

**Zeitschrift:** Commentarii Mathematici Helvetici  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 34 (1960)

**Artikel:** Zum potentialtheoretischen Aspekt der ALEXANDROWschen  
Flächentheorie.  
**Autor:** Huber, Alfred  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26627>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 17.04.2026

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# Zum potentialtheoretischen Aspekt der ALEXANDROWSchen Flächentheorie

VON ALFRED HUBER, Zürich

## 1. Einleitung

Bekanntlich können auf jeder genügend regulären Fläche im kleinen isotherme Parameter eingeführt werden. In neuerer Zeit haben mehrere Autoren – wir erwähnen A. WINTNER [15, 16], S. S. CHERN, P. HARTMAN und A. WINTNER [4], I. G. RESCHETNJAK [13] – sich zum Ziel gesetzt, die Existenz eines solchen Koordinatensystems unter möglichst schwachen Voraussetzungen herzuleiten. Insbesondere hat RESCHETNJAK folgendes Resultat gefunden<sup>1)</sup>:

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung im Sinne von A. D. ALEXANDROW [1, S. 493], und sei  $D$  ein kreishomöomorpher Bereich in  $M$ , dessen Berandung eine Schwenkung von beschränkter Variation [1, S. 358] besitzt. Dann existieren ein Gebiet  $G$  in der komplexen  $z$ -Ebene, eine in  $G$  definierte, reellwertige Funktion  $u(z)$  sowie eine topologische Abbildung  $\Phi$  von  $G$  auf  $D$  derart, daß folgendes erfüllt ist:

1. Es gilt die Darstellung

$$u(z) = h(z) + \int_G \log |z - \zeta| d\mu(e_\zeta), \quad (1.1)$$

wobei  $h$  eine in  $G$  harmonische Funktion,  $\mu$  eine daselbst definierte vollständig additive Mengenfunktion darstellt.

2.  $\Phi$  ist eine Isometrie, falls wir in  $D$  die durch  $M$  induzierte und in  $G$  die Metrik

$$\varrho(z_1, z_2) = \inf_{L} \int_L e^{u(z)} |dz| \quad (1.2)$$

betrachten, wobei über alle  $z_1$  mit  $z_2$  verbindenden Polygone  $L$  in  $G$  variiert wird.

3. Die Mengenfunktion  $\mu$  entspricht bis auf einen konstanten Faktor der ALEXANDROWSchen Krümmung  $\omega$ . Es ist nämlich

$$\mu(e) = -\frac{1}{2\pi} \omega(\Phi^{-1}(e)) \quad (1.3)$$

für jede BORELMenge  $e$  in  $G$ .

---

<sup>1)</sup> Für Begriffe und Resultate der ALEXANDROWSchen Flächentheorie sei der Leser auf [1] verwiesen. Dort (Seite 503 ff.) befindet sich auch eine kurze Orientierung über das RESCHETNJAKsche Ergebnis.

Umgekehrt erweist sich jede Metrik der Form (1.2), wobei  $u(z)$  als Differenz subharmonischer Funktionen – also lokal in der Form (1.1) – darstellbar ist, als Metrik beschränkter Krümmung.

Da jeder Punkt von  $M$  als innerer Punkt eines solchen Bereiches  $D$  aufgefaßt werden darf, und da dann ferner in einer genügend kleinen Umgebung dieses Punktes die Metrik von  $M$  mit der durch  $M$  in  $D$  induzierten übereinstimmt [1, S. 80], sichert dieses Resultat die Existenz lokaler isothermer Parameter auf  $M$ . Von diesem Ergebnis ausgehend beweisen wir in der vorliegenden Arbeit den folgenden globalen Darstellungssatz:

**Satz A.** *Jede (offene oder geschlossene) orientierbare Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung ist isometrisch einem Raum von folgender Art:*

*Auf einer RIEMANNschen Fläche  $R$  sei ein konform invariantes Linienelement*

$$ds = e^{u(z)} |dz| \quad (z = \text{Ortsuniformisierende}) \quad (1.4)$$

*definiert, wobei  $u$  sich als Differenz subharmonischer Funktionen darstellen lasse. Zwei beliebigen Punkten  $p$  und  $q$  auf  $R$  werde sodann der Abstand*

$$\rho(p, q) = \inf_L \int_L e^{u(z)} |dz| \quad (1.5)$$

*zugeordnet. Dabei durchlaufe  $L$  die Gesamtheit aller stückweise analytischen Kurven, welche  $p$  mit  $q$  verbinden.*

*Umgekehrt stellt jeder derartige Raum eine Mannigfaltigkeit beschränkter Krümmung dar.*

Verzichtet man darauf, die Orientierbarkeit von  $M$  vorauszusetzen, so bleibt dieser Satz trotzdem richtig, falls man unter  $R$  eine «verallgemeinerte RIEMANNsche Fläche» versteht, in deren Definition neben den konformen Nachbarrelationen [10, S. 53] auch antikonforme zugelassen sind.

Außer dem Beweis von Satz A enthält die vorliegende Arbeit die Herleitung einer rein potentialtheoretischen Definition der Kurvenlänge (Satz B). Wir beginnen mit einigen Lemmata über subharmonische Funktionen, welche – wie sich nachträglich herausgestellt hat – zwar nicht alle zum Beweis der beiden Sätze benötigt werden, die aber für sich von Interesse sind.

## 2. Hilfssätze über subharmonische Funktionen

**Lemma 1.** *In einem einfach zusammenhängenden Gebiet  $G$  der  $z$ -Ebene sei eine als Differenz subharmonischer Funktionen darstellbare Funktion  $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$  definiert. Wir setzen voraus, daß die kleinsten harmonischen Majo-*

ranten<sup>2)</sup>  $h_1$  von  $u_1$  und  $h_2$  von  $u_2$  in  $G$  existieren, ferner daß  $\alpha_1, \alpha_2 < 2$ , wobei  $\alpha_1 = \mu_1(G)$  und  $\alpha_2 = \mu_2(G)$  die  $u_1$  und  $u_2$  zugeordneten Totalmassen bezeichnen. Dann ist

$$|\iint_G e^u dx dy - \iint_G e^h dx dy| \leq \max\left(\frac{\alpha_1}{2}, \frac{\alpha_2}{2 - \alpha_2}\right) \cdot \iint_G e^h dx dy \tag{2.1}$$

wobei  $h(z) = h_1(z) - h_2(z)$ .

( $z = x + iy$ )

**Beweis.** Es gelten die Darstellungen von F. RIESZ [14]

$$u_1(z) = h_1(z) - \int_G g(z, \zeta) d\mu_1(e_\zeta) \tag{2.2}$$

und

$$u_2(z) = h_2(z) - \int_G g(z, \zeta) d\mu_2(e_\zeta), \tag{2.3}$$

wobei  $g$  die GREENSche Funktion von  $G$ ,  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die  $u_1$  und  $u_2$  zugeordneten Massenverteilungen bezeichnen. In [6] wurde die Ungleichung

$$\iint_G e^u dx dy \leq \frac{2}{2 - \alpha_2} \iint_G e^h dx dy \tag{2.4}$$

bewiesen für  $G = [|z| < 1]$ . (Sie folgt dort aus den Beziehungen (2.4), (2.5) und (2.11), wobei aber die dortigen Funktionen  $u$  und  $h$  durch  $u/2$  und  $h/2$  zu ersetzen sind.) Die Gültigkeit dieser Abschätzung für beliebige einfach zusammenhängende Gebiete  $G$  folgt daraus durch konforme Abbildung<sup>3)</sup>. Somit ist

$$\begin{aligned} (\iint_G e^h dx dy)^2 &= \left( \iint_G \exp \left\{ \frac{h(z)}{2} + \frac{1}{2} \int_G g(z, \zeta) d\mu_1(e_\zeta) \right\} \right. \\ &\quad \left. \exp \left\{ \frac{h(z)}{2} - \frac{1}{2} \int_G g(z, \zeta) d\mu_1(e_\zeta) \right\} dx dy \right)^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\iint_G \exp \{h(z) + \int_G g(z, \zeta) d\mu_1(e_\zeta)\} dx dy \cdot \iint_G \exp \{h(z) - \int_G g(z, \zeta) d\mu_1(e_\zeta)\} dx dy \leq \\ &\frac{2}{2 - \alpha_1} \iint_G e^h dx dy \iint_G e^u dx dy. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\iint_G e^u dx dy - \iint_G e^h dx dy \geq -\frac{\alpha_1}{2} \iint_G e^h dx dy. \tag{2.5}$$

Aus (2.4) und (2.5) ergibt sich die Behauptung.

<sup>2)</sup> Wir verwenden Begriffe und Sätze der Theorie der subharmonischen Funktionen, wie sie etwa im Buche von T. RADÓ [11] dargelegt sind.

<sup>3)</sup> Damit ist gleichzeitig bewiesen, daß die Existenz des rechten Integrals in (2.4) diejenige des linken zur Folge hat.

**Lemma 2.** *Läßt sich die in einem Gebiete  $G$  der  $z$ -Ebene definierte Funktion  $u$  als Differenz subharmonischer Funktionen  $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$  darstellen, so gilt*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} e^u dx dy = e^{u(z_0)} \quad (2.6)$$

für jeden Punkt  $z_0$  von  $G$ , in dem  $(u_1(z_0), u_2(z_0)) \neq (-\infty, -\infty)$  ist.

**Beweis.** Zuerst beweisen wir

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} e^u dx dy \geq e^{u(z_0)}. \quad (2.7)$$

Diese Ungleichung ist trivial, wenn  $u_1(z_0) = -\infty$  ( $u_2(z_0)$  endlich), also  $e^{u(z_0)} = 0$  ist.

Ist  $u_2(z_0) = -\infty$  ( $u_1(z_0)$  endlich, also  $e^{u(z_0)} = \infty$ ), so gibt es zu jeder vorgegebenen Zahl  $N$  einen Radius  $\varrho_N > 0$  mit der Eigenschaft, daß in  $|z - z_0| < \varrho_N$  die Ungleichung  $u_2(z) < -N$  erfüllt ist.  $e^{u_1+N}$  ist subharmonisch. Für  $0 < r < \varrho_N$  gilt somit

$$e^{u_1(z_0)+N} \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} e^{u_1+N} dx dy \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} e^u dx dy.$$

Da  $N$  beliebig groß gewählt werden darf, folgt daraus (2.7).

Seien nun  $u_1(z_0)$  und  $u_2(z_0)$  beide endlich. Mit  $h_{1r}$  und  $h_{2r}$  bezeichnen wir die besten harmonischen Majoranten von  $u_1$  und  $u_2$  für  $|z - z_0| < r$ . Sei  $h_r = h_{1r} - h_{2r}$ .  $e^{h_r}$  ist subharmonisch. Somit gilt

$$e^{u(z_0)} = \lim_{r \rightarrow 0} e^{h_r(z_0)} \leq \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} e^{h_r} dx dy. \quad (2.8)$$

Da  $u_1(z_0)$  und  $u_2(z_0)$  endlich sind, erfüllen die  $u_1$  und  $u_2$  zugeordneten Massenbelegungen  $\mu_1$  und  $\mu_2$  die Beziehungen

$$\lim_{r \rightarrow 0} \mu_1(|z - z_0| < r) = \lim_{r \rightarrow 0} \mu_2(|z - z_0| < r) = 0.$$

Unter Anwendung von Lemma 1 erhält man

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} e^{h_r} dx dy = \liminf_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} e^u dx dy. \quad (2.9)$$

(Es ist zunächst denkbar, daß diese Beziehung die Form  $+\infty = +\infty$  annehmen kann; nachträglich stellt sich allerdings heraus, daß dieser Fall nicht auftritt.) (2.7) folgt aus (2.8) und (2.9).

Wir haben noch

$$\limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} e^u dx dy \leq e^{u(z_0)} \quad (2.10)$$

zu beweisen. Im Falle  $u_2(z_0) = -\infty$  ( $u_1(z_0)$  endlich) sagt diese Ungleichung nichts aus.

Sei also  $u_2(z_0)$  endlich. Wir zeigen: Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\varrho_0(\varepsilon) > 0$  derart, daß für alle  $r < \varrho_0(\varepsilon)$

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} e^{-u_2} dx dy \leq e^{-u_2(z_0) + \varepsilon} \quad (2.11)$$

ist. Zu diesem Zweck betrachten wir die RIESZSCHE Zerlegung [14]

$$u_2(z) = h_2(z) + \int_K \log |z - \zeta| d\mu_2(e_\zeta) \quad (2.12)$$

für eine in  $G$  liegende Kreisscheibe  $K$  vom Zentrum  $z_0$  und einem Radius  $< 1$ . Es ist dann

$$\gamma = h_2(z_0) - u_2(z_0) = - \int_K \log |\zeta| d\mu_2(e_\zeta) \geq 0. \quad (2.13)$$

Da  $h_2(z)$  harmonisch ist, gibt es ein  $\varrho_1(\varepsilon) > 0$  derart, daß für  $|z - z_0| < \varrho_1$

$$h_2(z) > h_2(z_0) - \frac{\varepsilon}{2} \quad (2.14)$$

ist. Ferner behaupten wir die Existenz einer Zahl  $\varrho_2(\varepsilon) > 0$  mit der Eigenschaft, daß für  $|z - z_0| < \varrho_2$

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} \exp \left\{ - \int_K \log |z - \zeta| d\mu_2(e_\zeta) \right\} dx dy < e^{\gamma + \frac{\varepsilon}{2}} \quad (2.15)$$

ist. Zum Beweise betrachten wir zunächst den Spezialfall, da  $\mu_2(e_\zeta)$  aus einer einzigen Punktmasse  $m$  in einem Punkte  $\zeta_0 \neq z_0$  besteht. (Wegen  $u_2(z_0) > -\infty$  kann in  $z_0$  keine Masse liegen.) Dann ist  $m = -\gamma / \log |z_0 - \zeta_0|$  und es wird

$$\frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} \exp \left\{ - \log |z - \zeta| d\mu_2(e_\zeta) \right\} dx dy = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z-z_0| < r} |z - \zeta_0|^{\frac{\gamma}{|\log |z_0 - \zeta_0||}} dx dy. \quad (2.16)$$

Aus einer elementaren Betrachtung ersieht man, daß dieser Mittelwert stets kleiner ist als

$$\frac{1}{\pi |z_0 - \zeta_0|^2} \iint_{|z-\zeta_0| < |z_0-\zeta_0|} |z - \zeta_0|^{\frac{\gamma}{|\log |z_0 - \zeta_0||}} dx dy = - \frac{2e^\gamma}{2 + \gamma / \log |z_0 - \zeta_0|}. \quad (2.17)$$

Aus (2.17) schließen wir, daß es eine Zahl  $\delta(\varepsilon, \gamma) > 0$  gibt mit folgender Eigenschaft: Für alle  $\zeta_0$  in  $|z - z_0| < \delta$  ist der Mittelwert (2.17) – und damit a fortiori (2.16), und zwar letzterer für alle in Frage kommenden Werte von  $r$  – kleiner als  $e^{\gamma + \varepsilon/2}$ . Für  $\zeta_0 \in [|z - z_0| \geq \delta] \cap K$  sind aber die mittelnden Funktionen  $|z - \zeta_0|^{\frac{\gamma}{|\log|z_0 - \zeta_0|}}$  im Punkte  $z_0$  gleichgradig stetig. Da sie ferner für  $z = z_0$  alle den Wert  $e^\gamma$  annehmen, folgt: Es gibt eine nicht von  $\zeta_0$  abhängige Zahl  $\varrho_2(\gamma, \varepsilon) > 0$  derart, daß der Mittelwert (2.16) für alle Werte  $r < \varrho_2$  kleiner als  $e^{\gamma + \varepsilon/2}$  ist. Damit ist (2.15) für den Spezialfall einer Einzelmasse bewiesen. (Dieser Beweis wäre wesentlich einfacher ausgefallen, falls man sich mit einem von  $\zeta_0$  abhängigen  $\varrho_2$  begnügt hätte. Damit ließe sich jedoch der nun folgende Übergang auf allgemeine Massenverteilungen nicht durchführen.)

Nun nehmen wir an, daß  $\mu_2$  aus endlich vielen Einzelmassen

$$-\frac{p_1\gamma}{\log|z_0 - \zeta_1|} \text{ in } \zeta_1, \quad -\frac{p_2\gamma}{\log|z_0 - \zeta_2|} \text{ in } \zeta_2, \dots, \quad -\frac{p_m\gamma}{\log|z_0 - \zeta_m|} \text{ in } \zeta_m$$

bestehe, wobei  $p_k > 0$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ). (2.13) ist äquivalent mit  $\sum_{k=1}^m p_k = 1$ . Eine Anwendung der HÖLDERSchen Ungleichung [5, S. 140] führt uns auf den bereits behandelten Spezialfall zurück. Für  $r < \varrho_2(\gamma, \varepsilon)$  ist nämlich

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z - z_0| < r} \exp \left\{ - \int_K \log|z - \zeta| d\mu_2(e_\zeta) \right\} dx dy = \\ & \frac{1}{\pi r^2} \iint_{|z - z_0| < r} \prod_{k=1}^m \pi (|z - \zeta_k|^{\frac{\gamma}{|\log|z_0 - \zeta_k|}})^{p_k} dx dy \leq \\ & \frac{1}{\pi r^2} \prod_{k=1}^m \left( \iint_{|z - z_0| < r} |z - \zeta_k|^{\frac{\gamma}{|\log|z_0 - \zeta_k|}} dx dy \right)^{p_k} < e^{\gamma + \frac{\varepsilon}{2}}. \end{aligned}$$

Die Tatsache, daß  $\varrho_2$  nur von  $\gamma$  und  $\varepsilon$  abhängt, ermöglicht es, die Einzelmassen zu verschmieren und (2.15) für beliebige Verteilungen  $\mu_2$  zu beweisen. Dies sei dem Leser überlassen. Setzen wir  $\varrho_0 = \min[\varrho_1, \varrho_2]$ , so folgt (2.11) aus (2.12) bis (2.15).

Ist  $u_1(z_0)$  endlich, so gibt es zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  ein  $\varrho_0^*(\varepsilon) > 0$  derart, daß für  $|z - z_0| < \varrho_0^*$

$$u_1(z) < u_1(z_0) + \varepsilon \quad (2.18)$$

ist. (2.10) ergibt sich aus (2.11) und (2.18).

Ist  $u_1(z_0) = -\infty$ , so gibt es zu jeder vorgegebenen Zahl  $N$  ein  $\varrho_N > 0$

derart, daß für  $|z - z_0| < \varrho_N$

$$u_1(z) < -N \tag{2.19}$$

ist. Dann folgt (2.10) aus (2.11) und (2.19). Q.E.D.

**Lemma 3.** *Im Ringgebiet  $\Omega = [R < |z| < 1]$ ,  $0 < R < 1$ , sei eine als Differenz subharmonischer Funktionen darstellbare Funktion  $u(z) = u_1(z) - u_2(z)$  definiert. Wir setzen voraus, daß die kleinsten harmonischen Majoranten  $h_1$  von  $u_1$  und  $h_2$  von  $u_2$  in  $\Omega$  existieren und daß die Totalmasse  $\mu_2(\Omega)$  endlich sei. Dann gilt*

$$\liminf_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} e^u |dz| = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} e^h |dz|, \tag{2.20}$$

wobei  $h(z) = h_1(z) - h_2(z)$ .

**Bemerkungen.** Die Voraussetzung  $\mu_2(\Omega) < \infty$  darf nicht weggelassen werden. Dies erhellt aus folgendem Beispiel: Sei

$$u(z) = \frac{1}{2} \log |z - 1| + \int_0^1 g(z, t) (1 - t)^{-\frac{3}{2}} dt, \tag{2.21}$$

wobei  $g$  die GREENSche Funktion für das Innere des Einheitskreises bezeichnet. Dann ist

$$h(z) = -\frac{1}{2} \log |z - 1|. \tag{2.22}$$

Mit den Bezeichnungen  $z = r e^{i\varphi}$ ,  $\varrho = 1 - r$  und  $\tau = 1 - t$  gilt für  $t \geq r$

$$\begin{aligned} g(z, t) &= \frac{1}{2} \log \frac{1 - 2rt \cos \varphi + r^2 t^2}{r^2 - 2rt \cos \varphi + t^2} \\ &= \frac{1}{2} \log \left[ 1 + \frac{(1 - r^2)(1 - t^2)}{r^2 - 2rt \cos \varphi + t^2} \right] \geq \frac{\varrho \tau}{4 |z - 1|^2}. \end{aligned} \tag{2.23}$$

Man verifiziert leicht, daß für  $\frac{1}{2} \leq r \leq 1$  und  $-\pi \leq \varphi \leq +\pi$

$$\frac{|\varphi|}{4} \leq |z - 1| \leq |\varphi| + \varrho \tag{2.24}$$

ist. Aus (2.22) und der linken Ungleichung (2.24) schließen wir, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} e^h |dz| < \infty \tag{2.25}$$

ist. Aus (2.21), (2.23) und der rechten Ungleichung (2.24) folgt

$$\begin{aligned} \liminf_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} e^u |dz| &\geq \liminf_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} [e^h \int_0^1 g(z, t) (1 - t)^{-\frac{3}{2}} dt] |dz| \\ &\geq \liminf_{\varrho \rightarrow 0} \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{\varrho(1 - \varrho)}{2(\varrho + |\varphi|)^{5/2}} d\varphi = +\infty. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Aus (2.25) und (2.26) ersehen wir, daß in diesem Fall (2.20) nicht erfüllt ist.

**Beweis.** Da  $h(z)$  harmonisch ist, ist  $|z| e^{h(z)}$  subharmonisch, somit das auf der rechten Seite von (2.20) stehende Integral (als Mittelwert zu interpretieren) eine konvexe Funktion von  $\log r$ . Daraus folgt die Existenz des Limes, dessen Wert endlich oder  $+\infty$  sein kann. Es gelten die RIESZSchen Zerlegungen

$$u_1(z) = h_1(z) - \int_{\Omega} g(z, \zeta) d\mu_1(e_{\zeta}) \quad (2.27)$$

und

$$u_2(z) = h_2(z) - \int_{\Omega} g(z, \zeta) d\mu_2(e_{\zeta}), \quad (2.28)$$

wobei nun  $g$  die GREENSche Funktion von  $\Omega$  bezeichnet. Wir beweisen zunächst

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} \exp \left\{ h(z) - \int_{\Omega} g(z, \zeta) d\mu_1(e_{\zeta}) \right\} |dz| = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} e^h |dz|. \quad (2.29)$$

Die Existenz des linken Grenzwerts verifiziert man auf dieselbe Weise wie diejenige des rechten. Wir führen die Abkürzung

$$v(z) = h(z) - \int_{\Omega} g(z, \zeta) d\mu_1(e_{\zeta})$$

ein und definieren

$$v_n(z) \left\{ \begin{array}{l} = v(z), \text{ falls } 1 - \frac{1}{n} \leq |z| < 1, \\ = \text{beste harmonische Majorante von } v \text{ für das Gebiet} \\ R < |z| < 1 - \frac{1}{n}, \text{ falls } R < |z| < 1 - \frac{1}{n}, \end{array} \right.$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ .  $v_n$  ist subharmonisch in  $R < |z| < 1$ . Daraus folgt dasselbe für  $|z| e^{v_n}$ . Also ist  $\int_{|z|=r} e^{v_n} |dz|$  eine konvexe Funktion von  $\log r$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Trivialerweise ist

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} e^{v_n} |dz| = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} e^v |dz|.$$

Für festes  $r$  gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|z|=r} e^{v_n} |dz| = \int_{|z|=r} e^h |dz|.$$

Aus diesen Aussagen schließen wir, daß

$$\lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} e^h |dz| \leq \lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} e^v |dz|.$$

Da andererseits  $h \geq v$  ist, kommt nur die Gleichheit in Frage. Damit ist (2.29) bewiesen.

Der letzte und wichtigste Schritt im Beweis von Lemma 3 besteht in der Verifikation von

$$\liminf_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} e^w |dz| \leq \lim_{r \rightarrow 1} \int_{|z|=r} e^h |dz|, \quad (2.30)$$

wobei zur Abkürzung

$$w(z) = h(z) + \int_{\Omega} g(z, \zeta) d\mu_2(e_{\zeta}) \tag{2.31}$$

gesetzt wurde. Natürlich ist nur der Fall zu betrachten, da der rechte Grenzwert endlich ist.

Wäre (2.30) nicht erfüllt, so gäbe es zwei Zahlen  $\eta > 0$  und  $R^* < 1$  derart, daß

$$\iint_{e < |z| < 1} e^w dx dy \geq (1 + \eta) \iint_{e < |z| < 1} e^h dx dy \tag{2.32}$$

für  $R^* \leq \rho < 1$ . Dies wird uns auf einen Widerspruch führen.

Zunächst definieren wir

und

$$m = \inf_{R^* \leq r < 1} \int_{|z|=r} e^h |dz|$$

$$M = \sup_{R^* \leq r < 1} \int_{|z|<r} e^h |dz|,$$

beides positive, endliche Zahlen.

Die Gebietsfolge  $\omega_n = \left[ 1 - \frac{1}{2^n} < |z| < 1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right]$   $n = 1, 2, 3, \dots$ , besitzt folgende Eigenschaft: Jede Niveaulinie

$$g(z, \zeta) = \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \quad (\zeta \text{ fest}) \tag{2.33}$$

schneidet höchstens zwei dieser Bereiche. Zum Beweis betrachten wir diejenige Halbebene  $H_{\zeta}$ , welche  $\Omega$  enthält und begrenzt wird durch die Tangente an den Einheitskreis im Punkte  $\zeta/|\zeta|$ . Durch direkte Rechnung weist man nach, daß die Niveaulinie

$$\tilde{g}(z, \zeta) = \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \quad (\zeta \text{ fest}) \tag{2.34}$$

wobei  $\tilde{g}$  die GREENSche Funktion von  $H_{\zeta}$  bedeutet, höchstens zwei Gebiete  $\omega_n$  schneidet, woraus sich dieselbe Eigenschaft für die innerhalb (2.34) verlaufende Kurve (2.33) a fortiori ergibt. Ferner sieht man leicht ein, daß das Innengebiet von (2.33) für  $|\zeta| > \frac{3}{4}$  stets einfach zusammenhängend ist.

Aus den bisherigen Definitionen schließen wir noch, daß für  $n > 1/(1 - R^*)$

$$\iint_{\omega_{n+1}} e^h dx dy \geq \frac{m}{2M} \iint_{\omega_n} e^h dx dy. \tag{2.35}$$

Seien nun  $k$  und  $l$  zwei natürliche Zahlen, über die später verfügt werden

wird. Vorläufig werde nur vorausgesetzt, daß  $k > l > 1/(1 - R^*)$  sei. Wir zerlegen  $\Omega$  in die Bereiche

$$\begin{aligned} D &= \left[ R < |z| < 1 - \frac{1}{2^l} \right], \\ E_1 &= \left[ 1 - \frac{1}{2^l} \leq |z| \leq 1 - \frac{1}{2^k} \right], \\ \omega_k &= \left[ 1 - \frac{1}{2^k} < |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \right], \\ E_2 &= \left[ 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \leq |z| < 1 \right] \end{aligned}$$

und führen die Bezeichnungen

$$E = E_1 \cup E_2 \cup \omega_k, \quad \alpha = \mu_2(\Omega), \quad \alpha_l = \mu_2(E)$$

ein. Von nun an setzen wir noch voraus, daß  $l$  so groß sei, daß  $\alpha_l < 1$  ist. Es gilt

$$\begin{aligned} \iint_{E_2} e^w dx dy &= \iint_{E_2} \exp \left\{ h(z) + \int_D g(z, \zeta) d\mu_2(e_\zeta) + \int_E g(z, \zeta) d\mu_2(e_\zeta) \right\} dx dy \leq \\ &C_{kl} \iint_{E_2} \exp \left\{ h(z) + \int_E g(z, \zeta) d\mu_2(e_\zeta) \right\} dx dy, \end{aligned} \quad (2.36)$$

wobei  $C_{kl} = \exp \left\{ \alpha \cdot \sup_{z \in E_2, \zeta \in D} g(z, \zeta) \right\}$ .

Es existiert ein Punkt  $Z \in E$  mit der Eigenschaft, daß für alle  $\zeta \in E$

$$\begin{aligned} K(\zeta) &= \iint_{E_2} \exp \{ h(z) + \alpha_l g(z, \zeta) \} dx dy \\ &\leq \iint_{E_2} \exp \{ h(z) + \alpha_l g(z, Z) \} dx dy. \end{aligned} \quad (2.37)$$

$K(\zeta)$  ist stetig auf  $E$ . Die Existenz von  $Z$  ist gesichert, falls wir nun noch zeigen, daß für jede gegen einen Punkt des Einheitskreises konvergierende Folge  $\{\zeta_n\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(\zeta_n) = \iint_{E_2} e^h dx dy \quad (2.38)$$

ist. Offenbar gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} K(\zeta_n) \geq \iint_{E_2} e^h dx dy. \quad (2.39)$$

Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Es gibt einen Index  $N(\varepsilon)$  derart, daß für alle  $n > N$  die Niveaulinie  $g(z, \zeta_n) = \varepsilon$  einfach geschlossen und in  $E_2$  enthalten ist. Es bezeichne  $I$  deren Innengebiet,  $A$  das Komplement von  $I$  bezüglich  $E_2$ . Für

$n > N$  gelten die Abschätzungen

$$\iint_A \exp \{h(z) + \alpha_1 g(z, \zeta_n)\} dx dy \leq e^{\alpha_1 \varepsilon} \iint_A e^h dx dy \quad (2.40)$$

und

$$\begin{aligned} \iint_I \exp \{h(z) + \alpha_1 g(z, \zeta_n)\} dx dy &= e^{\alpha_1 \varepsilon} \iint_I \exp \{h(z) + \alpha_1 g_i(z, \zeta_n)\} dx dy \\ &\leq \frac{2e^{\alpha_1 \varepsilon}}{2 - \alpha_1} \iint_I e^h dx dy, \end{aligned} \quad (2.41)$$

wobei  $g_i$  die GREENSche Funktion von  $I$  bedeutet. (2.40) ist evident. In (2.41) wurde zuerst die Beziehung  $g(z, \zeta_n) = \varepsilon + g_i(z, \zeta_n)$  verwendet, dann Ungleichung (2.4). Durch Wahl erst eines genügend kleinen  $\varepsilon$ , dann eines genügend großen  $N$ , können wir erreichen, daß sich die rechte Seite von (2.40) beliebig wenig von  $\iint_{E_2} e^h dx dy$  unterscheidet, während diejenige von (2.41) gleichzeitig beliebig klein wird. Zusammen mit (2.39) ergibt dies (2.38).

Aus (2.36) und (2.37) folgt unter Anwendung der HÖLDERSCHEN Ungleichung

$$\iint_{E_2} e^w dx dy \leq C_{kl} K(Z). \quad (2.42)$$

Nun unterscheiden wir drei Fälle je nach der Lage der – fortan mit  $L(Z)$  bezeichneten – Niveaulinie

$$g(z, Z) = \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}.$$

a)  $L(Z)$  liege ganz in  $E_2$ . Aus (2.32) und (2.42) folgt

$$K(Z) \geq \frac{1}{C_{kl}} \iint_{E_2} e^w dx dy \geq \frac{1 + \eta}{C_{kl}} \iint_{E_2} e^h dx dy. \quad (2.43)$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} K(Z) &\leq \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right)^{\alpha_1} \iint_A e^h dx dy + \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right)^{\alpha_1} \frac{2}{2 - \alpha_2} \iint_I e^h dx dy \\ &\leq \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}\right)^{\alpha_1} \frac{2}{2 - \alpha_2} \iint_{E_2} e^h dx dy. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Dabei bezeichnet  $I$  das Innengebiet von  $L(Z)$ ,  $A$  das Komplement von  $I$  bezüglich  $E_2$ . Zum Beweise von (2.44) zerlegt man  $K(Z)$  in die beiden Teilintegrale über  $A$  und  $I$  und wendet auf diese die in (2.40) und (2.41) benutzten Abschätzungsmethoden an.

b)  $L(Z)$  liege teilweise in  $E_2$ . Auf Grund der oben erwähnten Eigenschaft der Gebietsfolge  $\{\omega_n\}$  schließen wir, daß  $L(Z)$  in  $E_2 \cup \omega_k$  enthalten ist.

Wir führen die Bezeichnungen

$$\begin{aligned} G_1 &= I \cap \omega_k \quad , \quad G_2 = I \cap E_2 \quad , \\ G_3 &= E_2 - G_2 \quad , \quad G = \bigcup_{i=1}^3 G_i \end{aligned}$$

ein. Es ist

$$\iint_G \exp \{h(z) + \alpha_l g(z, Z)\} dx dy \geq \frac{1 + \eta}{C_{kl}} \iint_{E_2} e^h dx dy + \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{\alpha_l} \iint_{G_1} e^h dx dy . \quad (2.45)$$

Zum Beweise integriert man zunächst getrennt über  $E_2$  und  $G_1$ . Das erste Integral wird wie in (2.43) abgeschätzt. Beim zweiten wird lediglich benützt, daß in  $G_1$  die Ungleichung  $g \geq \log \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$  erfüllt ist.

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \iint_G \exp \{h(z) + \alpha_l g(z, Z)\} dx dy &\leq \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{\alpha_l} \frac{2}{2 - \alpha_l} \iint_{G_1 \cup G_2} e^h dx dy \\ &+ \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{\alpha_l} \iint_{G_3} e^h dx dy \leq \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{\alpha_l} \frac{2}{2 - \alpha_l} [\iint_{E_2} e^h dx dy + \iint_{G_1} e^h dx dy] \\ &\leq \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{\alpha_l} \left[ \frac{2}{2 - \alpha_l} \iint_{E_2} e^h dx dy + (1 + \alpha_l) \iint_{G_1} e^h dx dy \right] \\ &\leq \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{\alpha_l} \left( \frac{2}{2 - \alpha_l} + \frac{2M\alpha_l}{m} \right) \iint_{E_2} e^h dx dy + \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{\alpha_l} \iint_{G_1} e^h dx dy . \end{aligned} \quad (2.46)$$

Der Beweis der ersten Ungleichung ist ganz analog zu demjenigen von (2.44). Der zweite Schritt ist klar. Beim dritten wurde davon Gebrauch gemacht, daß  $\alpha_l < 1$ . Schließlich wurde noch die unmittelbar aus (2.35) fließende Ungleichung

$$\iint_{G_1} e^h dx dy \leq \frac{2M}{m} \iint_{E_2} e^h dx dy$$

verwendet.

c)  $L(Z)$  liege außerhalb  $E_2$ . Die Ungleichung (2.43) ist offenbar auch in diesem Falle gültig. Andererseits ist

$$K(Z) \leq \left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{\alpha_l} \iint_{E_2} e^h dx dy . \quad (2.47)$$

Nun wählen wir  $l$  groß genug, so daß

$$\left( \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{\alpha_l} \left( \frac{2}{2 - \alpha_l} + \frac{2M\alpha_l}{m} \right) < (1 + \eta)^{\frac{1}{3}} . \quad (2.48)$$

Anschließend verfügen wir über  $k$  derart, daß

$$C_{kl} < (1 + \eta)^{\frac{1}{3}} \tag{2.49}$$

ist. Aus (2.48) und (2.49) folgt, daß – je nach dem Fall, in dem man sich befindet – (2.43) und (2.44), (2.45) und (2.46) oder (2.43) und (2.47) einander widersprechen. Damit ist (2.30) bewiesen. Lemma 3 folgt aus (2.27) bis (2.31).

### 3. Beweis von Satz A

Wir zeigen vorerst, daß die durch den Satz von RESCHETNJAK eingeführten Parameterbereiche eine RIEMANNSCHE Fläche  $R$  definieren. Sei  $D$  ein Gebiet auf  $M$ , dem zwei solche Bereiche  $G$  (in einer  $z$ -Ebene, Metrik  $e^{u(z)}|dz|$ ) und  $G^*$  (in einer  $w$ -Ebene, Metrik  $e^{u^*(w)}|dw|$ ) zugeordnet sind. Es entsprechen ihnen die Abbildungen  $\Phi(D \rightarrow G)$  und  $\Phi^*(D \rightarrow G^*)$ . Wir beweisen:  $w = f(z) = \Phi^*(\Phi^{-1}(z))$  ist entweder konform oder antikonform. Ist  $M$  orientierbar, so kann eine Klasse von konform zusammenhängenden Parameterbereichen ausgezeichnet werden. Diese definiert  $R$  [10, S. 53].

**Lemma 4.** *Zu vorgegebenen  $z_0 \in G$  ( $-\frac{1}{4} < \mu(z_0) = \alpha < \frac{1}{4}$ ) und  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\Delta(z_0, \varepsilon)$  mit folgender Eigenschaft: Ist  $\delta < \Delta$  und liegen die Punkte  $z'$  und  $z''$  in  $|z - z_0| < \delta$ , so gilt*

$$|\varrho_\alpha(z', z'') - \Lambda(z_0, \delta)\varrho(z', z'')| < \varepsilon\delta^{1+\alpha} \tag{3.1}$$

*Dabei bezeichnet  $\varrho_\alpha$  die Distanz bezüglich der Metrik  $|z - z_0|^\alpha |dz|$ .  $\Lambda$  ist eine positive Zahl.*

**Beweis.** In den Gebieten

$$G_t = \cup\{z | (z_0 + t(z - z_0)) \in G\}$$

definieren wir die Metriken

$$\varrho_t(z_1, z_2) = \inf_L \int_L \exp \{u(z_0 + t(z - z_0))\} |dz| \quad (t > 0).$$

Dabei variere  $L$  über alle von  $z_1$  nach  $z_2$  führenden Polygone in  $G_t$ .

Wir beweisen vorerst: Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\Delta(\varepsilon) > 0$  derart, daß für  $0 < t < \Delta$  die Ungleichung

$$|\varrho_\alpha(z_1, z_2) - \lambda(z_0, t)\varrho_t(z_1, z_2)| < \varepsilon \tag{3.2}$$

für jedes Punktepaar  $z_1, z_2$  in  $|z - z_0| < 1$  erfüllt ist. Dabei bedeutet  $\lambda$  eine positive Zahl.

Es bezeichne  $\mu_t$  die der Funktion  $u(z_0 + t(z - z_0))$  zugeordnete Massenverteilung. Wir definieren

$$\begin{aligned}\mu_{ti}(e_\zeta) &= \mu_t(e_\zeta \cap [|\zeta - z_0| < 5]), \\ \mu_{ta}(e_\zeta) &= \mu_t(e_\zeta \cap [|\zeta - z_0| \geq 5]), \\ \varrho_{ti}(z_1, z_2) &= \inf \int_L \exp \left\{ \int_L \log |z - \zeta| d\mu_{ti}(e_\zeta) \right\} |dz|,\end{aligned}$$

wobei  $L$  sämtliche  $z_1$  mit  $z_2$  verbindenden Polygone durchlaufen soll.

RESCHETNJAK hat folgendes Resultat bewiesen (Lemma 2 in [13]): Seien  $\mu_1(e), \mu_2(e), \mu_3(e), \dots$  in der ganzen Ebene definierte, vollständig additive Mengenfunktionen, welche außerhalb eines festen, beschränkten Bereiches identisch verschwinden. Es konvergiere  $\{\mu_n(e)\}$  schwach gegen  $\mu_0(e)$ , die Folge der Variationen  $\{\mu_n^+(e) + \mu_n^-(e)\}$  schwach gegen  $\nu(e)$ . Es bezeichne

$$u_n(z) = \int \log |z - \zeta| d\mu_n(e_\zeta) \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

und es werde  $\varrho_n$  wie in Formel (1.2) definiert, wobei nun aber  $L$  über sämtliche  $z_1$  mit  $z_2$  verbindenden Polygone variere. Dann streben die Metriken  $\varrho_n$  mit wachsendem  $n$  gleichmäßig gegen  $\varrho_0$  auf jeder kompakten Menge  $F$ , welche keine Punkte  $\zeta$  mit  $\nu(\zeta) \geq 1$  enthält.

Da  $\mu_{ti}$  für jede Nullfolge von  $t$ -Werten schwach gegen die in  $z_0$  liegende Einzelmasse  $\alpha$  konvergiert, existiert somit eine Zahl  $\Delta_1(\varepsilon) > 0$  derart, daß

$$|\varrho_{ti}(z_1, z_2) - \varrho_\alpha(z_1, z_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.3)$$

für  $0 < t < \Delta_1$  und alle Punktepaare  $z_1, z_2$  in  $|z - z_0| \leq 4$ .

Zu vorgegebenem  $\eta > 0$  – über welches wir später verfügen werden – gibt es ein  $\Delta_2(\eta) > 0$  derart, daß für  $0 < t < \Delta_2$  Folgendes gilt:

1.  $[|z - z_0| \leq 4] \subset G_t$ ;    2. die Ungleichung

$$\begin{aligned}& | (h(z_0 + t(z - z_0)) + \int \log |z - \zeta| d\mu_{ta}(e_\zeta)) \\ & - (h(z_0) + \int \log |\zeta| d\mu_{ta}(e_\zeta)) | < \eta\end{aligned} \quad (3.4)$$

ist für  $|z - z_0| \leq 4$  erfüllt. Letzteres folgt unmittelbar daraus, daß – wie man leicht nachprüft –

$$\lim_{t \rightarrow 0} \max_{|z - z_0| \leq 4} |\text{grad}_z (h(z_0 + t(z - z_0)) + \int \log |z - \zeta| d\mu_{ta}(e_\zeta))| = 0$$

ist. Wir führen die Abkürzung ein

$$\lambda(z_0, t) = \exp \left\{ -h(z_0) - \int \log |\zeta| d\mu_{ta}(e_\zeta) \right\}. \quad (3.5)$$

Seien  $z_1$  und  $z_2$  beliebige Punkte in  $|z - z_0| < 1$ ,  $L'$  deren geradlinige Verbindungsstrecke,  $L''$  irgendein von  $z_1$  nach  $z_2$  führendes Polygon, das nicht ganz in  $|z - z_0| \leq 4$  liegt. Aus (3.3), (3.4) und (3.5) folgt für  $0 < t < \min [\Delta_1, \Delta_2]$

$$\int_{L''} \exp \{u(z_0 + t(z - z_0))\} |dz| \geq \frac{2e^{-\eta}}{\lambda(z_0, t)} \left( \int_1^4 x^{-\frac{1}{4}} dx - \frac{\varepsilon}{2} \right) \geq \frac{2e^{-\eta}}{\lambda(z_0, t)} \left( 2 - \frac{\varepsilon}{2} \right). \quad (3.6)$$

Es bezeichne  $\beta(t)$  die negative Totalmasse der Verteilung  $\mu_{ti}$  unter Ausschluß der (eventuell negativen) konzentrierten Masse  $\alpha$  in  $z_0$ . Es ist  $\lim_{t \rightarrow 0} \beta(t) = 0$ . Für  $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{4}$  folgt aus (3.4) und (3.5) unter Anwendung der HÖLDERSCHEN Ungleichung, daß

$$\int_{L'} \exp \{u(z_0 + t(z - z_0))\} |dz| \leq \frac{2e^\eta}{\lambda(z_0, t)} \int_0^1 x^{-\beta} dx = \frac{2e^\eta}{(1 - \beta)\lambda(z_0, t)}. \quad (3.7)$$

Für  $-\frac{1}{4} \leq \alpha \leq 0$  ergibt dieselbe Schlußweise

$$\int_{L'} \exp \{u(z_0 + t(z - z_0))\} |dz| \leq \frac{2e^\eta}{\lambda(z_0, t)} \int_0^1 x^{\alpha-\beta} dx \leq \frac{2e^\eta}{(\frac{3}{4} - \beta)\lambda(z_0, t)}. \quad (3.8)$$

Für  $\varepsilon < 0, 1^4$ ) folgt aus (3.6), (3.7) und (3.8): Sei  $\Delta_3$  so klein, daß  $\beta(\Delta_3) < 0, 1$ . Ist  $0 < \eta < 0, 1$  und  $0 < t < \min [\Delta_1(\varepsilon), \Delta_2(\eta), \Delta_3]$ , so ist für jede Wahl von  $z_1, z_2$  und  $L''$  das Integral längs  $L''$  stets größer als dasjenige längs  $L'$ . Dann dürfen in der Definition von  $\varrho_t(z_1, z_2)$  diejenigen Polygone  $L$  von der Konkurrenz ausgeschlossen werden, welche nicht ganz in  $|z - z_0| \leq 4$  liegen. Also ist

$$\varrho_{ti} \cdot \exp \left\{ \min_{|z-z_0| \leq 4} [h(z_0 + t(z - z_0)) + \int \log |z - \zeta| d\mu_{ta}(e_\zeta)] \right\} \leq \varrho_t \leq \varrho_{ti} \cdot \exp \left\{ \max_{|z-z_0| \leq 4} [h(z_0 + t(z - z_0)) + \int \log |z - \zeta| d\mu_{ta}(e_\zeta)] \right\},$$

woraus sich mit (3.4) und (3.5)

$$\varrho_{ti} e^{-\eta} \leq \lambda(z_0, t) \varrho_t \leq \varrho_{ti} e^\eta$$

ergibt. Nun wählen wir  $\eta$  ( $0 < \eta < 0, 1$ ) so klein, daß

$$|\varrho_{ti}(z_1, z_2) - \lambda(z_0, t) \varrho_t(z_1, z_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3.9)$$

für  $0 < t < \Delta = \min [\Delta_1(\varepsilon), \Delta_2(\eta), \Delta_3]$  und beliebige  $z_1, z_2$  in  $|z - z_0| < 1$  ist. (3.2) folgt nun aus (3.3) und (3.9).

<sup>4</sup>) Wir nehmen an, daß das vorgegebene  $\varepsilon$  diese Bedingung erfülle.

Setzt man  $z_1 = z_0 + \frac{z' - z_0}{t}$  und  $z_2 = z_0 + \frac{z'' - z_0}{t}$ , so ist

$$\varrho(z_1, z_2) = \frac{1}{t} \varrho(z', z'') \quad (3.10)$$

und

$$\varrho_\alpha(z_1, z_2) = \frac{1}{t^{1+\alpha}} \varrho_\alpha(z', z''). \quad (3.11)$$

Aus (3.2), (3.10) und (3.11) folgt für  $0 < t < \Delta$  und  $z_1, z_2$  in  $|z - z_0| < 1$  (das heißt  $z', z''$  in  $|z - z_0| < t$ ), daß

$$|\varrho_\alpha(z', z'') - t^\alpha \lambda(z_0, t) \varrho(z', z'')| < \varepsilon t^{1+\alpha}.$$

Damit ist Lemma 4 bewiesen.

**Lemma 5.** *Zu vorgegebenen  $z_0 \in G$  ( $-\frac{1}{4} < \mu(z_0) = \alpha < \frac{1}{4}$ ) und  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\Delta(z_0, \varepsilon) > 0$  mit folgender Eigenschaft: Ist  $\delta < \Delta$  und liegen die Punkte  $z'$  und  $z''$  in  $|z - z_0| < \delta$ , so ist*

$$|\varrho_\alpha(z', z'') - K(z_0, \delta) \varrho_\alpha^*(f(z'), f(z''))| < \varepsilon \delta^{1+\alpha}. \quad (3.12)$$

*Dabei bezeichnen  $\varrho_\alpha$  und  $\varrho_\alpha^*$  die Distanzen bezüglich der Metriken  $|z - z_0|^\alpha |dz|$  und  $|w - f(z_0)|^\alpha |dw|$ .  $K$  ist eine positive Zahl.*

**Beweis.** Wir definieren

$$\varphi(\delta) = \max_{|z - z_0| = \delta} |f(z) - f(z_0)|$$

und

$$\psi(\delta) = \min_{|z - z_0| = \delta} |f(z) - f(z_0)|.$$

Sei  $z_1$  ein Punkt auf  $|z - z_0| = \delta$  derart, daß  $|f(z_1) - f(z_0)| = \varphi(\delta)$  ist. Sei  $\varepsilon > 0$  vorgegeben. Nach Lemma 4 gilt für genügend kleine Werte von  $\delta$

$$\left| \frac{\delta^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \Lambda(z_0, \delta) \varrho(z_0, z_1) \right| < \varepsilon \delta^{1+\alpha}. \quad (3.13)$$

Lemma 4 darf auch auf  $\Phi^*$  angewandt werden, und da  $\varphi(\delta)$  mit  $\delta$  gegen 0 strebt, ist für genügend kleine  $\delta$

$$\left| \frac{[\varphi(\delta)]^{1+\alpha}}{1+\alpha} - \Lambda^*(w_0, \varphi(\delta)) \varrho(w_0, w_1) \right| < \varepsilon [\varphi(\delta)]^{1+\alpha}, \quad (3.14)$$

wobei  $w_0 = f(z_0)$ ,  $w_1 = f(z_1)$ . Aus (3.13) und (3.14) folgt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varrho(z_0, z_1) \Lambda(z_0, \delta)}{\delta^{1+\alpha}} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varrho(w_0, w_1) \Lambda^*(w_0, \varphi(\delta))}{[\varphi(\delta)]^{1+\alpha}} = \frac{1}{1+\alpha}$$

und, da  $\varrho(z_0, z_1) = \varrho(w_0, w_1)$ ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\Lambda(z_0, \delta) [\varphi(\delta)]^{1+\alpha}}{\Lambda^*(w_0, \varphi(\delta)) \delta^{1+\alpha}} = 1. \quad (3.15)$$

Setzt man

$$K(z_0, \delta) = \frac{\Lambda(z_0, \delta)}{\Lambda^*(w_0, \varphi(\delta))},$$

so gilt für genügend kleine Werte von  $\delta$  und jedes Punktepaar  $z', z''$  in  $|z - z_0| < \delta$

$$\begin{aligned} |\varrho_\alpha(z', z'') - K(z_0, \delta) \varrho_\alpha^*(w', w'')| &\leq |\varrho_\alpha(z', z'') - \Lambda(z_0, \delta) \varrho(z', z'')| \\ &+ \frac{\Lambda(z_0, \delta)}{\Lambda^*(w_0, \varphi(\delta))} |\varrho_\alpha^*(w', w'') - \Lambda^*(w_0, \varphi(\delta)) \varrho(w', w'')|, \end{aligned} \quad (3.16)$$

wobei  $w' = f(z')$  und  $w'' = f(z'')$ , somit  $\varrho(z', z'') = \varrho(w', w'')$ . Für genügend kleine  $\delta$  ist der erste Summand auf der rechten Seite von (3.16) nach Lemma 4  $< \frac{\varepsilon}{3} \delta^{1+\alpha}$ , der linke Faktor des zweiten Summanden wegen (3.15)  $< 2 \delta^{1+\alpha} / [\varphi(\delta)]^{1+\alpha}$ , der rechte Faktor des zweiten Summanden nach Lemma 4  $< \frac{\varepsilon}{3} [\varphi(\delta)]^{1+\alpha}$ , somit der ganze Ausdruck  $< \varepsilon \delta^{1+\alpha}$ . Q.E.D.

**Lemma 6.** *Es existiert eine nach unten halbstetige<sup>5)</sup>, lokal quadratisch summierbare Funktion  $H(z)$  mit folgender Eigenschaft: Jedem Punkt*

$$z_0 \in G \left( -\frac{1}{4} < \mu(z_0) = \alpha < \frac{1}{4} \right)$$

kann eine Zahl  $\Delta(z_0) > 0$  derart zugeordnet werden, daß aus  $|\zeta - z_0| < \Delta(z_0)$  stets

$$\left| \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z_0} \right| \leq \min_{|z - z_0| \leq |\zeta - z_0|} H(z) \quad (3.17)$$

folgt.

**Beweis.** Mit  $z' = z_0$  und  $z'' = z_1$ <sup>6)</sup> lautet (3.12)

$$\left| \frac{\delta^{1+\alpha}}{1+\alpha} - K(z_0, \delta) \frac{[\varphi(\delta)]^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right| < \varepsilon \delta^{1+\alpha}. \quad (3.18)$$

Sei  $z_2$  ein Punkt auf  $|z - z_0| = \delta$  derart, daß  $|f(z_2) - f(z_0)| = \psi(\delta)$  ist. Mit  $z' = z_0$  und  $z'' = z_2$  wird (3.12) zu

$$\left| \frac{\delta^{1+\alpha}}{1+\alpha} - K(z_0, \delta) \frac{[\psi(\delta)]^{1+\alpha}}{1+\alpha} \right| < \varepsilon \delta^{1+\alpha}. \quad (3.19)$$

<sup>5)</sup> Der Funktionswert  $H = +\infty$  wird zugelassen.

<sup>6)</sup> Bezeichnungen des vorhergehenden Beweises.

Aus (3.18) und (3.19) folgt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} K(z_0, \delta) \left( \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \right)^{1+\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow 0} K(z_0, \delta) \left( \frac{\psi(\delta)}{\delta} \right)^{1+\alpha} = 1.$$

Somit

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\varphi(\delta)}{\psi(\delta)} = 1. \quad (3.20)$$

Das dem Parameterbereich  $|w - w_0| \leq \psi(\delta)$  entsprechende Stück von  $M$  ist enthalten in demjenigen, das  $|z - z_0| \leq \delta$  entspricht. Ein Flächenvergleich liefert <sup>7)</sup>

$$\iint_{|w - w_0| \leq \psi(\delta)} e^{2u^*(w)} d\xi d\eta \leq \iint_{|z - z_0| \leq \delta} e^{2u(z)} dx dy \quad (w = \xi + i\eta). \quad (3.21)$$

Aus (3.20) und (3.21) schließen wir, daß (3.22)

$$\limsup_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi(\delta)}{\delta} \right)^2 = \limsup_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{\psi(\delta)}{\delta} \right)^2 \leq \limsup_{\delta \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{|z - z_0| \leq \delta} e^{2u} dx dy}{\frac{1}{\pi [\psi(\delta)]^2} \iint_{|w - w_0| \leq \psi(\delta)} e^{2u^*} d\xi d\eta}.$$

Wir machen die (lokal stets zulässige) Annahme, daß die in den Darstellungen  $u = u_1 - u_2$  und  $u^* = u_1^* - u_2^*$  auftretenden subharmonischen Funktionen nicht positiv seien. Wir betrachten eine in einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  gültige RIESZSche Zerlegung [14]

$$u_2(z) = h_2(z) + \int \log |z - \zeta| d\mu_2(e_\zeta) \quad (3.23)$$

und definieren  $\mu_{2i}(e_\zeta) = \mu_2(e_\zeta \cap [|\zeta - z_0| < 3\delta])$  und

$$\mu_{2a}(e_\zeta) = \mu_2(e_\zeta \cap [|\zeta - z_0| \geq 3\delta]).$$

Es sei  $U$  so klein gewählt, daß die Gesamtmasse der Belegung  $\mu_2$  kleiner als  $\frac{1}{2}$  ist; ferner sei  $\delta$  so klein, daß  $[|z - z_0| \leq \delta] \subset U$ ,

$$\beta = \mu_2(|\zeta - z_0| < 3\delta) < \frac{1}{4}$$

und

$$\max_{|z - z_0| \leq \delta} h_2(z) - \min_{|z - z_0| \leq \delta} h_2(z) < \frac{\log 2}{2}$$

ist. Es bezeichne  $a$  einen Punkt auf  $|z - z_0| = \delta$ , in dem  $u_2$  sein Maximum bezüglich  $|z - z_0| \leq \delta$  annimmt. Aus (3.23) folgt

$$u_2(a) \leq h_2(a) + \int \log |a - \zeta| d\mu_{2a}(e_\zeta) + \beta \log(4\delta). \quad (3.24)$$

<sup>7)</sup> Bei genügend regulären Metriken ist es klar, daß diese Integrale den Flächeninhalt darstellen; durch Approximation geht man auf allgemeine Metriken über.

Aus  $|\zeta - z_0| \geq 3\delta$ ,  $|a - z_0| = \delta$  und  $|z - z_0| \leq \delta$  folgt  $|a - \zeta| \leq 2|z - \zeta|$ . Daraus und aus obigen Annahmen schließen wir von (3.23) auf

$$\begin{aligned} & \iint_{|z - z_0| \leq \delta} e^{2u} dx dy \leq \iint_{|z - z_0| \leq \delta} e^{-2u_2} dx dy \\ & \leq 4 \exp \left\{ -2h_2(a) - 2 \int \log |a - \zeta| d\mu_{2a}(e_\zeta) \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\iint_{|z - z_0| \leq \delta} \exp \left\{ -2 \int \log |z - \zeta| d\mu_{2i}(e_\zeta) \right\} dx dy$$

Mit Hilfe der HÖLDERSCHEN Ungleichung zeigt man, daß das letzte Integral dann seinen größten Wert annimmt, wenn die Masse  $\beta$  in  $z_0$  konzentriert ist; er beträgt  $\frac{\pi \delta^{2-2\beta}}{1 - \beta}$ . Wir erhalten damit aus (3.24) und (3.25)

$$\frac{1}{\pi \delta^2} \iint_{|z - z_0| \leq \delta} e^{2u} dx dy \leq 10 e^{-2u_2(a)}. \quad (3.26)$$

Sei  $b$  ein Punkt auf  $|w - w_0| = \varphi(\delta)$ , in dem  $u_1^*(w)$  sein Maximum bezüglich  $|w - w_0| \leq \varphi(\delta)$  annimmt. Wir wiederholen die obige Überlegung in der  $w$ -Ebene, wobei wir  $u_2(z)$  durch  $u_1^*(w)$  und in den vor Formel (3.25) stehenden Betrachtungen  $\delta$  durch  $\varphi(\delta)$  ersetzen. In der (3.25) entsprechenden Beziehung integrieren wir hingegen nur über  $|w - w_0| \leq \varphi(\delta)$ . Unter Benützung von (3.20) erhalten wir für genügend kleine  $\delta$  die Abschätzung

$$\frac{1}{\pi [\varphi(\delta)]^2} \iint_{|w - w_0| \leq \varphi(\delta)} e^{-2u_1^*(w)} d\xi d\eta \leq 10 e^{-2u_1^*(b)}.$$

Mit Anwendung der SCHWARZSCHEN Ungleichung

$$(\pi [\varphi(\delta)]^2)^2 \leq \iint_{|w - w_0| \leq \varphi(\delta)} e^{2u_1^*} d\xi d\eta \iint_{|w - w_0| \leq \varphi(\delta)} e^{-2u_1^*} d\xi d\eta$$

folgt daraus

$$\frac{1}{\pi [\varphi(\delta)]^2} \iint_{|w - w_0| \leq \varphi(\delta)} e^{2u_1^*} d\xi d\eta \geq \frac{1}{\pi [\varphi(\delta)]^2} \iint_{|w - w_0| \leq \varphi(\delta)} e^{2u_1^*} d\xi d\eta \geq \frac{1}{10} e^{2u_1^*(b)}. \quad (3.27)$$

Definiert man

$$H(z) = 1 + 10 \exp \left\{ -u_2(z) - u_1^*(f(z)) \right\}, \quad (3.28)$$

so folgt aus (3.22), (3.26), (3.27) und (3.28), daß (3.17) für ein genügend kleines  $\Delta(z_0) > 0$  erfüllt ist.  $H$  ist nach unten halbstetig.

Sei  $K$  eine abgeschlossene Kreisscheibe vom Mittelpunkt  $z_0$  derart, daß  $\mu_1(K) + \mu_2(K) < 1$ .  $u_1(z)$ ,  $u_2(z)$ ,  $u_1^*(w)$  und  $u_2^*(w)$  sind Grenzfunktionen monoton fallender Folgen von stetigen Funktionen:  $\{u_{1n}\} \downarrow u_1$  und  $\{u_{2n}\} \downarrow u_2$  auf  $K$ ;  $\{u_{1k}^*\} \downarrow u_1^*$  und  $\{u_{2k}^*\} \downarrow u_2^*$  auf  $f(K)$ . Durch Anwendung

der SCHWARZSchen Ungleichung erhält man

$$\begin{aligned} & \left( \iint_K \exp \{ -2u_{2n}(z) - 2u_{1k}^*(f(z)) \} dx dy \right)^2 \\ & \leq \iint_K \exp \{ -2u_{1n}(z) - 2u_{2n}(z) \} dx dy \\ & \quad \cdot \iint_K \exp \{ 2u_{1n}(z) - 2u_{2n}(z) \} \cdot \exp \{ -4u_{1k}^*(f(z)) \} dx dy . \end{aligned}$$

Läßt man nun  $n \rightarrow \infty$  streben und berücksichtigt, daß für jede Borelmenge  $e \subset K$

$$\iint_e e^{2u} dx dy = \iint_{f(e)} e^{2u^*} d\xi d\eta$$

ist – beide Integrale stellen denselben Flächeninhalt dar –, so folgt

$$\begin{aligned} & \left( \iint_K \exp \{ -2u_2(z) - 2u_{1k}^*(f(z)) \} dx dy \right)^2 \\ & \leq \iint_K e^{-2u_1 - 2u_2} dx dy \cdot \iint_{f(K)} \exp \{ 2u_1^*(w) - 2u_2^*(w) - 4u_{1k}^*(w) \} d\xi d\eta . \end{aligned}$$

Also, mit  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\begin{aligned} & \left( \iint_K \exp \{ -2u_2(z) - 2u_1^*(f(z)) \} dx dy \right)^2 \\ & \leq \iint_K e^{-2u_1 - 2u_2} dx dy \cdot \iint_{f(K)} e^{-2u_1^* - 2u_2^*} d\xi d\eta . \end{aligned}$$

Nach Lemma 1 in [8] ist  $\int_{\text{Rand } K} e^{-u_1 - u_2} |dz| < \infty$ .

Bezeichnet  $I$  einen abgeschlossenen, stückweise analytisch berandeten Bereich derart, daß  $K \subset I$  und  $\mu_1(I) + \mu_2(I) < 1$  ist, so gilt ebenso  $\int_{\text{Rand } I} e^{-u_1^* - u_2^*} |dw| < \infty$ . Aus (2.2) in [6] folgt, daß die rechte Seite der letzten Ungleichung endlich ist. Somit ist  $H^2$  summierbar. Q.E.D.

**Lemma 7.** *Auf jedem Rechteck  $R[a_1 \leq x \leq a_2, b_1 \leq y \leq b_2]$ , das keine Einzelmassen vom Betrag  $\geq \frac{1}{4}$  enthält, besitzt  $w = f(z) = \xi(x, y) + i\eta(x, y)$  folgende Eigenschaften:*

- (A)  *$f$  ist absolut stetig im Sinne von TONELLI,*
- (B) *die (gemäß (A)) fast überall auf  $R$  existierenden und meßbaren partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$  sind quadratisch summierbar,*
- (C) *entweder gilt  $\xi_x = \eta_y$  und  $\xi_y = -\eta_x$  fast überall auf  $R$ , oder es ist  $\xi_x = -\eta_y$  und  $\xi_y = \eta_x$  fast überall auf  $R$ .*

**Beweis.** Sei  $\alpha_1 < x < \beta_1, \alpha_2 < x < \beta_2, \dots$  ein System zueinander fremder Teilintervalle von  $[a_1, a_2]$ . Aus Lemma 6 schließen wir, daß

$$\sum_k |f(\beta_k, y) - f(\alpha_k, y)| \leq \sum_k \int_{\alpha_k}^{\beta_k} H(x, y) dx. \quad (3.29)$$

Daraus folgt für die totale Variation von  $f$  als einer Funktion von  $x$  im Intervall  $[a_1, a_2]$

$$V_x(y, f, [a_1, a_2]) \leq \int_{a_1}^{a_2} H(x, y) dx. \quad (3.30)$$

Da  $H$  auf  $R$  summierbar ist, folgt aus dem Satz von FUBINI, daß  $\int_{a_1}^{a_2} H(x, y) dx$  für fast alle  $y$  aus  $[b_1, b_2]$  existiert und eine summierbare Funktion von  $y$  darstellt. Damit führen (3.29) und (3.30) zu folgenden Aussagen: (1)  $f$  ist absolut stetig als Funktion von  $x$  auf  $[a_1, a_2]$  für fast alle  $y$  aus  $[b_1, b_2]$ ; (2)  $V_x$  ist eine summierbare<sup>8)</sup> Funktion von  $y$  auf  $[b_1, b_2]$ .

Entsprechende Aussagen gelten, wenn  $x$  mit  $y$  vertauscht wird.  $f$  ist stetig auf  $R$ . Damit ist (A) bewiesen.

Aus Lemma 6 schließen wir ferner, daß  $|\xi_x|^2, |\eta_x|^2, |\xi_y|^2$  und  $|\eta_y|^2$  (soweit sie existieren) nicht größer als  $H^2$  sind. Daraus folgt (B).

Sei  $f$  zum Beispiel orientierungstreu. Wir betrachten einen Punkt  $z_0$ , in dem  $\xi_x, \eta_x, \xi_y, \eta_y$  existieren und  $\mu(z_0) = \alpha = 0$  ist; fast überall auf  $R$  ist dies erfüllt. Aus

$$\psi(h) \leq |f(z_0 + h) - f(z_0)|, |f(z_0 + ih) - f(z_0)| \leq \varphi(h) \quad (h > 0)$$

folgt

$$\limsup_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\psi(h)}{h} \right)^2 \leq \xi_x^2 + \eta_x^2, \xi_y^2 + \eta_y^2 \leq \liminf_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi(h)}{h} \right)^2. \quad (3.31)$$

Aus (3.20) und (3.31) erhält man

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\psi(h)}{h} \right)^2 = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\varphi(h)}{h} \right)^2 = \xi_x^2 + \eta_x^2 = \xi_y^2 + \eta_y^2. \quad (3.32)$$

Ist  $\xi_x = \eta_x = \xi_y = \eta_y = 0$ , so sind die CAUCHY-RIEMANNSCHE Differentialgleichungen trivialerweise erfüllt. Andernfalls ist der Grenzwert (3.32) – von nun an mit  $\sigma^2$  bezeichnet – positiv und es gilt wegen (3.15)

$$\lim_{h \rightarrow 0} K(z_0, h) = \frac{1}{\sigma}. \quad (3.33)$$

Sei  $f(z_0) = w_0, f(z_0 + h) = w_0 + re^{i\varphi}, f(z_0 + ih) = w_0 + \rho e^{i\theta}$ . Aus (3.32) folgt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho}{h} = \sigma. \quad (3.34)$$

<sup>8)</sup> Die Meßbarkeit von  $V_x$  folgt aus der Stetigkeit von  $f$  [12, Seite 426].

Mit  $z' = z_0 + h$  und  $z'' = z_0 + ih$  ergeben Lemma 5 und (3.33)

$$\sqrt{2}h - \left(\frac{1}{\sigma} + o(1)\right) \cdot \sqrt{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\vartheta - \varphi)} = o(h). \quad (3.35)$$

Aus (3.34) und (3.35) schließt man unter Benützung der Orientierungstreue, daß

$$\lim_{h \rightarrow 0} (\vartheta - \varphi) = \frac{\pi}{2}, \quad (3.36)$$

und aus (3.34) und (3.36)

$$\begin{aligned} \xi_x &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\xi(z_0 + h) - \xi(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r \cos \varphi}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\rho \sin \vartheta}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta(z_0 + ih) - \eta(z_0)}{h} = \eta_y. \end{aligned}$$

Analog beweist man  $\xi_y = -\eta_x$ . Ist  $f$  nicht orientierungstreu, so kann man zum Beispiel obige Betrachtung auf  $\bar{f} = \xi - i\eta$  anwenden. In jedem Fall ist (C) erfüllt.

Aus Lemma 7 folgt nach einem Resultat von C. B. MORREY [9, S. 141, Lemma 4], daß – abgesehen von einer aus isolierten Punkten bestehenden Ausnahmemenge – entweder  $f$  oder  $\bar{f}$  konform ist. Da  $f$  topologisch ist, sind isolierte Singularitäten hebbar:  $G$  wird durch  $f$  konform oder antikonform auf  $G^*$  abgebildet.

Wir beweisen ferner, daß der Wert von  $\rho$  unverändert bleibt, falls  $L$  in (1.2) über alle stückweise analytischen Verbindungskurven in  $G$  – statt nur über die Polygone – variiert. Würde dies nicht zutreffen, so gäbe es ein Punktepaar  $z_1, z_2 \in G$  und eine stückweise analytische Verbindungskurve  $\gamma$  derart, daß

$$\int_{\gamma} e^u |dz| < \rho(z_1, z_2). \quad (3.37)$$

Seien  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  JORDANKURVEN (Innengebiete  $G_1, G_2, G_3$ ) derart, daß  $\gamma \subset G_1, (G_1 \cup \Gamma_1) \subset G_2, (G_2 \cup \Gamma_2) \subset G_3$  und  $(G_3 \cup \Gamma_3) \subset G$ . Sei  $u = u_1 - u_2$  eine Darstellung von  $u$  als Differenz von subharmonischen Funktionen. Es bezeichne  $u'_1$  diejenige in  $G_3$  subharmonische Funktion, welche auf  $G_1 \cup \Gamma_1$  mit  $u_1$  und in  $G_3 - (G_1 \cup \Gamma_1)$  mit der besten harmonischen Majorante  $\tilde{h}_1$  von  $u_1$  in diesem Gebiet übereinstimmt. Sei  $v_{1n}$  die nach dreimaliger Mittelung über eine Kreisscheibe vom Radius  $\frac{1}{n}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) aus  $u'_1$  entstehende Funktion. Analog werde  $v_{2n}$  definiert.  $v_n = v_{1n} - v_{2n}$  ist definiert und zweimal stetig differenzierbar in einem Gebiete  $\Omega_n$ , welches für  $n \rightarrow \infty$

gegen  $G_3$  strebt. Da  $v_{1n} \downarrow u_1$  und  $v_{2n} \downarrow u_2$  in  $G_1$ , gibt es Zahlen  $C$  und  $D$  derart, daß in  $G_1$

$$C e^{u_1} \leq e^{v_n} \leq D e^{-u_2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (3.38)$$

Wir dürfen annehmen, daß sich auf  $\gamma$  kein Punkt  $\zeta$  mit  $\mu_1(\zeta) + \mu_2(\zeta) \geq 1$  befindet; denn  $\gamma$  enthält jedenfalls einen Teilbogen, auf dem diese Voraussetzung erfüllt ist und für den (3.37) immer noch gilt. Dann ist nach dem LEBESGUESCHEN Grenzwertsatz

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} e^{v_n} |dz| = \int_{\gamma} e^u |dz|, \quad (3.39)$$

denn  $D e^{-u_2}$  ist längs  $\gamma$  summierbar (Lemma 1 in [8]).

Für genügend große Werte von  $n$  ist  $v_n$  auf  $G_3 - G_2$  harmonisch. Dann gelten in  $G_2$  die RIESZSCHEN Darstellungen

$$\left. \begin{aligned} u'_k(z) &= h'_k(z) + \int \log |z - \zeta| d\mu'_k(e_\zeta), \\ v_{kn}(z) &= h_{kn}(z) + \int \log |z - \zeta| dv_{kn}(e_\zeta), \\ u'_k(z) &= h_k^*(z) - \int g(z, \zeta) d\mu'_k(e_\zeta), \\ v_{kn}(z) &= h_k^*(z) - \int g(z, \zeta) dv_{kn}(e_\zeta), \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

wobei  $g$  die GREENSCHE Funktion des Gebietes  $G_2$  und  $h_k^*$  die Lösung des DIRICHLETSCHEN Problems für  $G_2$  mit den Randwerten  $\tilde{h}_k$  auf  $\Gamma_2$  bezeichnen ( $k = 1, 2$ ). Mit den Abkürzungen  $h' = h'_1 - h'_2$ ,  $\mu' = \mu'_1 - \mu'_2$ ,  $h_n = h_{1n} - h_{2n}$ ,  $v_n = v_{1n} - v_{2n}$  gilt:

- (A)  $\{v_n(e)\}$  konvergiert schwach gegen  $\mu'(e)$ ;
- (B)  $\{h_n(z)\}$  konvergiert in  $G_1$  gleichmäßig gegen  $h'(z)$ .

(A) ist bekannt (F. RIESZ [14]). Aus (3.40) folgt

$$|h_n(z) - h'(z)| \leq \left| \int \varphi(z, \zeta) d\mu'(e_\zeta) - \int \varphi(z, \zeta) dv_n(e_\zeta) \right|, \quad (3.41)$$

wobei  $\varphi(z, \zeta) = g(z, \zeta) + \log |z - \zeta|$ . Wird  $z$  als Parameter – der in  $G_1$  variieren darf – aufgefaßt, so ist die Funktionenschar  $\varphi(z, \zeta)$  auf jedem kompakten Teilbereich von  $G_2$  gleichgradig stetig bezüglich  $\zeta$ . (Dies folgt aus der HARNACKSCHEN Ungleichung, da die Funktionen  $\varphi$  gleichmäßig beschränkt sind.) Unter Benützung von (A) schließen wir, daß die rechte Seite von (3.41) für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $z$  gegen 0 strebt.

Wir definieren

$$\varrho_n(z_1, z_2) = \inf_{L, L} \int e^{v_n} |dz|,$$

wobei alle  $z_1$  mit  $z_2$  verbindenden Polygone  $L$  in  $\Omega_n$  zugelassen werden. Ferner sei

$$\begin{aligned} w(z) &= \int \log |z - \zeta| d\mu'(e_\zeta), \\ w_n(z) &= \int \log |z - \zeta| d\nu_n(e_\zeta), \\ r(z', z'') &= \inf_L \int_L e^w |dz|, \\ r_n(z', z'') &= \inf_L \int_L e^{w_n} |dz|, \end{aligned}$$

wobei nun  $L$  die Menge aller von  $z'$  nach  $z''$  führenden Polygone der Ebene durchlaufe. Aus (A) und dem oben erwähnten Lemma von RESCHETNJAK folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(z', z'') = r(z', z'') \quad (3.42)$$

für alle Punktepaare  $z', z''$ .

Sei  $z^*$  ein beliebiger Punkt in  $G_1$ , welcher die Bedingung  $\mu_1(z^*) + \mu_2(z^*) < 1$  erfüllt, und sei  $K$  eine in  $G_1$  liegende Kreisscheibe vom Mittelpunkt  $z^*$ , so klein, daß  $\mu_1(K) + \mu_2(K) < 1$ . Es gibt eine Umgebung  $U_1$  von  $z^*$  mit folgender Eigenschaft: Für jedes Punktepaar  $z', z'' \in U_1$  dürfen in der Definition von  $\varrho_n(z', z'')$  diejenigen Polygone  $L$  von der Konkurrenz ausgeschlossen werden, welche nicht ganz in  $K$  liegen. Zum Beispiel kann  $U_1$  durch die Gesamtheit aller Punkte definiert werden, deren dreifacher Abstand von  $z^*$  in der Metrik  $De^{-u_2} |dz|$  kleiner ist als der Abstand zwischen  $z^*$  und dem Rande von  $K$  in der Metrik  $Ce^{u_1} |dz|$ . Wegen (3.42) existiert eine entsprechende Nachbarschaft  $U_2$  für die Gesamtheit der Metriken  $r_n$ <sup>9)</sup>. Für einzelne Metriken ist die Existenz solcher Umgebungen trivial; wir bezeichnen die  $\varrho$  und  $r$  zugeordneten mit  $U_3$  und  $U_4$ . Für jedes Punktepaar  $z', z'' \in U = \bigcap_{i=1}^4 U_i$  gilt

$$m_n r_n(z', z'') \leq \varrho_n(z', z'') \leq M_n r_n(z', z'')$$

und

$$m r(z', z'') \leq \varrho(z', z'') \leq M r(z', z''),$$

wobei

$$m_n = \min_{z \in K} e^{h_n(z)}, \quad M_n = \max_{z \in K} e^{h_n(z)},$$

$$m = \min_{z \in K} e^{h'(z)} \quad \text{und} \quad M = \max_{z \in K} e^{h'(z)}.$$

Daraus folgt

$$\frac{m_n}{M} \frac{r_n(z', z'')}{r(z', z'')} \leq \frac{\varrho_n(z', z'')}{\varrho(z', z'')} \leq \frac{M_n}{m} \frac{r_n(z', z'')}{r(z', z'')} \quad (3.43)$$

Wegen (B) kann bei vorgegebenem  $\varepsilon$  der Radius von  $K$  so klein gewählt wer-

<sup>9)</sup>  $\{r_n(z', z'')\}$  konvergiert gleichmäßig für  $z', z'' \in K$ .

den, daß  $\frac{m_n}{M} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$  und  $\frac{M_n}{m} \leq 1 + \frac{\varepsilon}{2}$  für alle  $n$ . Aus (3.42) und (3.43) folgt dann

$$(1 - \varepsilon)\varrho(z', z'') \leq \varrho_n(z', z'') \leq (1 + \varepsilon)\varrho(z', z'') \quad (3.44)$$

für genügend große  $n$  und beliebige  $z', z'' \in U$ . Durch Anwendung des BOREL-LEBESGUESCHEN Überdeckungssatzes schließt man: Zu vorgegebenem  $\varepsilon > 0$  gibt es ein  $\Delta(\varepsilon) > 0$  und ein  $N(\varepsilon) < \infty$  derart, daß aus  $z', z'' \in \gamma$  und  $|z' - z''| < \Delta$  für  $n > N$  stets (3.44) folgt. Daraus und aus der Definition der Kurvenlänge [1, S. 69] folgt, daß  $(1 - \varepsilon)l \leq l_n \leq (1 + \varepsilon)l$ , wobei  $l$  und  $l_n$  die Längen von  $\gamma$  in den Metriken  $\varrho$  und  $\varrho_n$  bezeichnen. Da  $\varepsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, ist somit

$$l = \lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma} e^{v_n} |dz|. \quad (3.45)$$

Aus (3.39) und (3.45) ersieht man, daß die linke Seite von (3.37)  $l$  darstellt. Da aber  $l \geq \varrho(z_1, z_2)$  ist [1, S. 32], erhält man damit einen Widerspruch. Q. E. D.

Es existieren somit eine RIEMANNSCHE Fläche  $R$  und eine Metrik (1.5) auf  $R$  derart, daß die so definierte Mannigfaltigkeit  $M'$  zu  $M$  lokal isometrisch ist. Da aber beide Metriken innere sind, zieht die Isometrie im Kleinen die Isometrie im Großen nach sich [1, S. 33, Fußnote 3]. Damit ist der erste Teil von Satz A bewiesen. Der zweite Teil folgt unmittelbar aus dem entsprechenden lokalen Resultat von RESCHETNJAK.

#### 4. Potentialtheoretische Definition der Kurvenlänge

In einem Gebiete  $G$  der  $z$ -Ebene sei eine Metrik (1.2) definiert, wobei  $u(z)$  sich als Differenz von subharmonischen Funktionen  $u = u_1 - u_2$  darstellen lasse. Sei  $\Gamma$  eine JORDANKURVE, welche samt ihrem Innengebiet  $\Omega$  zu  $G$  gehört. Seien  $h_1$  und  $h_2$  die besten harmonischen Majoranten von  $u_1$  und  $u_2$  in  $\Omega$ ,  $h = h_1 - h_2$ . Wir wählen einen Punkt  $z_0 \in \Omega$ . Sei  $z = \varphi(\zeta)$  eine konforme Abbildung von  $|\zeta| < 1$  auf  $\Omega$ , welche  $\zeta = 0$  in  $z = z_0$  überführt. Es bezeichne  $\gamma_r$  das Bild des Kreises  $|\zeta| = r$  ( $0 < r < 1$ ).

**Satz B.** *Der (stets existierende<sup>10</sup>) und von der Wahl von  $z_0$  unabhängige) Grenzwert*

$$\lambda = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{\gamma_r} e^{h(z)} |dz| \quad (4.1)$$

---

<sup>10</sup>) Der Wert  $+\infty$  kann angenommen werden.

ist gleich der Länge  $l$  von  $\Gamma$  in der Metrik (1.2) nach der ALEXANDROWSCHEN Definition [1, S. 69].

**Beweis.** Mit Anwendung von Lemma 3 ist

$$\begin{aligned} \liminf_{r \rightarrow 1} \int_{\gamma_r} e^{u(z)} |dz| &= \liminf_{r \rightarrow 1} \int_{|\zeta|=r} \exp \{u(\varphi(\zeta)) + \log |\varphi'(\zeta)|\} |d\zeta| \\ &= \lim_{r \rightarrow 1} \int_{|\zeta|=r} \exp \{h(\varphi(\zeta)) + \log |\varphi'(\zeta)|\} |d\zeta| = \lim_{r \rightarrow 1} \int_{\gamma_r} e^{h(z)} |dz|, \end{aligned} \quad (4.2)$$

woraus sich zunächst die Existenz von  $\lambda$  ergibt. Die links in (4.2) stehenden Integrale stellen – wie in Abschnitt 3 für beliebige analytische Kurven  $\gamma_r$  bewiesen wurde – die Längen  $l_r$  der Kurven  $\gamma_r$  in der Metrik (1.2) dar. Da  $\liminf_{r \rightarrow 1} l_r \geq l$  ist [1, S. 70, Satz 5], folgt aus (4.2)

$$\lambda \geq l. \quad (4.3)$$

Es existiert eine Folge  $\{\Omega_n\}$  von einfach zusammenhängenden Gebieten in der  $z$ -Ebene mit folgenden Eigenschaften: (1)  $z_0 \in \Omega_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ); (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Omega_n = \Omega$ ; (3) der Rand  $\Gamma_n$  von  $\Omega_n$  ist ein Polygon und es gilt

$$\int_{\Gamma_n} e^u |dz| < l + \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.4)$$

Sei  $z = \varphi_n(\zeta)$  eine konforme Abbildung von  $|\zeta| < 1$  auf  $\Omega_n$ , welche  $\zeta = 0$  in  $z = z_0$  überführt, und es bezeichne  $\gamma_{rn}$  das Bild des Kreises  $|\zeta| = r$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ). Seien  $h_{1n}$  und  $h_{2n}$  die besten harmonischen Majoranten von  $u_1$  und  $u_2$  in  $\Omega_n$ ,  $h_n = h_{1n} - h_{2n}$ . Es ist [6, S. 241]

$$\int_{\gamma_{rn}} e^{h_n} |dz| \leq \int_{\Gamma_n} e^u |dz| \quad (0 < r < 1; \quad n = 1, 2, 3, \dots). \quad (4.5)$$

Wir behaupten ferner, daß für eine Teilfolge  $\{n_k\}$  von  $\{n\}$

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{\gamma_{rn_k}} e^{h_{n_k}} |dz| = \int_{\gamma_r} e^h |dz| \quad (4.6)$$

( $0 < r < 1$ ) ist. Zunächst zeigen wir, daß

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z) = h(z) \quad (4.7)$$

ist, wobei die Konvergenz auf jedem kompakten Teilbereich  $K_z$  von  $\Omega$  gleichmäßig erfolgt. Aus den Darstellungen

$$u(z) = h(z) - \int_{\Omega} g(z, \zeta) d\mu(e_\zeta) \quad (z \in \Omega)$$

und

$$u(z) = h_n(z) - \int_{\Omega_n} g_n(z, \zeta) d\mu(e_\zeta) \quad (z \in \Omega_n),$$

in denen  $g$  und  $g_n$  die GREENSchen Funktionen von  $\Omega$  und  $\Omega_n$  bezeichnen, folgt

$$\begin{aligned} |h(z) - h_n(z)| &\leq \left| \int_{\Omega \cap \Omega_n} [g(z, \zeta) - g_n(z, \zeta)] d\mu(e_\zeta) \right| \\ &+ \left| \int_{\Omega - \Omega_n} g(z, \zeta) d\mu(e_\zeta) \right| + \left| \int_{\Omega_n - \Omega} g_n(z, \zeta) d\mu(e_\zeta) \right|. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Für  $n \rightarrow \infty$  streben – gleichmäßig für  $z \in K_z$  – die auf der rechten Seite von (4.8) stehenden Terme gegen 0. Daraus folgt (4.7).

Aus bekannten Sätzen über normale Familien und konforme Abbildung (vgl. etwa [3, S. 177, 180, 182] und [2, S. 66]) schließt man, daß für eine Teilfolge  $\{n_k\}$  von  $\{n\}$

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(\zeta) = \varphi(\zeta) \tag{4.9}$$

und

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \varphi'_{n_k}(\zeta) = \varphi'(\zeta) \tag{4.10}$$

ist, wobei die Konvergenz auf jedem kompakten Teilbereich  $K_\zeta$  von  $|\zeta| < 1$  gleichmäßig erfolgt. Da  $\varphi'(\zeta) \neq 0$  ist, folgt aus (4.10)

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} \log |\varphi'_{n_k}(\zeta)| = \log |\varphi'(\zeta)|, \tag{4.11}$$

gleichmäßig auf  $K_\zeta$ . Unter Benützung der Ungleichung

$$|h_{n_k}(\varphi_{n_k}(\zeta)) - h(\varphi(\zeta))| \leq |h_{n_k}(\varphi_{n_k}(\zeta)) - h(\varphi_{n_k}(\zeta))| + |h(\varphi_{n_k}(\zeta)) - h(\varphi(\zeta))|$$

schließt man aus (4.7) und (4.9), daß – gleichmäßig auf  $K_\zeta$  –

$$\lim_{n_k \rightarrow \infty} h_{n_k}(\varphi_{n_k}(\zeta)) = h(\varphi(\zeta)). \tag{4.12}$$

Aus (4.11) und (4.12) folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n_k \rightarrow \infty} \int_{|\zeta|=r} \exp \{h_{n_k}(\varphi_{n_k}(\zeta)) + \log |\varphi'_{n_k}(\zeta)|\} |d\zeta| \\ = \int_{|\zeta|=r} \exp \{h(\varphi(\zeta)) + \log |\varphi'(\zeta)|\} |d\zeta|. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent mit (4.6). (4.4), (4.5) und (4.6) ergeben

$$\lambda \leq l. \tag{4.13}$$

Satz B folgt aus (4.3) und (4.13).

Von der Annahme, daß das Innengebiet  $\Omega$  von  $\Gamma$  zu  $G$  gehört, kann man sich befreien, indem man an Stelle von  $\Omega$  ein in  $G$  liegendes Ringgebiet betrachtet, dessen eine Randkomponente von  $\Gamma$  gebildet wird. Die  $\gamma_r$  sind dann durch diejenigen Kurven zu ersetzen, die bei einer konformen Abbildung auf  $R < |\zeta| < 1$  in die Kreise  $|\zeta| = r$  übergehen.

Ist  $\Gamma$  nicht geschlossen, so ergänzt man zunächst  $\Gamma$  zu einer geschlossenen Kurve, integriert dann aber nur über die  $\Gamma$  entsprechenden Teilbogen der  $\gamma_r$ .

Satz B gibt die natürliche potentialtheoretische Definition der Kurvenlänge auf Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung. Mit ihrer Hilfe ist es nun zum Beispiel möglich, den funktionentheoretischen Beweis der isoperimetrischen Ungleichung auf gekrümmten Flächen [6, 7] so auszubauen, daß das Resultat dem entsprechenden – mit ganz andern Mitteln hergeleiteten – Satz von ALEXANDROW [1, S. 416] äquivalent wird.

Herrn Professor PFLUGER verdanken wir folgenden Hinweis: Die Winkel-treue der Abbildung  $w = f(z)$  folgt direkt aus (3.20) durch Anwendung eines Satzes von D. MENCHOFF (Sur une généralisation d'un théorème de M. H. BOHR, Mat. Sbornik 44 (1937) 339–354, p. 340), der von F. W. GEHRING (The definitions and exceptional sets for quasiconformal mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn., im Druck) kürzlich neu bewiesen, verschärft und auf quasikonforme Abbildungen verallgemeinert wurde.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] A. D. ALEXANDROW, *Die innere Geometrie der konvexen Flächen*. Akademie-Verlag, Berlin 1955.
- [2] C. CARATHÉODORY, *Conformal representation*. 2nd edition, Cambridge University Press 1952.
- [3] C. CARATHÉODORY, *Funktionentheorie*. Bd. I, Birkhäuser, Basel 1950.
- [4] S. S. CHERN, P. HARTMAN and A. WINTNER, *On isothermic coordinates*. Comment. Math. Helv. 28 (1954), 301–309.
- [5] G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, G. PÓLYA, *Inequalities*. 2nd edition, Cambridge University Press 1952.
- [6] A. HUBER, *On the isoperimetric inequality on surfaces of variable GAUSSIAN curvature*. Ann. of Math. 60 (1954), 237–247.
- [7] A. HUBER, *Zur isoperimetrischen Ungleichung auf gekrümmten Flächen*. Acta Math. 97 (1957), 95–101.
- [8] A. HUBER, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*. Comment. Math. Helv. 32 (1957), 13–72.
- [9] C. B. MORREY, JR., *On the solutions of quasilinear elliptic partial differential equations*. Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 126–166.
- [10] R. NEVANLINNA, *Uniformisierung*. Springer Berlin 1953.
- [11] T. RADÓ, *Subharmonic functions*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete V 1. Springer, Berlin 1937.
- [12] T. RADÓ and P. V. REICHELDERFER, *Continuous transformations in analysis*. Springer 1955.
- [13] I. G. RESCHETNJAK, *Isotherme Koordinaten in Mannigfaltigkeiten beschränkter Krümmung*. Doklady Akad. Nauk SSSR, 94 (1954), 631–634.
- [14] F. RIESZ, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel*. I et II, Acta Math. 48 (1926), 329–343 et 54 (1930), 321–360.
- [15] A. WINTNER, *On the local rôle of the logarithmic potential in differential geometry*. Amer. J. Math. 75 (1953), 679–690.
- [16] A. WINTNER, *Remarks on binary RIEMANNIAN metrics*. Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 5, (1956), 59–72.

(Eingegangen den 12. August 1959)