

<b>Zeitschrift:</b>	Commentarii Mathematici Helvetici
<b>Herausgeber:</b>	Schweizerische Mathematische Gesellschaft
<b>Band:</b>	34 (1960)
<b>Artikel:</b>	Sur les structures fibrées osculatrices d'une surface de RIEMANN.
<b>Autor:</b>	Teleman, Costake
<b>DOI:</b>	<a href="https://doi.org/10.5169/seals-26630">https://doi.org/10.5169/seals-26630</a>

### Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 10.01.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Sur les structures fibrées osculatrices d'une surface de RIEMANN

par COSTAKE TELEMAN, Bucarest

En utilisant la théorie des classes des représentations de M. ANDRÉ WEIL [11] et la théorie des connexions infinitésimales (intégrables) de M. EHRESMANN, [2], nous donnons une interprétation géométrique des systèmes homographiques sur une surface de RIEMANN  $R$ , que nous avons définis dans [9]. Cette interprétation utilise des structures fibrées généralisant la structure fibrée tangente de  $R$ , ayant pour fibres des espaces projectifs.

1. Soit  $R$  une surface de RIEMANN fermée, de genre  $g > 0$ , que nous identifierons à l'ensemble des classes de transitivité  $z^\Gamma$  d'un groupe homographique  $\Gamma$  du cercle  $|z| < 1$  si  $g > 1$  ou du plan fini  $(z)$  si  $g = 1$ . On sait que le groupe  $\Gamma$  est engendré par  $2g$  générateurs  $S_1, S'_1, S_2, S'_2, \dots, S_g, S'_g$  liés par une seule relation

$$S_1 S'_1 S_1^{-1} S'_1^{-1} S_2 S'_2 S_2^{-1} S'_2^{-1} \dots S_g S'_g S_g^{-1} S'_g^{-1} = 1 .$$

Le cercle  $|z| < 1$  ou le plan  $(z)$  joue le rôle de surface universelle de recouvrement de  $R$  et nous le désignerons par  $\tilde{R}$  ou encore par  $(\tilde{R}, R, \Gamma)$ , pour mettre en évidence la structure fibrée définie dans  $\tilde{R}$  par les classes de transitivité du groupe  $\Gamma$ .

Si  $r: \Gamma \rightarrow G_{q+1} = GL(q+1, C)$  est une représentation linéaire d'ordre  $q+1$  du groupe  $\Gamma$ , nous désignerons par  $[r]$  la *représentation projective* de  $\Gamma$  qu'on obtient en composant  $r$  avec l'homomorphisme canonique  $\chi_q$  de  $G_{q+1}$  sur le groupe quotient de  $G_{q+1}$  et de son centre  $Z_{q+1}$ . Le groupe  $G_{q+1}$  opère dans l'espace vectoriel complexe  $V^{q+1}$  à  $q+1$  dimensions, tandis que  $H_q = G_{q+1}/Z_{q+1}$  peut être identifié au groupe des homographies de l'espace projectif complexe  $P^q$ . Les représentations  $r, [r]$  associent à la structure fibrée  $(\tilde{R}, R, \Gamma)$  une structure fibrée  $(E_r, R, V^{q+1}, G_{q+1})$  de fibre  $V^{q+1}$  et une structure fibrée  $(E_{[r]}, R, P^q, H_q)$  de fibre  $P^q$ . Ces structures fibrées sont algébriques, d'après les résultats de SERRE [8] et ATIYAH [1].

Nous dirons avec M. ANDRÉ WEIL, que *deux représentations  $r, r'$  sont équivalentes s'il existe une matrice  $M$ , à éléments holomorphes dans  $\tilde{R}$ , ayant le déterminant  $|M| \neq 0$  dans  $\tilde{R}$  et subissant les transformations*

$$M^S = r(S) M r'(S^{-1}), \quad S \in \Gamma. \tag{1}$$

En général, si  $F$  est une fonction définie dans  $\tilde{R}$ , nous désignerons par  $F^S$  la fonction qu'on obtient en composant  $F$  avec la fonction

$$z^S = \frac{\alpha_S z + \beta_S}{\gamma_S z + \delta_S}$$

définissant l'élément  $S$  du groupe  $\Gamma$ , donc  $F^S(z) = F(z^S)$ .

De même, nous dirons que deux représentations projectives du groupe  $\Gamma$ ;  $\varrho, \varrho' : \Gamma \rightarrow H_q$ , sont équivalentes, si on peut trouver une matrice  $M$ , holomorphe dans  $\tilde{R}$  et ayant  $|M| \neq 0$  et subissant des transformations de la forme

$$\mu_S M^S = M_S M M'^{-1}_S, \quad (2)$$

où  $\mu_S$  sont des fonctions méromorphes dans  $\tilde{R}$  et  $M_S, M'_S$  sont des éléments de  $G_{q+1}$ , appartenant aux classes  $\chi_q^{-1} \circ \varrho(S), \chi_q^{-1} \circ \varrho'(S)$ .

On peut démontrer les propositions suivantes:

**Proposition 1.** Les structures fibrées algébriques associées à deux représentations linéaires (projectives) sont équivalentes si et seulement si ces représentations sont équivalentes.

**Proposition 2.** Si deux représentations linéaires  $r, r'$  sont équivalentes, les représentations projectives  $[r], [r']$  sont aussi équivalentes.

**Proposition 3.** Si la représentation projective  $p'$  est équivalente à une représentation de la forme  $[r]$ ,  $r$  étant une représentation linéaire de  $\Gamma$ , alors on peut trouver une représentation linéaire  $r'$ , équivalente à  $r$ , telle que  $p' = [r']$ .

2. Soit  $u = (u_0, u_1, \dots, u_q)$  un système homographique d'ordre  $q$  de la surface  $R$  [9, page 206]. Ce système définit une représentation projective  $\pi_u : \Gamma \rightarrow H_q$ . Nous allons démontrer le

**Théorème 1.** Les représentations projectives définies par deux systèmes homographiques d'ordre  $q$  sont équivalentes.

Considérons les transformations subies par les fonctions  $u_i$ , qui sont de la forme

$$\varrho_S u_i^S = \sum_{j=0}^q c_i^j u_j, \quad (i = 0, 1, \dots, q) \quad (3)$$

et que nous écrirons sous forme vectorielle

$$\varrho_S u^S = M_S u, \quad M_S = (c_i^j). \quad (4)$$

D'après la théorie de LAGUERRE et FORSYGHT [9, page 209] on peut trouver deux fonctions analytiques  $h(z), \lambda(z)$ , telles que l'équation différentielle linéaire d'ordre  $q + 1$ , ayant  $\lambda u_0, \lambda u_1, \dots, \lambda u_q$  pour intégrales et  $h$  pour

paramètre indépendant, ait les coefficients de  $d^q(\lambda u)/dh^q$ ,  $d^{q-1}(\lambda u)/dh^{q-1}$  nuls. La fonction  $h$  n'a pas d'autres singularités dans  $\tilde{R}$  que des pôles simples et subit des transformations homographiques

$$h^S = \frac{a_S h + b_S}{c_S h + d_S}.$$

De plus,  $dh/dz$  ne s'annule en aucun point de  $\tilde{R}$ .

Les fonctions  $\lambda u_i$  forment un système homographique définissant la même représentation projective du groupe  $\Gamma$  que le système  $u$ . Nous supposons qu'on a remplacé de l'avance le système  $u$  par  $\lambda u$ . Dans ce cas, on peut prendre dans (4),

$$\varrho_S = \left( \frac{dh^S}{dh} \right)^{-\frac{q}{2}}, \quad (5)$$

donc  $\varrho_S$  est défini au signe près. De la formule (5) on déduit qu'on a  $\varrho_{S'}(\varrho_S)^{S'} = \pm \varrho_{SS'}$ , ( $S, S' \in \Gamma$ ) et on peut choisir les signes des  $\varrho_S$  tel que le signe – soit exclu. En appliquant alors l'opérateur  $S'$  aux deux membres de l'égalité (4), on obtient, en tenant compte que le wronskien  $W$  des fonctions  $u_i$  n'est pas nul, [9, page 206],

$$M_{SS'} = M_S M_{S'},$$

donc on a la représentation linéaire de  $\Gamma$ ,

$$r : S \rightarrow M_S \quad (5')$$

et  $\pi_u = [r]$ .

Soit  $\omega$  une différentielle abélienne de première espèce de la surface  $R$ , n'ayant que des zéros simples. On a donc  $\omega^S = \omega$ , ( $S \in \Gamma$ ).

Les formules (4), (5) montrent que le vecteur

$$v = \left( \frac{\omega}{dh} \right)^{\frac{q}{2}} u, \quad (i = 0, 1, \dots, q) \quad (6)$$

qui est défini dans  $\tilde{R}$ , au signe près, subit les transformations

$$v^S = \pm M_S v. \quad (7)$$

Si l'on considère la matrice carrée

$$\Phi = \left( \frac{d^i v_i}{\omega^i} \right), \quad \left( \frac{d}{\omega} = \frac{dz}{\omega} \frac{d}{dz} \right) \quad (8)$$

on a

$$\Phi^S = \pm M_S \Phi. \quad (9)$$

Notons qu'on a

$$|\Phi| = \pm 1. \quad (10)$$

Considérons un second système homographique  $u'$ , du même ordre  $q$ , et associons-lui une représentation  $r': S \rightarrow M'_S$  et une matrice  $\Phi'$ , par des formules analogues à (4) et (8).

Les matrices  $\Phi, \Phi'$  ont en chaque point deux déterminations, qui se permutent quand on entoure un zéro de  $\omega$ , si  $q$  est un nombre impair. Par contre, la matrice

$$M = \Phi \Phi'^{-1} \quad (11)$$

est uniforme dans  $\tilde{R}$  et a le module du déterminant égal à 1. Montrons que les éléments de la matrice  $M$  sont holomorphes dans  $\tilde{R}$ . En effet,  $\Phi$  et  $\Phi'$  sont régulières en chaque point de  $\tilde{R}$  où  $\omega \neq 0$ . Dans le voisinage d'un zéro de  $\omega$ , on peut trouver un uniformisateur  $\zeta$  tel qu'on ait  $\omega = \zeta d\zeta$  et en considérant le vecteur

$$t = \left( \frac{d\zeta}{dh} \right)^{\frac{q}{2}} u$$

on montre par recurrence qu'on a les formules

$$\frac{d^j v}{\omega^j} = \sum_{s=0}^j c_s^j \zeta^{\frac{q}{2} - 2j + s} \frac{d^s t}{d\zeta^s}, \quad (12)$$

où les  $c_s^j$  sont des constantes définies par

$$c_s^{j+1} = c_{s-1}^j + \left( \frac{q}{2} - 2j + s \right) c_s^j; \quad c_s^j = 0 \ (j < s).$$

Si l'on introduit la matrice

$$Z = (\zeta_s^j), \quad \zeta_s^j = c_s^j \zeta^{\frac{q}{2} - 2j},$$

on peut écrire les formules (12) sous la forme

$$\Phi = TZ, \quad T = \left( \frac{d^s t_i}{d\zeta^s} \right)$$

et on a une formule analogue pour  $\Phi'$ ,  $\Phi' = T'Z$ . On a donc dans le voisinage du point  $\zeta = 0$ ,  $M = TT'^{-1}$ ; or les éléments des matrices  $T, T'$  sont holomorphes dans le voisinage considéré et on a de plus  $|T'| \neq 0$ , ce qui prouve que  $M$  est une matrice régulière dans  $\tilde{R}$ .

La formule (11) et la formule (9), ainsi que la formule analogue à (9), con-

cernant la matrice  $\Phi'$ , montrent qu'on a des formules de la forme

$$\varepsilon_S M^S = M_S M M_S'^{-1}, \quad (\varepsilon_S = \pm 1)$$

qui démontrent le théorème 1.

4. Si l'on remplace les fonctions  $u_i$  d'un système homographique d'ordre  $q$ , par  $q + 1$  combinaisons linéaires des  $u_i$ , linéairement indépendantes, on obtient un nouveau système et les systèmes qu'on obtient de cette manière forment une *structure homographique* de la surface  $R$  [9]. Nous avons montré que les structures homographiques d'ordre  $q$  de la surface  $R$  forment une multiplicité linéaire de dimension complexe  $(q^2 + 2q)(g - 1)$ , si  $g > 1$ . Il en résulte que les systèmes homographiques d'ordre  $q$  de  $R$  forment une multiplicité à  $(q^2 + 2q)(g - 1) + (q + 1)^2$  dimensions complexes, donc les représentations projectives  $\pi_u$ , définies par ces systèmes forment une multiplicité à  $(q^2 + 2q)g$  dimensions.

**Théorème 2.** *Toute représentation projective  $\Gamma$ , équivalente à une représentation  $\pi_u$ , est de la forme  $\pi_{u'}$ ,  $u'$  étant un système homographique de  $R$  du même ordre que  $u$ , si le genre  $g$  de  $R$  est  $> 1$ .*

**Démonstration.** D'après la Proposition 3, toute représentation projective  $p : \Gamma \rightarrow H_q$ , équivalente aux représentations  $\pi_u$ , est de la forme  $p = [r']$ ,  $r'$  étant une représentation linéaire d'ordre  $q + 1$ , équivalente à la représentation (5').

Soit  $r' : S \rightarrow M'_S = r'(S)$  une représentation équivalente à (5') et  $M$  une matrice vérifiant les formules (1), régulière dans  $\tilde{R}$  et ayant  $|M| \neq 0$ . La matrice différentielle régulière [11]

$$\Omega = dM \cdot M^{-1} \tag{13}$$

subira les transformations

$$\Omega^S = M_S \Omega M_S^{-1} \tag{14}$$

et la matrice différentielle

$$\theta = \Phi^{-1} \Omega \Phi \tag{15}$$

est uniforme dans  $\tilde{R}$  et est invariante pour le groupe  $\Gamma$ , donc les éléments de  $\theta$  sont des fonctions rationnelles sur  $R$ . Ces fonctions sont régulières en chaque point de  $\tilde{R}$  où  $\omega \neq 0$  et satisfont à la condition que  $Z\theta Z^{-1}$  soit une matrice régulière dans le voisinage d'un zéro  $\zeta = 0$  de  $\omega$ . Cette dernière condition s'exprime par les formules

$$\theta_s^k + \sum_{\substack{s \leq j, r \leq k \\ r-j < k-s}}^{r,j} \zeta^{2(r-j+s-k)} c_s^j \tilde{c}_r^k \theta_j^r = \zeta^{s-k} \alpha_s^k, \tag{16}$$

où  $\tilde{c}$  est la matrice inverse de  $(c_s^j)$  et  $\alpha_s$  sont des formes différentielles régulières en  $\zeta = 0$ .

De ces conditions on déduit, en utilisant l'induction, qu'on a, si  $g > 1$ ,

$$\theta_s^k = 0, (k < s - 1); \quad \theta_s^{s-1} = c_s \omega, (c_s = \text{const.}).$$

En écrivant alors la formule (16) pour  $k = s$ , on voit que  $\theta_s^s$  a des pôles simples aux zéros de  $\omega$ , avec les résidus égaux à  $\sum_{j=s, s+1} c_s^j \tilde{c}_{j-1}^s c_j$ ; comme la somme de ces résidus doit être nulle, on doit avoir  $\sum_{j=s, s+1} c_s^j \tilde{c}_{j-1}^s c_j = 0$ . Pour  $s = q$  on obtient  $c_q = 0$  et en posant ensuite  $s = q - 1, \dots, 1$  on trouve qu'on a  $c_{q-1} = \dots = c_1 = 0$ , donc  $\theta_s^{s-1} = 0, (s = 1, \dots, q)$ . Les formules (16) montrent alors que pour  $k \geq s$ ,  $\theta_s^k$  a des pôles, d'ordre  $2(k - s)$  au plus, aux zéros de  $\omega$ .

La matrice  $M$  est définie à une transformation de la forme [11]

$$M' = \Lambda M \quad (16')$$

près,  $\Lambda$  étant une matrice régulière dans  $\tilde{R}$ , satisfaisant aux conditions

$$|\Lambda| \neq 0, \quad \Lambda^s = M_s \Lambda M_s^{-1}, \quad (17)$$

d'où il en résulte que les éléments de la matrice

$$U = \Phi^{-1} \Lambda \Phi \quad (18)$$

sont des fonctions rationnelles sur  $R$ , devenant infinies seulement aux zéros de  $\omega$ . La condition que  $Z U Z^{-1}$  soit régulière dans le voisinage d'un zéro de  $\omega$  donne

$$u_s^k + \sum_{\substack{s \leq j, r \leq k \\ r-j < k-s}}^{r, j} \zeta^{2(r-j+s-k)} c_s^j \tilde{c}_r^k u_j^r = \zeta^{s-k} \beta_s^k, \quad (19)$$

$\beta_s^k$  étant une fonction holomorphe dans le voisinage du point  $\zeta = 0$ . Un raisonnement analogue à celui indiqué plus haut montre qu'on a  $u_s^k = 0$  pour  $k < s$ ,  $u_0^0 = u_1^1 = \dots = u_q^q = c$ , ( $c = \text{const.}$ ) et que pour  $k > s$ ,  $(u_s^k)^{-1}$  s'annule aux zéros de  $\omega$ , avec l'ordre  $2(k - s) - 1$  au plus, si  $g > 1$ . De plus, il faut remarquer que les formules (19) permettent de calculer, en chaque zéro de  $\omega$ , pour  $u_s^k$ , les coefficients de  $\zeta^{1-2(k-s)}, \zeta^{2-2(k-s)}, \dots, \zeta^{1-(k-s)}$ , en fonctions des coefficients analogues des  $u_j^r$  ( $s \leq j \leq r \leq k$ ,  $r - j < k - s$ ). Les équations qui expriment que la fonction  $u_s^k$ , donnée par la formule (19), est rationnelle, donc que la somme des résidus  $\oint u_s^k \omega_\alpha$  est nulle, quelque soit la différentielle de première espèce  $\omega_\alpha$ , n'imposent aucune relation entre les coefficients des fonctions  $u_s^k$ , elles permettent seulement de calculer certains des coefficients de  $\zeta^{-1}, \zeta^{-2}$  des fonctions  $\zeta^{s-k} \beta_s^k$ . Il en résulte la

**Proposition 4.** Si on a des fonctions rationnelles  $u_i^k$  pour tous les indices  $k, s$  vérifiant  $k - s < \alpha$ , ou  $k - s = \alpha$ ,  $s < \beta$ , vérifiant les conditions (19) pour ces indices, on peut compléter ces fonctions à une matrice  $U$  vérifiant toutes les conditions (19).

Si l'on désigne par  $\Omega' = \Phi \theta' \Phi^{-1}$  la matrice différentielle  $dM' \cdot M'^{-1}$  associée à la matrice (16'), on a

$$\theta' U = (H U - U H) \omega + dU + U \theta, \quad (20)$$

où  $H\omega$  est la matrice  $\Phi^{-1}d\Phi$  et a la forme

$$H\omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_{q-1} & 0 \end{pmatrix} \omega.$$

L'équation (20) donne les relations

$$u_j^{s+1}\omega = - \sum_{i=j, j+1, \dots, s} \theta_j^i u_i^s + du_j^s + \sum_{i=j, j+1, \dots, s} \theta_i^s u_j^i + u_{j-1}^s \omega, \quad (s < q). \quad (21)$$

Supposons qu'on a  $\theta_i^s = 0$  pour  $s - i < \alpha$  ( $\alpha < q$ ),  $s < q$ . Pour qu'on ait aussi  $\theta_i^s = 0$  ( $s - i < \alpha$ ,  $s < q$ ), il faut qu'on ait  $u_j^s = 0$  pour  $0 < s - j \leq \alpha$ . Dans ce cas, la formule (21) pour  $j = 0$ ,  $s = \alpha$  donne

$$u_0^{\alpha+1}\omega = - \theta_0^\alpha u_\alpha^\alpha + \theta_0^\alpha u_0^0;$$

donc si l'on prend  $u_0^0 = u_1^1 = \dots = u_q^q = 1$  et

$$u_0^{\alpha+1} = \frac{\theta_0^\alpha}{\omega} \quad (22)$$

on aura  $\theta_0^{\alpha+1} = 0$ . D'après la Proposition 4, on peut compléter les fonctions  $u_j^s = 0$  ( $0 < s - j \leq \alpha$ ,  $s < q$ ) et (22) à une matrice  $U$  et on obtient de (21) une matrice  $\theta'$  ayant  $\theta_i^s = 0$  pour  $s - i < \alpha$ ,  $s < q$  et  $s = \alpha$ ,  $i = 0$ .

Supposons que pour la matrice  $\theta$  on a  $\theta_i^s = 0$  pour  $s - i < \alpha$ ,  $s < q$  et pour  $s - i = \alpha$ ,  $i = 0, 1, \dots, \beta - 1$ . On aura les mêmes conditions pour la matrice  $\theta'$  si  $u_j^s = 0$  pour  $0 < s - j \leq \alpha$  et pour  $s - j = \alpha + 1$ ,  $j = 0, 1, \dots, \beta - 1$ . L'équation (21) donne alors pour  $j = \beta$ ,  $s = \alpha + \beta$ ,  $u_0^0 = \dots = u_q^q = 1$ ,

$$u_\beta^{\alpha+\beta+1}\omega = - \theta_\beta^{\alpha+\beta} + \theta_\beta^{\alpha+\beta}$$

et on a  $\theta_\beta^{\alpha+\beta+1} = 0$  si  $u_\beta^{\alpha+\beta+1}$  est choisi égal à  $\theta_\beta^{\alpha+\beta}/\omega$ . Il en résulte qu'on peut toujours supposer que la matrice  $\theta$  vérifie les conditions

$$\theta_j^i = 0, \quad (i = 0, 1, \dots, q - 1; \quad j = 0, 1, \dots, q). \quad (23)$$

Supposons que la matrice (15) satisfait aux relations (23). L'équation (13) définit alors la matrice  $M$  [11]. Considérons la matrice  $\Psi = M^{-1}\Phi$  qui subit les substitutions

$$\Psi^s = \pm M'_s \Psi. \quad (24)$$

On obtient d'autre part, par un calcul simple

$$d\Psi = \Psi(H\omega - \theta),$$

donc

$$d\Psi_j^i = \Psi_j^{i+1} \omega, \quad (i < q); \quad d\Psi_j^q = \sum_{i=0}^q (\alpha_i - \theta_i^q) \Psi_j^i.$$

De ces formules on déduit qu'on a  $d|\Psi| = -\theta_q^q |\Psi|$ , donc  $|\Psi| = e^{-\int \theta_q^q}$ . Il en résulte que les fonctions  $\Psi_0^0, \Psi_1^0, \dots, \Psi_q^0$  forment un système homographique  $u'$  de la surface  $R$  et la formule (24) montre que la représentation projective  $\pi_{u'}$  coïncide avec la représentation  $[r']$ . Le théorème 2 est ainsi démontré; pour  $g = 1$ , la propriété n'est plus vérifiée. Dans le cas  $g = 1$ , la représentation triviale de  $\Gamma$  dans  $H_q$  est équivalente aux représentations  $\pi_u$  et ne correspond à aucun système homographique  $u$  de la surface  $R$ .

5. Les fonctions  $1, z, \dots, z^q$  forment un système homographique d'ordre  $q$  de  $R$ . La représentation projective  $\pi_0$  définie par ce système est la restriction à  $\Gamma$  de la représentation irréductible du groupe homographique  $H_1$  dans  $H_q$ .

6. Les résultats obtenus précédemment montrent que les structures fibrées  $(E_{\pi_u}, R, P^q, H_q)$  associées aux représentations projectives  $\pi_u$  du groupe  $\Gamma$ , définies par les systèmes homographiques  $u$  de la surface  $R$ , sont isomorphes à une même structure (analytique), que nous désignérons par  $(E_q, R, P^q, H_q)$ .

Les représentations  $\pi_u$  définissent des connexions intégrables dans la structure  $(E_q, R, P^q, H_q)$ , [2, page 37]. Réciproquement, comme toute connexion intégrable de cette structure est définie par une représentation du groupe  $\Gamma$  dans  $H_q$ , équivalente aux représentations  $\pi_u$ , il en résulte, d'après le théorème 2, que toute connexion intégrable de la structure  $(E_q, R, P^q, H_q)$  est définie par un système homographique  $u$  de  $R$  si le genre de  $R$  est  $> 1$ .

La structure fibrée  $(E_{\pi_u}, R, P^q, H_q)$  étant définie comme l'ensemble des classes de transitivité du groupe  $G$  des transformations  $(z, y) \rightarrow (z^s, M_s y)$  de  $\tilde{R} \times P^q$  en lui-même, avec la projection  $p_u : (z, y)^G \rightarrow z^{\Gamma}$ , on voit que cette structure admet la section  $z^{\Gamma} \rightarrow (z, y)^G$ ,  $(z, y)^G = \bigcup_{S \in \Gamma} \{(z^s, M_s y)\}$ .

La connexion donnée par la représentation  $\pi_u$  est définie dans  $(E_{\pi_u}, R, P^q, H_q)$  par l'équation  $dy = 0$  et le système  $u$  définit le développement de la surface  $R$  dans la fibre  $P^q$ , par les formules

$$y_i = u_i(z), \quad (i = 0, 1, \dots, q),$$

$y_i$  étant des coordonnées homogènes dans  $P^q$ .

Par analogie avec la structure fibrée tangente à une variété, nous dirons que  $(E_q, R, P^q, H_q)$  est la structure fibrée, projective, osculatrice d'ordre  $q$ , de la surface  $R$ . On peut alors résumer les résultats obtenus dans cette Note:

*Les connexions intégrables de la structure fibrée projective, osculatrice d'ordre  $q$ , de la surface fermée  $R$ , de genre  $g > 1$ , sont associées aux représentations projectives définies par les systèmes homographiques  $u$ , d'ordre  $q$ , de  $R$ . Les systèmes  $u$  définissent les développements de  $R$  dans la fibre  $P^q$ , suivant ces connexions.*

On a ainsi l'interprétation géométrique des systèmes  $u$ .

7. Dans la structure fibrée  $(E_{\pi u}, R, P^q, H_q)$ , associons à chaque point  $\xi = z^r$  de  $R$  l'espace projectif  $P_\xi^{q'}$  engendré dans la fibre  $p_u^{-1}(\xi)$  par les points  $y^0 = u, y^1 = du/dz, \dots, y^{q'} = d^{q'}u/dz^{q'}, (q' < q)$ . La somme topologique des espaces  $P_\xi^{q'}$  forme, avec la projection  $p': P_\xi^{q'} \rightarrow \xi$  une structure fibrée isomorphe à  $(E_{q'}, R, P^{q'}, H_{q'})$ . On a donc, pour chaque  $q' < q$ , un isomorphisme analytique  $i_{q'q}$  de  $(E_{q'}, R, P^{q'}, H_{q'})$  avec un sous-espace de  $(E_q, R, P^q, H_q)$ , permutable avec les projections canoniques  $E_{q'} \rightarrow R, E_q \rightarrow R$ .

8. Notons ce théorème:

*L'espace fibré sur  $R$  formé par les hyperquadriques non dégénérées des fibres de  $(E_q, R, P^q, H_q)$  admet une infinité de sections. Les éléments de ces sections sont des quadriques contenant les images par  $i_{q'q}$  des fibres de  $(E_{q'}, R, P^{q'}, H_{q'})$  pour  $2q' \leq q$  ou les transformées par polarité de ces images.*

9. On peut montrer qu'aucune des représentations  $\pi_u$  ne peut être unitaire, donc en particulier,  $\pi_u$  n'est jamais finie. En effet, si la représentation (5') serait unitaire, la surface posséderait la métrique riemannienne partout régulière

$$ds = (|u_0|^2 + |u_1|^2 + \dots + |u_q|^2)^{-\frac{1}{q}} |dh|,$$

ayant la courbure de GAUSS

$$K = (|u_0|^2 + \dots + |u_q|^2)^{\frac{2}{q}-2} \left[ (\sum u_i \bar{u}_i) \left( \sum \frac{du_i}{dh} \frac{d\bar{u}_i}{d\bar{h}} \right) - \left| \sum u_i \frac{d\bar{u}_i}{d\bar{h}} \right|^2 \right] > 0$$

ce qui est impossible, d'après la formule de GAUSS-BONNET.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH M. F., *Vector bundles over an elliptic curve*. Proc. London Math. Soc. III, 7 (1957), 414–452.
- [2] EHRESMANN Ch., *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*. Colloque de Topologie (Espaces fibrés), Bruxelles 1950.
- [3] EICHLER M., *Verallgemeinerung der ABELschen Integrale*. Math. Z., 67 (1957), 267–298.
- [4] GROTHENDIECK A., *Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de RIEMANN*. Amer. J. of Math., (1957), 121–138.
- [5] GOURSAT E., APPELL P., *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*. Tome I (1929), Tomme II, Paris.
- [6] POINCARÉ H., *Oeuvres*, T. II. (1916), 402–462.
- [7] SERRE J. P., *Faisceaux algébriques cohérents*. Ann. of Math. 61 (1955), 197–278.
- [8] SERRE J. P., *Géométrie algébrique et Géométrie analytique*. Ann. Inst. Fourier, vol. VI (1956), 1–42.
- [9] TELEMAN C., *Sur les structures homographiques d'une surface de RIEMANN*. Comment. Math. Helv. 33 (1959), 206–211.
- [10] WASHNITZER G., *The characteristic classes of an algebraic fibre bundle*. Proc. Nat. Ac. of Sci. 42 (1956), 433–435.
- [11] WEIL A., *Généralisation des fonctions abéliennes*. J. Math. pures et appliquées, 17 (1938), 47–87.
- [12] WEIL A., *Fibre Spaces in Algebraic Geometry*. (Notes by Wallace), University of Chicago, 1952.

(Reçu le 8 octobre 1959)