpunkt abgebildet wird.

Da α G positiv berandet und

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_i} d \arg \varphi_i &= 2\pi \operatorname{Im} \int_{\alpha_i} \Omega_i = 0, \\ \int_{\alpha_m} d \arg \varphi_i &= 2\pi \operatorname{Im} \int_{\alpha_m} \Omega_i = -2\pi, \\ \int_{\alpha_n} d \arg \varphi_i &= 2\pi \operatorname{Im} \int_{\alpha_n} \Omega_i = 2\pi, \end{aligned} \quad (5)$$

werden α_m und α_n auf Vollkreise abgebildet, S_i liegt im Inneren des Bildkreises von α_n und im Äußeren von $\varphi_i(\alpha_m)$; $\varphi_i(\alpha_i)$ bildet einen Schlitz dazwischen, so daß mit

$$\begin{aligned} |\varphi_i(\alpha_i)| &= r_i, \\ |\varphi_i(\alpha_n)| &= R_i, \end{aligned} \quad (6)$$

und der Normierung

$$|\varphi_i(\alpha_m)| = 1, \quad (7)$$

(durch Wahl von a_i) folgende Ungleichung gilt:

$$1 < r_i < R_i. \quad (8)$$

4.2. Die Radien r_i und R_i lassen sich wie folgt berechnen:

$$\log r_i = \int_{-e_n} d \log |\varphi_i| = -2\pi \operatorname{Re} \int_{e_n} \Omega_i, \quad (9)$$

$$\log R_i = \int_{e_i} d \log |\varphi_i| = 2\pi \operatorname{Re} \int_{e_i} \Omega_i. \quad (10)$$

Nun ist

$$\int_{b_k} \Omega_i = \int_{e_k} \Omega_i - \int_{\tau e_k} \Omega_i = \int_{e_k} \Omega_i - \int_{e_k} \overline{\Omega_i^\tau}, \quad (11)$$

und wegen Gleichung (3.20)

$$\int_{b_k} \Omega_i = \int_{c_k} \Omega_i + \int_{c_k} \overline{\Omega_i} = 2 \operatorname{Re} \int_{c_k} \Omega_i . \quad (12)$$

So erhält man

$$\log r_i = \pi d_m ; \quad l = 1, 2, 3 , \quad (13)$$

$$\log R_i = \pi (d_m + d_n) . \quad (14)$$

Aus der Ungleichung (8) und Gleichung (13) ergibt sich die später wichtige Ungleichung

$$d_k > 0 ; \quad k = 1, 2, 3 . \quad (15)$$

5. Berechnung der λ_i

5.1. Im Ringschlitzgebiet S_i gehören die Kreise um den Nullpunkt mit Radien r

$$1 < r < r_i , \quad r_i < r < R_i \quad (1)$$

zu der Kurvenschar $\varphi_i(\mathbb{C})$. Sei ϱ eine beliebige Metrik auf G und

$$\varrho_i(w) = \varrho(\varphi_i^{-1}(w)) \left| \frac{d\varphi_i^{-1}(w)}{dw} \right| \quad (2)$$

die von G auf S_i übertragene Metrik, dann gilt mit

$$L(\varrho, \mathbb{C}_i) = \inf_{c \in \mathbb{C}_i} \int_c |\varrho| dz | \quad (3)$$

die Ungleichung

$$L(\varrho, \mathbb{C}_i) \leq \int_0^{2\pi} \varrho_i(re^{i\varphi}) r d\varphi . \quad (4)$$

Quadriert man dies und wendet die SCHWARZsche Ungleichung

$$\left[\int_0^{2\pi} \varrho_i(re^{i\varphi}) d\varphi \right]^2 \leq 2\pi \int_0^{2\pi} \varrho_i^2(re^{i\varphi}) d\varphi \quad (5)$$

darauf an, so erhält man

$$[L(\varrho, \mathbb{C}_i)]^2 \leq 2\pi r^2 \int_0^{2\pi} \varrho_i^2(re^{i\varphi}) d\varphi \quad (6)$$

und daraus durch Division durch r und Integration über alle Werte (1) von r

$$[L(\varrho, \mathbb{C}_i)]^2 \cdot \log R_i \leq 2\pi \iint_{S_i} \varrho_i^2(w) \boxed{dw} . \quad (7)$$

Das rechts stehende Integral ist gleich dem Flächeninhalt

$$A(\varrho, G) = \iint_G \varrho^2(z) \boxed{dz} ; \quad (8)$$

wir erhalten daher

$$\frac{[L(\varrho, \mathfrak{C}_l)]^2}{A(\varrho, G)} \leq \frac{2\pi}{\log R_l} . \quad (9)$$

5.2. Wählt man speziell die Metrik, die in S_l die Gestalt

$$\varrho_0(w) = \frac{1}{|w|} \quad (10)$$

hat, dann gilt in (9) das Gleichheitszeichen, denn für diese Metrik gibt es in $\varphi_l(\mathfrak{C}_l)$ keine kürzeren Kurven als die Kreise. Da in (9) das Gleichheitszeichen angenommen wird, ist

$$\lambda_l = \frac{2\pi}{\log R_l} , \quad (11)$$

also mit Gleichung (4.14)

$$\lambda_l = \frac{2}{d_m + d_n} . \quad (12)$$

6. Die Differentiale Φ_l

Die Fläche V zerfällt in zwei Komponenten H und σH , wenn sie längs

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{b}_2 + \mathfrak{b}_3 \quad (1)$$

aufgeschnitten wird. H sei die Komponente, die von \mathfrak{b} positiv berandet wird.

Auf V werden die ABELSchen Differentiale Φ_l durch die folgenden Perioden definiert:

$$\int_{\mathfrak{b}_l} \Phi_l = 0 , \quad \int_{\mathfrak{b}_m} \Phi_l = -i ; \quad (2)$$

dann folgt daraus

$$\int_{\mathfrak{b}_n} \Phi_l = i . \quad (3)$$

Da die \mathfrak{b}_k gegenüber σ invariant sind, ist

$$\int_{\mathfrak{b}_k} \Phi_l^\sigma = \int_{\sigma \mathfrak{b}_k} \overline{\Phi_l} = \int_{\mathfrak{b}_k} \overline{\Phi_l} = - \int_{\mathfrak{b}_k} \Phi_l ; \quad l = 1, 2, 3 , \quad (4)$$

und weil jedes Differential durch seine Perioden auf \mathfrak{b}_1 und \mathfrak{b}_2 eindeutig definiert ist, folgt daraus

$$\Phi_l^\sigma = - \Phi_l . \quad (5)$$

Der Raum der ABELSchen Differentiale auf V besitzt die Dimension zwei, daher läßt sich Φ_l darstellen als Linearkombination von Ω_m und Ω_n . Durch Vergleich der Perioden auf den \mathfrak{b}_k erhält man die Koeffizienten:

$$\Phi_l = \frac{1}{D} (-d_m \Omega_m + d_n \Omega_n) \quad (6)$$

mit

$$D = d_2 d_3 + d_3 d_1 + d_1 d_2 . \quad (7)$$

Die Perioden auf den α_k lassen sich mit Gleichung (6) leicht berechnen und sind in einer Tabelle zusammengefaßt:

	α_1	α_2	α_3	b_1	b_2	b_3
Φ_1	$\frac{d_2 + d_3}{D}$	$-\frac{d_3}{D}$	$-\frac{d_2}{D}$	0	$-i$	i
Φ_2	$-\frac{d_3}{D}$	$\frac{d_1 + d_3}{D}$	$-\frac{d_1}{D}$	i	0	$-i$
Φ_3	$-\frac{d_2}{D}$	$-\frac{d_1}{D}$	$\frac{d_1 + d_2}{D}$	$-i$	i	0.

(8)

7. Abbildung von H auf ein Ringschlitzgebiet

Lemma 2. *Die Funktion*

$$w = \chi_i(p) = b_i e^{\frac{2\pi i}{p_0} \int_{p_0}^p \Phi_i}; \quad p_0 \in H, \text{ fest} \quad (1)$$

bildet das Gebiet H bei geeigneter Wahl von b_i so auf ein Ringschlitzgebiet T_i ab, daß $\chi(\alpha \cap H)$ in der reellen Achse liegt und der innere Randkreis der Einheitskreis ist.

Analog Abschnitt 4.1. folgt aus der Definition der Differentiale und ihren Eigenschaften, daß a) $\chi_i(b_m)$ ein Kreis ist, der durch entsprechende Wahl von $|b_i|$ zum Einheitskreis gemacht werden kann, und der den inneren Rand von T_i bildet, b) $\chi_i(b_n)$ ein Kreis ist, der den äußeren Rand von T_i bildet,

c) $\chi_i(b_i)$ ein kreisbogenförmiger Schlitz ist, der durch Wahl des $\arg b_i$

so symmetrisch zur reellen Achse gemacht werden kann, daß er die positive Halbachse schneidet.

Durch diese drei Eigenschaften ist aber die konforme Abbildung χ_i eindeutig charakterisiert. Ist $\bar{\sigma}$ die Spiegelung an der reellen w -Achse, dann hat die Abbildung $\bar{\sigma} \chi_i \tau$ die selben Eigenschaften a), b) und c) und ist konform, daher ist

$$\bar{\sigma} \chi_i \tau = \chi_i . \quad (2)$$

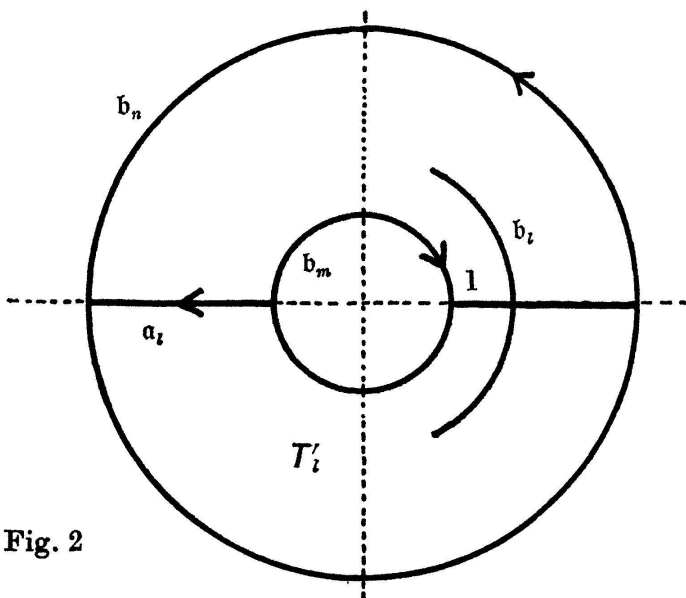


Fig. 2

Die Spiegelung τ läßt α invariant, daher muß auch $\bar{\sigma} \chi_i(\alpha)$ invariant lassen, was bedeutet, daß es auf der reellen Achse liegt.

Durch χ_i wird also das Gebiet

$$G_1 = G \cap H \quad (3)$$

auf den Teil T'_i von T_i abgebildet, der in der unteren Halbebene liegt.

8. Berechnung der λ_i^*

8.1. Da $\chi_i(\alpha_i \cap H)$ den inneren und den äußeren Randhalbkreis von T'_i verbindet, gehören die Halbkreise um den Nullpunkt, die in T'_i liegen, zu $\chi_i(\mathfrak{G}_i)$; und analog zu Abschnitt 5.1. zeigt man, daß für jede beliebige konforme Metrik ϱ auf G

$$\frac{[L(\varrho, \mathfrak{G}_i)]^2}{A(\varrho, G_1)} \leq \frac{\pi}{\log S_i}, \quad (1)$$

wenn S_i der Radius von $\chi_i(\mathfrak{b}_n)$ ist.

Durch die Funktion $\bar{\sigma} \chi_i \sigma$ wird $G_2 = \sigma G_1$ auf das Spiegelbild von T'_i konform abgebildet. Daher gilt auch

$$\frac{[L(\varrho, \mathfrak{G}_i)]^2}{A(\varrho, G_2)} \leq \frac{\pi}{\log S_i}. \quad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich

$$\frac{[L(\varrho, \mathfrak{G}_i)]^2}{A(\varrho, G)} \leq \frac{\pi}{2 \log S_i}. \quad (3)$$

8.2. Sei ϱ_0 in T'_i die Metrik

$$\varrho_0(w) = \frac{1}{|w|} \quad (4)$$

und ϱ_i die auf G folgendermaßen übertragene Metrik:

$$\begin{aligned} \varrho_i(z) &= \varrho_0(\chi_i(z)) \left| \frac{d\chi_i(z)}{dz} \right|; \quad z \in G_1, \\ \varrho_i(z) &= \varrho_i(\bar{z}); \quad z \in G_2. \end{aligned} \quad (5)$$

Wegen der Symmetrie der Metrik ist die Länge jeder Kurve c auf G gleich der Länge ihres Spiegelbildes $\sigma \tau$, daher

$$\int_c \varrho_i(z) |dz| = \frac{1}{2} \int_{c+\sigma c} \varrho_i |dz| = \int_{(c+\sigma c) \cap G_1} \varrho_i |dz|. \quad (6)$$

Mit jeder Kurve $c \in \mathfrak{G}_i$ ist auch die Kurve $(c + \sigma c) \cap G_1$ aus \mathfrak{G}_i , daher ist

$$L(\varrho_i, \mathfrak{G}_i) = L(\varrho_i, \mathfrak{G}_i \cap G_1) = \pi. \quad (7)$$

Ferner errechnet man:

$$A(\varrho_i, G) = 2\pi \log S_i. \quad (8)$$

Somit ist

$$\frac{[L(\varrho_i, G_i)]^2}{A(\varrho_i, G)} = \frac{\pi}{2 \log S_i} \quad (9)$$

und wegen (3)

$$\lambda_i^* = \frac{\pi}{2 \log S_i}. \quad (10)$$

8.3. Wir erhalten S_i aus

$$2\pi \log S_i = \iint_{\Gamma_i} d \log |w| \cdot d \arg w = \frac{1}{2} (2\pi)^2 \|\Phi_i\|_H^2, \quad (11)$$

wegen Gleichung (6.5) ist

$$\|\Phi_i\|_V^2 = \|\Phi_i\|_H^2 + \|\Phi_i\|_{\sigma H}^2 = 2 \|\Phi_i\|_H^2. \quad (12)$$

Für die Norm $\|\Omega\|_V$ eines Differential Ω gilt die zweite RIEMANNsche Periodenrelation⁹⁾:

$$\|\Omega\|_V^2 = -2 \operatorname{Im} \left(\int_{a_i} \Omega \int_{b_m} \overline{\Omega} - \int_{a_m} \Omega \int_{b_i} \overline{\Omega} \right), \quad (13)$$

mit deren Hilfe man durch Einsetzen von $\Omega = \Phi_i$ erhält:

$$\|\Phi_i\|_V^2 = 2 \frac{d_m + d_n}{D}, \quad (14)$$

somit aus Gleichung (10)

$$\lambda_i^* = \frac{D}{2(d_m + d_n)}. \quad (15)$$

9. Beweis des Satzes B

9.1. Aus den Gleichungen (5.12) und (8.15) ergibt sich

$$\sum_{k=1}^3 \frac{1}{\lambda_k \lambda_k^*} = 2 \frac{\sum_{k=1}^3 d_k^2}{\sum_{k < j} d_k d_j} + 2 \quad (1)$$

und

$$\sum_{k < j} \frac{1}{\lambda_k \lambda_j^*} = \sum_{k < j} \frac{1}{\lambda_k^* \lambda_j} = \frac{\sum_{k=j}^3 d_k^2}{\sum_{k < j} d_k d_j} + 3. \quad (2)$$

⁹⁾ Siehe [8] S. 170.

Nach der CAUCHY-SCHWARZschen Ungleichung ist aber

$$3 \sum_{k=1}^3 d_k^2 \geq (\sum_{k=1}^3 d_k)^2 = \sum_{k=1}^3 d_k^2 + 2 \sum_{k < j} d_k d_j, \quad (3)$$

und, weil $d_k > 0$,

$$\frac{\sum_{k=1}^3 d_k^2}{\sum_{k < j} d_k d_j} \geq 1, \quad (4)$$

woraus die behaupteten Ungleichungen folgen.

9.2. Das Gleichheitszeichen gilt in den Ungleichungen dann und nur dann, wenn

$$d_1 = d_2 = d_3, \quad (5)$$

was nach (5.12) gleichbedeutend ist mit

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3. \quad (6)$$

Nach A. SCHNYDER [10] bestimmen diese Extremallängen aber das Gebiet G vollständig bis auf konforme Äquivalenz. Gleichung (6) gilt also dann und nur dann, wenn sich jedes Randkontinuum in jedes andere durch eine konforme Selbstabbildung von G überführen läßt.

LITERATUR

- [1] P. M. PU, *Some inequalities in certain nonorientable RIEMANNIAN manifolds*. Pacific J. Math. 2 (1952), 55.
- [2] J. HERSCH, *Longueurs extrémales et géométrie globale*. Ann. Scient. Ecole Norm. Sup. 72 (1955), 401.
- [3] L. AHLFORS and A. BEURLING, *Conform invariants and function theoretic nullsets*. Acta Math. 83 (1950), 101.
- [4] A. WINTNER, *On the rôle of logarithmic potential in differential geometry*. Amer. J. Math. 75 (1953), 679.
- [5] S. S. CHERN, P. HARTMANN and A. WINTNER, *On isothermic coordinates*. Comment. Math. Helv. 28 (1954), 301.
- [6] P. KOEBE, *Über Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. I. Teil. Das allgemeine Uniformisierungsprinzip*. J. reine angew. Math. 138 (1910), 192.
- [7] P. KOEBE, *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildungen. (VI. Abbildungen mehrfach zusammenhängender Bereiche auf Kreisbereiche. Uniformisierung hyperelliptischer Kurven.)* Math. Z. 7 (1920), 235.
- [8] A. PFLUGER, *Theorie der RIEMANNschen Flächen*. Springer-Verlag, 1957.
- [9] R. NEVANLINNA, *Uniformisierung*. Springer-Verlag, 1953.
- [10] A. SCHNYDER, *Über ein vollständiges System konformer Invarianten von dreifach zusammenhängenden Gebieten*. Comment. Math. Helv., 34/2 (1960), p. 85–98.

(Eingegangen den 2. November 1959)