Zeitschrift: Commentarii Mathematici Helvetici

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 33 (1959)

Artikel: Zur isodiametrischen und isoperimetrischen Ungleichung in der Relativgeometrie.

Autor: Barthel, Woldemar

DOI: https://doi.org/10.5169/seals-26020

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 15.02.2026

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Zur isodiametrischen und isoperimetrischen Ungleichung in der Relativgeometrie[1])

Wilhelm Süss zum Gedenken

von Woldemar Barthel, Saarbrücken

Einleitung

Für den euklidischen Raum bewies Bieberbach [2] mittels Symmetrisierung zuerst, daß unter allen konvexen Körpern gegebenen Durchmessers die Kugel das größte Volumen hat[2]). Weitere Beweise hierfür sind in Abschätzungen enthalten, die Urysohn [15], Süss [14] und Bonnesen-Fenchel [4] S. 109/110 über Volumen und mittlere Breite, Kubota [12][3]) über Quermaßintegrale und Durchmesser sowie Erhard Schmidt [13] S. 86/87 über Volumina und Maximalentfernung zweier Mengen durchgeführt haben. Ein neuerer Beweis findet sich bei Hadwiger [10] S. 173. Für eine symmetrische Minkowski-Metrik gab schließlich Busemann [5] S. 243–246 einen ziemlich umfangreichen Beweis der «isodiametrischen Ungleichung», der allerdings keine Diskussion des Gleichheitszeichens enthält. Wir wollen hier die Schmidtsche Idee wieder aufgreifen und dem Spiegeltheorem des Brunn-Minkowskischen Satzes ein Äquivalent zur Seite stellen, aus dem die *isodiametrische Ungleichung* mit vollständiger Gleichheitsbedingung für eine Minkowski-Metrik folgt. Daraus erkennt man, daß *bei symmetrischer Minkowski-Metrik unter allen kompakten Mengen gegebenen Durchmessers genau jene das größte n-dimensionale Maß hat, welche zum Eichkörper homothetisch ist.*

Eine unmittelbare Folgerung der Brunn-Minkowskischen Ungleichung ist die isoperimetrische Ungleichung für die *äußere* Minkowski-Oberfläche. Nicht trivial ist allerdings die Gleichheitsbedingung, welche sich bekanntlich nicht aus der des Brunn-Minkowskischen Satzes herleiten läßt. Für den euklidischen Raum wurde der erste symmetrisierungsfreie Beweis der isoperimetrischen Ungleichung mit erschöpfender Gleichheitsdiskussion von Dinghas [7] erbracht. An die einfachere Fassung von Dinghas-Schmidt [8] anknüpfend, gab dann Busemann [6] einen vollständigen Beweis der isoperimetrischen Ungleichung bezüglich eines konvexen Eichkörpers. Die isoperimetrische Ungleichung bezüglich eines beliebigen kompakten Eichkörpers bewies Hadwiger [9]

---

[1]) Vorliegende Abhandlung umfaßt einen zweiten Teil der Habilitationsschrift, die der Naturwissenschaftlich-mathematischen Fakultät der Universität Freiburg i. Br. am 14. Juni 1957 vorgelegt wurde.

[2]) Vgl. auch Blaschke [3] S. 122–123 und Bonnesen-Fenchel [4] S. 76.

[3]) Vgl. Bonnesen-Fenchel [4] S. 107.

mittels Symmetrisierung, ohne jedoch die Gleichheit zu diskutieren. In einer neueren Arbeit lösten HADWIGER und OHMANN [11] dieses allgemeine Problem einschließlich der Gleichheitsbedingung mit mengengeometrischen Methoden. Dieser Beweis ist auch bei HADWIGER [10] Kap. 5 aufgenommen.

Wie bereits E. SCHMIDT [13] S. 153 und HADWIGER [9] bemerkten, gilt auch für die *innere MINKOWSKI-Oberfläche* eine isoperimetrische Ungleichung. Sie folgt unmittelbar aus dem Spiegeltheorem zum BRUNN-MINKOWSKIschen Satz. Die bisher noch nicht behandelte Frage nach dem Eintreten des Gleichheitszeichens in dieser isoperimetrischen Ungleichung soll hier untersucht werden. Dabei zeigt sich, daß *unter allen kompakten Mengen gegebener innerer MINKOWSKIscher Relativ-Oberfläche genau jene maximales n-dimensionales Maß besitzen, für die eine maßgleiche Teilmenge homothetisch zu dem am Ursprung gespiegelten Eichkörper ist.* Man gewinnt also eine etwas einfachere Bedingung als im Fall der äußeren MINKOWSKIschen Relativ-Oberfläche. Der Beweis ist jedoch wesentlich komplizierter, weil in ihm statt des BRUNN-MINKOWSKIschen Satzes dessen Spiegeltheorem für $n-1$ Dimensionen benötigt wird. Die Anwendung des Spiegeltheorems, welche in gewissem Sinn einer Extrapolation gleichkommt, ist aber nicht in dem gewünschten Umfang möglich, was eine Reihe zusätzlicher Abschätzungen erforderlich macht. Umgekehrt folgt aus der Gleichheitsbedingung für die isoperimetrische Ungleichung der inneren MINKOWSKIschen Relativ-Oberfläche natürlich wieder die des Spiegeltheorems zum BRUNN-MINKOWSKIschen Satz.

1. MINKOWSKIsche Linearkombinationen

In einem n-dimensionalen affinen Raum $R_n (n \geqslant 1)$ sei ein Punkt O ausgezeichnet als Bezugspunkt für die MINKOWSKIschen Linearkombinationen $\alpha \mathfrak{K}_0 + \beta \mathfrak{K}_1$ von nicht-leeren Mengen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ mit Koeffizienten, die nicht beide negativ sind. Für das Rechnen mit MINKOWSKIschen Linearkombinationen verweisen wir auf BONNESEN-FENCHEL [4] und vor allem HADWIGER [9]. Wir wollen hier nur die in diesem Zusammenhang benutzten Definitionen und Sätze wiedergeben, wobei ein beliebiges affines Koordinatensystem mit dem Ursprung O zugrunde gelegt werde.

Definition *der Multiplikation und Spiegelung:*
Für eine nicht-leere Menge $\mathfrak{K} \subset R_n$ und eine Zahl $\alpha \geqslant O$ setzen wir

$$\alpha \mathfrak{K} \overset{\text{def}}{=} \{(\alpha x^r) \mid (x^r) \in \mathfrak{K}\}, \qquad \mathfrak{K}^* \overset{\text{def}}{=} \{(-x^r) \mid (x^r) \in \mathfrak{K}\}.$$

Definition *der MINKOWSKIschen Addition und Subtraktion:*
Für zwei nicht-leere Mengen $\mathfrak{K}_i \in R_n$, $(i = 0; 1)$, sei

$$\mathfrak{K}_0 + \mathfrak{K}_1 \overset{\text{def}}{=} \{(x_0^r + x_1^r) \mid (x_i^r) \in \mathfrak{K}_i\},$$

$$\mathfrak{K}_0 - \mathfrak{K}_1 \overset{\text{def}}{=} \{(x^r) \mid \text{ für } jedes \quad (x_1^r) \in \mathfrak{K}_1 \curvearrowright (x^r + x_1^r) \in \mathfrak{K}_0\}$$
$$= \{P \mid P + \mathfrak{K}_1 \subset \mathfrak{K}_0\} .$$

Satz von Brunn-Minkowski:

Für eine nicht-leere kompakte Menge $\mathfrak{K}_0$ und einen konvexen Körper $\mathfrak{K}_1$ mit $|\mathfrak{K}_1|_n > 0$ ist

$$|\mathfrak{K}_0 + \mathfrak{K}_1|_n^{\frac{1}{n}} \geqslant |\mathfrak{K}_0|_n^{\frac{1}{n}} + |\mathfrak{K}_1|_n^{\frac{1}{n}} .$$

Dabei steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ homothetisch sind.

Spiegeltheorem *zum Brunn-Minkowskischen Satz*[4]):

Für eine nicht-leere kompakte Menge $\mathfrak{K}_0$ und einen konvexen Körper $\mathfrak{K}_1$ mit $|\mathfrak{K}_1|_n > 0$ ist bei nicht-leerer Minkowskischer Differenz

$$|\mathfrak{K}_0 - \mathfrak{K}_1|_n^{\frac{1}{n}} \leqslant |\mathfrak{K}_0|_n^{\frac{1}{n}} - |\mathfrak{K}_1|_n^{\frac{1}{n}} .$$

Dabei steht das Gleichheitszeichen genau dann, wenn eine maßgleiche Teilmenge von $\mathfrak{K}_0$ homothetisch zu $\mathfrak{K}_1$ ist.

2. Isodiametrische Ungleichung für eine Minkowski-Metrik

Im R_n werde ein konvexer Körper $\mathfrak{E}$ von positivem Maß, der den Ursprung O im Innern enthält, als *Eichfigur* ausgezeichnet. Jede Menge, die aus $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{E}^*$ durch Homothetie und Translation hervorgeht, soll als Kugel bzw. gespiegelte Kugel und das Bild von O unter dieser Abbildung als deren Zentrum[5]) bezeichnet werden. Die Eichfigur erlaubt nun, im R_n eine (nicht notwendig symmetrische) Minkowski-Metrik einzuführen.

Definition. Die *Entfernung* eines Punktes P_1 von einem Punkt P_0 ist

$$\varrho(P_0, P_1) \overset{\text{def}}{=} \inf \{r \mid P_1 \in P_0 + r\mathfrak{E}\} .$$

Für nicht-leere Mengen sei die *Maximalentfernung*[6]) der Menge $\mathfrak{K}_1$ von $\mathfrak{K}_0$

$$d(\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1) \overset{\text{def}}{=} \sup \{\varrho(P_0, P_1) \mid P_0 \in \mathfrak{K}_0, P_1 \in \mathfrak{K}_1\}$$

und der *Durchmesser* der Menge $\mathfrak{K}$

$$d(\mathfrak{K}) \overset{\text{def}}{=} d(\mathfrak{K}, \mathfrak{K}) .$$

Mittels dieser Maßbestimmung können wir dem für konvexe Körper gültigen

---

[4]) Vgl. etwa unsere Note [1].

[5]) Dies wollen wir auch dann tun, wenn $\mathfrak{E}$ nicht symmetrisch bezüglich O ist.

[6]) Im Falle der Kompaktheit der $\mathfrak{K}_i$ wird die Maximalentfernung von einem Punktepaar P_0, P_1 angenommen.

Spiegeltheorem zum BRUNN-MINKOWSKIschen Satz eine äquivalente Aussage zur Seite stellen, aus der unmittelbar die «isodiametrische Ungleichung» bezüglich der betrachteten Metrik folgt.

Satz. *Für zwei nicht-leere konvexe Körper* $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1$ *mit* $|\mathfrak{K}_0|_n > 0$ *gilt*

$$|\mathfrak{K}_0|_n^{\frac{1}{n}} + |\mathfrak{K}_1|_n^{\frac{1}{n}} \leqslant d(\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1) \cdot |\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}}, \tag{2.1}$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann steht, wenn $\mathfrak{K}_0$ *eine gespiegelte Kugel und* $\mathfrak{K}_1$ *eine Kugel mit demselben Zentrum ist. Diese Ungleichung ist äquivalent zum Spiegeltheorem des BRUNN-MINKOWSKIschen Satzes für konvexe Körper mit positivem Maß.*

Beweis. Zunächst ist

$$r\mathfrak{E} - \mathfrak{K}_0^* = \{P \mid d(\mathfrak{K}_0, P) \leqslant r\}. \tag{2.2}$$

Die Menge der linken Seite besteht nämlich aus allen Punkten P mit der Eigenschaft, daß für *jedes* $P_0 \in \mathfrak{K}_0$ wegen $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{P_0P}$ folgt $P \in P_0 + r\mathfrak{E}$, das heißt $\varrho(P_0, P) \leqslant r$ und damit $d(\mathfrak{K}_0, P) \leqslant r$. Umgekehrt ist entsprechend zu schließen. Setzen wir jetzt $r = d(\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1)$, das heißt für jeden Punkt $P_1 \in \mathfrak{K}_1$ ist $d(\mathfrak{K}_0, P_1) \leqslant r$, so erhält man aus (2.2)

$$\mathfrak{K}_1 \subset r\mathfrak{E} - \mathfrak{K}_0^*.$$

Insbesondere ist also $r\mathfrak{E} - \mathfrak{K}_0^*$ nicht leer. Diese Relation und das Spiegeltheorem zum BRUNN-MINKOWSKIschen Satz haben dann zur Folge

$$|\mathfrak{K}_1|_n^{\frac{1}{n}} \leqslant |r\mathfrak{E} - \mathfrak{K}_0^*|_n^{\frac{1}{n}} \leqslant r\,|\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}} - |\mathfrak{K}_0^*|_n^{\frac{1}{n}}.$$

Dabei erfordert das Gleichheitszeichen der zweiten Ungleichung die Homothetie von $\mathfrak{K}_0^*$ und $\mathfrak{E}$, nämlich

$$\mathfrak{K}_0^* = r_0\mathfrak{E} + Q \curvearrowright \mathfrak{K}_0 = r_0\mathfrak{E}^* + Q^*$$

mit $r_0 \leqslant r$ und einem beliebigen Punkt Q, und die Gleichheit bei der ersten Abschätzung

$$\mathfrak{K}_1 = r\mathfrak{E} - \mathfrak{K}_0^* = (r\mathfrak{E} - r_0\mathfrak{E}) - Q = (r - r_0)\mathfrak{E} + Q^*.$$

Dies ist aber gerade die Behauptung über $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$.

Beim Äquivalenzbeweis gehen wir von zwei konvexen Körpern mit positivem Maß aus. Einen davon wählen wir als $\mathfrak{E}$ und ergänzen ihn zu einer Eichfigur; der andere werde mit $\mathfrak{K}$ bezeichnet. Wenn nun $\mathfrak{E} - \mathfrak{K} \neq \emptyset$ ist, folgt nach (2.2)

$$d(\mathfrak{K}^*, \mathfrak{E} - \mathfrak{K}) = 1$$

und damit aus (2.1) die behauptete Ungleichung

$$|\mathfrak{E} - \mathfrak{K}|_n^{\frac{1}{n}} \leqslant |\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}} - |\mathfrak{K}|_n^{\frac{1}{n}} . \tag{2.3}$$

Steht hierin das Gleichheitszeichen, so muß

$$\mathfrak{K}^* = r\mathfrak{E}^* + Q \curvearrowright \mathfrak{K} = r\mathfrak{E} + Q^*$$

sein mit $r \leqslant 1$ und einem beliebigen Punkt Q. Dies hat nämlich auch

$$\mathfrak{E} - \mathfrak{K} = (\mathfrak{E} - r\mathfrak{E}) - Q^* = (1 - r)\mathfrak{E} + Q$$

zur Folge. Damit ist die Homothetie von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E}$ als Gleichheitsbedingung für (2.3) erwiesen.

Als Korollar zu diesem Äquivalent des Spiegeltheorems folgt jetzt der

Satz *über die isodiametrische Ungleichung:*
Für jede meßbare Menge $\mathfrak{K} \subset R_n$ *ist*

$$2\,|\mathfrak{K}|_n^{\frac{1}{n}} \leqslant d(\mathfrak{K}) \cdot |\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}} . \tag{2.4}$$

Dabei gilt für die Klasse der aus mehr als einem Punkt bestehenden kompakten Mengen das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn die Eichfigur symmetrisch ($\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^*$) *und* $\mathfrak{K}$ *eine Kugel ist.*

Beweis. Sowohl für eine Nullmenge als auch für eine unbeschränkte meßbare Menge ist die Ungleichung stets richtig. Geht man nun von einer beschränkten meßbaren Menge zu ihrer abgeschlossenen Hülle über, so bleibt der Durchmesser derselbe und das Maß verkleinert sich nicht. Beim Übergang von einer kompakten Menge zu ihrer konvexen Hülle wird der Durchmesser wegen der Konvexität der Eichfigur wiederum nicht verändert, während sich das Maß vergrößert, wenn die Menge noch kein konvexer Körper war. Für einen konvexen Körper $\mathfrak{K}$ gewinnt man die Behauptung aus dem vorigen Satz, indem man dort $\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}$ setzt.

Wenn auch die Symmetrie im Begriff des Durchmessers nichts anderes erwarten ließ, so ist doch bemerkenswert, daß die in der isodiametrischen Ungleichung gegebene Schranke nur für eine symmetrische MINKOWSKIsche Metrik scharf ist.

3. Isoperimetrische Ungleichung für eine MINKOWSKIsche Relativ-Oberfläche

Wie im vorigen Abschnitt zeichnen wir im affinen R_n eine Eichfigur aus, das heißt einen konvexen Körper $\mathfrak{E}$, der den Ursprung O im Innern enthält. Sie gestattet uns, MINKOWSKIsche Flächenmaße einzuführen.

Definition. Für eine nicht-leere kompakte Menge $\mathfrak{K}$ sei die *äußere MINKOWSKIsche Relativ-Oberfläche*

$$f_+(\mathfrak{K}) \overset{\text{def}}{=} \varliminf_{r \to +0} \frac{|\mathfrak{K} + r\mathfrak{E}|_n - |\mathfrak{K}|_n}{r}$$

und die *innere MINKOWSKIsche Relativ-Oberfläche*[7])

$$f_-(\mathfrak{K}) \overset{\text{def}}{=} \varliminf_{r \to +0} \frac{|\mathfrak{K}|_n - |\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*|_n}{r} .$$

Aus dem BRUNN-MINKOWSKIschen Satz und seinem Spiegeltheorem folgt für jede der beiden MINKOWSKIschen Relativ-Oberflächen sofort die isoperimetrische Ungleichung. Allerdings erhält man auf diesem Wege nicht die Bedingungen für die Gültigkeit des Gleichheitszeichens, dafür werden detailliertere Abschätzungen benötigt. Um jedoch die Gleichheitsbedingungen übersichtlich formulieren zu können, soll zunächst der von BUSEMANN ([6] S. 746) stammende Begriff des *wesentlichen Teiles* $\mathfrak{K}_E$ einer Menge $\mathfrak{K}$ erörtert werden.

Im R_n werde durch Basisvektoren $Y, Z_1, \ldots, Z_{n-1}$ ein Koordinatensystem festgelegt und jeder Punkt durch seine Koordinaten (η, z^ϱ) gekennzeichnet. Mittels des Parallelstreifens

$$\mathfrak{S}_v^w \overset{\text{def}}{=} \{(\eta, z^\varrho) \mid v \leqslant \eta \leqslant w\}$$

definieren wir nun für $\mathfrak{K}$ die wesentlichen Schranken

$$\alpha_1 \overset{\text{def}}{=} \sup \{\eta \mid\mid \mathfrak{K} \cap \mathfrak{S}_{-\infty}^\eta |_n = 0\} , \qquad \beta_1 \overset{\text{def}}{=} \inf \{\eta \mid\mid \mathfrak{K} \cap \mathfrak{S}_\eta^\infty |_n = 0\} ,$$

den wesentlichen Stützstreifen $\mathfrak{S}(u) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{S}_{\alpha_1}^{\beta_1}$ in der $(n-1)$-Richtung von $u = Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_{n-1}$ und schließlich den wesentlichen Teil

$$\mathfrak{K}_E \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{K} \cap \bigcap_u \mathfrak{S}(u) .$$

Seine Eigenschaften fassen wir zusammen in dem

Satz. *Für eine nicht-leere kompakte Menge $\mathfrak{K}$ ist*

$$|\mathfrak{K}|_n = |\mathfrak{K}_E|_n, \quad f_+(\mathfrak{K}) \geqslant f_+(\mathfrak{K}_E) , \quad f_-(\mathfrak{K}) = f_-(\mathfrak{K}_E) . \tag{3.1}$$

---

[7]) HADWIGER [9] definiert die innere MINKOWSKIsche Relativ-Oberfläche etwas anders:

$$\varliminf_{r \to +0} \frac{|\mathfrak{K}|_n - |\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}|_n}{r} .$$

Er mißt also den inneren Parallelbereich von $\mathfrak{K}$ in der zu $\mathfrak{E}^*$ gehörenden Metrik, während wir diesen inneren Parallelbereich von $\mathfrak{K}$ im Abstand r als äußeren Parallelbereich vom Komplement $C\mathfrak{K}$ (bezüglich des R_n) im gleichen Abstand r auffassen, wie aus der Relation

$$C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*) = C_{C(\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*)}(C\mathfrak{K}) = C_{C\mathfrak{K} + r\mathfrak{E}}(C\mathfrak{K})$$

hervorgeht. Schließlich sei noch vermerkt, daß $f_-(\mathfrak{K})$ nur dann endlich sein kann, wenn $|\mathfrak{K}|_n = |\mathfrak{K}^\circ|_n$ gilt. Man hat nämlich $\bigcup_{r>0} (\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*) = \mathfrak{K}^\circ$, während $\bigcap_{r>0} (\mathfrak{K} + r\mathfrak{E}) = \bar{\mathfrak{K}} = \mathfrak{K}$ ist.

Beweis. Vermöge der Separabilität existiert eine Folge u_i mit $\bigcap_u \mathfrak{S}(u) = \bigcap_i \mathfrak{S}(u_i)$. Daraus erhält man

$$C_{\mathfrak{K}} \mathfrak{K}_E = C_{\mathfrak{K}} (\mathfrak{K} \cap \bigcap_i \mathfrak{S}(u_i)) = \bigcup_i C_{\mathfrak{K}} (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{S}(u_i))$$

und wegen $| C_{\mathfrak{K}} (\mathfrak{K} \cap \mathfrak{S}(u_i)) |_n = 0$ die Behauptung (3, 1a). Dann folgt aber (3, 1b) sofort aus $\mathfrak{K} + r\mathfrak{E} \supset \mathfrak{K}_E + r\mathfrak{E}$. Weiter bemerken wir, daß $\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*$ aus allen Punkten P besteht, für die der konvexe Körper $P + r\mathfrak{E}^* \subset \mathfrak{K}$. Dies bedeutet aber offenbar $P + r\mathfrak{E}^* \subset \mathfrak{K}_E$, also

$$\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^* = \mathfrak{K}_E - r\mathfrak{E}^* . \tag{3.2}$$

Nunmehr kommen wir zu dem

Satz *über die isoperimetrische Ungleichung:*
Für eine kompakte Menge $\mathfrak{K}$ ist

$$f_+(\mathfrak{K}) \geqslant n \, | \mathfrak{K} |_n^{\frac{n-1}{n}} \, | \mathfrak{E} |_n^{\frac{1}{n}} . \tag{3.3}$$

Dabei gilt das Gleichheitszeichen dann und nur dann, wenn $\mathfrak{K}_E$ homothetisch zu $\mathfrak{E}$ sowie $f_+(\mathfrak{K}) = f_+(\mathfrak{K}_E)$ ist.

Weiter ist für eine kompakte Menge $\mathfrak{K}$ mit Innenpunkten

$$f_-(\mathfrak{K}) \geqslant n \, | \mathfrak{K} |_n^{\frac{n-1}{n}} \, | \mathfrak{E} |_n^{\frac{1}{n}} , \tag{3.4}$$

wobei das Gleichheitszeichen dann und nur dann gilt, wenn $\mathfrak{K}_E$ homothetisch zu $\mathfrak{E}^*$ ist.

Der Beweis der Gleichheitsbedingung für die *äußere* MINKOWSKIsche Relativ-Oberfläche wurde von BUSEMANN ([6] Nr. 4) geführt. Weil wir mehrere der dort benutzten Schlüsse zur Diskussion des Gleichheitszeichens für die *innere* MINKOWSKIsche Relativ-Oberfläche ebenfalls nötig haben, soll der BUSEMANNsche Beweis hier kurz wiedergegeben werden. Dabei treten gewisse beim Beweis des BRUNN-MINKOWSKIschen Satzes übliche Abschätzungen auf.

Beweis der Gleichheitsbedingung für die isoperimetrische Ungleichung (3.3) der äußeren MINKOWSKIschen Relativ-Oberfläche:

Wir nehmen $n \geqslant 2$ an, verstehen unter $(Z_\varrho)_\eta$ den im Punkt (η, O) abgetragenen Raum (Z_ϱ) und benutzen die Abkürzungen

$$\mathfrak{k}_0(\eta) = \mathfrak{E} \cap (Z_\varrho)_\eta , \qquad \mathfrak{k}_1(\eta) = \mathfrak{K} \cap (Z_\varrho)_\eta ,$$
$$v_i(\eta) = | \mathfrak{k}_i(\eta) |_{n-1}$$
$$V_0 = | \mathfrak{E} |_n > 0 , \qquad V_1 = | \mathfrak{K} |_n > 0 .$$

Dann sind

$$\tau(\eta_i) \overset{\text{def}}{=} V_i^{-1} \int_{-\infty}^{\eta_i} v_i(u)\,du \tag{3.5}$$

monotone, absolut stetige Funktionen. Für sie setzen wir noch

$$\alpha_i \overset{\text{def}}{=} \sup\{\eta_i \mid \tau(\eta_i) = 0\}\,, \quad \beta_i \overset{\text{def}}{=} \inf\{\eta_i \mid \tau(\eta_i) = 1\}\,. \tag{3.6}$$

Weil nun $\mathfrak{E}$ ein konvexer Körper sein sollte, ist $\tau(\eta_0)$ für $\alpha_0 \leqslant \eta_0 \leqslant \beta_0$ sogar eine streng monotone, differenzierbare Funktion. Sie besitzt also eine Umkehrfunktion $\eta_0 = \eta_0(\tau)$ mit $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, die für $0 < \tau < 1$ wegen (3.5) und $v_0(\eta_0) > 0$ die Ableitung

$$\frac{d\eta_0}{d\tau} = V_0 v_0^{-1}(\eta_0(\tau)) \tag{3.7}$$

hat. Dann ist auch

$$\eta_0(\eta_1) \overset{\text{def}}{=} \eta_0(\tau(\eta_1)) \tag{3.8}$$

eine monotone, absolut stetige Funktion mit

$$\left.\begin{aligned} &\eta_0(\alpha_1) = \alpha_0 \\ \alpha_0 < \eta_0(\eta_1) &< \beta_0 \qquad \text{für } \eta_1 \in (\alpha_1, \beta_1) \\ &\eta_0(\beta_1) = \beta_0\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

und aus (3.7) sowie (3.5) folgt

$$\frac{d\eta_0}{d\eta_1} = \frac{V_0}{V_1}\,\frac{v_1(\eta_1)}{v_0(\eta_0(\eta_1))} \qquad \text{für fast alle} \qquad \eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1]\,. \tag{3.10}$$

Zuerst soll nun gezeigt werden, daß die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (3.3) stets

$$v_1(\eta_1) > 0 \quad \text{für} \quad \eta_1 \in (\alpha_1, \beta_1) \tag{3.11}$$

erfordert. Setzt man

$$\left.\begin{aligned} &\mathfrak{K}' = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{S}_{-\infty}^{\eta_1}\,, \qquad \mathfrak{K}'' = \mathfrak{K} \cap \mathfrak{S}_{\eta_1}^{\infty}\,, \\ &\mathfrak{s}_r' = (\mathfrak{K}' + r\mathfrak{E}) \cap (Z_\varrho)_{\eta_1}\,, \qquad \mathfrak{s}_r'' = (\mathfrak{K}'' + r\mathfrak{E}) \cap (Z_\varrho)_{\eta_1}\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

und bezeichnet man mit $\mathfrak{e}$ die Projektion von $\mathfrak{E}$ längs Y auf $(Z_\varrho)_0$, so ist $(\mathfrak{K}' + r\mathfrak{E}) \cap \mathfrak{S}_{\eta_1}^{\infty}$ bzw. $(\mathfrak{K}'' + r\mathfrak{E}) \cap \mathfrak{S}_{-\infty}^{\eta_1}$ in dem Zylinder mit der Basis $\mathfrak{s}_r' + r\mathfrak{e}$ bzw. $\mathfrak{s}_r'' + r\mathfrak{e}$ und der Höhe $\beta_0 r Y$ bzw. $|\alpha_0| r Y$ enthalten. Daher ist

$$|(\mathfrak{K}' + r\mathfrak{E}) \cap (\mathfrak{K}'' + r\mathfrak{E})|_n \leqslant r(\beta_0 \,|\, \mathfrak{s}_r' + r\mathfrak{e}\,|_{n-1} - \alpha_0 \,|\, \mathfrak{s}_r'' + r\mathfrak{e}\,|_{n-1})\,.$$

Aus $\mathfrak{K} + r\mathfrak{E} = (\mathfrak{K}' + r\mathfrak{E}) \cup (\mathfrak{K}'' + r\mathfrak{E})$ folgt deshalb

$$|\mathfrak{K} + r\mathfrak{E}|_n \geqslant |\mathfrak{K}' + r\mathfrak{E}|_n + |\mathfrak{K}'' + r\mathfrak{E}|_n - r(\beta_0 |\mathfrak{s}_r' + r\mathfrak{e}|_{n-1} - \alpha_0 |\mathfrak{s}_r'' + r\mathfrak{e}|_{n-1})$$

und wegen $|\mathfrak{K}|_n = |\mathfrak{K}'|_n + |\mathfrak{K}''|_n$ die Relation

$$\frac{|\mathfrak{K} + r\mathfrak{E}|_n - |\mathfrak{K}|_n}{r} \geqslant \frac{|\mathfrak{K}' + r\mathfrak{E}|_n - |\mathfrak{K}'|_n}{r} + \frac{|\mathfrak{K}'' + r\mathfrak{E}|_n - |\mathfrak{K}''|_n}{r} \tag{3.13}$$
$$- (\beta_0 |\mathfrak{s}_r' + r\mathfrak{e}|_{n-1} - \alpha_0 |\mathfrak{s}_r'' + r\mathfrak{e}|_{n-1}) .$$

Nun ist die abgeschlossene Menge $\mathfrak{k}_1(\eta_1) \subset \mathfrak{s}_r'$ und $\mathfrak{s}_r''$, was

$$\mathfrak{k}_1(\eta_1) = \bigcap_{r>0} (\mathfrak{s}_r' + r\mathfrak{e}) = \bigcap_{r>0} (\mathfrak{s}_r'' + r\mathfrak{e})$$

und

$$v_1(\eta_1) = \lim_{r \to +0} |\mathfrak{s}_r' + r\mathfrak{e}|_{n-1} = \lim_{r \to +0} |\mathfrak{s}_r'' + r\mathfrak{e}|_{n-1}$$

zur Folge hat. Dann ergibt sich aber aus (3.13) durch Grenzübergang $r \to +0$

$$f_+(\mathfrak{K}) \geqslant f_+(\mathfrak{K}') + f_+(\mathfrak{K}'') - (\beta_0 - \alpha_0) v_1(\eta_1) . \tag{3.14}$$

Weil für die Mengen $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ die isoperimetrische Ungleichung (3.3) gilt und für $\eta_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$ stets $|\mathfrak{K}'|_n > 0$, $|\mathfrak{K}''|_n > 0$ ist, erhält man

$$\left.\begin{aligned} f_+(\mathfrak{K}') + f_+(\mathfrak{K}'') &\geqslant n V_0^{\frac{1}{n}} (|\mathfrak{K}'|_n^{\frac{n-1}{n}} + |\mathfrak{K}''|_n^{\frac{n-1}{n}}) \\ &= n V_1^{\frac{n-1}{n}} V_0^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{|\mathfrak{K}'|_n}{V_1}\right)^{\frac{n-1}{n}} + \left(\frac{|\mathfrak{K}''|_n}{V_1}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] \\ &> n V_1^{\frac{n-1}{n}} V_0^{\frac{1}{n}} \left[\left(\frac{|\mathfrak{K}'|_n}{V_1} + \frac{|\mathfrak{K}''|_n}{V_1}\right) = n V_1^{\frac{n-1}{n}} V_0^{\frac{1}{n}} , \right. \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

also aus (3.14)

$$f_+(\mathfrak{K}) > n V_1^{\frac{n-1}{n}} V_0^{\frac{1}{n}} - (\beta_0 - \alpha_0) v_1(\eta_1) .$$

Für $v_1(\eta_1) = 0$ kann daher in (3.3) kein Gleichheitszeichen stehen, womit (3.11) bewiesen ist.

Die Funktion

$$\eta(\eta_1) \overset{\text{def}}{=} \eta_1 + r\eta_0(\eta_1) \tag{3.16}$$

ist in $[\alpha_1, \beta_1]$ streng monoton und absolut stetig. Daher sind die Mengen

$$\mathfrak{k}(\eta) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{k}_1(\eta_1) + r\mathfrak{k}_0(\eta_0(\eta_1)) \quad \text{für} \quad \eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$$

eindeutig bestimmt und genügen der Relation

$$\mathfrak{K} + r\mathfrak{E} \supset \bigcup_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(\beta_1)} \mathfrak{k}(\eta) ,$$

die zu der Abschätzung

$$|\mathfrak{K} + r\mathfrak{E}|_n \geqslant \int_{\eta(\alpha_1)}^{\eta(\beta_1)} |\mathfrak{k}(\eta)|_{n-1} d\eta \tag{3.17}$$

führt. In diesem Integral substituieren wir die Funktion (3.16) und wenden auf den Integranden den BRUNN-MINKOWSKIschen Satz an. Setzt man

$$\lambda(\eta_1) \overset{\text{def}}{=} \frac{v_0(\eta_0(\eta_1))}{v_1(\eta_1)} \quad \text{und} \quad V \overset{\text{def}}{=} \frac{V_0}{V_1}, \tag{3.18}$$

so folgt für fast alle $\eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$

$$\begin{aligned} |\mathfrak{k}(\eta)|_{n-1} \frac{d\eta}{d\eta_1} &\geqslant (v_1^{\frac{1}{n-1}} + r v_0^{\frac{1}{n-1}})^{n-1} \left(1 + r V \frac{v_1}{v_0}\right) \\ &= v_1(\eta_1)\,(1 + r\lambda^{\frac{1}{n-1}})^{n-1}(1 + r V \lambda^{-1}) \\ &= v_1(\eta_1)\,[1 + r((n-1)\lambda^{\frac{1}{n-1}} + V\lambda^{-1} + O(r))] \end{aligned}$$

und damit nach (3.17)

$$f_+(\mathfrak{K}) \geqslant \int_{\alpha_1}^{\beta_1} v_1(\eta_1)\,((n-1)\lambda^{\frac{1}{n-1}} + V\lambda^{-1})\,d\eta_1\,. \tag{3.19}$$

Jetzt benutzen wir die durch Differentiation leicht zu bestätigende Ungleichung

$$(n-1)\lambda^{\frac{1}{n-1}} + V\lambda^{-1} \geqslant n V^{\frac{1}{n}},$$

in der das Gleichheitszeichen nur für $\lambda = V^{\frac{n-1}{n}}$ gilt. Aus (3.19) erhält man dann

$$f_+(\mathfrak{K}) > n V_1^{\frac{n-1}{n}} V_0^{\frac{1}{n}},$$

außer wenn $\lambda(\eta_1) = V^{\frac{n-1}{n}}$ für fast alle $\eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ ist.

Die Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (3.3) hat daher nach (3.10)

$$\frac{d\eta_0}{d\eta_1} = V^{\frac{1}{n}} \quad \text{für fast alle} \quad \eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1],$$

also wegen der absoluten Stetigkeit von $\eta_0(\eta_1)$ sowie der Anfangsbedingung (3.9)

$$\eta_0(\eta_1) = V^{\frac{1}{n}} \cdot (\eta_1 - \alpha_1) + \alpha_0$$

zur Folge. Diese Funktion substituieren wir nun im Integral für die η-Koordinate des Schwerpunktes von $\mathfrak{E}$

$$\int_{\alpha_0}^{\beta_0} v_0(\eta_0)\eta_0 d\eta_0 = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} V^{\frac{n-1}{n}} v_1(\eta_1)[V^{\frac{1}{n}}(\eta_1 - \alpha_1) + \alpha_0]\,V^{\frac{1}{n}} d\eta_1\,.$$

Bringt man jetzt den Schwerpunkt der Menge $V^{\frac{1}{n}}\mathfrak{K}$ durch Translation mit dem von $\mathfrak{E}$ zur Inzidenz, so hat man weiter

$$= \int_{\alpha_1}^{\beta_1} V^{\frac{n-1}{n}} v_1(\eta_1)\,V^{\frac{1}{n}} \eta_1 V^{\frac{1}{n}} d\eta_1\,.$$

Daraus folgt aber $V^{\frac{1}{n}}\alpha_1 = \alpha_0$ und analog $V^{\frac{1}{n}}\beta_1 = \beta_0$, das heißt die wesentlichen Stützstreifen von $V^{\frac{1}{n}}\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E}$ in der Richtung $Z_1 \wedge \ldots \wedge Z_{n-1}$ sind identisch. Weil dies für jede solche Richtung gilt und $\mathfrak{E}$ als konvexer Körper der Durchschnitt seiner Stützstreifen ist, haben wir also $V^{\frac{1}{n}}\mathfrak{K}_E \subset \mathfrak{E}$. Nun würde zu einem Punkt $P \in C_{\mathfrak{E}}(V^{\frac{1}{n}}\mathfrak{K}_E)$ wegen der Abgeschlossenheit von $V^{\frac{1}{n}}\mathfrak{K}_E$ eine Umgebung $P + \varrho\mathfrak{E} \subset C(V^{\frac{1}{n}}\mathfrak{K}_E)$ existieren, für die wegen der Konvexität von $\mathfrak{E}$ jedenfalls $|(P + \varrho\mathfrak{E}) \cap \mathfrak{E}|_n > 0$ ist. Dann wäre $|V^{\frac{1}{n}}\mathfrak{K}_E|_n < V_0$, was aber offenbar ein Widerspruch ist. Also muß

$$V^{\frac{1}{n}}\mathfrak{K}_E = \mathfrak{E} \quad \text{und} \quad f_+(\mathfrak{K}_E) = n \cdot V_1^{\frac{n-1}{n}} V_0^{\frac{1}{n}}$$

sein. Hiermit haben wir als notwendige Bedingung für die Gleichheit in (3.3) schließlich die Homothetie von $\mathfrak{K}_E$ und $\mathfrak{E}$ sowie $f_+(\mathfrak{K}) = f_+(\mathfrak{K}_E)$ gefunden. Busemann weist in [6] S. 750 besonders darauf hin, daß diese letzte Gleichung nicht überflüssig ist.

Beweis der Gleichheitsbedingung für die isoperimetrische Ungleichung (3.4) der inneren Minkowskischen Relativ-Oberfläche:

Wir verfahren dabei in gewisser Analogie zu vorstehendem Beweis. Allerdings macht das Auftreten der Minkowskischen Differenz $\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*$ wesentlich schärfere Abschätzungen erforderlich. Wir nehmen wieder $n \geqslant 2$ an, bezeichnen mit $(Z_\varrho)_\eta$ den im Punkt (η, O) abgetragenen Raum (Z_ϱ) und verwenden folgende Abkürzungen

$$\mathfrak{k}_0(\eta) = \mathfrak{E}^* \cap (Z_\varrho)_\eta\,, \qquad \mathfrak{k}_1(\eta) = \mathfrak{K} \cap (Z_\varrho)_\eta\,,$$
$$v_i(\eta) = |\,\mathfrak{k}_i(\eta)\,|_{n-1}\,,$$
$$V_0 = |\,\mathfrak{E}^*\,|_n > 0\,, \qquad V_1 = |\,\mathfrak{K}\,|_n > 0\,.$$

Schließlich benutzen wir die von (3.5) bis (3.10) untersuchte Funktion $\eta_0(\eta_1)$.

Weiter wollen wir zeigen, daß bei Gültigkeit des Gleichheitszeichens in (3.4) zu hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ eine Konstante $A(\varepsilon)$ mit

$$v_1(\eta_1) > A(\varepsilon) > 0 \quad \text{für} \quad \eta_1 \in [\alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon] \tag{3.20}$$

existiert. Ist bei festem $\eta_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$ für alle $r > 0$ stets

$$(\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*) \cap (Z_\varrho)_{\eta_1} = \emptyset\,,$$

also

$$(Z_\varrho)_{\eta_1} \subset C(\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*) = C\mathfrak{K} + r\mathfrak{E}\,,$$

so folgt

$$(Z_\varrho)_{\eta_1} \subset \overline{C\mathfrak{K}}$$

und damit

$$(Z_\varrho)_{\eta_1} + r\mathfrak{E}^0 \subset \overline{C\mathfrak{K}} + r\mathfrak{E}^0 = C\mathfrak{K} + r\mathfrak{E} = C(\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*) . \tag{3.21}$$

Andererseits besteht die Menge $\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*$ aus allen Punkten P, für die $P + r\mathfrak{E}^* \subset \mathfrak{K}$. Dann ist mit der Bezeichnung von (3.12) entweder $P + r\mathfrak{E}^* \subset \mathfrak{K}'$ oder $P + r\mathfrak{E}^* \subset \mathfrak{K}''$ oder $P \in (\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*) \cap ((Z_\varrho)_{\eta_1} + r\mathfrak{E}^0)$ Letzteres ist jedoch nach (3.21) ausgeschlossen, so daß

$$\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^* = (\mathfrak{K}' - r\mathfrak{E}^*) \cup (\mathfrak{K}'' - r\mathfrak{E}^*)$$

und daher

$$f_-(\mathfrak{K}) \geqslant f_-(\mathfrak{K}') + f_-(\mathfrak{K}'')$$

folgt. Die rechte Seite dieser Ungleichung kann man nun analog zu (3.15) abschätzen, was

$$f_-(\mathfrak{K}) > n\, V_1^{\frac{n-1}{n}}\, V_0^{\frac{1}{n}}$$

ergibt. Wenn also in der isoperimetrischen Ungleichung das Gleichheitszeichen stehen soll, muß bei festem $\eta_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$ und geeignetem $r > 0$ ein Punkt

$$P \in (\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*) \cap (Z_\varrho)_{\eta_1}$$

existieren. Dann ist aber

$$P + r\mathfrak{E}^* \subset \mathfrak{K}$$

und somit

$$v_1(\eta_1) \geqslant \varliminf_{\Delta\eta_1 \to 0} v_1(\eta_1 + \Delta\eta_1) > 0 \quad \text{für} \quad \eta_1 \in (\alpha_1, \beta_1) .$$

Für ein genügend kleines $\varepsilon > 0$ gibt es also eine Konstante mit der Eigenschaft (3.20), nämlich $A(\varepsilon) = \inf \{v_1(\eta_1) \mid \eta_1 \in [\alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon]\}$.

Die zur Substitution benötigte Funktion

$$\eta(\eta_1) \overset{\text{def}}{=} \eta_1 - r\eta_0(\eta_1) \tag{3.22}$$

ist nun zwar für $\eta_1 \in [\alpha_1, \beta_1]$ absolut stetig, muß aber nicht notwendig monoton sein. Diese Schwierigkeit kann umgangen werden, indem wir zeigen, daß die Funktion in jedem Teilintervall $[\alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon]$ wächst, wenn nur r hinreichend klein ist. Sei nämlich $\eta_1, \eta_1 + \Delta\eta_1 \in [\alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon]$ mit $\Delta\eta_1 > 0$, so erhält man aus (3.22)

$$\eta(\eta_1 + \Delta\eta_1) - \eta(\eta_1) = \Delta\eta_1 - r\,[\eta_0(\tau(\eta_1 + \Delta\eta_1)) - \eta_0(\tau(\eta_1))] ,$$

wegen der Differenzierbarkeit von $\eta_0(\tau)$ aus (3.7)

$$= \Delta\eta_1 - r\, V_0 v_0^{-1}(\eta_0(\bar{\tau}))\, [\tau(\eta_1 + \Delta\eta_1) - \tau(\eta_1)] \quad \text{mit} \quad 0 < \bar{\tau} < 1$$

und nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$= \Delta\eta_1 (1 - r V_0 v_0^{-1}(\eta_0(\bar{\tau})) \cdot \mu) \quad \text{mit} \quad \mu < B = \text{const.}$$

Nun ist $v_0(\eta_0(\eta_1)) > 0$ und stetig für $\eta_1 \in (\alpha_1, \beta_1)$, also gibt es eine Zahl $C(\varepsilon)$ mit

$$0 < C(\varepsilon) < v_0(\eta_0(\eta_1)) \quad \text{für} \quad \eta_1 \in [\alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon] .$$

Dann ist aber die Funktion (3.22) im Intervall $[\alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon]$ mit $\varepsilon > 0$ wachsend, wenn

$$r < \frac{C(\varepsilon)}{V_0 B}$$

gewählt wird.

Wir geben jetzt $\varepsilon > 0$ so vor, daß

$$\eta_0(\alpha_1 + \varepsilon) < 0 < \eta_0(\beta_1 - \varepsilon) \tag{3.23}$$

ist, und beschränken uns auf positive Werte

$$r < \operatorname{Min}\left(\left(\frac{A(\varepsilon)}{D}\right)^{\frac{1}{n-1}}, \quad \frac{C(\varepsilon)}{V_0 B}, \quad \frac{\varepsilon}{|\alpha_0|}, \quad \frac{\varepsilon}{\beta_0}\right), \tag{3.24}$$

wobei D eine obere Schranke für $v_0(\eta_0)$ sein möge. Dann ist im Intervall $[\alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon]$ einerseits nach (3.20)

$$0 < v_1^{\frac{1}{n-1}}(\eta_1) - r v_0^{\frac{1}{n-1}}(\eta_0(\eta_1)) \tag{3.25}$$

und andererseits die Substitutionsfunktion (3.22) streng monoton. Letzteres ermöglicht die eindeutige Definition der Mengen

$$\mathfrak{k}(\eta) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{k}_1(\eta_1) - r\mathfrak{k}_0(\eta_0(\eta_1)) \quad \text{für} \quad \eta_1 \in [\alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon] ,$$

die der Relation

$$\mathfrak{S}_{\eta(\alpha_1+\varepsilon)}^{\eta(\beta_1-\varepsilon)} \cap (\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*) \subset \bigcup_{\eta(\alpha_1+\varepsilon)}^{\eta(\beta_1-\varepsilon)} \mathfrak{k}(\eta) \tag{3.26}$$

genügen. Ist nämlich (η, z^ϱ) ein Punkt der links stehenden Menge, so korrespondiert dem $\eta \in [\eta(\alpha_1 + \varepsilon), \eta(\beta_1 - \varepsilon)]$ vermöge (3.22) eindeutig ein $\eta_1 \in [\alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon]$, und es ist

$$(\eta, z^\varrho) + r\mathfrak{k}_0(\eta_0(\eta_1)) \in (Z_\varrho)_{\eta_1} .$$

Zum anderen gilt

$$(\eta, z^\varrho) + r\mathfrak{k}_0(\eta_0(\eta_1)) \subset (\eta, z^\varrho) + r\mathfrak{E}^* \subset \mathfrak{K}$$

also

$$(\eta, z^\varrho) + r\mathfrak{k}_0(\eta_0(\eta_1)) \subset \mathfrak{K} \cap (Z_\varrho)_{\eta_1} = \mathfrak{k}_1(\eta_1) ,$$

was die Relation (3.26) bestätigt. Aus ihr folgt jetzt die Abschätzung

$$|\mathfrak{S}_{\eta(\alpha_1+\varepsilon)}^{\eta(\beta_1-\varepsilon)} \cap (\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*)|_n \leqslant \int_{\eta(\alpha_1+\varepsilon)}^{\eta(\beta_1-\varepsilon)} |\mathfrak{k}(\eta)|_{n-1} d\eta .$$

In diesem Integral substituieren wir die Funktion (3.22) und wenden auf den Integranden das Spiegeltheorem zum BRUNN-MINKOWSKIschen Satz an, was wegen (3.25) möglich ist. Mit den Abkürzungen (3.18) erhält man dann für fast alle $\eta_1 \in [\alpha_1 + \varepsilon, \beta_1 - \varepsilon]$

$$\begin{aligned} |\mathfrak{k}(\eta)|_{n-1} \frac{d\eta}{d\eta_1} &\leqslant (v_1^{\frac{1}{n-1}} - r v_0^{\frac{1}{n-1}})^{n-1} \left(1 - r V \frac{v_1}{v_0}\right) \\ &= v_1(\eta_1)\,(1 - r\lambda^{\frac{1}{n-1}})^{n-1}(1 - r V \lambda^{-1}) \\ &= v_1(\eta_1)\,[1 - r((n-1)\lambda^{\frac{1}{n-1}} + V\lambda^{-1} + O(r))]\,, \end{aligned}$$

also

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\left(|\mathfrak{S}_{\alpha_1+\varepsilon}^{\beta_1-\varepsilon} \cap \mathfrak{K}|_n - |\mathfrak{S}_{\eta(\alpha_1+\varepsilon)}^{\eta(\beta_1-\varepsilon)} \cap (\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*)|_n\right) \\ &\quad \geqslant \int_{\alpha_1+\varepsilon}^{\beta_1-\varepsilon} v_1(\eta_1)\,((n-1)\lambda^{\frac{1}{n-1}} + V\lambda^{-1})\,d\eta_1 + O(r)\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Für die weiteren Abschätzungen beachten wir, daß nach (3.24) und (3.23)

$$\begin{aligned} \alpha_1 < \eta(\alpha_1) = \alpha_1 - r\alpha_0 < \alpha_1 + \varepsilon < \eta(\alpha_1 + \varepsilon) < \\ \eta(\beta_1 - \varepsilon) < \beta_1 - \varepsilon < \beta_1 - r\beta_0 = \eta(\beta_1) < \beta_1 \end{aligned}$$

ist und $\eta(\alpha_1), \eta(\beta_1)$ wegen (3.2) die extremalen η-Koordinaten von $\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*$ darstellen. Aus (3.27) ergibt sich nun die Ungleichung

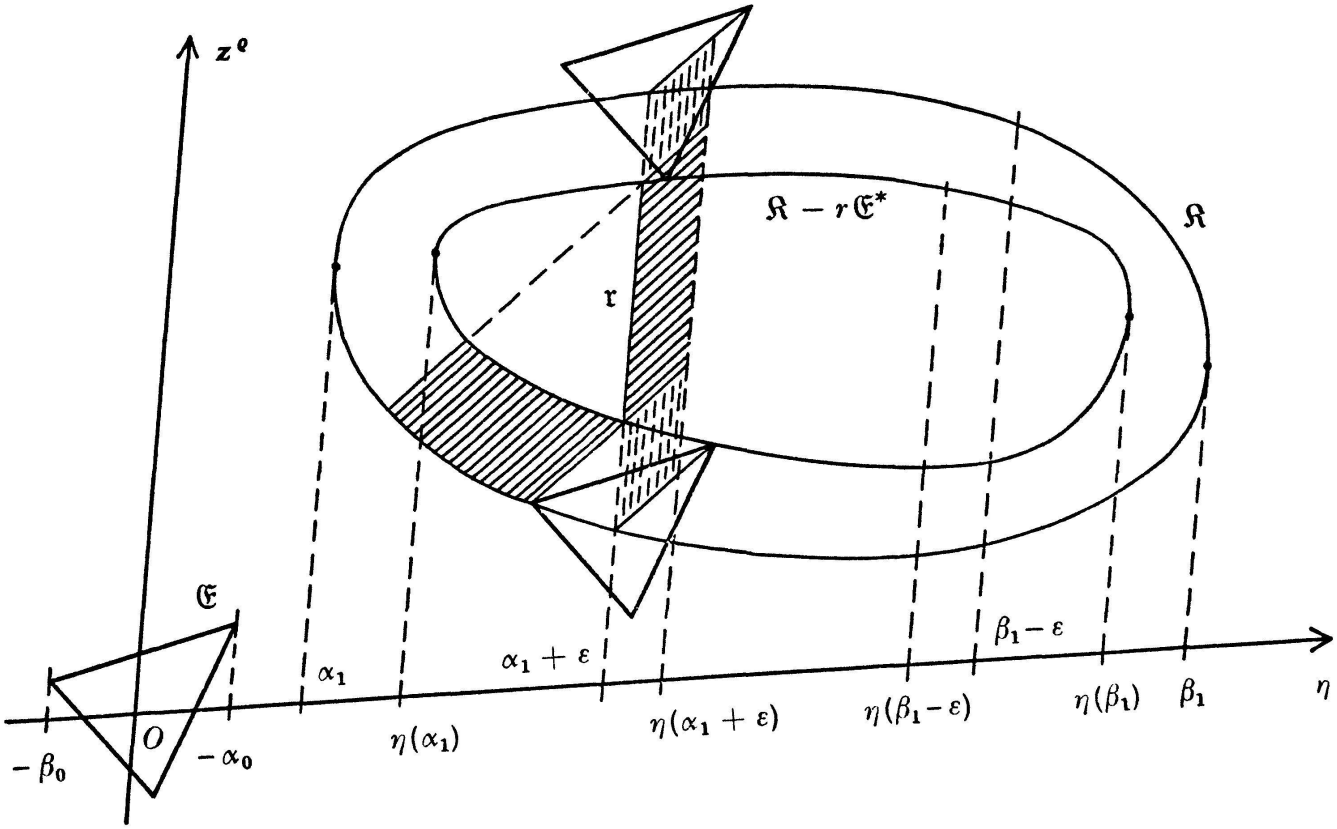
$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r}\left(|\mathfrak{K}|_n - |\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*|_n\right) \\ &\quad \geqslant \frac{1}{r}\,|\mathfrak{S}_{\alpha_1}^{\alpha_1+\varepsilon} \cap C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*)|_n - \frac{1}{r}\,|\mathfrak{S}_{\alpha_1+\varepsilon}^{\eta(\alpha_1+\varepsilon)} \cap (\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*)|_n \\ &\quad + \int_{\alpha_1+\varepsilon}^{\beta_1-\varepsilon} v_1(\eta_1)\,((n-1)\lambda^{\frac{1}{n-1}} + V\lambda^{-1})\,d\eta_1 + O(r) \\ &\quad + \frac{1}{r}\,|\mathfrak{S}_{\beta_1-\varepsilon}^{\beta_1} \cap C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*)|_n - \frac{1}{r}\,|\mathfrak{S}_{\eta(\beta_1-\varepsilon)}^{\beta_1-\varepsilon} \cap (\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*)|_n\,, \end{aligned}\right\} \tag{3.28}$$

in der wir noch die neben dem Integral auftretenden Größen abschätzen müssen. Dafür setzen wir zur Abkürzung

$$\mathfrak{r}(\eta) \overset{\text{def}}{=} (\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*) \cap (Z_\varrho)_\eta \subset \mathfrak{R}(\eta) \overset{\text{def}}{=} \mathfrak{K}^0 \cap (Z_\varrho)_\eta$$

und bezeichnen mit A_0 bzw. B_0 den Vektor von O nach einem Punkt von $\mathfrak{E}$ mit der extremalen η-Koordinate $-\alpha_0$ bzw. $-\beta_0$. Zu dem Zylinder mit der Basis $\mathfrak{r}(\alpha_1 + \varepsilon)$ und der Höhe $r\dfrac{\eta_0(\alpha_1 + \varepsilon)}{\alpha_0} A_0$ gibt es dann eine Teilmenge von $\mathfrak{S}_{\alpha_1}^{\alpha_1+\varepsilon} \cap C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*)$ mit größerem Maß. Nach Konstruktion von $\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*$ muß nämlich jede Gerade durch einen Punkt von $\mathfrak{r}(\alpha_1 + \varepsilon)$ mit

der Richtung A_0 die Menge $\mathfrak{S}_{\alpha_1}^{\alpha_1+\varepsilon} \cap C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*)$ mindestens in einer Strecke rA_0 schneiden, woraus wegen $0 < \dfrac{\eta_0(\alpha_1+\varepsilon)}{\alpha_0} < 1$ die Behauptung folgt. Andererseits muß aber der außerhalb des genannten Zylinders liegende



Teil von $\mathfrak{S}_{\alpha_1+\varepsilon}^{\eta(\alpha_1+\varepsilon)} \cap (\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*)$ in dem Ringzylinder mit der Basis $C_{\mathfrak{K}(\alpha_1+\varepsilon)}\mathfrak{r}(\alpha_1+\varepsilon)$ und derselben Höhe $r\,\dfrac{\eta_0(\alpha_1+\varepsilon)}{\alpha_0}A_0$ enthalten sein. Dieser Ringzylinder besitzt das Maß

$$(|\,\mathfrak{K}(\alpha_1+\varepsilon)\,|_{n-1} - |\,\mathfrak{r}(\alpha_1+\varepsilon)\,|_{n-1})\,r\,|\,\eta_0(\alpha_1+\varepsilon)\,| = rO(r)\,.$$

Die ersten beiden Terme der rechten Seite von (3.28) sind also $\geqslant O(r)$, was ganz analog auch für die beiden letzten Glieder dieser Ungleichung folgt. Damit erhält man aus (3.28) durch Bildung des unteren Limes für $r \to +0$ und nachfolgendem Grenzübergang $\varepsilon \to +0$

$$f_-(\mathfrak{K}) \geqslant \int_{\alpha_1}^{\beta_1} v_1(\eta_1)\,((n-1)\lambda^{\frac{1}{n-1}} + V\lambda^{-1})\,d\eta_1\,.$$

Diese Relation ermöglicht nun dieselbe Schlußweise, wie wir sie im Anschluß an die entsprechende Ungleichung (3.19) durchgeführt haben. Als notwendige Bedingung für die Gleichheit in (3.4) ergibt sich dann wegen (3.1c) die Homothetie von $\mathfrak{K}_E$ und $\mathfrak{E}^*$, was zu zeigen war.

Wir wollen nicht versäumen, die Gleichheitsbedingung des BRUNN-MINKOWSKIschen Satzes analog zu DINGHAS-SCHMIDT [8] und BUSEMANN [6] aus der Gleichheitsbedingung für die isoperimetrische Ungleichung (3.3) herzuleiten. Diese Schlußweise läßt sich nämlich auch auf das Spiegeltheorem zum BRUNN-MINKOWSKIschen Satz und die isoperimetrische Ungleichung (3.4) übertragen.

Beweis der Gleichheitsbedingung des BRUNN-MINKOWSKIschen Satzes (vgl. Nr. 1): Unserer jetzigen Schreibweise entsprechend hat diese Ungleichung die Gestalt

$$|\mathfrak{K} + r\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}} \geqslant |\mathfrak{K}|_n^{\frac{1}{n}} + r\,|\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}}. \tag{3.29}$$

Wählt man $0 < r' < r$, so ist

$$\mathfrak{K} + r\mathfrak{E} = (\mathfrak{K} + r'\mathfrak{E}) + (r - r')\mathfrak{E}$$

und daher

$$\begin{aligned} |\mathfrak{K} + r\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}} &\geqslant |\mathfrak{K} + r'\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}} + (r - r')\,|\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}} \\ &\geqslant |\mathfrak{K}|_n^{\frac{1}{n}} + r'\,|\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}} + (r - r')\,|\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}} = |\mathfrak{K}|_n^{\frac{1}{n}} + r\,|\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Wenn also in der BRUNN-MINKOWSKIschen Ungleichung (3.29) für r das Gleichheitszeichen steht, so muß es dort für jedes $r' < r$ und damit auch in der isoperimetrischen Ungleichung (3.3) gelten. Dies hat aber die Homothetie von $\mathfrak{K}_E$ und $\mathfrak{E}$ zur Folge. Existiert ein Punkt $P \in C_{\mathfrak{K}}(\mathfrak{K}_E)$, so wird er durch eine Stützhyperebene an $\mathfrak{K}_E$ von dieser Menge getrennt, weshalb

$$|\mathfrak{K} + r\mathfrak{E}|_n > |\mathfrak{K}_E + r\mathfrak{E}|_n \geqslant (|\mathfrak{K}|_n^{\frac{1}{n}} + r\,|\mathfrak{E}|_n^{\frac{1}{n}})^n$$

ist. Aus der Gleichheit in (3.29) folgt also noch $\mathfrak{K}_E = \mathfrak{K}$. Daher haben wir als notwendige Gleichheitsbedingung für den BRUNN-MINKOWSKIschen Satz die Homothetie von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{E}$, was offenbar auch hinreichend ist.

Beweis der Gleichheitsbedingung des Spiegeltheorems zum BRUNN-MINKOWSKIschen Satz (vgl. Nr. 1): Die Ungleichung hat jetzt die Form

$$|\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*|_n^{\frac{1}{n}} \leqslant |\mathfrak{K}|_n^{\frac{1}{n}} - r\,|\mathfrak{E}^*|_n^{\frac{1}{n}}. \tag{3.30}$$

Aus $0 < r' < r$ folgt

$$\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^* = (\mathfrak{K} - r'\mathfrak{E}^*) - (r - r')\mathfrak{E}^*$$

und somit, wenn diese Menge nicht leer ist,

$$|\mathfrak{K} - r\mathfrak{E}^*|_n^{\frac{1}{n}} \leqslant |\mathfrak{K} - r'\mathfrak{E}^*|_n^{\frac{1}{n}} - (r - r')\,|\mathfrak{E}^*|_n^{\frac{1}{n}}$$
$$\leqslant |\mathfrak{K}|_n^{\frac{1}{n}} - r'\,|\mathfrak{E}^*|_n^{\frac{1}{n}} - (r - r')\,|\mathfrak{E}^*|_n^{\frac{1}{n}} = |\mathfrak{K}|_n^{\frac{1}{n}} - r\,|\mathfrak{E}^*|_n^{\frac{1}{n}}.$$

Sobald also in der Spiegelungleichung (3.30) für r Gleichheit besteht, muß sie dort für jedes $r' < r$ und folglich in der isoperimetrischen Ungleichung (3.4) gelten. Als notwendige Gleichheitsbedingung für das Spiegeltheorem ergibt sich deshalb die Homothetie von $\mathfrak{K}_E$ und $\mathfrak{E}^*$, was wegen (3.2) auch hinreichend ist.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. Barthel, *Zum* Busemann*schen und* Brunn-Minkowski*schen Satz.* Math. Z. *70*, 407–429 (1959).

[2] L. Bieberbach, *Über eine Extremaleigenschaft des Kreises.* Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. *24*, 247–250 (1915).

[3] W. Blaschke, *Kreis und Kugel.* Leipzig 1916.

[4] T. Bonnesen und W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper.* Berlin 1934.

[5] H. Busemann, *Intrinsic area.* Ann. of Math. *48*, 234–267 (1947).

[6] H. Busemann, *The isoperimetric problem for* Minkowski *area.* Amer. J. Math. *71*, 743–762 (1949).

[7] A. Dinghas, *Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum.* S.-Ber. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturw. Kl. IIa *149*, 399–432 (1940).

[8] A. Dinghas und E. Schmidt, *Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum.* Abh. Preuß. Akad. Wiss. 1943, Math.-naturw. Kl. *7*, 3–18 (1944).

[9] H. Hadwiger, Minkowski*sche Addition und Subtraktion beliebiger Punktmengen und die Theoreme von* Erhard Schmidt. Math. Z. *53*, 210–218 (1950).

[10] H. Hadwiger, *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie.* Berlin 1957.

[11] H. Hadwiger und D. Ohmann, Brunn-Minkowski*scher Satz und Isoperimetrie.* Math. Z. *66*, 1–8 (1956).

[12] T. Kubota, *Über konvex-geschlossene Mannigfaltigkeiten im n-dimensionalen Raume.* Sci. Rep. Tôhoku Univ. *14*, 85–99 (1925).

[13] Erhard Schmidt, *Die* Brunn-Minkowski*sche Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie I, II.* Math. Nachr. *1*, 81–157 (1948) und *2*, 171–244 (1949).

[14] W. Süss, *Ein Satz von* Urysohn *über mehrdimensionale Eikörper.* Tôhoku Math. J. *35*, 326–328 (1932).

[15] P. Urysohn, *Mittlere Breite und Volumen der konvexen Körper im n-dimensionalen Raume.* (Russisch.) Rec. Math. Soc. math. Moscou *31*, 477–486 (1924).

(Eingegangen den 1. August 1958)