

Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 34 (1960)

Artikel: Sur l'invariant de SMALE d'un plongement.
Autor: Kervaire, Michel A.
DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-26628>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

Download PDF: 18.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>

Sur l'invariant de SMALE d'un plongement

par MICHEL A. KERVAIRE¹⁾, New York (USA)

A toute immersion $f: S^p \rightarrow R^{p+q}$ d'une sphère dans l'espace euclidien S. SMALE [16] associe un élément c_f du groupe d'homotopie $\pi_p(V_{p+q,p})$, où $V_{p+q,p}$ est la variété de STIEFEL des p -repères dans R^{p+q} . La définition de c_f est rappelée au § 3. S. SMALE démontre que deux immersions $f, g: S^p \rightarrow R^{p+q}$ sont régulièrement homotopes, i. e. qu'il existe une famille d'immersions $f_t: S^p \rightarrow R^{p+q}$ avec $f_0 = f$, $f_1 = g$, telle que l'application tangentielle induite dépende continuellement de t , si et seulement si $c_f = c_g$.

On va étudier le problème de caractériser les éléments de $\pi_p(V_{p+q,p})$ associés aux plongements (sans self-intersection) de S^p dans R^{p+q} .

D'après [11], l'invariant de SMALE d'un plongement $f: S^p \rightarrow R^{p+q}$ avec $p \leq 2q - 2$ est nul pour p congruent à 2, 4, 5 ou 6 modulo 8. On avait également quelques résultats pour $p = 8s$ et $p = 8s + 1$. (Cf. [11], Corollaires 5.2, 5.3 et 5.4²⁾.) On va voir que la nullité de c_f (pour $p \leq 2q - 2$) ne dépend pas de la classe de reste modulo 8 de p et peut être démontrée indépendamment de la connaissance des groupes d'homotopie stables du groupe orthogonal.

Theorème. *Pour tout plongement $f: S^p \rightarrow R^{p+q}$, avec $p \leq 2q - 2$, l'invariant de SMALE c_f de f est nul.*

Autrement dit, compte tenu du théorème de S. SMALE [16], Theorem A, pour tout plongement $f: S^p \rightarrow R^{p+q}$ avec $p \leq 2q - 2$, il existe une famille d'immersions $f_t: S^p \rightarrow R^{p+q}$, induisant une homotopie (continue) de l'application tangentielle, telle que

(a) $f_0 = f$,

(b) $f_1(x_0, x_1, \dots, x_p) = (x_0, x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$.

§ 1. Un lemme préliminaire

Soit M une variété différentiable fermée, presque parallélisable, de dimension $p + 1$. Le fibré des vecteurs tangents à M , restreint à $M - x_0$ (x_0 , un point de M), est trivial par hypothèse³⁾. Soit T_{p+1} un champ de $(p + 1)$ -repères

¹⁾ Pendant la préparation du présent article, l'auteur a été titulaire d'une bourse de la National Science Foundation, numéro N.S.F. - G 5863.

²⁾ Dans le Corollaire 5.4 de [11], il y a une faute d'impression. On doit lire: *Toute immersion $f: S^{8s} \rightarrow R^{n+8s}$, où $n \geq 8s - 5$, $s \geq 2$, équivalente à un plongement est équivalente au plongement standard.*

³⁾ Toutes les variétés considérées sont connexes.

sur $M - x_0$, et $\mathfrak{o}(\tau, T) \in \pi_p(\mathrm{SO}(p+1))$ l'obstruction pour étendre T_{p+1} sur M . (τ est le fibré principal associé au fibré des vecteurs tangents à M .)

Dans toute la suite, $\iota^q_* : \pi_p(\mathrm{SO}(p+1)) \rightarrow \pi_p(\mathrm{SO}(p+q+1))$ désignera l'homomorphisme induit par l'injection $\mathrm{SO}(p+1) \rightarrow \mathrm{SO}(p+q+1)$ donnée par

$$\iota^q(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & E_q \end{pmatrix},$$

$A \in \mathrm{SO}(p+1)$, E_q = matrice unité à q lignes et q colonnes.

$\psi_* : \pi_p(\mathrm{SO}(p+q+1)) \rightarrow \pi_p(V_{p+q+1, p+1})$ est induit par ψ qui associe à une matrice de $\mathrm{SO}(p+q+1)$ ses $(p+1)$ premiers vecteurs colonnes.

On pose $j_* = \psi_* \circ \iota^q_* : \pi_p(\mathrm{SO}(p+1)) \rightarrow \pi_p(V_{p+q+1, p+1})$.

Lemme 1.1. *Si $p \leq 2q - 2$, alors $j_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$.*

Démonstration. On va voir tout d'abord que $\iota^q_* \mathfrak{o}(\tau, T)$ est dans le noyau de l'homomorphisme de HOPF-WHITEHEAD $J : \pi_p(\mathrm{SO}(r)) \rightarrow \pi_{p+r}(S^r)$. Soit K une triangulation de M , telle que x_0 soit intérieur à un $(p+1)$ -simplexe de K . On plonge M^{p+1} dans un espace euclidien R^{p+N+1} de grande dimension. ($N \geq p+2$.) La section T de $\tau|_{M-x_0}$ induit alors une application $T^0 : K^p \rightarrow V_{p+N+1, p+1}$ qui est homotope à l'application constante. (K^p désigne le p -squelette de K .) Soit T^0_t une telle homotopie. On désigne par $\pi : V_{p+N+1, p+1} \rightarrow G_{p+N+1, p+1}$ et $\pi' : V_{p+N+1, N} \rightarrow G_{p+N+1, N} = G_{p+N+1, p+1}$ les projections canoniques sur les variétés de GRASSMANN. En utilisant un relèvement suivant π' de l'homotopie $\pi \circ T^0_t$, on obtient une section F du fibré principal ν de groupe $\mathrm{SO}(N)$ associé au fibré normal induit par le plongement $M^{p+1} \subset R^{p+N+1}$ restreint au p -squelette K^p . Les sections T et F fournissent une section $T \times F$ de $\tau \oplus \nu$ restreint à K^p , telle que la valeur du cocycle obstruction $\mathfrak{c}(\tau \oplus \nu, T \times F)$ sur chaque $(p+1)$ -simplexe de K soit nulle. Or,

$$\mathfrak{o}(\tau \oplus \nu, T \times F) = \iota^N_* \mathfrak{o}(\tau, T) + \iota^{p+1}_* \mathfrak{o}(\nu, F).$$

D'après [15], Lemma 1, $J \mathfrak{o}(\nu, F) = 0$. Comme $J \circ i_* = \pm E \circ J$, on a $J \iota^N_* \mathfrak{o}(\tau, T) = \pm E^{N-1} J \iota_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$. E^{N-1} est un isomorphisme dans les dimensions considérées, donc $J \iota_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$, d'où la conclusion : $J \iota^q_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$ pour $q \geq 1$.

Pour en déduire le lemme 1.1, on remarque que d'après I. JAMES [7], Theorem (4.2), (a), pour $p \leq 2q - 2$, l'homomorphisme $\psi_* : \pi_p(\mathrm{SO}(p+q+1)) \rightarrow \pi_p(V_{p+q+1, p+1})$ se factorise en $\psi_* = H_{p+1} \circ J$, où

$$H_{p+1} : \pi_{2p+q+1}(S^{p+q+1}) \rightarrow \pi_p(V_{p+q+1, p+1})$$

est un invariant de HOPF généralisé. Il résulte donc de $J \iota^q_* \mathfrak{o}(\tau, T) = 0$ que

$j_* \circ (\tau, T) = \psi_* \iota_* \circ (\tau, T) = H_{p+1} J \iota_* \circ (\tau, T) = 0$. Le lemme 1.1 est démontré.

§ 2. La condition (C)

Soit $f: S^p \rightarrow R^{p+q}$ une immersion. On va décrire une condition pour f , dont on verra au § 3 qu'elle entraîne pour $p \leq 2q - 2$ la nullité de l'invariant de SMALE c_f .

(C) Il existe une variété à bord V^{p+1} différentiable, orientable, de bord S^p et une immersion $f': V^{p+1} \rightarrow R^{p+q+1}$ telles que:

(C₁) La restriction de f' au bord de V^{p+1} est égale à l'immersion donnée f . (On identifie R^{p+q} au sous-espace $x^{p+q+1} = 0$ de R^{p+q+1} .)

(C₂) $f'(V)$ rencontre R^{p+q} orthogonalement, i. e. la restriction à S^p du fibré normal de f' coïncide avec le fibré normal de f .

(C₃) Le fibré normal de f' est trivial.

Remarque. La condition (C) entraîne que le fibré normal ν_f de l'immersion donnée f est trivial. Il doit en être ainsi puisque ν_f trivial est une condition nécessaire pour $c_f = 0$. (Cf. par exemple [11], Lemme (3.4).)

Remarquons encore que si f est le plongement standard $S^p \subset R^{p+1} \subset R^{p+q}$, la condition (C) est réalisée avec pour V^{p+1} une hémisphère.

On forme la variété différentiable fermée M^{p+1} , réunion de V^{p+1} et du disque D^{p+1} avec identification des bords (par l'application identité $S^p \rightarrow S^p$). Comme V est une π -variété avec frontière non-vide, elle est parallélisable. (Cf. [14], Lemma 1.3.) Donc M^{p+1} est presque parallélisable.

La restriction à $S^p = V \cap D$ du fibré tangent à M est triviale. (Suspension du fibré tangent à S^p .) Soit A_{p+1} un champ de $(p+1)$ -repères tangents à M^{p+1} , défini sur S^p . On peut étendre f' , comme immersion, à un voisinage W de S^p dans M^{p+1} , et $df' | S^p$ appliquée aux repères A_{p+1} fournit une application $\varphi: S^p \rightarrow V_{p+q+1, p+1}$.

Lemme 2.1. *Il existe un élément $\varphi_0 \in \pi_p(SO(p+1))$, tel que $j_* \varphi_0 = \varphi$, et satisfaisant*

$$\varphi_0 + \circ(D) = \circ(M),$$

où $\circ(M)$ est une obstruction pour paralléliser M , et $\circ(D)$ est l'obstruction pour étendre A_{p+1} à l'intérieur de D^{p+1} .

Démonstration. L'application tangentielle $V \rightarrow G_{p+q+1, p+1}$ de V dans la GRASSMANNIENNE des $(p+1)$ -plans orientés de R^{p+q+1} est homotope à zéro. (En effet, cette application est couverte par une application $V \rightarrow V_{p+q+1, q}$ donnée par une section du fibré normal de f' , et $H^{p+1}(V) = 0$.) En utilisant le lemme de relèvement des homotopies, on peut construire sur V^{p+1} un champ

T_{p+1} de $(p+1)$ -repères tangents, tel que l'application $V \rightarrow V_{p+q+1, p+1}$ donnée par $x \rightarrow df'(T_{p+1}(x))$ soit homotope à zéro. Il s'ensuit que la matrice des produits scalaires des vecteurs de A_{p+1} et de T_{p+1} restreint à S^p fournit une application $S^p \rightarrow SO(p+1)$ dont la classe d'homotopie $\varphi_0 \in \pi_p(SO(p+1))$ a pour image φ par l'homomorphisme j_* . On désignera par $\mathfrak{o}(M)$ l'obstruction $\mathfrak{o}(\tau, T)$ pour étendre T_{p+1} comme champ de $(p+1)$ -repères tangents sur M^{p+1} . [$\mathfrak{o}(M) \in \pi_p(SO(p+1))$]. On a $\varphi_0 + \mathfrak{o}(D) = \mathfrak{o}(M)$.

§ 3. L'invariant de SMALE

L'invariant de SMALE c_f d'une immersion $f: S^p \rightarrow R^{p+q}$ est défini comme suit (cf. [16]): Soit $s: S^p \rightarrow R^{p+q}$ une immersion de S^p dans R^{p+q} régulièrement homotope au plongement standard, et telle que pour un voisinage U_0 de $a^* = (-1, 0, \dots, 0) \in S^p$ on ait $s|U_0 = f|U_0$. Soit U un voisinage sphérique de a^* tel que $U \subset \bar{U} \subset U_0$, et soit A_p un champ de repères tangent à S^p défini et continu sur $X = S^p - U$. On introduit un difféomorphisme $r: E_+^p \rightarrow X$ préservant l'orientation, et $z \rightarrow z^*$ la réflexion par rapport au plan de l'équateur $E_+^p \cap E_-^p$. On pose

$$c_f(z) = \begin{cases} (df)(A_a(rz)) & , \quad \text{pour } z \in E_+^p, \\ (ds)(A_a(rz^*)) & , \quad \text{pour } z \in E_-^p. \end{cases}$$

$$(df|X \cap \bar{U} = ds|X \cap \bar{U}.)$$

c_f est une application continue de S^p dans $V_{p+q, p}$. Sa classe d'homotopie, également notée c_f est par définition l'invariant de SMALE de f .

Soit f' l'immersion de $W = S^p \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ dans R^{p+q+1} donnée par $f'(x, t) = f(x) + tn$, où $n = (0, \dots, 0, 1) \in R^{p+q+1}$ (ou toute autre immersion $f': W \rightarrow R^{p+q+1}$, telle que $f'|S^p \times \{0\} = f$ et $(df'/dt)_{t=0} = n$).

La restriction à $S^p \times \{0\}$ du fibré tangent à W est triviale. Soit A_{p+1} un champ de $(p+1)$ -repères tangents à W , défini sur $S^p \times \{0\}$. L'application prolongée df induit une application $\varphi: S^p \rightarrow V_{p+q+1, p+1}$.

Le même procédé appliqué au plongement standard fournit une application $\sigma: S^p \rightarrow V_{p+q+1, p+1}$.

Désignons par $k: V_{p+q, p} \rightarrow V_{p+q+1, p+1}$ l'application qui adjoint le vecteur n à tout p -repère de R^{p+q} . On a le

Lemme 3.1. $k_*(c_f) = \varphi - \sigma$.

Démonstration. $\varphi - \sigma$ est indépendant du choix de A_{p+1} . On prendra $A_{p+1} = \{A_p, t\}$ sur $X = S^p - U$.

Soit Y l'espace obtenu à partir de la réunion disjointe de deux copies S et S' de S^p par identification $x \equiv x'$ pour $x \in U$. On a des inclusions natu-

relles $i : S^p \rightarrow Y$, et $i' : S^p \rightarrow Y$ par composition avec le passage au quotient des identités $S^p \rightarrow S$, $S^p \rightarrow S'$ respectivement.

$k \circ c_f$ se factorise par $\gamma \circ h$, où $h : S^p \rightarrow Y$, $\gamma : Y \rightarrow V_{p+q+1, p+1}$, avec

$$h(z) = \begin{cases} i \circ r(z) & \text{pour } z \in E_+^p, \\ i' \circ r(z^*) & \text{pour } z \in E_-^p. \end{cases}$$

Il est évident que $h(S^p)$ est homologue à $i(S^p) - i'(S^p)$, et comme Y est $(p-1)$ -connexe, h est homotope à $i - i'$. On a donc

$$k \circ c_f = \gamma \circ h \simeq \gamma \circ (i - i') \simeq \gamma \circ i - \gamma \circ i' = \varphi - \sigma.$$

Ceci démontre le Lemme 3.1.

On remarquera que pour $q \geq 2$, $k_* : \pi_p(V_{p+q, p}) \rightarrow \pi_p(V_{p+q+1, p+1})$ est un isomorphisme. (Suite exacte d'homotopie de la fibration $V_{p+q+1, p+1} / V_{p+q, p} = S^{p+q}$.)

Lemme 3.2. Soit $f : S^p \rightarrow R^{p+q}$ une immersion satisfaisant à la condition (C) du § 2. Si $p \leq 2q - 2$, alors $c_f = 0$.

Démonstration. On applique le Lemme 2.1 à l'immersion f et au plongement standard s . Il existe des éléments $\varphi_0, \sigma_0 \in \pi_p(\mathbf{SO}(p+1))$ tels que $j_*\varphi_0 = \varphi$, $j_*\sigma_0 = \sigma$, et satisfaisant

$$\begin{aligned} \varphi_0 + \mathfrak{o}(D) &= \mathfrak{o}(M) \\ \sigma_0 + \mathfrak{o}(D) &= \mathfrak{o}(S^{p+1}), \end{aligned}$$

où $\mathfrak{o}(S^{p+1})$ est l'obstruction pour paralléliser S^{p+1} . Il s'ensuit

$$\varphi_0 - \sigma_0 = \mathfrak{o}(M) - \mathfrak{o}(S^{p+1}),$$

et comme $\iota_*\mathfrak{o}(S^{p+1}) = 0$, en appliquant j_* :

$$\varphi - \sigma = j_*\mathfrak{o}(M).$$

On obtient donc, sans restriction de dimensions, sous l'hypothèse (C):

$$k_*(c_f) = j_*\mathfrak{o}(M^{p+1}).$$

Si $p \leq 2q - 2$, on peut appliquer le Lemme 1.1, et on conclut $c_f = 0$.

Pour obtenir le théorème de l'introduction, il reste à démontrer que si $f : S^p \rightarrow R^{p+q}$ est un plongement, et si $p \leq 2q - 2$, alors la condition (C) est satisfaite.

§ 4. Fin de la démonstration

$f : S^p \rightarrow R^{p+q}$ étant un plongement, il suit de $p \leq 2q - 2$ que le fibré normal de f est trivial. (Cf. [9], Theorem 8.2.) Soit F_q une section arbitraire du fibré principal associé. (F_q est un champ de q -repères orthogonal à $f(S^p)$.)

Par un procédé connu (cf. [9]), on peut associer à f et F_q une classe $\alpha(f, F_q) \in \pi_{p+q}(S^q)$.

Lemme 4.1. *Le plongement $f: S^p \rightarrow R^{p+q}$ étant donné, $p \leq 2q - 2$, on peut choisir F_q pour que $\alpha(f, F_q) = 0^4$.*

De là résulte immédiatement (cf. [15], démonstration du Lemma 1) qu'il existe une variété à bord V^{p+1} de bord S^p , et un plongement $f': V^{p+1} \rightarrow R^{p+q+1}$ satisfaisant aux conditions (C_1) , (C_2) , (C_3) du § 2.

Démonstration du lemme 4.1. La classe $\alpha(f, F_q)$ admet un représentant $\varphi: S^{p+q} \rightarrow S^p$ univoquement déterminé après choix d'un voisinage tubulaire de $f(S^p)$ dans R^{p+q} et d'un difféomorphisme relatif $r: (D^q, S^{q-1}) \rightarrow (S^q, a^*)$ de degré 1. Le point $a \in S^q$, antipode de a^* , est valeur régulière de φ , et $\varphi^{-1}(a) = f(S^p)$. (On identifie R^{p+q} avec son image dans S^{p+q} par projection stéréographique.)

D'après [9], Lemma 8.1, la restriction $p \leq 2q - 2$ implique alors que $\alpha(f, F_q)$ est contenu dans l'image de l'homomorphisme $J: \pi_p(SO(q)) \rightarrow \pi_{p+q}(S^q)$ de HOPF-WHITEHEAD⁵). Il existe donc une classe $\mu \in \pi_p(SO(q))$ telle que $J\mu = \alpha(f, F_q)$.

D'autre part, à toute application $\xi: S^p \rightarrow SO(q)$, on peut associer un nouveau champ $\xi \cdot F_q$ de q -repères, orthogonal à $f(S^p)$. Il suffit, pour tout $x \in S^p$ de faire agir la matrice $\xi(x)$ sur les vecteurs de F_q en $f(x)$. Je dis que

$$\alpha(f, \xi \cdot F_q) = \alpha(f, F_q) + \sigma(J\xi), \quad (*)$$

où ξ désigne également la classe d'homotopie de l'application $\xi: S^p \rightarrow SO(q)$, et σ est l'automorphisme involutif de $\pi_{p+q}(S^q)$ donné par $\sigma(\alpha) = (-1)^p(\varepsilon \circ \alpha)$, avec $\varepsilon = (-1)^{q-1}i_q$.

La formule (*) ci-dessus implique le lemme 4.1.

Remarquons tout d'abord que σ induit un automorphisme de l'image de J . Il suffit de vérifier que $\sigma(J\pi_p(SO(q))) \subset J\pi_p(SO(q))$. Or, on sait que

$$(ai_q) \circ \alpha = a\alpha + \frac{a(a-1)}{2} [i_q, i_q] \circ H_0\alpha.$$

(Cf. [4], formule 6.8.) On applique cette formule avec $\alpha = J\xi$, et on utilise

$$H_0J\xi = E^q\Phi_*\xi, \quad \text{au signe près,}$$

(Cf. [3], Lemma 4. $\Phi_*: \pi_p(SO(q)) \rightarrow \pi_p(S^{q-1})$ est induite par la projection de $X \in SO(q)$ sur son premier vecteur colonne.)

⁴) On comparera ce lemme avec Lemma 6.5 et 6.6 de J. MILNOR [14].

⁵) Dans [9], Lemma 8.1, le lemme reste valable si l'on remplace la stricte inégalité $d < 2n$ portant sur les dimensions par $d \leq 2n$, la démonstration restant inchangée. La validité pour $d \leq 2n$ du diagramme utilisé est fournie par le théorème (77) de I. JAMES, *On the suspension sequence*. Ann. of Math. vol. 65 (1957), 74–107. C'est sous cette nouvelle forme que le lemme est appliqué ici.

$$[i_a, i_a] = J \partial i_a,$$

$\partial: \pi_q(S^q) \rightarrow \pi_{q-1}(\mathbf{SO}(q))$ étant l'homomorphisme bord de la suite exacte d'homotopie de la fibration $\mathbf{SO}(q+1)/\mathbf{SO}(q)$. Enfin, $J\beta \circ E^q\gamma = J(\beta \circ \gamma)$, au signe près, $\beta \in \pi_{q-1}(\mathbf{SO}(q))$, $\gamma \in \pi_q(S^{q-1})$. On en conclut

$$\sigma(J\xi) = J(\pm \xi + c \cdot \partial i_a \circ \Phi_* \xi),$$

c pouvant être 0, -1 ou $+1$ suivant les valeurs de p et q .

Il existe donc une classe $\lambda \in \pi_p(\mathbf{SO}(q))$, telle que $\alpha(f, F_q) = J\mu = \sigma(J\lambda)$. On prendra $\xi = -\lambda$. D'après (*), on a $\alpha(f, \xi \cdot F_q) = \alpha(f, F_q) - \sigma(J\lambda) = 0$.

Le champ $\xi \cdot F_q$ répond aux exigences du lemme 4.1. Reste à démontrer la formule (*).

Soit $s: S^p \rightarrow R^{p+q}$ le plongement standard ($s(S^p) \subset R^{p+1}$), et A_q le champ $(x, t_{p+2}, \dots, t_{p+q})$, où $t_r = (\delta_{r,1}, \dots, \delta_{r,p+q})$. Considérons $\alpha(s, \xi \cdot A_q)$, où $\xi: S^p \rightarrow \mathbf{SO}(q)$ est l'application de la formule (*). On a vu dans [9], 1.8, page 349, que $\alpha(s, \xi \cdot A_q) = \sigma(J\xi)$. Il faut donc démontrer

$$\alpha(f, \xi \cdot F_q) = \alpha(f, F_q) + \alpha(s, \xi \cdot A_q). \quad (**)$$

Des voisinages tubulaires de $f(S^p)$ et $s(S^p)$ étant choisis, ainsi qu'un difféomorphisme relatif $r: (D^q, S^{q-1}) \rightarrow (S^q, a^*)$, on considère les représentants canoniques φ_ξ , φ de $\alpha(f, \xi F_q)$, $\alpha(f, F_q)$, et ψ_ξ de $\alpha(s, \xi \cdot A_q)$.

Pour construire une homotopie entre φ_ξ et $\varphi + \psi_\xi$, on part de l'homotopie triviale $h: S^{p+q} \times I \rightarrow S^q$ donnée par $h(z, t) = \varphi(z)$. Le point $a \in S^q$ (antipode de a^*) est valeur régulière pour h , et $h^{-1}(a) = Q$ est difféomorphe à $S^p \times I$ par le plongement $f'(x, t) = (f(x), t)$ dans $R^{p+q} \times I$. Soit y un point intérieur de Q et $c: I \rightarrow R^{p+q} \times I$ un chemin différentiable, de point final y , dont le point initial se trouve dans $R^{p+q} = R^{p+q} \times \{0\}$, tel que $c(I) \cap Q = \{y\}$. On peut encore supposer que pour s voisin de 0, on a $c(s) = (c(0), s)$, et qu'en son point final, c rencontre Q orthogonalement. On se sert alors de c et d'un champ de repères normaux à $c(I)$ pour définir un plongement $s': D^{p+1} \times I \rightarrow R^{p+q} \times I$, tel que $s' \mid \{0\} \times I = c$, et l'image de $D^{p+1} \times I$ ne rencontre pas Q excepté en un voisinage sphérique U de y sur lequel $D^{p+1} \times \{1\}$ est appliqué par le difféomorphisme $s' \mid D^{p+1} \times \{1\}$. Soit N la variété obtenue par réunion de $Q - U$ et $s'(S^p \times I)$ après avoir arrondi les angles le long de la frontière de U . (Cf. [14], Appendix.) Le champ de q -repères normaux sur $Q - U$ s'étend sans difficulté sur N . On peut même supposer que la restriction de ce champ à $s'(S^p \times \{0\}) = s(S^p)$ est le champ banal formé de la normale à $s(S^p)$ dans R^{p+1} et des $(q-1)$ -vecteurs t_{p+2}, \dots, t_{p+q} .

Comme N est connexe, il existe sur N un chemin différentiable joignant un

point de $s(S^p)$ à un point de $f(S^p) \times \{1\} \subset Q$ qui rencontre le bord de N orthogonalement en ses extrémités et n'a pas d'autre point commun avec ce bord. Soit T un voisinage tubulaire de ce chemin dans N , et $H: D^p \times I \rightarrow T$ un difféomorphisme. L'application $\xi: (S^p, a^*) \rightarrow (SO(q), E)$ détermine une application $\xi \circ r = \xi': (D^p, S^{p-1}) \rightarrow (SO(q), E)$, où E est la matrice unité. On remplace alors le champ F_q de q -repères sur N par F'_q , égal à F_q sur $N - T$ et égal à $\xi'(H^{-1}z) \cdot F_q(z)$ pour $z \in T$. La variété N munie du champ F'_q fournit une homotopie entre φ_ξ et $\varphi + \psi_\xi$. D'où la formule (**).

§ 5. Remarques

Soit $f: S^p \rightarrow R^{p+q}$ un plongement. Pour que c_f soit nul, il est nécessaire que le fibré normal de f soit trivial.

Or, outre le cas $p \leq 2q - 2$ que l'on vient d'étudier, on sait que le fibré normal de f est trivial pour $q \leq 3$. (Bien connu pour $q \leq 2$. Résultat récent de W. S. MASSEY [13] pour $q = 3$.) Il est donc naturel de se demander si l'invariant de SMALE d'un plongement $f: S^p \rightarrow R^{p+q}$ avec $q \leq 3$ est toujours nul.

J'ignore totalement quelle est la situation pour $q = 2$ ou 3. On trouvera ci-dessous quelques résultats, obtenus en collaboration avec J. MILNOR, concernant le cas $q = 1$.

On commence par un problème de groupes d'homotopie:

Problème 1. On sait [2] que $\pi_{8s}(SO(N))$ et $\pi_{8s+1}(SO(N))$ sont cycliques d'ordre 2. ($N \geq 8s + 3$.) Soient ε_{8s} et ε_{8s+1} les générateurs de ces groupes. Les éléments $\alpha_{8s} = J\varepsilon_{8s}$ et $\alpha_{8s+1} = J\varepsilon_{8s+1}$ sont-ils nuls? ($J: \pi_r(SO(N)) \rightarrow \pi_{r+N}(S^N)$ est l'homomorphisme de HOPF-WHITEHEAD.)

On sait que $J\varepsilon_8 \neq 0$ et $J\varepsilon_9 \neq 0$. En outre, $\varepsilon_{8s+1} = \varepsilon_{8s} \circ \eta_{8s}$ pour tout $s \geq 1$, où η_{8s} est le générateur de $\pi_{8s+1}(S^{8s}) \cong \mathbb{Z}_2$. Donc si $J\varepsilon_{8s}$ est nul, alors $J\varepsilon_{8s+1}$ l'est aussi. (Cf. [12], Lemma 1.2.)

On va voir que ce problème est en relation avec les problèmes suivants:

Problème 2. Soit $f: S^p \rightarrow R^{p+1}$ un plongement. L'invariant de SMALE c_f de f est-il nul?

Considérons la région bornée V^{p+1} de R^{p+1} dont le bord est $f(S^p)$. Soit Σ^{p+1} la variété différentiable obtenue à partir de la réunion disjointe $V^{p+1} \cup D^{p+1}$ par identification de $x \in S^p$ avec $f(x) \in V^{p+1}$, pour tout $x \in S^p$. La variété Σ^{p+1} est une sphère d'homotopie⁶, et un raisonnement

⁶) Dans ce qui suit, «sphère d'homotopie» signifie: Variété différentiable ayant le type d'homotopie d'une sphère. Ces variétés ont été étudiées par J. MILNOR [14].

analogue à celui de la démonstration du Lemme 3.1 montre que

$$c_f = \mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) - \mathfrak{o}(S^{p+1}), \quad (5.1)$$

où $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}), \mathfrak{o}(S^{p+1}) \in \pi_p(\mathbf{SO}(p+1))$ sont les obstructions pour paralléliser Σ^{p+1} et S^{p+1} respectivement.

Soient $\tau(\Sigma^{p+1}), \tau(S^{p+1}) \in \pi_{p+1}(B_{\mathbf{SO}(p+1)})$ les classes d'homotopie des applications tangentielles de Σ^{p+1} et S^{p+1} . On a

$$\partial\tau(\Sigma^{p+1}) = \mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}), \quad \partial\tau(S^{p+1}) = \mathfrak{o}(S^{p+1}), \quad (5.2)$$

où $\partial: \pi_{p+1}(B_{\mathbf{SO}(p+1)}) \rightarrow \pi_p(\mathbf{SO}(p+1))$ est l'isomorphisme bord de la suite exacte d'homotopie du fibré classifiant pour $\mathbf{SO}(p+1)$.

Problème 3. *A-t-on $\tau(\Sigma^{p+1}) = \tau(S^{p+1})$, quelle que soit la sphère d'homotopie Σ^{p+1} ?*

Les formules (5.1) et (5.2) montrent qu'une réponse affirmative au Problème 3 entraîne une réponse affirmative au Problème 2.

On va voir que le Problème 3 est équivalent au

Problème 4. *Toute sphère d'homotopie Σ^{p+1} est-elle une π -variété? (C'est-à-dire: Toute sphère d'homotopie plongée dans un espace euclidien d'assez grande dimension admet-elle un fibré normal trivial?)*

Remarque: D'après les résultats de M. HIRSCH [5], Σ^{p+1} est une π -variété si et seulement si l'on peut immerger Σ^{p+1} dans R^{p+2} .

(3) \rightarrow (4). Si $\tau(\Sigma) = \tau(S)$, alors aussi $\mathfrak{o}(\Sigma) = \mathfrak{o}(S)$. Donc $\iota_*\mathfrak{o}(\Sigma) = 0$, i. e. Σ est une π -variété.

(4) \rightarrow (3). Si la sphère d'homotopie Σ^{p+1} est une π -variété, tout plongement $f: \Sigma^{p+1} \rightarrow R^{p+N+1}$ avec $N \geq p+2$ induit un fibré normal trivial. Il s'ensuit que la suspension du fibré tangent (sa classe de S -équivalence) est triviale. Donc $\iota^*\mathfrak{o}(\Sigma) = 0$. Par suite (exacte): $\mathfrak{o}(\Sigma) \in \text{Im } \Delta$, où

$$\Delta: \pi_{p+1}(S^{p+1}) \rightarrow \pi_p(\mathbf{SO}(p+1)).$$

Pour p impair, $\Phi_*\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = \chi(\Sigma^{p+1}) = \chi(S^{p+1}) = \Phi_*\mathfrak{o}(S^{p+1})$, et $\text{Ker } \Phi_* \cap \text{Im } \Delta = 0$. Donc $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = \mathfrak{o}(S^{p+1})$.

Pour p pair, S^{p+1} parallélisable, $\mathfrak{o}(S^{p+1}) = 0$, et $\text{Im } \Delta = 0$. Donc $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = 0 = \mathfrak{o}(S^{p+1})$.

Pour p pair, S^{p+1} non parallélisable, $\text{Im } \Delta$ est isomorphe à \mathbf{Z}_2 , engendré par $\Delta i_{p+1} = \mathfrak{o}(S^{p+1})$. Si $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1})$ était différent de $\mathfrak{o}(S^{p+1})$, on aurait $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = 0$, donc Σ^{p+1} parallélisable. Or, la semi-caractéristique $\chi^*(\Sigma^{p+1})$ de Σ^{p+1} vaut 1. D'après [8], Theorem 9.3, une variété de dimension $p+1$ dont la semi-caractéristique vaut 1 ne peut être parallélisable que s'il existe

dans $\pi_{2p+3}(S^{p+2})$ un élément d'invariant de HOPF 1. D'après J. F. ADAMS [1], ceci implique S^{p+1} parallélisable. On a donc $\mathfrak{o}(\Sigma^{p+1}) = \mathfrak{o}(S^{p+1})$ dans ce cas également.

Comme $\partial : \pi_{p+1}(B_{\mathrm{SO}(p+1)}) \rightarrow \pi_p(\mathrm{SO}(p+1))$ est un isomorphisme, on a aussi $\tau(\Sigma^{p+1}) = \tau(S^{p+1})$.

Résultats connus (pour autant que je sache):

Théorème 5.1. *Pour $p \neq 8s, 8s+1$, toute sphère d'homotopie de dimension $p+1$ est une π -variété.*

Théorème 5.2. *Toute sphère d'homotopie de dimension 9 ou 10 est une π -variété. Pour $p = 8s$ avec $s \geq 1$, les deux propositions suivantes sont équivalentes. Pour $p = 8s+1$, la proposition (b) entraîne (a).*

(a) *Toute sphère d'homotopie Σ^{p+1} est une π -variété*

(b) $J_{\varepsilon_p} \neq 0$.

On se trouve ramené au Problème 1.

A l'exception des cas $p = 8s$ ou $p = 8s+1$ avec un $s \geq 2$, on a donc, en vertu des remarques qui précèdent :

Corollaire 5.1. *Avec la restriction ci-dessus pour p , tout plongement $f : S^p \rightarrow R^{p+1}$ est régulièrement homotope au plongement standard.*

Corollaire 5.2. *Avec la même restriction pour p , le fibré tangent à toute sphère d'homotopie Σ^{p+1} est donné par le même élément de $\pi_{p+1}(B_{\mathrm{SO}(p+1)})$ que le fibré tangent de la sphère ordinaire.*

Ce corollaire s'applique en particulier aux sphères de MILNOR dont les dimensions sont favorables.

Démonstration du théorème 5.1.

$f : \Sigma^{p+1} \rightarrow R^{p+N+1}$ étant un plongement dans un espace euclidien de grande dimension ($N \geq p+2$), et ν le fibré principal normal de groupe $\mathrm{SO}(N)$, soit F_N une section de ν restreint à $\Sigma - x^0$. L'obstruction $\mathfrak{o}(\nu, F_N)$ pour étendre F_N (comme section de ν) sur Σ^{p+1} est un élément de $H^{p+1}(\Sigma^{p+1}; \pi_p(\mathrm{SO}(N))) = \pi_p(\mathrm{SO}(N))$.

On connaît $\pi_p(\mathrm{SO}(N))$ pour $N \geq p+2$. (Cf. [2].) Les valeurs sont

$$\begin{array}{cccccccc} Z_2 & Z_2 & 0 & Z & 0 & 0 & 0 & Z \end{array}$$

pour

$$p \equiv \begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array} \text{ modulo } 8$$

respectivement. ($p \geq 1$.)

Le théorème 5.1 (qui revient à affirmer que $\mathfrak{o}(\nu, F_N) = 0$) est donc banal pour $p \equiv 2, 4, 5, 6$ modulo 8.

On a exclu $p \equiv 0, 1$ modulo 8. Il reste donc à examiner le cas où $p = 4k - 1$. Pour ces valeurs de p , $\mathfrak{o}(\nu, F_N)$ est un entier au signe près. On sait que

$$p_k[\Sigma^{4k}] = a_k \cdot (2k - 1)! \mathfrak{o}(\nu, F_N),$$

où $p_k \in H^{4k}(\Sigma^{4k}; \mathbb{Z})$ est la classe de Pontrjagin de Σ^{4k} en dimension $4k$, et $a_k = 1 + \sin^2(k\pi/2)$. (Cf. [10], Lemma (1.1).)

Comme l'index de Σ^{4k} est lié à p_k par

$$I(\Sigma^{4k}) = s_k p_k + P(p_1, \dots, p_{k-1}),$$

(formule de l'index, F. HIRZEBRUCH [6], Hauptsatz 8.2.2.), et que $H^i(\Sigma^{4k}) = 0$ pour $1 \leq i \leq 4k - 1$ entraîne $I(\Sigma^{4k}) = 0$, $P(p_1, \dots, p_{k-1}) = 0$, il s'ensuit $p_k = 0$. ($s_k \neq 0$.) Donc aussi $\mathfrak{o}(\nu, F_N) = 0$. Le théorème 5.1 est démontré.

Démonstration du théorème 5.2. La première assertion découle des suivantes et de $J\varepsilon_8 \neq 0$, $J\varepsilon_9 \neq 0$.

(b) \rightarrow (a): Soit Σ^{p+1} une sphère d'homotopie et $f: \Sigma^{p+1} \rightarrow R^{p+N+1}$ un plongement. ($N \geq p + 2$.) Soit F_N une section du fibré principal normal ν_f restreint à $\Sigma - x_0$. Considérons l'obstruction $\mathfrak{o}(\nu, F_N) \in \pi_p(SO(N)) \cong \mathbb{Z}_2$ pour $p = 8s$ ou $8s + 1$. On sait que $J\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) = 0$. (Cf. [15], Lemma 1.) Donc si $J\varepsilon_p \neq 0$, il s'ensuit $\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) \neq \varepsilon_p$. Donc $\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) = 0$. Autrement dit, Σ^{p+1} est une π -variété.

(a) \rightarrow (b): On démontre la contraposition. Supposons $J\varepsilon_p = 0$. D'après [15], Lemma 1, il existe une variété presque parallélisable M^{p+1} et un plongement $f: M^{p+1} \rightarrow R^{p+N+1}$ avec une section F_N du fibré principal normal ν_f restreint à $M - x_0$, tels que $\mathfrak{o}(\nu_f, F_N) = \varepsilon_p$. On simplifie M^{p+1} par chirurgie. (Cf. J. MILNOR [14], § 5.) Le résultat est une sphère d'homotopie Σ_0^{p+1} plongée dans R^{p+N+1} , et l'application caractéristique du fibré normal est ε_p . Cette sphère d'homotopie Σ_0^{p+1} n'est donc pas une π -variété. D'où le théorème 5.2.

En relation avec le Problème 2 (invariant de SMALE d'un plongement $f: S^p \rightarrow R^{p+1}$), on a le

Problème 5. Soit $f: S^p \rightarrow R^{p+q}$ une immersion et $h: S^p \rightarrow S^p$ un difféomorphisme de degré 1. A-t-on $c_{f \circ h} = c_f$?

On va voir que la réponse est affirmative si $p \leq 2q - 2$ en vertu du théorème des §§ 1-4, et également si p est une dimension pour laquelle le Problème 2 admet une réponse affirmative. (Donc en vertu du Corollaire 5.1, pour $p \neq 8s, 8s + 1$ avec $s \geq 2$.) Dans ce deuxième cas la réponse au Problème 5 est affirmative sans restriction sur q .

On peut regarder h comme un plongement $h: S^p \rightarrow R^{p+1}$. L'inclusion $u:$

$R^{p+1} \rightarrow R^{p+q}$ induit une application $v: V_{p+1,p} \rightarrow V_{p+q,p}$, et on a $c_{u \circ h} = v_*(c_h)$. On va démontrer que

$$c_{f \circ h} = c_f + c_{u \circ h}. \quad (5.3)$$

Il s'ensuit que $c_{f \circ h} = c_f$ si

- 1.) $p \leq 2q - 2$, car alors $c_{u \circ h} = 0$ en vertu du théorème de l'introduction;
- 2.) $p \neq 8s$ et $p \neq 8s + 1$ avec $s \geq 2$, car alors en vertu du Corollaire 5.1, on a $c_h = 0$, donc aussi $c_{u \circ h} = v_*(c_h) = 0$.

Reste à démontrer la formule (5.3). Soit $W = S^p \times [-\varepsilon, \varepsilon]$, et $f': W^{p+1} \rightarrow R^{p+q+1}$ l'immersion donnée par $f'(x, t) = (f(x), t)$. Soit A_{p+1} la restriction à $S^p \times \{0\}$ d'un champ de $(p+1)$ -repères tangents à W (qui est parallélisable). df' induit une application $\varphi: S^p \rightarrow V_{p+q+1,p+1}$. Le même argument appliqué au plongement standard fournit $\sigma: S^p \rightarrow V_{p+q+1,p+1}$. On a vu (Lemme 3.1) que $k_*c_f = \varphi - \sigma$.

Soit $h': W \rightarrow W$ le difféomorphisme donné par $h'(x, t) = (h(x), t)$, et soit $A'_{p+1} = dh'(A_{p+1})$.

En utilisant ci-dessus A'_{p+1} au lieu de A_{p+1} , on obtient φ' et $\sigma': S^p \rightarrow V_{p+q+1,p+1}$. Il existe une application $\delta: S^p \rightarrow SO(p+1)$, donnée par la matrice des produits scalaires des vecteurs de A_{p+1} et A'_{p+1} , telle que

$$j_*\delta = \varphi' - \varphi = \sigma' - \sigma.$$

On en conclut :

$$\begin{aligned} k_*c_{f \circ h} &= \varphi' - \sigma = \varphi' - \sigma' + \sigma' - \sigma, \\ &= \varphi - \sigma + \sigma' - \sigma, \\ &= k_*c_f + k_*c_{u \circ h} = k_*(c_f + c_{u \circ h}). \end{aligned}$$

Pour $q \geq 2$, k_* est un isomorphisme et (5.3) s'ensuit. Pour $q = 1$, le même principe de démonstration s'applique, en faisant appel à un champ de normales à $f(S^p)$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. F. ADAMS, *On the nonexistence of elements of HOPF invariant one*. Bull. Amer. Math. Soc. 64 (1958), 279–282.
- [2] R. BOTT, *The stable homotopy of the classical groups*. Ann. of Math., 70 (1959), 313–337.
- [3] P. J. HILTON, *A note on the P-homomorphism in homotopy groups of spheres*. Proc. of the Cambridge Phil. Soc., 51 (1955), 230–233.
- [4] P. J. HILTON, *On the homotopy groups of the union of spheres*. Journal of the London Math. Soc., 30 (1955), 154–172.
- [5] M. HIRSCH, *Immersion of manifolds*. Trans. Amer. Math. Soc. 93 (1959), 242–276.
- [6] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie*. Springer (1956).
- [7] I. JAMES, *On the iterated suspension*. Quart. Journal of Math., 5 (1954), 1–10.

- [8] M. Kervaire, *Relative characteristic classes*. Amer. Journal of Math., vol. LXXIX (1957), 517–558.
- [9] M. Kervaire, *An interpretation of G. Whitehead's generalization of the Hopf invariant*. Ann. of Math., 69 (1959), 345–365.
- [10] M. Kervaire, *On the Pontryagin classes of certain $SO(n)$ -bundles over manifolds*. Amer. Journal of Math., vol. LXXX (1958), 632–638.
- [11] M. Kervaire, *Sur le fibré à une sphère immergée dans l'espace euclidien*. Comment. Math. Helv., 33 (1959), 121–131.
- [12] M. Kervaire, *Some non-stable homotopy groups of Lie groups*. Illinois J. of Math., à paraître.
- [13] W. S. Massey, *On the normal bundle of a sphere imbedded in euclidean space*. Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître).
- [14] J. Milnor, *Differentiable manifolds which are homotopy spheres* (à paraître).
- [15] J. Milnor and M. Kervaire, *Bernoulli numbers, homotopy groups and a theorem of Rohlin*. Proc. Int. Math. Congress. Edinburgh (1958). A paraître.
- [16] S. Smale, *The classification of immersions of spheres in euclidean spaces*. Ann. of Math., 69 (1959), 327–344.

(Reçu le 28 septembre 1959)