Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 33 (1959)

Artikel: Reguläre Modifikation komplexer Mannigkaltigkeiten
Autor: Aeppli, Alfred
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26003

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Reguläre Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten
Regulär verzweigte Überlagerungen

von ALFRED AEPPLI, Ithaca, N. Y. (USA)

Einleitung

H. HOPF hat in [1] den folgenden Satz bewiesen: Ist $U^{(2)}$ eine komplex zweidimensionale Koordinatenzelle, versehen mit einem komplexen Koordinatensystem, und ist p ein Punkt in $U^{(2)}$, so ist jede lokale komplexe Modifikation $\Phi: (\bar{U}^{(2)}, S^{(1)}) \to (U^{(2)}, p)$, bei welcher p durch die kompakte komplex eindimensionale Fläche $S^{(1)}$ (singularitätenfrei eingelagert in $\bar{U}^{(2)}$) ersetzt wird, der σ-Prozeß[1]) in $p \in U^{(2)}$. Das erste Ziel der vorliegenden Arbeit besteht darin, diesen Satz für höhere Dimensionen zu beweisen. Dazu werden zunächst in § 1 zwei Hilfssätze hergeleitet, welche ihren Ursprung in [1] besitzen: Hilfssatz 1 ist die Verallgemeinerung der Tatsache, daß bei einer lokalen Modifikation Φ: $(\bar{U}, S) \to (U, p)$ mit der Abbildung φ: $\bar{U} \to U$ φ vollständig ist für kompaktes S ([1], p. 134), und Hilfssatz 2 handelt von der Fortsetzbarkeit einer gewissen analytischen Abbildung ψ, welche der meromorphen Funktion q in [1] entspricht (vgl. das Lemma in [1], p. 147). Auch die Beweise zu den beiden Hilfssätzen werden ähnlich den entsprechenden in [1] geführt, bei Hilfssatz 2 kommt jedoch die KOOPMANsche Darstellung (5) neu hinzu. In § 2 wird dann der Einzigkeitssatz über den σ-Prozeß behandelt (Satz 1): Jede lokale komplexe Modifikation Φ: $(\bar{U}^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (U^{(n)}, p)$, $S^{(n-1)}$ kompakte komplexe Mannigfaltigkeit, ist der σ-Prozeß in $p \in U^{(n)}$. Die Voraussetzung der singularitätenfreien Einbettung $S^{(n-1)} \subset \bar{U}^{(n)}$ wird wesentlich benutzt. Es ist zu hoffen, daß auch in allgemeineren Fällen, für nicht singularitätenfreie komplex analytische Einlagerung $S \subset \bar{U}$, Hilfssatz 2 in gewisser Form gilt. Dies ist richtig für $n = 2$: Man gelangt dann unter anderem zu den «Sphärenbäumen» und zu deren Einzigkeit (bei kompaktem S; Satz III′ in [1]).

Nachdem in § 2 die lokale Modifikation untersucht wurde, kommt in § 3 allgemeiner die «reguläre» Modifikation zur Sprache. Eine reguläre Modifikation Φ: $(V, S) \to (W, A)$ ist eine komplexe Modifikation mit (komplex analytischer) Abbildung φ: $V \to W$, in welcher die auftretenden Räume V, W,

---

[1]) Zu den Begriffsbildungen «Modifikation», «lokale Modifikation», «komplexe Modifikation» siehe [2]. Die Bezeichnungen werden soweit als möglich aus [2] übernommen. Zur Definition des σ-Prozesses sowie des $\sigma^{n,q}$-Prozesses siehe [1], [2], [4].

S, A kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten sind (mit regulären Einlagerungen $S \subset V$ und $A \subset W$[2])). Es gilt Satz 2′: Jede nicht triviale reguläre Modifikation ist äquivalent einem $\sigma^{n,q}$-Prozeß[1]). Dieser Satz enthält den obigen Einzigkeitssatz über den σ-Prozeß. Er wurde in [2] angekündigt[3]) (siehe auch [3], p. 57). Sein Beweis beruht auf den Hilfssätzen 1 und 5 (in § 1). Dabei wird ein etwas stärkerer Satz, Satz 2, hergeleitet unter Benutzung der beiden weiteren Hilfssätze 3 und 4 (ebenfalls in § 1). – Im Anschluß an den Einzigkeitssatz über den $\sigma^{n,q}$-Prozeß wird in § 3 noch eine Anwendung gegeben: Die Dilatation (oder die monoidale Transformation) der algebraischen Mannigfaltigkeit W längs A ist der $\sigma^{n,q}$-Prozeß längs A in W. Daher ist die $\sigma^{n,q}$-transformierte Mannigfaltigkeit einer algebraischen Mannigfaltigkeit wieder algebraisch. Weiter ist auch die $\sigma^{n,q}$-transformierte Mannigfaltigkeit einer KÄHLERschen Mannigfaltigkeit wieder KÄHLERsch (Satz von BLANCHARD), was am Ende von § 3 kurz bewiesen wird.

§ 4 handelt von holomorphen Überlagerungsabbildungen φ: $(V, S) \to (W, A)$ mit regulärer Verzweigung (zur Definition siehe § 4a)). Das Hauptergebnis wird in Satz 3′ (und etwas allgemeiner in Satz 3) ausgesprochen: Jede regulär verzweigte Überlagerung wird erhalten entweder durch Zusammensetzen einer «Windung» mit einer regulären Überlagerungsabbildung oder einer regulären Überlagerungsabbildung mit einem $\sigma^{n,q}$-Prozeß. Eine nicht triviale Windung (längs S) kann also nicht mit einem $\sigma^{n,q}$-Prozeß (Π: $(V, S) \to (W, A)$) zusammengesetzt werden. Dies beruht auf einem Lemma (in § 4c)) über die Windungsmöglichkeiten längs $S^{(n-1)}$ in $V^{(n)}$: Es existiert dann und nur dann eine r-fache Windung längs S in V, wenn die charakteristische Klasse des Normalenbündels von S in V durch r teilbar ist.

Herrn Prof. H. HOPF bin ich für Anregung zu Dank verpflichtet. Ebenso danke ich Herrn Prof. B. ECKMANN für das Interesse, das er dieser Arbeit entgegengebracht hat.

§1. Hilfssätze

a) **Hilfssatz 1.** *Die Modifikation*[4])

$$\Phi: \ (V^n, S) \to (W, A)$$

---

[2]) V und $V^{(n)}$ (bzw. V^n) bezeichnen zugleich eine komplexe (bzw. reelle) Mannigfaltigkeit der komplexen (bzw. reellen) Dimension n: $\dim_C V = n$ (bzw. $\dim_R V = n$). – Mannigfaltigkeiten sollen zusammenhängend sein, wenn nichts anderes gesagt wird.

[3]) Als Anwendung des Einzigkeitssatzes über den $\sigma^{n,q}$-Prozeß wird in [2] auf die Untersuchung der DOLBEAULTschen Gruppen bei regulärer Modifikation hingewiesen. Darüber ist eine separate Arbeit in Vorbereitung.

[4]) Hier handelt es sich um «allgemeine» Modifikation. Vgl. [2], § 1a).

werde durch die Abbildung

$$\varphi: \quad V^n \to W$$

induziert. V^n *sei eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit;* W *liege in einer Mannigfaltigkeit* $\tilde{W}^n$: $W \subset \tilde{W}^n$. A *und* S *seien echte Teilräume in* W *bzw. in* V^n, *und* S *sei kompakt. Dann liegt eine Umgebung* U' *von* A, *die Umgebung* U' *in* $\tilde{W}^n$ *genommen, in* W.

Korollar. *Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes* 1 *ist* W *eine Mannigfaltigkeit* W^n.

Beweis: $U = U(S)$ sei eine solche (offene) Umgebung von S in V, daß $\bar{U}$ kompakt ist. Dann ist auch $U^{\cdot} = \bar{U} - U$ kompakt. $\varphi U^{\cdot}$ ist abgeschlossen, und es ist $A \cap \varphi U^{\cdot} = 0$. Es folgt: A besitzt eine Umgebung $U' = U(A)$ in $\tilde{W}$, derart, daß $U' \cap \varphi U^{\cdot} = 0$. Es gilt $U' \cap \varphi \bar{U} = U' \cap \varphi U$, und $B = (U' - A) \cap \varphi \bar{U} = (U' - A) \cap \varphi(U - S)$.

Da $\varphi \bar{U}$ abgeschlossen ist, ist B abgeschlossen in $U' - A$. Da $U - S$ offen ist und φ topologisch in $U - S$, ist $\varphi(U - S)$ offen, und daher ist B offen in $U' - A$. In jeder Zusammenhangskomponente von $U' - A$ befindet sich mindestens ein Punkt von B (, da A und S echte Teilmengen sind von W bzw. von V[5])); daher folgt aus der Abgeschlossenheit und Offenheit von B in $U' - A$: $B = U' - A$ oder $U' - A \subset \varphi(U - S) \subset \varphi(V) = W$, das heißt A besitzt eine volle Mannigfaltigkeitsumgebung U' (bezüglich $\tilde{W}$) in W, W ist Mannigfaltigkeit der Dimension n, und A liegt im Innern von W.

b) Nun betrachten wir lokale komplexe Modifikationen

$$\Phi: \quad (\bar{U}^{(n)}, S) \to (U^{(n)}, p),$$

in welchen $U^{(n)}$ eine komplexe Koordinatenzelle ist, $\bar{U}^{(n)}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit[6]), und bei denen S an Stelle des Punktes p in $U^{(n)}$ eingesetzt wird. Jede lokale komplexe Modifikation wird durch eine stetige Abbildung

$$\varphi: \quad \bar{U}^{(n)} \to U^{(n)}$$

induziert, die in $\bar{U}^{(n)} - S$ topologisch und komplex analytisch ist, und für welche $\varphi(S) = p$ gilt. Nach einem Satz von Radó-Behnke-Stein-Cartan[7]) ist dann φ in ganz $\bar{U}^{(n)}$ komplex analytisch, also ist auch die Funktionaldeterminante $\Delta(\varphi)$ komplex analytisch, so daß S mit der Nullstellen-

[5]) Falls bei einer Modifikation eine der Inklusionen $A \subset W$, $S \subset V$ echt ist, sind es beide.

[6]) Der Querstrich in $\bar{U}^{(n)}$ bedeutet hier Modifikation von $U^{(n)}$ (und nicht Übergang zur abgeschlossenen Hülle wie in a)).

[7]) Für $n = 1$ handelt es sich um den Satz von Radó [5]. Die Übertragung auf höhere Dimensionen stammt von Behnke und Stein [6] und von Cartan [7]. Heinz lieferte in [8] einen «elementaren» Beweis des Satzes.

menge von $\Delta(\varphi)$ zusammenfällt, wenn φ nicht in ganz $\bar{U}$ eineindeutig ist, was wir annehmen: S ist eine komplexe Menge in $\bar{U}$, das heißt die Nullstellenmenge lokaler komplex analytischer Gleichungen in $\bar{U}$, und die komplexe Dimension von S beträgt $n-1$. S ist zusammenhängend. Weiter nehmen wir an: S ist als komplexe Menge in $\bar{U}$ regulär eingebettet, das heißt S ist eine komplexe Mannigfaltigkeit $S^{(n-1)}$ in $\bar{U}$[8]).

c) Wir wollen also im folgenden lokale komplexe Modifikationen

$$\Phi: \quad (\bar{U}^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (U^{(n)}, p) \tag{1}$$

mit der komplex analytischen Abbildung

$$\varphi: \quad \bar{U}^{(n)} \to U^{(n)} \tag{2}$$

untersuchen. $\bar{U}^{(n)}$ ist eine komplexe Mannigfaltigkeit, $S^{(n-1)}$ eine in $\bar{U}$ regulär eingelagerte komplexe Mannigfaltigkeit, $U^{(n)}$ eine komplexe Koordinatenzelle mit den Koordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_n$, und p sei der Ursprung des Koordinatensystems. Die Abbildung φ in (2) wird durch die n-Funktionen

$$y_i = f_i(x)\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,, \qquad x \in \bar{U}^{(n)}\,, \tag{3}$$

gegeben. Es ist $f_i(x) = 0$ für $x \in S$. Neben φ werde die Abbildung $\psi: \bar{U}^{(n)} \to P^{(n-1)}$ durch

$$\psi(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$$

definiert, wo $P^{(n-1)}$ den komplex $(n-1)$-dimensionalen komplex projektiven Raum bedeutet und $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ den Punkt mit den homogenen Koordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ in $P^{(n-1)}$. ψ ist in $\bar{U} - S$ eindeutig und analytisch (nach Wahl eines festen Koordinatensystems $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$). Daß ψ auf S fortgesetzt werden kann, ist der Inhalt des folgenden Hilfssatzes:

Hilfssatz 2. *Liegt die lokale Modifikation* (1) *vor, so kann die Abbildung* ψ *auf* $S^{(n-1)}$ *analytisch fortgesetzt werden.*

Hilfssatz 2 ist äquivalent dem folgenden

Hilfssatz $\tilde{2}$. *Wird die Modifikationsabbildung* φ *in* (2) *in einer Koordinatenumgebung von* $o \in S$ *gegeben durch die n-Funktionen*

$$y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_n)\, g_i(x_1, \ldots, x_n)\,, \tag{4}$$

$g_1, g_2, \ldots, g_n$ *relativ prim (im Ring der holomorphen Funktionskeime in* o*), so wird* $g_i(o) \neq 0$ *für mindestens ein* i.

---

[8]) Wenn in der Situation $S \subset \bar{U}$ verlangt wird, daß S eine topologische bzw. reelle bzw. komplexe Mannigfaltigkeit ist, so soll S als eine in U eingelagerte Punktmenge eine topologische bzw. reelle bzw. komplexe Mannigfaltigkeit sein (mit der durch $\bar{U}$ induzierten reell bzw. komplex analytischen Struktur); es handelt sich also um singularitätenfreie (oder reguläre) Einlagerungen.

Beweis: Da die Einlagerung $S \subset U$ regulär ist, wird die Abbildung φ in (2) in einer Umgebung X eines Punktes $o \in S$ mit Hilfe geeigneter Koordinatensysteme $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ in X bzw. $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ in einer Umgebung von p nach KOOPMAN [9]) gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= x_1^{s_1}, \\ y_i &= x_1^{s_i}\{\sum_{k=0}^{\lambda_i} x_1^k h_{ik}(x_{i+1}, \ldots, x_n) + x_1^{\lambda_i} x_i\}, \\ i &= 2, 3, \ldots, n, \qquad s_1 > 0, \qquad s_i > 0, \\ \lambda_2 &\geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_{n-1} \geq \lambda_n \geq 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dabei wird $S \cap X$ in X durch $x_1 = 0$ dargestellt. Die Abbildung $x \to y$ in (5) $(x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n))$ läßt sich umkehren zu einer s_1-deutigen Korrespondenz $y \to x$ in einem Gebiet außerhalb des Punktes $p = (0, 0, \ldots, 0)$: die x_i sind Funktionen der Variabeln $y_1^{1/s_1}, y_2, y_3, \ldots, y_n$, holomorph in diesen Variabeln in einem Gebiet außerhalb p und meromorph in p $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Für eine Modifikationsabbildung (2) muß also $s_1 = 1$ sein. Ist weiter C eine in $X \subset \overline{U}$ regulär eingebettete und S in o regulär schneidende Kurve [10]), so kann C durch x_1 parametrisiert werden, und das Bild φC (bei der Modifikationsabbildung (2)) wird wegen (5) und $s_1 = 1$ eine durch $y_1 = x_1$ parametrisierbare reguläre Kurve durch p. Daher gilt:

Lemma. *Bei der Modifikationsabbildung* (2) *ist das Bild einer regulären Kurve, welche die Singularitätenmannigfaltigkeit S regulär schneidet, eine reguläre Kurve* [11]).

φ werde nun in einer Umgebung X von $o \in S$ durch (4) dargestellt, und die

---

[9]) [9], p. 571, Gln. (7) mit $r = 0$. An Stelle von $x, y, p_i, q, \omega_{iq}, r$ in [9] stehen hier y, x, s_i, k, h_{ik}, q. – Die Betrachtung der Funktionaldeterminante $\Delta(\varphi)$ in der Taylor-Entwicklung nach x_1 lehrt, daß bei überall regulärer Einlagerung $S \subset \overline{U}$ alle Punkte in S «non-specialized points» sind ([9], p. 567 und p. 570): andernfalls müßte S Singularitäten aufweisen. Daher gilt die Darstellung (5) für die Umgebung eines beliebigen Punktes $o \in S$ (in geeigneten Koordinaten).

[10]) C ist also eine komplex 1-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, und der Schnitt $C \cap S = o$ ist der einfach gezählte Punkt o.

[11]) Daß die Voraussetzung der regulären Einlagerung $S \subset \overline{U}$ wesentlich ist, zeigt das Beispiel der Abbildung $x \to y$, gegeben durch

$$y_1 = x_1 x_2 \ldots x_n = t, \qquad y_i = t x_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, n,$$

mit der Inversen $y \to x$ in $y_1 y_2 \ldots y_n \neq 0$:

$$x_1 = \frac{y_1^n}{y_2 \cdots y_n}, \quad x_i = \frac{y_i}{y_1}, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Hier besitzt das Bild jeder komplex analytischen Kurve durch den Nullpunkt o im x-Raum eine Singularität im Ursprung p des y-Raumes. Daß auch die Bedingung des regulären Schnittes $C \cap S$ nicht weggelassen werden kann, zeigt das Beispiel einer S berührenden Kurve.

Kurve C besitze die komplexe Parameterdarstellung $x_i = x_i(z)$ mit $x_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; C wie oben gewählt; die Koordinaten x_i, y_i bei (4) sind im allgemeinen nicht die speziellen, die in (5) gebraucht werden; o ist der Ursprung des Systems $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$). Da nach dem Lemma φC regulär ist (φC gegeben durch $y_i = y_i(z) = t(x_1(z), \ldots, x_n(z)) g_i(x_1(z), \ldots, x_n(z))$), muß für mindestens ein i

$$y_i'(z) \mid_{z=0} = \frac{dy_i}{dz}(0) \neq 0\,,$$

und ist $g_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$ für alle i, so folgt

$$\frac{dy_i}{dz}(0) = t(0, 0, \ldots, 0) \frac{dg_i}{dz}(0) \neq 0$$

für mindestens ein i. Daher ist $t(0, 0, \ldots, 0) \neq 0$, so daß $t = 1$ gesetzt werden darf. (4) lautet dann $y_i = g_i(x_1, \ldots, x_n)$, $(g_1, g_2, \ldots, g_n) = 1$. Wegen der Eineindeutigkeit von φ in $X - S \cap X$ hat $\Delta(\varphi)$ höchstens dort Nullstellen, wo $\varphi(x) = p$. Wir behaupten: $\Delta(\varphi) \mid_{x=o} \neq 0$. Denn da $g_1, g_2, \ldots, g_n$ teilerfremd sind, muß für $N = \{x \mid g_i(x) = 0$ für alle $i\}$ die komplexe Dimension von N kleiner oder gleich $n - 2$ sein: $\dim_C N \leq n - 2$, während für $D = \{x \mid \Delta(\varphi) = 0\}$ $\dim_C D = n - 1$, falls D nicht leer ist. Daraus folgt: Gilt $g_i(0, 0, \ldots, 0) = 0$ für alle i, so ist φ eineindeutig in X und daher in $\bar{U}$, es ist $\varphi^{-1} p = o$, und die Singularitätenmenge S wird leer, womit Hilfssatz 2 bzw. $\tilde{2}$ bewiesen ist.

Bemerkung. Nachdem für geeignete Koordinatensysteme $\{x_1, \ldots, x_n\}$ und $\{y_1, \ldots, y_n\}$ die Darstellung (5) gilt, kann der Beweis zum Hilfssatz $\tilde{2}$ auch folgendermaßen zu Ende geführt werden: Wegen (5) und $s_1 = 1$ ist das zu dem bei (5) benutzten Koordinatensystem $\{y_1, \ldots, y_n\}$ gehörige ψ auf S fortsetzbar. Daraus folgt: Beim Übergang zu einem andern Koordinatensystem in der Umgebung von p resultiert eine (neue) Abbildung ψ, die wieder fortsetzbar ist, deren Fortsetzung auf S aus dem alten $\psi \mid S$ mittels einer projektiven Abbildung von $P^{(n-1)}$ auf sich erhalten wird (vgl. auch [4]).

d) Nun betrachten wir die komplexe Modifikation

$$\Phi\colon\ (\bar{U}^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (U^{(n)}, A^{(q)}) \tag{1'}$$

mit der komplex analytischen Abbildung

$$\varphi\colon\ \bar{U}^{(n)} \to U^{(n)}\,. \tag{2'}$$

$U^{(n)}$ ist wie in c) eine komplexe Koordinatenzelle, $S^{(n-1)}$ die (eventuell leere) Nullstellenmenge von $\Delta(\varphi)$ in der komplexen Mannigfaltigkeit $\bar{U}^{(n)}$, ferner

soll S eine komplexe Mannigfaltigkeit sein (oder leer). Dann gilt entsprechend (5) in geeigneten Koordinaten in einer Umgebung von $o \in S$ bzw. von $p \in A$ nach KOOPMAN[12]) die folgende Darstellung für die Abbildung (2′):

$$\left.\begin{aligned} & y_1 = x_1^{s_1}, \\ & y_i = x_1^{s_i}\{\sum_{k=0}^{\lambda_i} x_1^k h_{ik}(x_{i+1}, \ldots, x_n) + x_1^{\lambda_i} x_i\}, \\ & y_j = x_j, \\ & i = 2, 3, \ldots, n-q, \quad j = n-q+1, \ldots, n, \quad s_1 > 0, \quad s_i > 0, \\ & \lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_{n-q-1} \geq \lambda_{n-q} \geq 0, \quad n-1 \geq q \geq 0. \end{aligned}\right\} \quad (5')$$

Zum Beweis von (5′) wird neben der regulären Einbettung von S in $\bar{U}$ nur benutzt, daß φ außerhalb S lokal eineindeutig ist. Aus (5′) folgt die reguläre Einbettung von A in U, insbesondere bekommen wir:

Hilfssatz 3. *Bei der Modifikation* (1′) *mit der Abbildung* (2′) *ist die Ausnahmemenge A eine komplexe Mannigfaltigkeit*[13]).

Für $q = 0$ geht (5′) wieder in (5) über, und es fehlt die dritte Gleichungsgruppe $y_j = x_j$. Für $q = n-1$ fehlt die zweite Gleichungsgruppe $y_i = x_1^{s_i}\{\ldots\}$. Im Falle einer Modifikationsabbildung (2′) wird $s_1 = 1$, weil $x_i = x_i(y_1^{1/s_1}, y_2, y_3, \ldots, y_n)$ (holomorph in den Variabeln $y_1^{1/s_1}, y_2, y_3, \ldots, y_n$ in einem Gebiet außerhalb A, meromorph in gewissen Punkten von A; $i = 1, 2, \ldots, n-q$). Ist also bei einer Modifikation (1′) $q = n-1$, so folgt aus (5′) und $s_1 = 1$: $\Delta(\varphi) \neq 0$ überall, $\bar{U}$ ist (unverzweigte) Überlagerung von U, das heißt es gilt:

Hilfssatz 4. *Ist in* (1′), (2′) $q = n-1$, *so ist φ ein komplexer Homöomorphismus.*

Hilfssatz 4 gilt für kompakte[14]) Modifikationsabbildungen auch ohne die Voraussetzung der regulären Einlagerung $S \subset \bar{U}$ (siehe [10], § 3, Satz 7), wenn A als irreduzible komplex $(n-1)$-dimensionale komplexe Menge vorausgesetzt wird[15]).

Wegen Hilfssatz 3 existieren in einer Umgebung von $p \in A$, die wie in (1′) U heißen soll, solche Koordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_n$, daß die Gleichungen

---

[12]) Vgl. Anm. 9.

[13]) Zu Hilfssatz 3 vgl. Satz 6 in [10], § 3, p. 288, der besagt, daß bei einer «eigentlichen» Modifikation das Bild einer komplexen Menge komplex ist («analytisch» in [10] an Stelle von «komplex»).

[14]) «Kompakte» Abbildung: das Urbild jeder kompakten Menge ist kompakt (auch «eigentliche» Abbildung, oder «application propre» nach BOURBAKI).

[15]) Zur Dimension einer komplexen Menge vgl. [11], p. 266ff.

$y_1 = 0,\ y_2 = 0, \ldots, y_{n-q} = 0$ die Mannigfaltigkeit $A \cap U$ charakterisieren. Wird dann die Abbildung φ in (2′) gegeben durch

$$y_i = f_i(x), \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad x \in \bar{U}^{(n)}, \tag{3'}$$

so betrachten wir entsprechend ψ in c) eine Abbildung $\psi\colon \bar{U}^{(n)} \to P^{(n-q-1)}$, dargestellt durch

$$\psi(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n-q}(x)),$$

wo $(y_1, y_2, \ldots, y_{n-q})$ den Punkt mit den homogenen Koordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_{n-q}$ im komplex projektiven Raum $P^{(n-q-1)}$ bedeutet. ψ ist definiert (und komplex analytisch) zunächst in $\bar{U} - S$. Es gilt analog dem Hilfssatz 2 bzw. $\tilde{2}$:

Hilfssatz 5. *Bei der Modifikation* (1′) *kann die Abbildung* ψ *auf* $S^{(n-1)}$ *analytisch fortgesetzt werden.*

Hilfssatz $\tilde{5}$. *Wird die Modifikationsabbildung* φ *in* (2′) *in einer Koordinatenumgebung von* $o \in S$ *gegeben durch*

$$\left.\begin{aligned} &y_i = f_i(x_1, \ldots, x_n) = t(x_1, \ldots, x_n) g_i(x_1, \ldots, x_n), \\ &y_j = f_j(x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n-q, \quad j = n-q+1, \ldots, n, \\ &(g_1, g_2, \ldots, g_{n-q}) = 1, \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

so wird $g_i(o) \neq 0$ *für mindestens ein* i.

Denn aus (5′) mit $s_1 = 1$ folgt wiederum das Lemma in c) für die Abbildung (2′) an Stelle von (2), und daraus läßt sich Hilfssatz 5 bzw. $\tilde{5}$ wie Hilfssatz $\tilde{2}$ beweisen. Es gilt auch hier eine der am Schluß von c) gemachten analoge Bemerkung.

§ 2. Einzigkeitssatz über den σ-Prozeß

Satz 1. *Liegt die lokale komplexe Modifikation*

$$\Phi\colon (\bar{U}^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (U^{(n)}, p) \tag{1}$$

vor, worin $U^{(n)}$ *eine komplexe Koordinatenzelle ist und* $S^{(n-1)}$ *eine kompakte komplexe Mannigfaltigkeit,* $n \geq 2$, *so ist* (1) *der* σ*-Prozeß in* p.

Genauer: Ist $\tilde{U}^{(n)}$ die durch den σ-Prozeß in p modifizierte Koordinatenzelle $U^{(n)}$ (eingebettet in $U^{(n)} \times P^{(n-1)}$, vgl. [1] oder [2]), so existiert unter den Voraussetzungen des Satzes 1 ein komplexer Homöomorphismus $\tilde{\varphi}\colon \bar{U}^{(n)} \to \tilde{U}^{(n)}$, derart, daß

$$\varphi = \pi\tilde{\varphi},$$

wenn $\pi\colon U^{(n)} \times P^{(n-1)} \to U^{(n)}$ die Projektion des topologischen Produktes $U^{(n)} \times P^{(n-1)}$ auf $U^{(n)}$ bedeutet.

Zusatz: Gemäß der Betrachtung in § 1b) kann noch gesagt werden: Ist

$$\Phi\colon (\bar{U}^{(n)}, S^m) \to (U^{(n)}, p)$$

eine lokale komplexe Modifikation, in welcher S eine reell m-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit ist mit $m \geq 1$, so ist S eine komplex $(n-1)$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit, und die Modifikation Φ ist der σ-Prozeß in p.

Bemerkung. In Satz 1 wird mitbehauptet, daß der σ-Prozeß in einem Punkt p einer komplexen Mannigfaltigkeit $M^{(n)}$, $n \geq 2$, unabhängig ist von der Wahl der lokalen komplexen Koordinaten in der Umgebung von p: für verschiedene Koordinatensysteme bekommt man äquivalente Modifikationen (1) (zum Äquivalenzbegriff siehe § 3a)). Dies kann leicht direkt eingesehen werden[16]). Wir sprechen also vom σ-Prozeß in p, ohne auf spezielle Koordinaten Bezug zu nehmen.

Beweis zu Satz 1: Die Abbildung $\tilde{\varphi}\colon \bar{U}^{(n)} \to \tilde{U}^{(n)} \subset U^{(n)} \times P^{(n-1)}$ wird durch

$$\tilde{\varphi}(x) = (\varphi(x),\ \psi(x))$$

gegeben. Sie ist nach Hilfssatz 2 auf ganz $\bar{U}^{(n)}$ definiert und komplex analytisch; außerdem ist sie auf $\bar{U} - S$ topologisch. Es sei $Y = \tilde{\varphi}\bar{U} \subset \tilde{U}$. Wir erhalten eine durch $\tilde{\varphi}$ induzierte komplexe Modifikation

$$\tilde{\Phi}\colon (\bar{U}, S) \to (Y, \tilde{\varphi}S)$$

mit $Y \subset \tilde{U}$, $\tilde{\varphi}S \subset P_p^{(n-1)}$, wo $P_p^{(n-1)}$ die Faser über p in $U^{(n)} \times P^{(n-1)}$ bedeutet.

Nun wenden wir den Hilfssatz 1 an: An Stelle von V^n, S, W, A, $\tilde{W}^n$ treten jetzt $\bar{U}$, S, Y, $\tilde{\varphi}S$, $\tilde{U}$, es sind die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt, und es folgt: $\tilde{\varphi}S$ besitzt eine Umgebung in $\tilde{U}$, welche in Y enthalten ist. Wegen der Kompaktheit von $\tilde{\varphi}S$ und wegen $\tilde{\varphi}(\bar{U} - S) \subset \tilde{U} - P_p^{(n-1)}$ muß dann $\tilde{\varphi}S = P_p^{(n-1)}$, und $Y = \tilde{U}$.

Wegen $\tilde{\varphi}S = P_p^{(n-1)}$ wird $\bar{\varphi} = \tilde{\varphi} \mid S$ fast überall lokal eineindeutig (das heißt bis auf niedriger dimensionale Ausnahmemengen), und da $\tilde{\varphi}$ in $\bar{U} - S$ eineindeutig ist, gibt es einen Punkt $o \in S$, in welchem $\tilde{\varphi}$ lokal eineindeutig ist[17]) (das heißt es gibt eine Umgebung von o, $X \subset \bar{U}$, derart, daß $\tilde{\varphi} \mid X$

[16]) Der σ-Prozeß im Punkt $p \in M$ besteht darin, p durch das Bündel der tangentiellen komplexen Linienelemente in p zu ersetzen (siehe [1], p. 140 oder [4]).

[17]) Vgl. auch [4], Beweis zu Satz 8.

topologisch ist). Die Funktionaldeterminante $\Delta(\tilde{\varphi})$ ist daher überall verschieden von null, denn wäre in einem Punkt $\Delta(\tilde{\varphi}) = 0$, so müßte $\Delta(\tilde{\varphi})$ auf einer komplex $(n-1)$-dimensionalen komplexen Menge D verschwinden, es müßte $D = S$ sein und damit $o \in D$. Also ist $\tilde{\varphi}$ überall lokal eineindeutig und daher auch $\bar{\varphi}$, das heißt S ist Überlagerungsmannigfaltigkeit von $P_p^{(n-1)}$, so daß wegen des einfachen Zusammenhanges von $P_p^{(n-1)}$ die Mannigfaltigkeit S durch $\tilde{\varphi}$ homöomorph auf $P_p^{(n-1)}$ abgebildet wird[18]). Es folgt: $\tilde{\varphi}$ ist ein komplexer Homöomorphismus, und es gilt $\varphi = \pi\tilde{\varphi}$, womit Satz 1 bewiesen ist.

§ 3. Die Einzigkeit des $\sigma^{n,q}$-Prozesses

a) **Satz 2.** *$V^{(n)}$ und $W^{(n)}$ seien kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten, S^m sei eine Mannigfaltigkeit in V (singularitätenfrei eingelagert; $m \leq 2n-1$). Liegt dann die komplexe Modifikation*

$$\Phi\colon\ (V^{(n)}, S^m) \to (W^{(n)}, A) \tag{6}$$

vor, welche durch die komplex analytische Abbildung

$$\varphi\colon\ V^{(n)} \to W^{(n)} \tag{7}$$

erzeugt wird, so ist entweder (7) *ein komplexer Homöomorphismus, das heißt* (6) *eine triviale Modifikation, oder es ist* (6) *der $\sigma^{n,q}$-Prozeß längs A in W: $S = S^{(n-1)}$, $A = A^{(q)}$ sind komplexe Mannigfaltigkeiten in V bzw. in W (regulär eingelagert), $m = 2n-2$, $q \leq n-2$, S wird komplex gefasert durch projektive Räume:*

$$\mathfrak{P}(A^{(q)}) = \{S^{(n-1)}, P^{(n-q-1)}, A^{(q)}\}, \tag{8}$$

und die Projektionsabbildung dieser Faserung $\bar{\varphi}$: $S^{(n-1)} \to A^{(q)}$ wird durch φ induziert.

Beweis: (6) sei eine nicht triviale Modifikation. S ist dann als Nullstellenmenge der Funktionaldeterminante $\Delta(\varphi)$ und als Mannigfaltigkeit eine komplex $(n-1)$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit. Indem wir die Hilfssätze 3 und 4 heranziehen, ergibt sich weiter, daß auch A eine komplexe (in W regulär eingelagerte) Mannigfaltigkeit ist mit der komplexen Dimension $q \leq n-2$.

Nun verläuft der Beweis analog dem zu Satz 1. Neben (6), (7) betrachten

[18]) Allgemeiner: der (globale) Abbildungsgrad von $\bar{\varphi} = \varphi \mid S$ ist gleich ± 1 bei einer (topologischen) Modifikation $\Phi\colon (V, S) \to (W, A)$ mit Abbildung φ, in welcher V, W Mannigfaltigkeiten und S, A kompakte orientierte Mannigfaltigkeiten derselben Dimension sind (vgl. [2], § 15 b)). – Es könnte im obigen Beweis auch Hilfssatz 4 verwendet werden, an Stelle der Betrachtung über die Funktionaldeterminante $\Delta(\tilde{\varphi})$.

wir den $\sigma^{n,q}$-Prozeß längs A in W:

$$\Pi\colon\ (\tilde{V}^{(n)}, \tilde{S}^{(n-1)}) \to (W^{(n)}, A^{(q)})$$

mit der komplex analytischen Abbildung

$$\pi\colon\ \tilde{V}^{(n)} \to W^{(n)}\,.$$

Es wird die Abbildung $\tilde{\varphi}\colon\ V^{(n)} \to \tilde{V}^{(n)}$ konstruiert: Außerhalb S ist $\tilde{\varphi}$ gleich φ, in einer Koordinatenumgebung X mit $X \cap S \neq 0$ wird $\tilde{\varphi}\colon\ X^{(n)} \to \tilde{U}^{(n)} \subset U^{(n)} \times P^{(n-q-1)}$ durch

$$\tilde{\varphi}(x) = (\varphi(x),\ \psi(x))$$

gegeben, wo ψ die Abbildung ψ in § 1d) ist. Wegen Hilfssatz 5 (bzw. $\tilde{5}$) und wegen der Koordinateninvarianz des $\sigma^{n,q}$-Prozesses[19]) ist $\tilde{\varphi}$ auf ganz V definiert und komplex analytisch. Es ist $\tilde{\varphi}S \subset \tilde{S}$, und wegen der Kompaktheit von S liefert Hilfssatz 1: $\tilde{\varphi}$ induziert eine Modifikation

$$\tilde{\Phi}\colon\ (V, S) \to (\tilde{V}, \tilde{S})\,.$$

Der Abbildungsgrad von $\bar{\varphi} = \tilde{\varphi} \mid S$ ist gleich 1[18]), und da S regulär in V liegt, ist $\Delta(\tilde{\varphi}) \neq 0$ überall (gleicher Schluß wie im Beweis zu Satz 1). $\tilde{\varphi}$ ist also ein komplexer Homöomorphismus, und es gilt $\varphi = \pi\tilde{\varphi}$, q.e.d.

Wenn wir unter regulären Modifikationen solche Modifikationen (6) mit komplex analytischer Abbildung (7) verstehen, in denen V, W, S, A kompakte komplexe Mannigfaltigkeiten sind (mit den regulären Einlagerungen $A \subset W$ und $S \subset V$), so sind alle regulären Modifikationen

$$\Phi\colon\ (V, S) \to (W, A) \tag{9}$$

nach dem obigen Satz $\sigma^{n,q}$-Prozeße (neben dem trivialen Fall der komplexen Homöomorphismen):

Satz 2′. *Jede nicht triviale reguläre Modifikation ist äquivalent einem $\sigma^{n,q}$-Prozeß.*

Dabei wird der Äquivalenzbegriff bei komplexen Modifikationen mit Abbildung folgendermaßen gegeben: Liegt die komplexe Modifikation

$$\Phi_1\colon\ (V_1, S_1) \to (W, A)$$

mit der (komplex analytischen) Abbildung $\varphi_1\colon\ V_1 \to W$ vor, daneben eine zweite

$$\Phi_2\colon\ (V_2, S_2) \to (W, A)$$

---

[19]) Satz 10 in [4].

mit der Abbildung $\varphi_2\colon V_2 \to W$, und existiert ein komplexer Homöomorphismus $\theta\colon V_1 \to V_2$ mit $\varphi_1 = \varphi_2\theta$, so heißen Φ_1, Φ_2 zueinander äquivalent.

Bemerkung. An Stelle der Kompaktheit von V und W genügt es, in Satz 2 und 2′ die Modifikationsabbildung φ als kompakt[14]) vorauszusetzen. (Siehe Hilfssatz $\bar{1}$ in § 4 b).)

b) **Anwendung in der algebraischen Geometrie.** $W^{(n)}$ sei eine (singularitätenfreie) algebraische Mannigfaltigkeit in $P^{(u)}$, und $A^{(q)}$ eine (in W regulär eingelagerte) Teilmannigfaltigkeit. Dann existiert ein Linearsystem $\Lambda = \{M\}$ von Hyperflächen $M^{(u-1)}$ eines gewissen Grades in $P^{(u)}$, derart, daß die folgenden Eigenschaften erfüllt sind: (a) $A \subset M$ für jedes $M \in \Lambda$; (b) zu zwei verschiedenen Punkten x, x' in $W - A$ gibt es eine Hyperfläche $M \in \Lambda$ mit $x \in M$, $x' \notin M$; (c) die Gesamtheit aller Hyperflächen M mit $x \in M$ für einen festen Punkt $x \in W - A$ kann als Punkt einer komplexen Mannigfaltigkeit $V_0^{(n)}$ angesehen werden, welche regulär in einem komplex projektiven Raum $P^{(u')}$ eingelagert ist; (d) V_0 wird durch Hinzufügen einer komplexen Mannigfaltigkeit $S^{(n-1)}$ zu einer kompakten singularitätenfreien algebraischen Mannigfaltigkeit $V^{(n)} \subset P^{(u')}$ abgeschlossen, derart, daß es eine komplex analytische Abbildung $\varphi\colon V \to W$ von V auf W gibt, welche außerhalb A eineindeutig ist[20]). Es wird also eine reguläre Modifikation (9) erzeugt, welche in der algebraischen Geometrie Dilatation oder monoidale Transformation genannt wird: V ist die längs A dilatierte algebraische Mannigfaltigkeit W. Satz 2′ liefert sofort:

Satz. *Die Dilatation der (singularitätenfreien) algebraischen Mannigfaltigkeit $W^{(n)}$ längs der (regulär eingelagerten) Teilmannigfaltigkeit $A^{(q)}$, $q \leq n - 2$, ist der $\sigma^{n,q}$-Prozeß längs A in W.*

Damit ist auch gesagt, daß die Dilatation von W längs A vom gewählten Linearsystem Λ unabhängig ist. Da die dilatierte Mannigfaltigkeit einer algebraischen Mannigfaltigkeit wieder algebraisch ist, erhalten wir als Korollar:

Korollar 1. *Die $\sigma^{n,q}$-transformierte Mannigfaltigkeit einer algebraischen Mannigfaltigkeit ist algebraisch.*

Die Dilatationen sind birationale Transformationen, so daß wir als weiteres Korollar bekommen:

Korollar 2. *Die $\sigma^{n,q}$-Prozesse stellen bei algebraischen Mannigfaltigkeiten birationale Transformationen dar.*

Dies kann auch direkt eingesehen werden, indem man zeigt, daß die Körper

---

[20]) Zu den Eigenschaften (a) bis (d) vgl. [12], Vol. III, ferner [13], [14] und [15]. Auf den Zusammenhang zwischen dem $\sigma^{n,q}$-Prozeß und der Dilatation hat mich Herr VAN DE VEN aufmerksam gemacht (vgl. auch [16]).

der meromorphen Funktionen auf V und auf W bei einer Modifikation (9) isomorph sind (Spezialfall eines Resultates in [2], § 19a); siehe auch [10]).

c) Es gilt eine Verallgemeinerung von Korollar 1 auf KÄHLERsche Mannigfaltigkeiten:

Satz von BLANCHARD. *Die $\sigma^{n,q}$-transformierte Mannigfaltigkeit einer KÄHLERschen Mannigfaltigkeit ist KÄHLERsch*[21]).

Beweis: σ_W sei eine KÄHLERsche Metrik in W von der Klasse C^∞ (oder genügend oft stetig differenzierbar). Wir bilden im abstrakt gegebenen «ausgefüllten Normalenbündel» N^{2n} von A in W (Bündel mit dem komplex affinen Raum $E^{(n-q)}$ als Faser, mit der Schnittfläche A, und mit der Strukturgruppe $G = U(n-q)$) die Funktion

$$\Omega'_N = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n-q} g_{\alpha\beta*}(x)\, z^\alpha \bar{z}^\beta .$$

Dabei ist $x \in A$, $z^1, z^2, \ldots, z^{n-q}$ sind komplexe Koordinaten in $E^{(n-q)}$, und $g_{\alpha\beta*}$ sind die Komponenten der Metrik σ_W. Da Ω'_N gegenüber G invariant ist, handelt es sich wirklich um eine Funktion in N. Wir übertragen Ω'_N in die Umgebung $\tilde{A}^{(n)}$ von A in W mittels einer topologischen «längs A fastkomplexen»[22]) Abbildung der Klasse C^∞ von einer Umgebung von A in N auf $\tilde{A} \subset W$, und zwar soll diese Abbildung jedes Faserstück $U(x) \cap E^{(n-q)}(x)$, $x \in A$, $U(x)$ Umgebung von x in N, auf eine bezüglich der Metrik σ_W zu A orthogonale geodätische Vollkugel in W abbilden. Dadurch bekommen wir eine Funktion $\Omega'_{\tilde{A}} = \Omega'_{\tilde{A}}(x)$, $x \in \tilde{A}$, von der Klasse C^∞. Es sei $\Omega = \log \Omega'_{\tilde{A}}$. In $\tilde{A}$ bezeichne $\varrho = \varrho(x)$ den Abstand des Punktes $x \in \tilde{A}$ von A, gemessen mit Hilfe der Metrik σ_W. $\eta(\varrho)$ sei eine Funktion der Klasse C^∞ mit $\eta(\varrho) = c$ für $0 \leq \varrho \leq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, c positive Konstante, $\eta(\varrho) = 0$ für $\varrho \geq 2\varepsilon$, $0 \leq \eta(\varrho) \leq c$. Dann ist

$$\sigma_V = \nu \varphi^* \sigma_W + \lim \varphi^* \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} \frac{\partial^2 \eta(\varrho)\, \Omega}{\partial x^\alpha \partial \bar{x}^\beta} dx^\alpha d\bar{x}^\beta \tag{10}$$

für eine genügend große natürliche Zahl ν eine KÄHLERsche Metrik in V[23]). x^α sind lokale komplexe Koordinaten in einer Umgebung $U \subset W$ mit $U \cap A = \{x \mid x^\alpha = 0 \text{ für } \alpha = 1, 2, \ldots, n-q\}$ im Falle eines nicht leeren Durchschnittes $U \cap A$. Die Zahl ν muß so groß gewählt werden, daß σ_V positiv definit wird: Erstens stört die Funktion $\eta(\varrho)$ die positive Definitheit

---

[21]) [17], Th. II. 6, p. 202.

[22]) Die Abbildung soll in den Punkten $x \in A$ die dort gegebene fastkomplexe Struktur erhalten.

[23]) Die Metrik (10) ist die natürliche Verallgemeinerung der Metrik, die von KODAIRA in [18], p. 133 bei (8.2.2) angegeben wird. Vgl. auch [17] und [19].

(dort, wo η nicht konstant ist), und zweitens stören in $\{x \mid \eta(\varrho) > 0\}$ die Ableitungen nach den Koordinaten $x^{n-q+1}, \bar{x}^{n-q+1}, \ldots, x^n, \bar{x}^n$. Der Limes in (10) ist so zu verstehen, daß die durch (10) unter Weglassen von lim in $V - S$ bestimmte Metrik in natürlicher Weise zu einer KÄHLERschen Metrik der Klasse C^∞ in ganz V erweitert wird.

Ist σ_W eine HODGE-Metrik, das heißt ist die zur Metrik σ_W gehörige CARTANsche Form ein ganzzahliger Cozyklus, so wird durch geeignete Wahl der Konstanten c in (10) erreicht, daß auch σ_V eine HODGE-Metrik wird. Damit erhalten wir einen zweiten Beweis zu Korollar 1 in b), indem der Satz von KODAIRA zu Hilfe gezogen wird, gemäß welchem eine komplexe Mannigfaltigkeit mit HODGE-Metrik algebraisch ist[24]).

§ 4. Regulär verzweigte Überlagerungen. Windungen

a) Nachdem bis jetzt Modifikationsabbildungen $\varphi\colon (V, S) \to (W, A)$ betrachtet wurden, liegt es nahe, ähnliche Überlegungen auf Überlagerungsabbildungen

$$\varphi\colon (V, S) \to (W, A) \tag{11}$$

mit $\varphi V = W$, $\varphi S = A$ und nicht leerem $V - S$ anzuwenden. Dabei soll es sich immer um *kompakte*[14]) (und stetige) Abbildungen handeln, und wir sprechen von einer Überlagerungsabbildung (mit der Singularitätenmenge S über der Ausnahmemenge A), wenn φ in $V - S$ lokal eineindeutig, also lokal topologisch ist. Ferner setzen wir voraus, daß es zu jeder Umgebung $U(S)$ von S in V eine Umgebung $U(A)$ von A in W gibt mit $\varphi^{-1} U(A) \subset U(S)$, und es soll im Falle orientierter Mannigfaltigkeiten V, W der lokale Abbildungsgrad $g(\varphi)$ in ganz W konstant sein: Sind S und A (zusammenhängende) Mannigfaltigkeiten, so sollen also längs S sämtliche Blätter von V «zusammengeheftet» sein. Wenn in (11) V, W, S und A komplexe Mannigfaltigkeiten sind und ist φ holomorph, so heißt V eine regulär verzweigte Überlagerung von W und φ eine (holomorphe) Überlagerungsabbildung mit regulärer Verzweigung. Um solche Überlagerungen zu behandeln, treffen wir in den folgenden Abschnitten b), c), d) einige Vorbereitungen.

b) **Hilfssatz $\bar{1}$.** *$\varphi\colon (V^n, S) \to (W, A)$ sei eine kompakte stetige Abbildung, in $V^n - S$ lokal eineindeutig, $\varphi V^n = W$, $\varphi S = A$. V^n sei eine (n-dimensionale) Mannigfaltigkeit; W liege in einer Mannigfaltigkeit $\tilde{W}^n$. A und S seien echte Teilmengen von W bzw. von V^n. Dann liegt eine Umgebung U' einer*

---

[24]) Hauptsatz in [19].

beliebigen kompakten Teilmenge A' von A in W, die Umgebung U' in $\tilde{W}^n$ genommen.

Korollar. *W ist eine Mannigfaltigkeit W^n.*

Der Beweis ist bei kompaktem S für $A' = A$ derselbe wie zu Hilfssatz 1. Bei einem beliebigen kompakten $A' \subset A$ führt man den Beweis analog mit Hilfe einer Umgebung $U(S')$ an Stelle von $U(S)$, $S' = \varphi^{-1}A'$, auch bei nicht kompaktem S.

Hilfssatz $\bar{1}$ enthält Hilfssatz 1. Er wird im Falle einer Modifikationsabbildung zum Beweis der Bemerkung zu Satz 2 bzw. 2′ (am Schluß von § 3 a)) benutzt. Im folgenden tritt er nicht mehr explizit auf, steckt aber im Beweis zu Satz 3, da dort Satz 2′ in der Form der zitierten Bemerkung herangezogen wird.

An Stelle von (2′) sei nun die komplex analytische Überlagerungsabbildung (mit Verzweigung)

$$\varphi\colon\ (\bar{U}^{(n)},\ S^{(n-1)}) \to (U^{(n)},\ A^{(q)}) \tag{$\bar{2}$}$$

gegeben. $U^{(n)}$ ist eine komplexe Koordinatenzelle, $\bar{U}$ eine komplexe Mannigfaltigkeit, S die (eventuell leere) Nullstellenmenge von $\Delta(\varphi)$, und zwar eine komplexe Mannigfaltigkeit (oder leer). Für die Abbildung ($\bar{2}$) gilt dann nach Wahl geeigneter Koordinaten die Darstellung (5′), ohne daß über die Einbettung von A in U etwas vorausgesetzt wurde (wie schon in § 1 d) bemerkt). Daraus folgt:

Hilfssatz $\bar{3}$. *Bei der Abbildung ($\bar{2}$) ist A eine komplexe Mannigfaltigkeit.*

Wird bei einer holomorphen Überlagerungsabbildung (11) mit regulärer Verzweigung die Mannigfaltigkeit S homöomorph auf A abgebildet, so kommt wegen (5′) lokal in geeigneten Koordinaten

$$y_1 = x_1^{s_1}, \qquad y_j = x_j \quad \text{für} \quad j = 2, 3, \ldots, n, \qquad s_1 \geq 1\,, \tag{5″}$$

und wir sprechen in diesem Fall von einer Windung längs A in W. Für alle Darstellungen (5″) gilt $s_1 = r$ für ein festes r längs ganz A (A ist als zusammenhängend vorausgesetzt), und der Abbildungsgrad von φ ist gleich r. Es handelt sich dann um eine r-fache Windung. Für $r = 1$ bekommen wir einen komplexen Homöomorphismus. Ist insbesondere in ($\bar{2}$) $q = n - 1$, und ist U genügend klein, derart, daß die bei (5′) benutzten Koordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ganz U überdecken[25]), so wird S durch φ homöomorph auf A abgebildet:

[25]) Unter den Voraussetzungen des Hilfssatzes $\bar{4}$ überdecken dann die Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ganz $\bar{U}$.

Hilfssatz $\bar{4}$. *Ist in* $(\bar{2})$ $q = n - 1$, *so ist* φ *eine Windung längs* A *in* U.

c) Sei

$$\varphi\colon\ (V^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (W^{(n)}, A^{(n-1)})$$

eine r-fache Windung längs A in W. Überdecken wir eine Umgebung von S: $V' = U(S) \subset V$ bzw. von A: $W' = U(A) \subset W$ mit einem geeigneten System $\{U_i'\}$ bzw. $\{U_i\}$ von Koordinatenumgebungen, derart, daß $\varphi \mid U_i' = \varphi_i$: $U_i' \to U_i = \varphi U_i'$ eine Darstellung (5″) besitzt:

$$y_1^{(i)} = (x_1^{(i)})^r, \qquad y_k^{(i)} = x_k^{(i)} \quad \text{für } k = 2, 3, \ldots, n\,. \tag{a}$$

In U_i' wird $S \frown U_i'$ durch $x_1^{(i)} = 0$ gegeben, und es ist

$$x_1^{(i)} = f_{ij} x_1^{(j)}, \quad f_{ij} = f_{ij}(x_1^{(j)}, x_2^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)}) \neq 0 \quad \text{in} \quad U_i' \frown U_j' \frown S \neq 0\,. \tag{b}$$

Daneben gilt $A \frown U_i = \{y \mid y_1^{(i)} = 0\}$, und

$$y_1^{(i)} = g_{ij} y_1^{(j)}, \quad g_{ij} = g_{ij}(y_1^{(j)}, y_2^{(j)}, \ldots, y_n^{(j)}) \neq 0 \ \text{ in } \ U_i \frown U_j \frown A \neq 0\,. \tag{c}$$

Aus (a), (b), (c) folgt nach Identifikation von A mit S

$$g_{ij} = (f_{ij})^r \quad \text{in} \quad U_i \frown U_j \frown A \neq 0\,. \tag{d}$$

Die Funktionen f_{ij} definieren das komplexe Linienbündel der Einbettung $S = A \subset V$, $\mathfrak{L}$ über A (die Funktionen $f_{ij}(0, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$ operieren als Transformationsfunktionen), die g_{ij} desgleichen das Linienbündel von $A \subset W$, $\mathfrak{M}$ über A. (d) besagt $\mathfrak{M} = r\mathfrak{L}$, und es gilt daher für die (ganzzahligen) charakteristischen Klassen

$$c(\mathfrak{M}) = r\,c(\mathfrak{L})\,, \tag{12}$$

wo der $c(\mathfrak{L})$ repräsentierende ganzzahlige 2-Cozyklus $t^2 = \{t_{ijl}\}$ bei geeigneter (genügend feiner) Überdeckung $\{U_i'\}$ durch

$$2\pi\sqrt{-1}\, t_{ijl} = \log^{(ij)} f_{ij} + \log^{(jl)} f_{jl} + \log^{(li)} f_{li} \quad \text{in} \quad U_i' \frown U_j' \frown U_l' \frown A \neq 0$$

definiert wird ($U_i' \frown U_j'$ bzw. $U_i' \frown U_j' \frown A$ ist bei geeigneter Überdeckung einfach zusammenhängend, $\log^{(ij)} = \log^{(ji)}$ ist ein Zweig der Logarithmusfunktion in $U_i' \frown U_j'$ und damit in $U_i' \frown U_j' \frown A$; $\{t_{ijl}\}$ bestimmt dann einen 2-Cozyklus t^2 auf dem Nerv der Überdeckung $\{U_i' \frown A\}$[26]).

Umgekehrt: Ist für das durch die Funktionen g_{ij} in $U_i \frown U_j \subset U(A) \subset W$ definierte komplexe Linienbündel $\mathfrak{M}$ über A der charakteristische Cozyklus

---

[26]) Zur Definition der charakteristischen Klasse eines komplexen Linienbündels $\mathfrak{L} = \{L, C, A\}$ siehe [20] oder [21] (C ist der Körper der komplexen Zahlen; Strukturgruppe in $\mathfrak{L}$ ist die multiplikative Gruppe C^* der von null verschiedenen komplexen Zahlen).

$u^2 = \{u_{ijl}\} = \{(2\pi\sqrt{-1})^{-1}(\log^{(ij)}g_{ij} + \log^{(jl)}g_{jl} + \log^{(li)}g_{li})\}$ durch r teilbar, so können die Funktionen $f_{ij} = \sqrt[r]{g_{ij}} = e^{\frac{1}{r}\log^{(ij)}g_{ij}}$ (Zweig durch $\log^{(ij)}$ bestimmt) in den (einfach zusammenhängenden) Mengen $U_i \cap U_j$ zur Definition eines komplexen Linienbündels $\mathfrak{L}$ über A verwendet werden (bei Beschränkung der f_{ij} auf A), derart, daß eine r-fache Windung $(L, A) \to (M, A)$ induziert wird (L bzw. M ist der Totalraum von $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{M}$). Betrachten wir die Funktion f_{ij} in ganz $U_i \cap U_j$, so bekommen wir durch $x_1^{(i)} = \sqrt[r]{y_1^{(i)}}$, $x_k^{(i)} = y_k^{(i)}$, $k = 2, 3, \ldots, n$, bei sukzessivem Durchlaufen aller Zweige der r-ten Wurzel, Koordinaten in einer Umgebung U_i', und durch $x_1^{(i)} = f_{ij}x_1^{(j)} = \sqrt[r]{g_{ij}((x_1^{(j)})^r, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})} \cdot x_1^{(j)}$ (Zweig wie oben durch $\log^{(ij)}$ bestimmt), $x_k^{(i)} = y_k^{(i)}((x_1^{(j)})^r, x_2^{(j)}, x_3^{(j)}, \ldots, x_n^{(j)})$ Koordinatentransformationen in $U_i' \cap U_j'$, so daß eine komplexe Mannigfaltigkeit $V' = U'(A)$ und eine r-fache Windung φ: $(V', A) \to (W', A)$ resultieren, wozu die Bündel $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ gehören. Ist weiter der Cozyklus $u^2 = \{u_{ijl}\}$ nicht durch r teilbar, jedoch die zugehörige charakteristische Cohomologieklasse $c(\mathfrak{M})$, existiert also eine 1-Cokette $c^1 = \{c_{ij}\}$ mit $u^2 + \delta c^1 = rt^2$, das heißt, ist

$$u_{ijl} + c_{ij} + c_{jl} + c_{li} = rt_{ijl},$$

so setzen wir $\log'^{(ij)}g_{ij} = \log^{(ij)}g_{ij} + 2\pi\sqrt{-1}c_{ij}$, wir wechseln also durch Addition von $2\pi\sqrt{-1}c_{ij}$ das Blatt der Logarithmusfunktion in $U_i \cap U_j$. $u'^2 = \{u'_{ijl}\} = \{(2\pi\sqrt{-1})^{-1}(\log'^{(ij)}g_{ij} + \log'^{(jl)}g_{jl} + \log'^{(li)}g_{li})\}$ ist dann durch r teilbar, und es kann, wie eben festgestellt, eine r-fache Windung φ: $(V', A) \to (W', A)$ gefunden werden.

Zusammengefaßt:

Lemma. 1) *Liegt die r-fache Windung φ: $(V, A) \to (W, A)$ vor, und ist $\mathfrak{L}$ bzw. $\mathfrak{M}$ das zur Einbettung $A \subset V$ bzw. $A \subset W$ gehörige komplexe Linienbündel, so gilt*

$$c(\mathfrak{M}) = rc(\mathfrak{L}) . \tag{12}$$

2) *Ist die charakteristische Klasse $c(\mathfrak{M})$ des zur Einbettung $A^{(n-1)} \subset W^{(n)}$ gehörigen komplexen Linienbündels $\mathfrak{M}$ durch r teilbar, so gibt es eine Mannigfaltigkeit V' und eine r-fache Windung φ: $(V', A) \to (W', A)$, $W' = U(A) \subset W$.*

Kürzer: Dann und nur dann kann längs A in W eine r-fache Windung vorgenommen werden, wenn $c(\mathfrak{M})$ durch r teilbar ist.

Weiter ergibt sich der folgende Zusatz zu 2): Die Mannigfaltigkeit V' und die Windung φ sind bei gegebenen (W, A) und r, bei r-torsionsfreiem $H^2(A; Z)$, und bei einfach zusammenhängendem A bis auf komplexe Homöomorphie eindeutig bestimmt.

Bemerkung 1. Deutet man $c(\mathfrak{L})$ als Cohomologieklasse des Hinderniscozyklus, der sich der Konstruktion einer Schnittfläche im zu $\mathfrak{L}$ gehörigen unitären Kreislinienbündel $\mathfrak{N} = \{N, \Sigma^1, A\}$ entgegenstellt ($\mathfrak{N}$ ist das Normalenbündel, $\mathfrak{L}$ das ausgefüllte Normalenbündel von A in W; Σ^k ist die k-Sphäre), so kann (12) auch direkt geometrisch eingesehen werden: φ erzeugt eine fasertreue Abbildung $\tilde{\varphi}$ des Normalenbündels $\mathfrak{N}_V(A) = \{N_V, \Sigma^1, A\}$ auf $\mathfrak{N}_W(A) = \{N_W, \Sigma^1, A\}$, $\tilde{\varphi}: N_V \to N_W$; dazu gehören Abbildungen $\bar{\varphi}: A \to A$, $\hat{\varphi}: \Sigma^1 \to \Sigma^1$, wo $\bar{\varphi}$ die Identität ist und $g(\hat{\varphi}) = r$. Ist eine Schnittfläche F über dem 1-Gerüst einer (genügend feinen) Zellenzerlegung von A in $\mathfrak{N}_V$ gegeben, F bestimmt also einen Cozyklus $t^2 \in c(\mathfrak{L})$, so bestimmt die Schnittfläche $\tilde{\varphi}F$ den Cozyklus rt^2, woraus (12) folgt.

Bemerkung 2. Die in diesem Abschnitt durchgeführten Betrachtungen lassen sich auf den Fall einer (genügend oft stetig) differenzierbaren Windung $\varphi: (V^n, A^{n-2}) \to (W^n, A^{n-2})$ mit $\Delta(\varphi) \neq 0$ in $V - A$ und orientierbaren Normalenbündeln $\mathfrak{N}_V$, $\mathfrak{N}_W$ übertragen. Als Strukturgruppe der Bündel $\mathfrak{N}_V$ und $\mathfrak{N}_W$ wird $SO(2) = U(1)$ genommen, $\{t_{ijl}\}$ wird wie im komplexen Fall definiert, und man erhält (12). Ebenso gilt die Aussage 2) im Lemma, auf den differenzierbaren Fall übertragen, wobei wegen [21], 3.8 die Mannigfaltigkeit V', bei gegebenem (W, A) und r und bei r-torsionsfreiem $H^2(A; Z)$, bis auf differenzierbare Homöomorphie eindeutig bestimmt ist, und bei einfach zusammenhängendem A neben V' auch φ. Weiter können Metriken in V und in W so eingeführt werden, daß φ eine fasertreue Abbildung $\tilde{\varphi}$ von $\mathfrak{N}_V$ auf $\mathfrak{N}_W$ erzeugt, und die Bemerkung 1 behält auch im differenzierbaren Fall ihre Gültigkeit.

d) $\bar{U}^{(n)}, P^{(n-1)}$ seien die in der lokalen Modifikation (1) ((1) in Satz 1: σ-Prozeß) vorkommenden Mannigfaltigkeiten mit der durch den σ-Prozeß induzierten Einbettung $P^{(n-1)} \subset \bar{U}^{(n)}$ (in (1) ist $P^{(n-1)} = S^{(n-1)}$). Dann gilt:

Hilfssatz 6. *Jede komplex analytische Überlagerungsabbildung mit regulärer Verzweigung*

$$\varphi: (V^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (\bar{U}^{(n)}, P^{(n-1)}), \quad n \geq 2,$$

ist ein komplexer Homöomorphismus.

Beweis: Lokal gilt (5″) für die Abbildung φ mit $s_1 = r$ für alle Darstellungen (5″) längs ganz P, φ induziert also auf S eine unverzweigte holomorphe, das heißt reguläre, Überlagerungsabbildung; wegen des einfachen Zusammenhanges von P ist daher $\varphi \mid S = \bar{\varphi}$ ein komplexer Homöomorphismus: φ ist eine Windung längs P in $\bar{U}$. Da für das zur Einbettung $P^{(n-1)} \subset \bar{U}^{(n)}$, $n \geq 2$, gehörige Linienbündel $\mathfrak{M}$ die charakteristische Klasse $c(\mathfrak{M}) = -z^2$ ist, wo

z^2 die zur Hyperebene $P^{(n-2)} \subset P^{(n-1)}$ duale Cohomologieklasse darstellt[27]), ist $c(\mathfrak{M})$ durch keine Zahl $r \geq 2$ teilbar, so daß wegen des Lemmas $r = 1$ und daher φ ein komplexer Homöomorphismus sein muß, q.e.d.[28]).

Bemerkung. Hilfssatz 6 gilt auch im Falle einer Umgebung $\bar{U}^{(n)}$ einer Hyperebene $P^{(n-1)}$ im projektiven Raum $P^{(n)}$, weil hier für die Einbettung $P^{(n-1)} \subset \bar{U}^{(n)}$ $c(\mathfrak{M}) = z^2$ gilt.

e) **Satz 3.** *$V^{(n)}$, $W^{(n)}$ seien komplexe Mannigfaltigkeiten, S^m $(m \leq 2n-1)$ eine (zusammenhängende) Mannigfaltigkeit in V, und es sei gegeben die (kompakte) komplex analytische Überlagerungsabbildung (mit eventueller Verzweigung)*

$$\varphi\colon\ (V^{(n)}, S^m) \to (W^{(n)}, A)\,. \tag{13}$$

Dann ist entweder $\varphi = v$ eine unverzweigte Überlagerungsabbildung, oder $S^m = S^{(n-1)}$ und $A = A^{(q)}$ sind komplexe Mannigfaltigkeiten in V bzw. in W, $m = 2n-2$, $0 \leq q \leq n-1$, V ist also eine regulär verzweigte Überlagerung von W, und es gilt:

1) *für $q = n-1$ ist in einer Umgebung V' von S in V*

$$\varphi = v\omega\,, \tag{14_1}$$

wo $v\colon(\bar{V}, S) \to (W', A)$ eine reguläre Überlagerungsabbildung ist $(W' = U(A) \subset W)$, und $\omega\colon (V', S) \to (\bar{V}, S)$ eine r-fache Windung längs S in $\bar{V}$, $r \geq 2$;

2) *für $0 \leq q \leq n-2$ ist*

$$\varphi = \pi v\,, \tag{14_2}$$

wo $\pi\colon (\tilde{V}, \tilde{S}) \to (W, A)$ die (holomorphe) Modifikationsabbildung des $\sigma^{n,q}$-Prozesses längs A in W ist, und $v\colon (V, S) \to (\tilde{V}, \tilde{S})$ eine reguläre Überlagerungsabbildung.

Beweis: Die Abbildung (13) besitze eine nicht leere Singularitätenmenge S, welche dann als Nullstellenmenge von $\Delta(\varphi)$ und als Mannigfaltigkeit eine

---

[27]) Vgl. z.B. [19].

[28]) Daß speziell eine (differenzierbare bzw. komplexe) Überlagerungsabbildung mit regulärer Verzweigung $\varphi\colon(\bar{U}^{(n)}, P^{(n-1)}) \to (\bar{U}^{(n)}, P^{(n-1)})$, $n \geq 2$, notwendigerweise ein (differenzierbarer bzw. komplexer) Homöomorphismus ist, wird auch folgendermaßen bewiesen: zu φ gehört eine fasertreue Abbildung $\tilde{\varphi}$ der Hopfschen Σ^1-Faserung $\mathfrak{N} = \{\Sigma^{2n-1}, \Sigma^1, P^{(n-1)}\}$ in sich mit $\bar{\varphi}\colon P^{(n-1)} \to P^{(n-1)}$, $\hat{\varphi}\colon \Sigma^1 \to \Sigma^1$, $\bar{\varphi} =$ Identität, $g(\varphi) = r$. Nach [22] ist $g(\bar{\varphi}) = r^{n-1}$, und daraus folgt $r = \pm 1$ ($r = \pm 1$ im differenzierbaren, $r = 1$ im komplexen Fall), woraus mit Hilfe der lokalen Eineindeutigkeit von φ außerhalb P auf die globale Eineindeutigkeit in ganz $\bar{U}$ geschlossen wird. Zudem folgt Hilfssatz 6 (auch im differenzierbaren Fall) direkt daraus, daß der Umgebungsrand von P in $\bar{U}$ eine Sphäre Σ^{2n-1} ist, also für $n \geq 2$ einfach zusammenhängend, so daß wegen der lokalen Eineindeutigkeit außerhalb S $\varphi^{-1}\Sigma^{2n-1}$ eine unverzweigte Überlagerung von Σ^{2n-1}, also selbst eine Sphäre $\bar{\Sigma}^{2n-1}$ ist, φ ist auf $\bar{\Sigma}^{2n-1} = \varphi^{-1}\Sigma^{2n-1}$ eineindeutig und somit in $V - S$, also in V (wegen des einfachen Zusammenhanges von P oder wegen Anm. 18).

komplex $(n-1)$-dimensionale komplexe Mannigfaltigkeit in V ist, und nach Hilfssatz $\bar{3}$ ist auch A eine komplexe Mannigfaltigkeit in W: $A = A^{(q)}$ mit $0 \leq q \leq n-1$.

1) Für $q = n-1$ wird die Abbildung φ längs S wegen Hilfssatz $\bar{4}$ lokal eine Windung, so daß sich φ in einer Umgebung $V' = U(S) \subset V$ zusammensetzt aus einer Windung ω: $(V', S) \to (\bar{V}, S)$ längs S in $\bar{V}$ und einer regulären Überlagerungsabbildung v: $(\bar{V}, S) \to (W', A)$ $(W' = U(A) \subset W)$: durch Identifikation der durch den Windungsanteil[29]) von φ auseinander hervorgehenden Punkte in V' wird in V' die Darstellung $\varphi = v\omega$ gewonnen samt einer dazwischen geschalteten Mannigfaltigkeit $\bar{V}$. Damit folgt (14_1), wobei die Windung ω r-fach ist, $r \geq 2$, da in (allen Punkten von) S $\Delta(\varphi) = 0$ vorausgesetzt wurde.

2) Sei $0 \leq q \leq n-2$. In der Umgebung X eines Punktes $o \in S$ wird $\varphi \mid X = \varphi_X$ durch (5′) dargestellt (in geeigneten Koordinaten). φ_X^{-1} ist also außerhalb $S \cap X$ s_1-deutig. $s_1 = r$ längs ganz S. Durch Identifikation dieser je r durch den Windungsanteil von φ (vgl. Anm. [29])) auseinander hervorgehenden Punkte in einer Umgebung $V' = U(S) \subset V$ wird eine komplexe Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ erhalten, und $\varphi \mid V'$ setzt sich zusammen aus der r-fachen Windung ω: $(V', S) \to (\bar{V}, S)$ und der (holomorphen) Abbildung $\bar{\varphi}$: $(\bar{V}, S) \to (W', A)$ $(W' = U(A) \subset W)$: $\varphi = \bar{\varphi}\omega$. Wegen Satz 2′ (und der Bemerkung am Ende von § 3 a)) ist $\bar{\varphi}$ «lokal» ein $\sigma^{n,q}$-Prozeß, das heißt, $\bar{\varphi}$ ist die Zusammensetzung einer regulären Überlagerungsabbildung v: $(\bar{V}, S) \to (\tilde{V}', \tilde{S})$ und der Modifikationsabbildung π: $(\tilde{V}', \tilde{S}) \to (W', A)$ des $\sigma^{n,q}$-Prozesses längs A in W': $\bar{\varphi} = \pi v$. Gemäß (8) wird $\tilde{S}$ und daher auch S durch projektive Räume $P^{(n-q-1)}$ komplex gefasert. Die r-fache Windung ω induziert also mit Hilfe der Konstruktion des $\sigma^{n,q}$-Prozesses Π: $(\tilde{V}, \tilde{S}) \to (W, A)$ zusammen mit v eine r-fache Windung längs der Faser $P^{(n-q-1)} \subset S$ in einer geeignet gewählten komplexen Mannigfaltigkeit $T^{(n-q)} \subset \bar{V}$. Hilfssatz 6 impliziert $r = 1$: ω ist ein komplexer Homöomorphismus[30]), daher kann v in ganz V definiert werden durch $v \mid (V - S) = \varphi \mid (V - S)$, und es gilt (14_2), q.e.d.

---

[29]) Der «Windungsanteil» von φ in einem Punkt $o \in S$ wird erhalten durch $\varphi \mid X$ für eine genügend kleine Umgebung X von o. Es gilt dann (in geeigneten Koordinaten) die Darstellung (5′) bzw. (5″) mit $s_1 = r \geq 1$ längs ganz S. Wir sprechen im Falle $r \geq 2$ von einem (nicht trivialen) Windungsanteil, und im Falle $r = 1$ sagen wir: es ist kein (nicht trivialer) Windungsanteil vorhanden.

[30]) Daß bei einer Überlagerungsabbildung φ: $(V^n, S^m) \to (W^n, A^q)$, auch im differenzierbaren Fall, kein (nicht trivialer) Windungsanteil vorhanden ist, sobald $q = \dim_R A \leq n-3 = \dim_R W - 3$, folgt daraus, daß im Normalenbündel $\mathfrak{N}_W(A) = \{N_W^{n-1}, \Sigma^{n-q-1}, A^q\}$ die Faser

Aus dem obigen Beweis ergibt sich der folgende

Zusatz zu Satz 3. *Die Abbildungen π, v, ω sowie die Mannigfaltigkeiten $\tilde{V}$, $\tilde{S}$, $\bar{V}$ sind bis auf komplexe Homöomorphie eindeutig bestimmt.*

Weiter gibt es im Falle 2) eine Modifikationsabbildung

$$\pi' : (V^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (\bar{W}^{(n)}, \bar{A}^{(q)})$$

und eine reguläre Überlagerungsabbildung $v' : (\bar{W}, \bar{A}) \to (W, A)$, derart, daß $\varphi = \pi v = v'\pi'$, $v' \mid (\bar{W} - \bar{A}) = v \mid (V - S)$ für $\bar{W} - \bar{A} = V - S$. Auch π', v', $\bar{W}$, $\bar{A}$ sind bis auf komplexe Homöomorphie eindeutig bestimmt.

Satz 3 enthält speziell für die holomorphen Überlagerungsabbildungen

$$\varphi : (V^{(n)}, S^{(n-1)}) \to (W^{(n)}, A^{(q)}) \tag{15}$$

mit regulärer Verzweigung die folgende Aussage:

Satz 3'. *Jede regulär verzweigte Überlagerung V in* (15) *wird für $q = n - 1$ in einer Umgebung $V' = U(S) \subset V$ erhalten durch Zusammensetzen einer Windung mit einer regulären Überlagerungsabbildung, und für $q \leq n - 2$ einer regulären Überlagerungsabbildung mit einem $\sigma^{n,q}$-Prozeß.*

Ist weiter A einfach zusammenhängend und somit auch S, so muß v in (14_1) und (14_2) ein Homöomorphismus sein:

Korollar. *Jede Abbildung* (15) *ist bei einfach zusammenhängendem A für $q = n - 1$ äquivalent einer Windung und für $q \leq n - 2$ dem $\sigma^{n,q}$-Prozeß längs A in W.*

f) Liegt eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\varphi : (V, S) \to (W, A)$ mit regulären Verzweigungen vor, das heißt besteht S aus mehreren Komponenten $S_1, S_2, \ldots, S_t$, so wendet man Satz 3 bzw. 3' «lokal» auf jede einzelne Komponente S_k an, $k = 1, 2, \ldots, t$, indem für V eine genügend kleine Umgebung von S_k genommen wird. Dabei braucht $g(\varphi)$ nicht konstant zu sein in W, und die Bedingung, daß es zu jeder Umgebung $U(S)$ eine Umgebung $U(A)$ mit $\varphi^{-1} U(A) \subset U(S)$ gibt, kann ebenfalls weggelassen werden.

Σ^{n-q-1} einfach zusammenhängend ist (ähnliche Argumentation wie bei Anm. 28): man betrachtet die durch φ induzierte Überlagerungsabbildung $\hat{\varphi} : (\hat{V}', \hat{S}) \to (\hat{W}', \hat{A})$; $\hat{A}$ bzw. $\hat{W}'$ ist die universelle Überlagerung von A bzw. $W' = U(A) \subset W$, und $\hat{S}$ bzw. $\hat{V}'$ die aus S bzw. V' induzierte Mannigfaltigkeit (erzeugt mit Hilfe von φ und des Überganges von W' zu $\hat{W}'$); dann ist in $\mathfrak{N}_{\hat{W}'}(A) = \{N^{n-1}_{\hat{W}'}, \Sigma^{n-q-1}, \hat{A}^q\}$ der Totalraum $N^{n-1}_{\hat{W}'}$ einfach zusammenhängend, daher wird $N^{n-1}_{\hat{W}'}$ durch $\hat{\varphi}^{-1}$ homöomorph in $\hat{V}' - \hat{S}$ abgebildet ($\hat{\varphi}^{-1} N^{n-1}_{\hat{W}'}$ wird durch eine geeignete Normalprojektion auf $\hat{S}$ in $\hat{V}'$ homöomorph auf $N^{n-1}_{\hat{V}'}$ abgebildet, so daß $N^{n-1}_{\hat{V}'}$ homöomorph $\varphi^{-1} N^{n-1}_{\hat{W}'}$ homöomorph $N^{n-1}_{\hat{W}'}$), $\hat{\varphi}$ ist also in $\hat{V}' - \hat{S}$ ein Homöomorphismus, und somit besitzt φ keinen (nicht trivialen) Windungsanteil: $\varphi \mid X$ ist in $X - S \cap X$ eineindeutig für eine genügend kleine Umgebung X von $o \in S$. – Ebenso kann für $q = n - 1$ nie ein (nicht trivialer) Windungsanteil auftreten.

g) Schließlich folgt aus Satz 3′ zusammen mit dem Satz von BLANCHARD (§ 3c)) und dem Satz von KODAIRA[24]) unter Berücksichtigung des letzten Abschnittes in § 3c) (oder des Korollars 1 in § 3b)): *Eine regulär verzweigte Überlagerung einer KÄHLERschen bzw. algebraischen Mannigfaltigkeit ist KÄHLERsch bzw. algebraisch* (, wobei im Falle algebraischer Mannigfaltigkeiten nur (endliche) Überlagerungen kompakter Mannigfaltigkeiten betrachtet werden).

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. HOPF, *Schlichte Abbildungen und lokale Modifikation 4-dimensionaler komplexer Mannigfaltigkeiten.* Comment. Math. Helv. *29* (1955), 132–156.

[2] A. AEPPLI, *Modifikation von reellen und komplexen Mannigfaltigkeiten.* Comment. Math. Helv. *31* (1956), 219–301.

[3] H. BEHNKE, *Funktionentheorie auf komplexen Mannigfaltigkeiten.* Proc. Internat. Congress of Math. 1954, North-Holland, Publ. Co. Amsterdam 1956, 45–57.

[4] E. KREYSZIG, *Stetige Modifikationen komplexer Mannigfaltigkeiten.* Math. Ann. *128* (1955), 479–492.

[5] T. RADÓ, *Über eine nicht fortsetzbare* RIEMANN*sche Mannigfaltigkeit.* Math. Z. *20* (1924), 1–6.

[6] H. BEHNKE und K. STEIN, *Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und* RIEMANN*scher Gebiete.* Math. Ann. *124* (1951), 1–16.

[7] H. CARTAN, *Sur une extension d'un théorème de* RADÓ. Math. Ann. *125* (1952), 49–50.

[8] E. HEINZ, *Ein elementarer Beweis des Satzes von* RADÓ–BEHNKE–STEIN–CARTAN *über analytische Funktionen.* Math. Ann. *131* (1956), 258–259.

[9] B. O. KOOPMAN, *On the inversion of analytic transformations.* Bull. Amer. Math. Soc *34*, (1928), 565–572.

[10] H. GRAUERT und R. REMMERT, *Zur Theorie der Modifikationen I.* Math. Ann. *129* (1955), 274–296.

[11] R. REMMERT und K. STEIN, *Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen.* Math. Ann. *126* (1953), 263–306.

[12] W. V. D. HODGE and D. PEDOE, *Methods of Algebraic Geometry.* 3 volumes, Cambridge University Press 1947, 1952, 1954.

[13] O. ZARISKI, *Reduction of the singularities of algebraic three dimensional varieties.* Ann. of Math. *45* (1944), 472–542.

[14] B. SEGRE, *Sullo scioglimento delle singolarità delle varietà algebriche.* Ann. di Mat. XXXIII (Serie IV, 1952), 5–48.

[15] J. G. SEMPLE and D. KIRBY, *Local Dilatation.* J. London Math. Soc. *30* (1955), 417–422.

[16] A. J. H. M. VAN DE VEN, *Characteristic Classes and Monoidal Transformations.* Proc. Amsterdam *59* (1956), 571–578.

[17] A. BLANCHARD, *Sur les variétés analytiques complexes.* Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. *73* (1956), 157–202.

[18] K. KODAIRA, *The Theory of Harmonic Integrals and Their Applications to Algebraic Geometry.* Princeton University Notes, Off. of Ord. Contr. DA-36-034-ORD-639RD.

[19] K. KODAIRA, *On* KÄHLER *Varieties of Restricted Type.* Ann. of Math. *60* (1954), 28–48.

[20] K. KODAIRA and D. C. SPENCER, *Groups of complex line bundles over compact* KÄHLER *varieties.* Proc. Nat. Ac. Sci. *39* (1953), 868–872.

[21] F. HIRZEBRUCH, *Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie.* Springer 1956.

[22] H. HOPF und M. RUEFF, *Über faserungstreue Abbildungen der Sphären.* Comment. Math. Helv. *11* (1938/39), 49–61.

(Eingegangen den 3. Dezember 1957)